TECHNISCHE HOCHSCHULE MITTELHESSEN

STUDIUM PLUS DUALES STUDIUM

Klausurvorleistung 2
„Mathematik für Informatiker 1" – WS 25/26

Name:________________________ Vorname: ________________________

Matrikelnummer: _____________

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	(A7)	Summe
Mögliche Punktzahl	1	1	1	1	1	1	1	7
Erreichte Punktzahl								

Studiengang: Softwaretechnologie

Semester: 1.

Abgabetermin: 13.01.2026

Lehrveranstaltung: Mathematik für Informatiker 1 (Wetzlar)

Dozent: Prof. Dr. Harald Ritz

Allgemeine Hinweise:

- Jede Aufgabe wird als „bearbeitet" (1 Punkt) bzw. „nicht bearbeitet" (0 Punkte) bewertet. Um als „bearbeitet" bewertet zu werden, muss eine weitgehend richtige Lösung der gesamten Aufgabe vorliegen. Aufgabe 7 ist eine freiwillige Zusatzaufgabe, da erst im Januar behandelt.
- Zum Bestehen der „Klausurvorleistung 2" sind mindestens 50% vonnöten, d.h. 3 Punkte.
- Bitte geben Sie dieses Deckblatt sowie ihre handschriftlichen Lösungsblätter zusammengeheftet zum o.g. Abgabetermin zum Vorlesungsbeginn ab.
- Nach der Abgabe aller Studierenden steht Ihnen ein Lösungsvorschlag in moodle zur Verfügung.
- … und bitte noch an dieser „kleinen Umfrage" teilnehmen:

✂-------✂-------✂-------✂-------✂-------✂-------✂-------✂-------✂-------

- Wie herausfordernd war für Sie diese 2. Klausurvorleistung?
  - Oje… sehr, sehr schwer ☹
  - Müsste reichen…
  - Reicht wohl gut …
  - Supereasy… 😉
- Ihr Freitext-Kommentar:

  ____

Aufgabenblatt: Klausurvorleistung 2

Aufgabe 1:

Vektorräume 1

Betrachtet werden die beiden Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das Skalarprodukt $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ und geben Sie an, ob die Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ orthogonal sind.

b) Bestimmen Sie die Norm der Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Aufgabe 2:

Vektorräume 2

Untersuchen Sie jeweils, ob die gegebenen Vektoren linear unabhängig sind:

a) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

c) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3:

Matrizen 1

a) Berechnen Sie für die drei 2×3-Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

die beiden Terme $3\mathbf{A} + 2\mathbf{B} - 5\mathbf{C}$ und $2(\mathbf{A} - 2\mathbf{B}) - 3(\mathbf{B}^T - \mathbf{A}^T)^T - 2\mathbf{C}$.

b) Bestimmen Sie alle 2×2-Matrizen $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, deren Produkt mit der 2×2-Matrix

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ kommutativ ist, also $\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{B}\,\mathbf{A}$ gilt.

Aufgabe 4:

Lineare Gleichungssysteme

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \phantom{{}+x_5} + x_6 &= 1 \\
- 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 2 \\
- x_2 - 2x_4 + x_5 &= -2 \\
x_1 - x_4 + x_6 &= -1
\end{aligned}$$

a) Erläutern Sie kurz, ob es sich um ein homogenes oder um ein inhomogenes lineares Gleichungssystem handelt und ob der Nullvektor eine Lösung dieses linearen Gleichungssystems ist.

b) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem in Matrixschreibweise sowie als erweiterte Koeffizientenmatrix dar.

c) Bestimmen Sie den Lösungsbereich dieses linearen Gleichungssystems.

Aufgabe 5:

Rang, Determinante und Inverse

Gegeben sei die 2×2-Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 5 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Welchen Rang besitzt $\mathbf{A}$, falls $\det(\mathbf{A}) = 0$ gilt?

b) Für welche Werte von a gilt $\det(\mathbf{A}) = 0$?

c) Für welche Werte von a besitzt $\mathbf{A}$ eine Inverse?

d) Geben Sie die Inverse von $\mathbf{A}$ in Abhängigkeit von a an.

Aufgabe 6:

Determinante

Gegeben sei die 5×5-Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Determinante von $\mathbf{A}$ mit dem Entwicklungssatz von Laplace.

b) Ermitteln Sie die Determinante von $\mathbf{A}$ durch Umformung zu einer oberen Dreiecksmatrix mittels Zeilenumformungen.

Aufgabe 7 - freiwillige Zusatzaufgabe

Eigenwerte und Eigenvektoren

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\mathbf{A}$.

b) Berechnen Sie die Eigenvektoren von $\mathbf{A}$.

c) Ermitteln Sie die Determinante von $\mathbf{A}$.