

# ZEITSCHRIFT DES VEREINES DEUTSCHER INGENIEURE.

Nr. 29.

Sonnabend, den 16. Juli 1898.

Band XXXXII.

## Inhalt:

Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre. Von Kirsch. . . . .	797	Verein für Eisenbahnkunde . . . . .	814
Die elektrische Kraft- und Lichtanlage in der Buchdruckerei von Rudolf Mosse in Berlin. Von B. Stein . . . . .	807	Patentbericht: Nr. 97418, 98010, 97119, 97504, 97346, 97597, 97425, 97589, 98050, 98248, 97337, 97691, 97305, 97406, 97370, 97218, 97220 . . . . .	814
Verbunddampfmaschine von 1500 PS, gebaut von der A.-G. Görlitzer Maschinenbau-Anstalt und Eisengiesserei in Görlitz (hierzu Tafel X und Textblatt 6) . . . . .	811	Bücherschau: Traité élémentaire de Mécanique chimique fondée sur la Thermodynamique. Von P. Duhem . . . . .	816
Lenne-B.-V. . . . .	811	Zeitschriftenschau . . . . .	816
Thüringer B.-V. . . . .	811	Vermischtes: Rundschau . . . . .	817
Württembergischer B.-V.: Wasserröhrenkessel, mit besonderer Berücksichtigung des Steinmüller-Kessels.—Verdampfungsversuch mit hohem Nutzeffekt . . . . .	811	Zuschriften an die Redaktion: Studie über das Bachsche Gesetz $\varepsilon = \alpha \sigma^m$ . — Zweiter Beitrag zur Theorie der Kuppel- (und Turm-) Dächer . . . . .	818
		Angelegenheiten des Vereines . . . . .	820

(hierzu Tafel X und Textblatt 6)

## Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre.

Von Regierungsrat Dr. Kirsch, Chemnitz.

(Vorgetragen in der 39. Hauptversammlung des Vereines deutscher Ingenieure zu Chemnitz am 8. Juni 1898.)

»Hochgeehrte Versammlung! Elastizität und Festigkeit der in der Technik Verwendung findenden Körper sind zwei für den Ingenieur so wichtige Begriffe, dass wir nicht überrascht sein können, sie schon in sehr frühen Zeiten zum Gegenstand wissenschaftlicher Betrachtung gemacht zu sehen. Anfänglich genügte es, die einzelnen Körper nach dem höheren oder geringeren Grade ihrer Elastizität oder ihrer Festigkeit in Reihen zu ordnen, wie wir dies auch heutzutage noch mit dem verwandten Begriffe der Härte zu thun pflegen; später aber mit der zunehmenden Verbesserung der mathematischen Hilfsmittel und unter dem Drucke der sich stetig steigernden Ansprüche an eine möglichst hohe wirtschaftliche Ausnutzung der Rohstoffe bei ihrer Verwendung zu technischen Zwecken lernte man allmählich tiefer in das wahre Wesen der genannten Begriffe eindringen.

Am ersten zur Entwicklung gelangte die Theorie der Elastizität, weil bei ihr die Fragestellung möglichst einfach ausfiel: man beschränkte sich auf unmerklich kleine Formänderungen und nahm für diese die Proportionalität zwischen Formänderungen und elastischen Kräften als allgemein gültig an; und dies mit vollem Rechte, denn die einzige gemeinsame Eigenschaft, welche sich überall erkennen lässt, wenn sie auch zuweilen durch Sondereigenschaften abgeschwächt wird, ist tatsächlich diese Proportionalität, sodass in ihr das entscheidende Merkmal der vollkommenen Elastizität erblickt werden muss.

Gleichgültig nun, ob es in der Welt der wirklichen Dinge solche vollkommen elastische Körper giebt oder nicht, für den Mathematiker haben sie dieselbe Daseinsberechtigung und denselben Anspruch auf Beachtung, wie etwa die gerade Linie oder die Ebene in der Geometrie, denen ebenfalls kein Gebilde der Wirklichkeit genau entspricht, ohne dass jemand hieran Anstoß nimmt. Im Gegenteil, dem Umstande, dass es auf diese Weise möglich wurde, den Begriff eines elastischen Körpers mit der vollen abstrakten Klarheit und Allgemeinheit einer geometrischen Größe zu definieren, haben wir es zu danken, dass so bedeutende Denker wie Bernoulli, Euler, Gauss und andere schon frühzeitig angeregt wurden, sich solchen in das Gebiet der Technik hinüberneigenden Betrachtungen zuzuwenden; ihnen folgte von da ab bis auf die neueste Zeit herab eine zahllose Reihe hervorragender Mathematiker, welche die Theorie der vollkommenen Elastizität bis zu einem ungeahnten Grade der Vollendung förderten.

Der unmittelbare Nutzen, welchen diese zumteil genialen mathematischen Leistungen für die Technik erbracht haben, ist verhältnismäßig nur gering gewesen und hat sich im wesentlichen darauf beschränkt, die Kenntnis der Spannungsverteilung in einem belasteten Körper zu erweitern oder

früher in dieser Hinsicht herrschende unrichtige Vorstellungen zu beseitigen, wie beispielsweise inbetreff der Spannungen eines auf Drehung beanspruchten Stabes; anderes werden wir auch in der Folge kaum von der mathematischen Elastizitätstheorie erwarten dürfen, da sie gar nicht den Anspruch erhebt, den Zusammenhang zwischen Spannungen und Formänderungen bis zu dem in den Augen des Technikers kritischen Punkte, dem Bruche, verfolgen zu wollen. Trotzdem sind die Aufschlüsse, welche wir von dieser rein mathematischen Seite her noch zu gewärtigen haben, im höchsten Grade wertvoll und unentbehrlich, da noch viele recht schwierige Punkte der Aufklärung harren, wie beispielsweise die Frage nach der Spannungsverteilung in der unmittelbaren Umgebung des Berührungspunktes zweier beliebig gestalteter, mit gegebener Kraft auf einander drückender Körper, eine Frage, welche von dem leider zu früh verstorbenen Hertz zumteil gelöst wurde und zur Herleitung eines absoluten Maßes für den Härtegrad der Körper dienen sollte.

Ungleich langsamer als in der Theorie der Elastizität waren die Fortschritte in der Erkenntnis der Festigkeit, weil das Wesen dieser Eigenschaft sich nicht durch einen einfachen mathematischen Ausdruck darstellen lässt, selbst wenn man wie bei der Elastizität einen idealen Zustand des vollkommen gleichartigen Verhaltens aller Körper von gleichem Stoffe voraussetzen wollte. Die einzige den Mathematiker befriedigende Vorstellung von der Festigkeit konnte doch immer nur diese sein: Da ein fadenförmiger Körper reißt, wenn seine Dehnung einen gewissen Grenzwert erreicht, so muss der Bruch im Innern eines beliebig belasteten Körpers in dem Augenblicke beginnen, in welchem an irgend einer Stelle desselben in irgend einer Richtung eine jenem Grenzwert gleichkommende Dehnung eintritt. Nach dieser Auffassung läuft aber die Frage der Festigkeit einfach hinaus auf eine Frage der Spannungsverteilung in einem vollkommen elastischen Körper, ist also in den Augen des Mathematikers als gelöst zu betrachten und hört damit auf, ein weiteres Interesse für ihn zu besitzen.

Uebereinstimmend hiermit war auch die Ansicht der Ingenieure bis um die Mitte des laufenden Jahrhunderts; der mächtige Aufschwung aber, den jetzt plötzlich die Entwicklung des Maschinen- und Eisenbahnwesens und im Zusammenhange damit die Verwendung des Eisens zu Bauwerken von vorher ungeahnter Größe nahm, drängte unabweisbar darauf hin, das Maß der Festigkeit nicht bloß nach jenem abstrakten Schema zu beurteilen, sondern genauer auf die den Bruch bedingenden besonderen Umstände einzugehen; denn was früher ein harmloser Luxus war, die Abmessungen

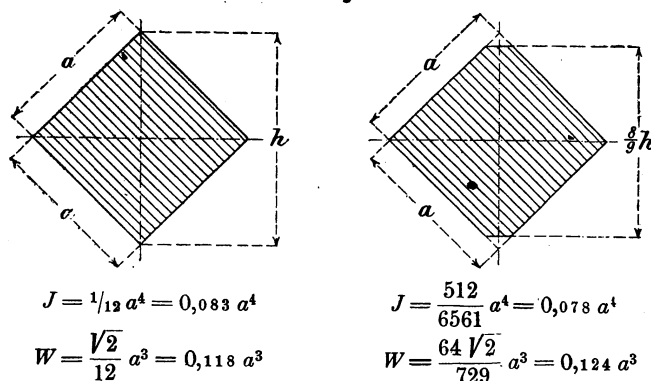
einer Eisenkonstruktion im Zweifelsfalle etwas reichlich zu bemessen, das wurde jetzt unter den hundertfach vergrößerten Verhältnissen eine Vergeudung, die den erfolgreichen Wettbewerb in dem allgemeinen wirtschaftlichen Wettkampfe unmöglich gemacht hätte. So sehen wir denn immer weitere Kreise die veraltete Vorstellung von der Festigkeit verlassen und von allen Seiten Beobachtungsmaterial anhäufen, um sich auf dieser Grundlage zu einer zutreffenderen Auffassung hindurchzuarbeiten. Unter den zahlreichen Männern, welche in dieser Richtung Hervorragendes geleistet haben, mögen in erster Linie Wöhler und Bach genannt sein, deren bahnbrechende Arbeiten auf dem Gebiete der Festigkeitslehre vorbildlich geworden sind.

Allem Anscheine nach nähern wir uns jetzt dem Zeitpunkte, an dem sich die in dem umfangreichen Beobachtungsmaterial niedergelegten Einzelkenntnisse zu einer Gesamtvorstellung von der Festigkeit abklären sollen, welche gestattet, diese durch einen einfachen mathematischen Ausdruck so genau wiederzugeben, dass mit dessen Hülfe jede Frage der Festigkeit mit einer den heutigen Anforderungen genügenden Genauigkeit beantwortet werden kann; hierauf deuten wenigstens die in der Litteratur immer häufiger auftretenden Versuche hin, anstelle des Proportionalitätsgesetzes der vollkommenen Elastizität das wahre Spannungsgesetz für die Formänderung fester Körper aufzufinden, oder aufgrund eines solchen, als gegeben angenommenen Gesetzes die Folgerungen abzuleiten, welche sich rein rechnerisch daraus für die Festigkeit ergeben.

Zweifelloos wäre es interessant, das wahre Spannungsgesetz der festen Körper zu kennen; indes würde damit nach meiner Ansicht kaum etwas Nennenswertes für die Bestimmung der Festigkeit gewonnen sein, weil der Bruch eines Körpers, der doch für seine Festigkeit allein maßgebend ist, den Abschluss einer Reihe bleibender Formänderungen bildet und somit in diese Reihe gehört, während das Spannungsgesetz nur die Reihe der elastischen, also vorübergehenden Formänderungen betrifft; freilich laufen beide Reihen in der Wirklichkeit untrennbar neben einander her, sodass man sie zwar in Gedanken, nicht aber im Körper selbst einzeln ins Dasein rufen kann, und so ist es anscheinend gleichbedeutend, ob man sagt, der Bruch rühre von der zu groß gewordenen Spannung her, oder aber, er sei eine Folge der diese Spannung begleitenden übermäßig gestiegenen bleibenden Dehnung; ich hoffe jedoch, Sie zu überzeugen, dass in der That die bleibenden oder plastischen Formänderungen den maßgebenden Umstand beim Bruche bilden.

Vorbehaltlich des Nachweises der Richtigkeit meiner Behauptung werden Sie mir gestatten, bei den folgenden Betrachtungen das Hookesche Gesetz der Proportionalität zwischen den elastischen Spannungen und den Formänderungen vorauszusetzen, um möglichst einfache, wenn auch nicht ganz genau der Wirklichkeit entsprechende Beziehungen zu erhalten.

Fig. 1.



Wenn wir einen tieferen Blick in das wahre Wesen der Festigkeit werfen wollen, so wird es gut sein, zuvor die schwachen Punkte aufzusuchen, wo die Theorie der Elastizität in deutlichen Widerspruch zur Festigkeitslehre tritt; ich beginne daher mit der Aufführung einiger merkwürdiger Fälle

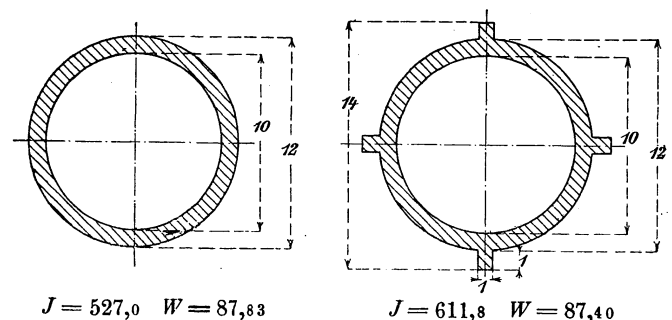
aus der Festigkeitslehre, welche den Ausgangspunkt für meine weiteren Untersuchungen gebildet haben. Ein über Eck liegendes Quadrat von der Seite  $a$ , Fig. 1, also der Höhe  $h = a/\sqrt{2}$ , hat, als Querschnitt eines Balkens betrachtet, das

Widerstandsmoment  $W = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 = 0,118 a^3$ ; schneidet man aber die obere und die untere Ecke gleichmäßig so weit weg, dass die Höhe nur noch  $\frac{8}{9} h$  beträgt, so geht das Widerstandsmoment

über in  $W' = \frac{64\sqrt{2}}{729} a^3 = 0,124 a^3$ , sodass die Tragfähigkeit des Balkens durch das Wegnehmen von reichlich 1 pCt des Querschnittes rechnermäßig um 5 pCt vergrößert werden würde.

Nehmen wir andererseits den ringförmigen Querschnitt, Fig. 2, und verstärken ihn durch vier quadratische Rippen, so erhalten wir im ersten Falle  $W = 87,83$ , im zweiten Falle  $W = 87,4$ ; also würde die geplante Verstärkung rechnermäßig eine Schwächung des Balkens sein.

Fig. 2.



Im allgemeinen wird jeder Querschnitt, dessen äußerste im Abstände  $e$  von der neutralen Achse befindliche Faserschicht eine sehr geringe Breite  $b$  besitzt, die Eigentümlichkeit zeigen, dass nach Beseitigung dieser schmalen Schicht das Widerstandsmoment größer wird; ist der Querschnitt symmetrisch in bezug auf die Nullachse, so darf beiderseits die äußerste Schicht fortgenommen werden, so lange  $b < \frac{W}{2e^2}$ ; ist der Querschnitt aber unsymmetrisch, so darf einseitig die äußerste Schicht entfernt werden, so lange ihre Breite  $b < \frac{FW}{(Fe + W)e}$  ist, unter  $F$  den Inhalt des Querschnittes verstanden. (Vergl. Zusatz 1.) Entsprechend diesen Bedingungen habe ich in Fig. 3 zwei Querschnitte aufgezeichnet, welche die merkwürdige Eigenschaft zeigen, dass ihre Widerstandsmomente stets dieselben bleiben, soviel man auch von dem krummlinigen Teile wegschneidet, vorausgesetzt nur, dass der Schnitt parallel zur Nullachse gelegt und bei dem symmetrischen Querschnitten beiderseits gleich viel weggeschnitten werde.

Es wäre von Interesse gewesen, dem gegenüber durch den Versuch festzustellen, wie sich Körper von den betreffenden Querschnitten in Wirklichkeit verhalten; doch wurde hiervon abgesehen, weil es sich dabei um die Biegezugfestigkeit handelt und es jedenfalls aussichtsvoller ist, ähnliche Widersprüche im Bereiche der einfachen Zugfestigkeit aufzusuchen, indem dort die Deutung der Versuchsergebnisse nicht noch durch Nebenumstände erschwert wird.

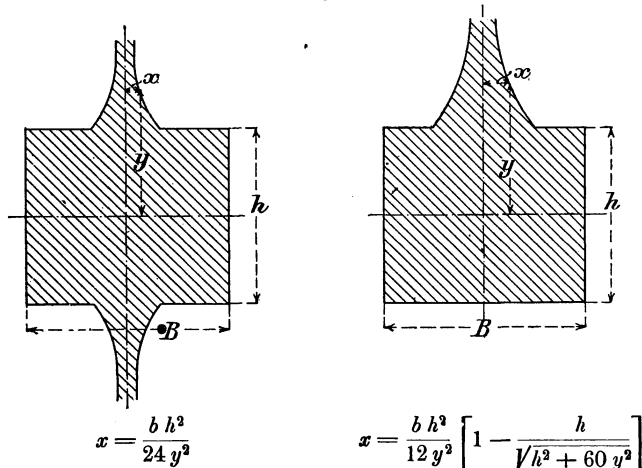
Um einen solchen Fall herzuleiten, nehmen wir ein nach allen Richtungen gleichmäßig gespanntes unbegrenztes ebenes Blech und versehen es mit einer kreisrunden Öffnung; dann erleidet die vorher überall gleiche Spannung eine Störung, die am Umfang des Loches ihren größten Wert erreicht; auch ohne Rechnung ist erkennbar, dass in jedem zum Loch konzentrischen Kreise eine konstante Umfangsspannung  $\sigma_u$  und normal dazu eine konstante Radialspannung  $\sigma_r$  herrscht und dass dies zugleich die Hauptspannungen in dem betreffenden Punkte sein werden; ferner ergibt die Theorie unter Zugrundelegung des Hookeschen Gesetzes für die Spannungen  $\sigma_u$  und  $\sigma_r$  die Werte

$$\sigma_u = p \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_r = p \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right),$$

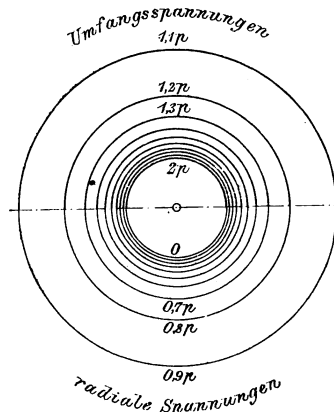
worin  $p$  die Spannung des ungelochten Bleches,  $r$  den Abstand des betreffenden Punktes von Mitte Loch und  $a$  den Radius des Loches bezeichnet. (Vergl. Zusatz 2.) Die Summe der beiden Hauptspannungen ist also nach wie vor überall  $2p$ ; schon in mäßigem Abstände ist der Unterschied zwischen beiden sehr gering, beispielsweise ist für  $r = 5a$ :  $\sigma_u = 1,04p$ ,  $\sigma_r = 0,96p$ , während sich am Rande des Loches, also für  $r = a$ , die Werte  $\sigma_u = 2p$ ,  $\sigma_r = 0$  ergeben. Wie

Fig. 3.



schnell die Spannungen vom Rande des Loches aus abnehmen, zeigt Fig. 4, welche die Linien gleicher Umfangs- bzw. Radialspannungen in Abständen von je  $0,1p$  angibt. Das durchlochte Blech müsste sonach, wenn es wirklich auf die größte Spannung ankäme, am Lochrande schon bei der Hälfte derjenigen Spannung einreißen, bei welcher das ungelochte Blech reißt; genauer wird sogar bei Beurteilung der Festigkeit an die Stelle des Verhältnisses  $p:2p$  das Verhältnis  $(m-1):2m$  treten, weil nicht das Verhältnis der Spannungen, sondern dasjenige der Dehnungen maßgebend ist; doch ist dies ziemlich unerheblich, weil die mir zur Verfügung stehenden

Fig. 4.



Um dergleichen Versuche möglich zu machen, blieb nur der Ausweg übrig, an Stelle des allseitig gespannten Bleches ein einseitig gespanntes zu setzen und durch Rechnung vorher festzustellen, wie sich für dieses die Spannungen in der Umgebung eines kreisförmigen Loches gestalten, falls wiederum das Hookesche Gesetz als maßgebend angesehen wird. Diese Untersuchung erforderte so umständliche Rechnungen, dass ich davon Abstand nehmen muss, sie hier auch nur auszugsweise wiederzugeben. (Vergl. Zusatz 3.) Von den Ergebnissen will ich nur angeben, dass jetzt  $\sigma_r$  und  $\sigma_u$  nicht mehr unveränderlich bleiben, wenn der betrachtete Punkt einen zum Loch konzentrischen Kreis vom Radius  $r$  durchläuft, sondern dass diese Spannungen hier noch von dem Winkel  $\theta$  abhängen, welchen der Radius  $r$  mit der als Längsachse des Bleches gedachten Hauptzugrichtung bildet; auch sind die Spannungen  $\sigma_r$  und  $\sigma_u$  jetzt keine Hauptspannungen mehr, weil die zugehörige Schubspannung  $\tau_{ru}$ , die den rechten Winkel zwischen den Richtungen  $r$  und  $u$  zu ändern strebt, im allgemeinen nicht Null ist. Die Ausdrücke für die maßgebenden Spannungen sind:

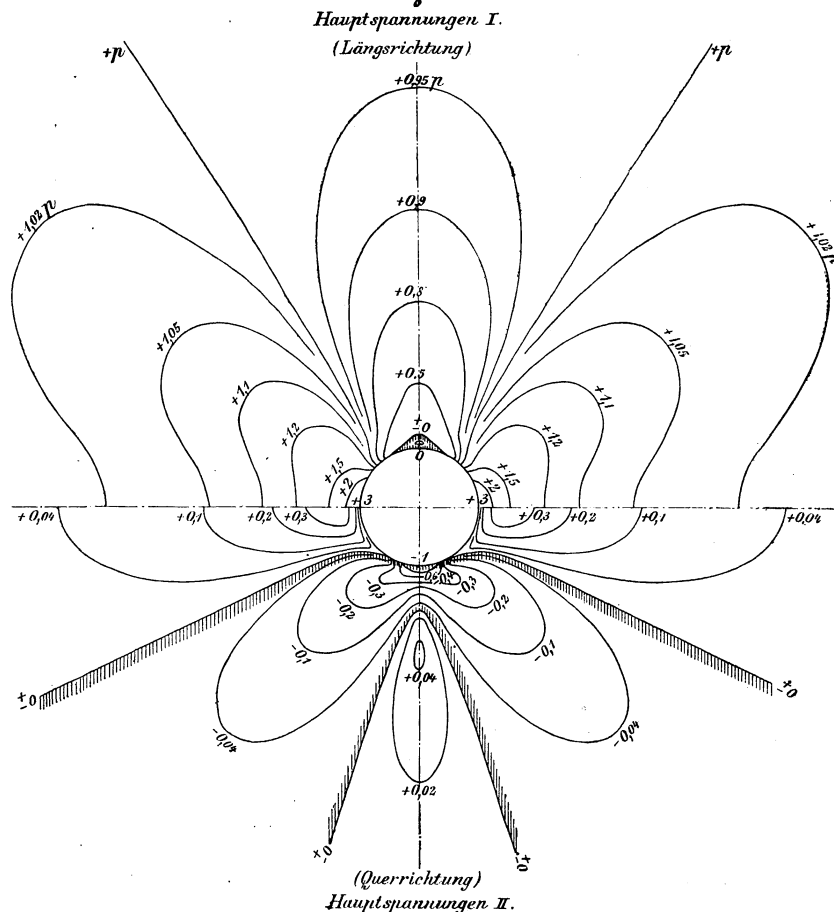
$$\sigma_r = \frac{1}{2} p \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{1}{2} p \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left( 1 - \frac{3a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_u = \frac{1}{2} p \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{1}{2} p \left( 1 + \frac{3a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta$$

$$\tau_{ru} = -\frac{1}{2} p \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left( 1 + \frac{3a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta,$$

aus denen man zunächst erkennt, dass für  $r = a$ , also am Rande des Loches, die Radialspannung und die Schubspannung verschwinden und die dann übrig bleibende Umfangsspannung den kleinsten Wert  $-p$  bzw. den größten Wert  $+3p$  annimmt. Für das in der Umgebung des Loches liegende Gebiet habe ich die Spannungen von Punkt zu Punkt berechnet und daraus die Linien gleicher Hauptspannungen ermittelt, welche Sie in Fig. 5 in ihrem ungefähren Verlaufe vor sich sehen. Hierzu ist zu bemerken, dass die Gebiete negativer Spannungen durch schraffierte Linien begrenzt sind und dass die beiden Hauptspannungen I und II nur in größerer Entfernung

Fig. 5.



vom Loch durchweg mit der Längs- und Querrichtung zusammenfallen, während sie in der näheren Umgebung im allgemeinen eine abweichende Richtung haben; ausgenommen sind nur die Punkte der Längs- und Querachse selbst, für welche die Richtung der Hauptspannungen bis an den Rand des Loches ungeändert bleibt. Das ungelochte Blech besitzt natürlich überall gleiche Hauptspannungen, nämlich in der Zugrichtung  $\sigma_1 = p$ , in der Querrichtung  $\sigma_2 = 0$ ; hiermit stimmen die Hauptspannungen des durchlochten Bleches nach Größe und Richtung um so näher überein, je weiter man sich vom Loch entfernt; die größte Spannung beträgt  $\sigma = 3p$ , ist also dreimal so groß wie die gleichmäßige Längsspannung des ungelochten Bleches. Verhielte sich also ein durchlochstes Blech bis zum Augenblicke des beginnenden Bruches genau wie ein vollkommen elastischer Körper, so müsste der Bruch stets am Lochrande in den Endpunkten des Querdurchmessers beginnen, und zwar bei einer mittleren Längsspannung des Bleches gleich einem Drittel derjenigen Spannung, die zum Zerreißen des ungelochten Bleches erforderlich ist.

Gelänge es, in gleicher Weise die Spannungsverteilung in einem elliptisch gelochten Bleche zu berechnen, so würde man zweifellos finden, dass die größte Spannung kleiner oder größer als  $3p$  ausfällt, je nachdem die Längsachse der Ellipse in die Richtung der Zugkraft fällt, oder quer dazu liegt;



im Grenzfalle, dem unendlich schmalen Schlitz von der Länge  $2a$ , würde jede Spannungsstörung aufhören, sobald der Schlitz in die Zugrichtung fiel; dagegen würde die theoretische größte Spannung an den Enden des Schlitzes jedes Maß überschreiten, wenn er quer zur Zugrichtung läge.

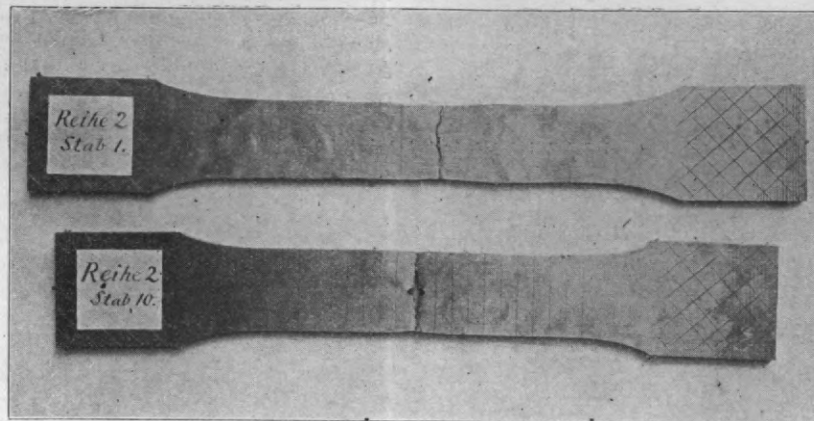
Zur Prüfung des tatsächlichen Verhaltens durchlochter Bleche gegenüber diesen Rechnungsergebnissen wurde eine größere Reihe von Zerreißversuchen unternommen, zu denen mir die Königin Marien-Hütte in Cainsdorf und das Lauchhammerwerk in Riesa in liebenswürdigster Weise Flusseisenstäbe zur Verfügung gestellt hatten, wofür hier nochmals der Dank ausgesprochen sein möge. Entsprechend der Rechnung hätten die Stäbe allerdings unendlich breit sein müssen; da aber die durch das Loch hervorgerufenen Spannungsstörungen schon in geringer Entfernung vom Loche unmerklich werden, so genügte es, aus der unendlichen Ebene einen Streifen herauszuschneiden, dessen Mittellinie durch die Lochmitte geht und dessen Breite nicht unter etwa sechs Lochdurchmesser beträgt. Die Gesamtzahl der untersuchten Stäbe betrug 92, und zwar 84 aus Flusseisen von verschiedener Zähigkeit, 8 aus Gusseisen; zu jedem gelochten Stabe war ein genau gleicher ungelochter vorhanden, sodass alle Versuche paarweise vorgenommen werden konnten. Die Abmessungen der Stäbe sowie die Ergebnisse der Zerreißversuche sind in der nebenstehenden Tabelle zusammengestellt, wobei zur leichteren Uebersicht diejenige Reihenfolge gewählt worden ist, bei welcher die Querschnittsverminderung  $\psi$  des vollen Stabes eine zunehmende Reihe bildet; also das härtere Material beginnt, das weichere folgt.

Wie ich aus der soeben erschienenen 3. Auflage der »Festigkeitslehre« von Bach, S. 91, ersehe, sind übrigens ähnliche Versuche schon vor längerer Zeit von Kirkaldy vorgenommen worden; doch hat man aus ihnen keine weitergehenden Folgerungen gezogen.

Bei allen durchlochten Stäben begann der Bruch genau an der durch die Theorie bezeichneten stärksten gespannten Stelle, nämlich den Endpunkten des Querdurchmessers, selbst wenn das Loch den winzigen Durchmesser von 2 mm hatte; eine einzige Ausnahme fand bei diesem geringsten Lochdurchmesser statt, indem der Stab infolge mangelhaften Einspannens nahe der Einspannstelle einseitig einriß.

Die größte absolute Spannung trat in jedem Falle in demselben Augenblicke ein, in welchem der Riss an den beiden kritischen Stellen des Lochrandes sichtbar wurde. Die Querschnittsverminderung  $\psi$  und die Gesamtdehnung  $\varphi$  fielen selbstverständlich bei allen gelochten Stäben erheblich kleiner aus als bei den ungelochten. Unter der Voraussetzung, dass der durch die Brucheinschnürung hervorgerufene besondere Teil der sonst annähernd gleichmäßig über den ganzen Stab verteilten Dehnung sich nur in der mittleren Strecke von 100 mm Länge bemerkbar macht und dass in den beiden Endstrecken von je 50 mm, also zusammen ebenfalls 100 mm Länge keine Nebeneinschnürung liege, habe ich die Gesamtverlängerung der ganzen 200 mm langen Versuchsstrecke in zwei Summanden zerlegt: eine gleichmäßig über den ganzen Stab verteilte und eine auf die Bruchstelle beschränkte zusätzliche Verlängerung, erstere in Prozenten ausdrückbar, letztere nur in absoluter Größe, da sie nicht gleichmäßig über eine Strecke von bekannter Länge verteilt ist. (Vergl. Zusatz 4.) Wie die Zusammenstellung zeigt, ist besonders die zusätzliche Verlängerung für die gelochten Stäbe ungemein gering.

Bezieht man die Bruchspannung auf den tatsächlich im Augenblicke des Bruches vorhandenen Querschnitt, so zeigt sich aus den Versuchen, dass die gelochten Stäbe zwar eine im einzelnen bis zu 32 pCt geringere Festigkeit gegenüber den ungelochten besitzen, dass aber doch jedenfalls die Abnahme der Festigkeit durchaus nicht so bedeutend und besonders nicht so gleichmäßig ist, wie bei vollkommen elastischen Körpern nach der Theorie erwartet werden müsste, nämlich eine Abnahme bis auf ein Drittel des ursprünglichen Wertes. Bezieht man hingegen die Bruchspannung wie üblich auf den ursprünglichen Querschnitt als die allein fassbare Größe, so zeigt sich das überraschende Ergebnis, dass die Zugfestigkeit der gelochten Stäbe, ganz entgegen dem durch die Theorie vorausgesagten Ergebnis, im allgemeinen sogar größer ist als die der ungelochten, und dass die Zunahme der Festigkeit um so bedeutender ist, je weicher das Material, d. h. je größer seine Querschnittsverminderung  $\psi$  ist. Nur beim Gusseisen und dem sehr spröden Flusseisen Nr. 2 mit  $\psi = 28,6$  findet eine unbedeutende Abnahme der Zugfestigkeit statt; eine Ausnahmestellung nehmen noch die sehr



Zusammenstellung der Versuchsergebnisse.

Nr. der Reihe	Anzahl der Stäbe einer Reihe	Durchmesser des Loches	Dicke des Stabes	Breite des Stabes	Breite des Stabes in Lochdurchmessern	absolute Bruchbelastung	Bruchspannung, bezogen auf den ursprüngl. Querschnitt	Bruchspannung, bezogen auf den wickl. Bruchquerschnitt	Querschnittsveränderung $\psi$	Dehnung des ganzen Stabes von 200 mm Länge	Gleichmäßige Verlängerung vor Beginn der Einschnürung	Zusätzliche Verlängerung der Bruchstelle	Bruchspannung mit Loch	Bruchspannung ohne Loch	Quotient aus
Datum		mm	mm	mm		t	kg/qcm	kg/qcm	pCt	pCt	pCt	mm			
1	4	0	31,8	31,3	6,3	15,65	1576	1576							
30.1.97	4	5				11,68	1392	1392							
2	5	0	10	55	11	19,79	3648	5113	28,64	24,70	20,94	7,56			
30.1.97	5	5				16,71	3390	4141	18,14	5,16	4,88	0,61			
3	5	0	8,0	45,0	9	15,11	4152	6515	34,20	21,91	16,62	10,58			
18.1.98	5	5				13,87	4293	5741	25,20	8,65	7,52	2,28			
4	2	0	6,8	40	20	12,11	4430	7583	41,65	22,08	15,98	12,20			
15.3.98	2	2				11,69	4548	6617	31,30	13,25	10,68	5,15			
5	2	0	6,9	40	20	10,93	4010	7608	47,20	22,72	15,70	14,03			
15.3.98	2	2				11,42	4379	7629	41,95	16,99	14,28	5,43			
6	2	0	7,0	40	20	11,99	4329	8468	48,85	24,98	19,50	10,95			
15.3.98	2	2				11,77	4498	6508	30,90	13,65	11,78	3,75			
7	5	0	8,0	40	8	13,27	4142	8321	50,12	28,11	21,58	13,04			
18.1.98	5	5				12,10	4302	6114	29,60	8,43	7,10	2,66			
8	5	0	8,0	45	9	13,67	3818	7979	52,10	28,74	18,72	20,06			
18.1.98	5	5				12,94	4025	6268	35,74	9,94	8,26	3,34			
9	4	0	6,7	90	18	23,03	3922	8425	53,40	29,45	18,25	22,40			
30.1.97	4	5				21,78	3948	5766	31,42	12,15	10,85	2,60			
10	4	0	6,7	90	9	23,03	3922	8425	53,40	29,45	18,25	22,40			
30.1.97	4	10				20,32	3931	5912	33,53	9,63	7,70	3,85			
11	4	0	6,7	90	6	23,03	3922	8425	53,40	29,45	18,25	22,40			
30.1.97	4	15				19,42	3942	5996	34,23	8,15	5,58	5,13			
12	2	0	6,8	40	20	10,81	3928	8441	53,45	19,88	11,98	15,80			
15.3.98	2	2				10,66	4213	6767	37,80	14,84	12,65	4,38			
13	5	0	8,3	40	8	13,08	4006	8678	53,84	28,71	20,36	16,72			
18.1.98	5	5				11,97	4181	6223	32,76	9,21	8,12	2,12			

Die größte absolute Spannung trat in jedem Falle in demselben Augenblicke ein, in welchem der Riss an den beiden kritischen Stellen des Lochrandes sichtbar wurde. Die Querschnittsverminderung  $\psi$  und die Gesamtdehnung  $\varphi$  fielen selbstverständlich bei allen gelochten Stäben erheblich kleiner aus als bei den ungelochten. Unter der Voraussetzung, dass der durch die Brucheinschnürung hervorgerufene besondere Teil der sonst annähernd gleichmäßig über den ganzen Stab verteilten Dehnung sich nur in der mittleren Strecke von 100 mm Länge bemerkbar macht und dass in den beiden Endstrecken von je 50 mm, also zusammen ebenfalls 100 mm Länge keine Nebeneinschnürung liege, habe ich die Gesamtverlängerung der ganzen 200 mm langen Versuchsstrecke in zwei Summanden zerlegt: eine gleichmäßig über den ganzen Stab verteilte und eine auf die Bruchstelle beschränkte zusätzliche Verlängerung, erstere in Prozenten ausdrückbar, letztere nur in absoluter Größe, da sie nicht gleichmäßig über eine Strecke von bekannter Länge verteilt ist. (Vergl. Zusatz 4.) Wie die Zusammenstellung zeigt, ist besonders die zusätzliche Verlängerung für die gelochten Stäbe ungemein gering.

Bezieht man die Bruchspannung auf den tatsächlich im Augenblicke des Bruches vorhandenen Querschnitt, so zeigt sich aus den Versuchen, dass die gelochten Stäbe zwar eine im einzelnen bis zu 32 pCt geringere Festigkeit gegenüber den ungelochten besitzen, dass aber doch jedenfalls die Abnahme der Festigkeit durchaus nicht so bedeutend und besonders nicht so gleichmäßig ist, wie bei vollkommen elastischen Körpern nach der Theorie erwartet werden müsste, nämlich eine Abnahme bis auf ein Drittel des ursprünglichen Wertes. Bezieht man hingegen die Bruchspannung wie üblich auf den ursprünglichen Querschnitt als die allein fassbare Größe, so zeigt sich das überraschende Ergebnis, dass die Zugfestigkeit der gelochten Stäbe, ganz entgegen dem durch die Theorie vorausgesagten Ergebnis, im allgemeinen sogar größer ist als die der ungelochten, und dass die Zunahme der Festigkeit um so bedeutender ist, je weicher das Material, d. h. je größer seine Querschnittsverminderung  $\psi$  ist. Nur beim Gusseisen und dem sehr spröden Flusseisen Nr. 2 mit  $\psi = 28,6$  findet eine unbedeutende Abnahme der Zugfestigkeit statt; eine Ausnahmestellung nehmen noch die sehr

breiten Stäbe Nr. 9 bis 11 ein, die trotz des großen Wertes von  $\psi$  nur eine sehr geringe Festigkeitszunahme aufweisen.

Ueberzeugender als durch diese Versuchsergebnisse kann wohl kaum dargethan werden, dass die dem Hookeschen Gesetze entsprechenden elastischen Spannungen oder die diesen entsprechenden Dehnungen nicht die Ursache des Bruches sein können, dass vielmehr die unmittelbar vor dem Bruche stattfindende thatsächliche Spannungsverteilung wesentlich hiervon abweichen muss, und dass diese Abweichung nur erklärt werden kann durch die auf Ausgleichung der zu scharfen Spannungsunterschiede hinwirkenden plastischen Formänderungen.

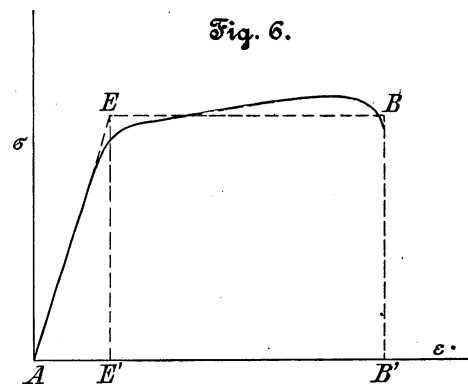
Ohne Zweifel wird nur bei einem rein elastischen, jeder Plastizität ermangelnden Körper die an der kritischen Stelle, dem Rande des Loches, auftretende theoretische größte Spannung auch wirklich erreicht werden und, sobald sie die Bruchspannung überschreitet, zu einer örtlichen Trennung, also dem Beginne eines Sprunges führen, auf welchen dann eine neue elastische Spannungsverteilung und stetige Fortsetzung des Sprunges bis zum Eintritt desjenigen Spannungszustandes folgt, bei dem die Bruchspannung nirgends mehr erreicht wird. Durch das Eintreten eines Sprunges wird an der betreffenden Stelle aller Zusammenhang aufgehoben, also der tragende Querschnitt plötzlich verkleinert und dadurch seine mittlere Spannung sprungweise vergrößert, sodass ein durch das stetige Anwachsen der Last entstehender Sprung wohl ausnahmslos zum vollständigen Bruche führt; nur bei einem sonst unbelasteten Körper wird ein durch örtliche Einwirkung, Stoß oder Temperaturerhöhung hervorgebrachter Sprung keine unbegrenzte Fortsetzung finden, weil er bei seiner Ausbreitung bald in gänzlich spannungsloses Gebiet gelangt.

Besitzt der Körper neben seiner Elastizität noch eine gewisse Plastizität, so zieht sich das Material längs der Linien des größten Spannungsgefälles aus den weniger gespannten Gegenden nach den stärker gespannten und entlastet sie; dieser Nachschub von Material nach den zunächst gefährdeten Stellen tritt natürlich dort am auffallendsten in die Erscheinung, wo das Spannungsgefälle am stärksten ist und die Gebiete höchster Spannung möglichst nach allen Seiten von solchen niederer Spannung umgeben sind, wie in unserem Falle der durchlochten Bleche. So sehen wir denn in der That aus unserer Tabelle, dass mit zunehmender Plastizität, also wachsendem Werte von  $\psi$ , auch die Festigkeit der gelochten Stäbe größer wird; dass sie überhaupt größer werden kann als die der ungelochten Stäbe, würde kaum verständlich sein, wenn man nicht diese Erklärung dafür hätte, dass die durch das Loch erfolgte Trennung des Stabes in zwei gleiche Stäbe von ungefähr halber Breite ein erleichtertes Zufließen des Materials zur Bruchstelle mit sich brächte, wie auch Bach bei Besprechung der Kirkaldy'schen Versuche hervorhebt; nur bei sehr großer Breite, wie bei Stab Nr. 9 bis 11, ist auch die halbe Breite noch zu bedeutend, um durch plastischen Nachschub vom Loche her Entlastung für einen nennenswerten Teil des Bruchquerschnittes zu gestatten, daher hier nur die auffallend geringe Zunahme der Bruchspannung. Beim Gusseisen, als dem am wenigsten plastischen Material der ganzen Reihe, finden wir die kleinste Bruchspannung des durchlochten Stabes, nämlich 0,883 von der des ungelochten; bei Abwesenheit jeglicher Plastizität hätte sich aber eine noch erheblich kleinere Zahl, wenn auch vielleicht etwas mehr als der dem Hookeschen Gesetze entsprechende Wert 0,333, ergeben müssen; immerhin beweist der große Abstand beider Zahlen, dass auch hier noch eine gewisse Plastizität vorhanden ist, die ja auch anderweitig durch bleibende Formänderungen des Gusseisens nachgewiesen ist.

Man wird aus diesen Versuchsergebnissen auch ganz im allgemeinen die Lehre ziehen dürfen, dass alles Material, welches keine nennenswerte Spannung aufzunehmen hat, nicht bloß überflüssig ist, sondern ausgesprochen schädlich wirkt, weil es für die tragenden Teile nur ein Hindernis bildet, sich so zu lagern, wie sie den äußeren Kräften am besten Widerstand leisten können; die Praktiker haben dies längst herausgefühlt und nehmen

an stark beanspruchten Maschinenteilen durch geeignete Oeffnungen und Aussparungen gern alles unnütze Material fort, um dem wirklich arbeitenden Materiale möglichst freie innerliche Beweglichkeit zu verschaffen.

Gegenüber den genannten, an den meist gefährdeten Stellen eingreifenden plastischen Verschiebungen ist es offenbar von geringerer Wichtigkeit, zu wissen, welchem Gesetze die rein elastischen Formänderungen gehorchen, ob dem einfachen Hookeschen oder dem neuerdings viel erörterten Potenzgesetze  $\epsilon = \alpha \sigma^m$ ; auf alle Fälle wird der Spannungsexponent  $m$  sehr wenig von der Einheit abweichen, und folgerichtig werden auch die daraus abgeleiteten Spannungen im allgemeinen, d. h. mit Ausnahme der Gebiete größter Spannungen, nur unerheblich von den Hookeschen abweichen; in den Ausnahmegebieten aber überwiegt der Einfluss der plastischen Formänderungen so bedeutend bei der Spannungsverteilung, dass die elastischen Spannungen dagegen ganz in den Hintergrund treten. Um denselben Gedanken anschaulicher darzustellen, verzeichnen wir die wahre Spannungslinie  $AEB$  (Fig. 6) in bezug auf die



beiden zu einander senkrechten Achsen  $\epsilon$  und  $\sigma$ , wobei wir bemerken, dass stets zwei ziemlich scharf getrennte Teile vorhanden sind, nämlich der Teil  $AE$ , in welchem die rein elastischen Dehnungen überwiegen und der Teil  $EB$ , in welchem die plastischen Formänderungen den Ausschlag geben. Da die Lage des Bruchpunktes  $B$  von beiden Teilen abhängt, ist es jedenfalls ungerechtfertigt,  $EB$  ganz außer Ansatz zu lassen und nur  $AE$  in die Rechnung einzubeziehen; genauer wird es immer noch sein, den Teil  $EB$  durch eine zur Achse  $\epsilon$  parallele Gerade  $\sigma = k$  zu ersetzen und ebenso für  $AE$  eine Gerade, also das Hookesche Gesetz anzunehmen, so lange man den gleich wichtigen Teil  $EB$  auch summarisch behandelt. Projizieren wir die Eckpunkte  $E$  und  $B$  der gebrochenen Linie  $AEB$  auf die  $\epsilon$ -Achse, so giebt uns das Verhältnis  $\delta$  der beiden Projektionen  $AE'$  und  $AB'$  ein annäherndes Maß für die Sprödigkeit des Materials, indem nur der Körper absolut spröde sein würde, für welchen die plastische Bruchdehnung  $EB$  ganz wegfiele, also der Quotient

$$\delta = \frac{\text{elastische Bruchdehnung}}{\text{gesamte Bruchdehnung}} = \frac{AE'}{AB'}$$

den Sonderwert 1 annähme. Für Kupfer und Flusseisen ist nach den von Bach gegebenen Spannungslinien  $\delta$  fast Null, für Messing und Bronze etwas größer, aber immer noch weit unter 0,1. Für Gusseisen liegt keine zuverlässige, bis zum Bruchpunkte  $B$  beobachtete Spannungslinie vor; zweifellos fällt aber auch hier  $B$  nicht mit  $E$  zusammen, weil sonst der durchlochte Stab eine viel geringere Zugfestigkeit gezeigt haben müsste; aus später zu erörternden Gründen ist es vielmehr wahrscheinlich, dass  $\delta$  hier ungefähr den Wert 0,3 hat.

Die Theorie der vollkommenen Elastizität geht von der Annahme aus, dass der untersuchte Körper bis in seine unmessbar kleinsten Teilchen hinein durchaus gleichartig sei, während jeder wirkliche Körper ganz im Gegenteil ein mehr oder weniger regelloses Haufwerk einzelner Teilchen von verschiedenen Graden der Elastizität und Festigkeit ist; denn je nach der Herstellung befinden sich darin mikroskopische Hohlräume oder Krystalle, wie Blasen und ausgeschiedene Kohlenstoffteilchen beim Gusseisen, oder wie Risse und

Spalten, unausgeschiedene Schlackenteilchen und dergleichen beim Schweißseisen. Jede solche Unregelmäßigkeit im Innern des Körpers bildet einen Störungsmittelpunkt für die elastischen Spannungen, ähnlich dem Loche im gespannten Stabe; wird nun ein solcher Körper der Einwirkung einer äußeren Kraft  $P$  unterworfen, so entstehen an diesen Ausnahmepunkten Spannungen, die je nach dem Charakter der Störungsursache entweder das zwei- bis dreifache der ungestörten Spannung betragen können, wie beim glatten kreisrunden Loche, oder aber ebensogut bei scharfkantigen Unterbrechungen des Zusammenhangs einen erheblich größeren Wert annehmen können. Nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit werden diese unzähligen vielen kleinen Störungsursachen annähernd gleichmäßig im Körper verteilt und durch Zwischenräume von einander getrennt sein, die wir im Mittel als ein endliches Vielfaches vom Radius derjenigen unmessbar kleinen kugelförmigen Räume denken können, welche die einzelnen Störungsherde umschließen. Wie uns der rasche Spannungsabfall an den kritischen Punkten des gelochten Bleches zeigte, wird man beim Anwachsen der äußeren Kraft  $P$  zu erwarten haben, dass die Maxima der unregelmäßigen Spannungen im Innern oder doch an der Oberfläche dieser kugelförmigen Störungsherde liegen müssen, dass also die ersten plastischen Verschiebungen im Innern oder an der Grenze, niemals außerhalb dieser Störungsbezirke auftreten werden. Wächst nachher die äußere Kraft  $P$ , so muss sich auch der Einfluss der Störungsursachen vergrößern, und es wird am nächsten liegen, anzunehmen, dass der Einflussradius jeder Störung proportional der Kraft  $P$  zunimmt; unter dieser Voraussetzung würde der Raum, innerhalb dessen plastische Verschiebungen auftreten, sich proportional der dritten Potenz von  $P$  vergrößern, so lange sich die Einfluss-sphären der einzelnen Störungsherde im allgemeinen noch nicht schneiden; von dem Augenblicke aber an, in welchem diese in einander übergreifen, werden die plastischen Formänderungen in ein eigentliches Fließen übergehen, bzw. zum Bruche führen, weil das allgemeine Fließen vorher nur durch das außerhalb der Störungsherde liegende noch gesunde Material aufgehalten wurde; diese Vorstellung würde sehr gut mit der von Bach beobachteten Thatsache übereinstimmen (El. u. Festigk. 2. Aufl. S. 10), dass bei einem Rundstabe aus gewalztem Kupfer die bleibenden Verlängerungen sehr genau proportional der dritten Potenz von  $P$  sind.

Wir haben oben gesehen, dass durch die plastischen Formveränderungen an den am meisten gefährdeten Punkten Umlagerungen des Materials vor sich gehen, die im Sinne eines Spannungsausgleichs wirken und dadurch den schädlichen Einfluss der störenden Unregelmäßigkeiten des Materials teilweise aufheben; eine einmalige Belastung des Körpers hat demnach zur Folge, dass die Moleküle sich so lagern, wie sie dieser Belastung am besten widerstehen können; mit dem Verschwinden der Last gehen auch die elastischen Formänderungen wieder zurück, aber nicht vollständig, weil sie durch die stattgefundenen plastischen Formänderungen teilweise daran gehindert sind; es muss sonach im wieder entlasteten Körper ein Spannungsrückstand bleiben, welcher bei geeigneter Größe auch die plastischen Umlagerungen wieder abändern kann, sie also je nach Umständen hier etwas zurückbilden, dort noch etwas vergrößern wird. Belastet man jetzt den Körper zum zweitenmale in derselben Weise, so tritt sehr annähernd derselbe Zustand wie vorher ein, jedoch unter Wegfall der erstmaligen plastischen Formänderungen, weil diese in ihrem wesentlichen Bestande schon

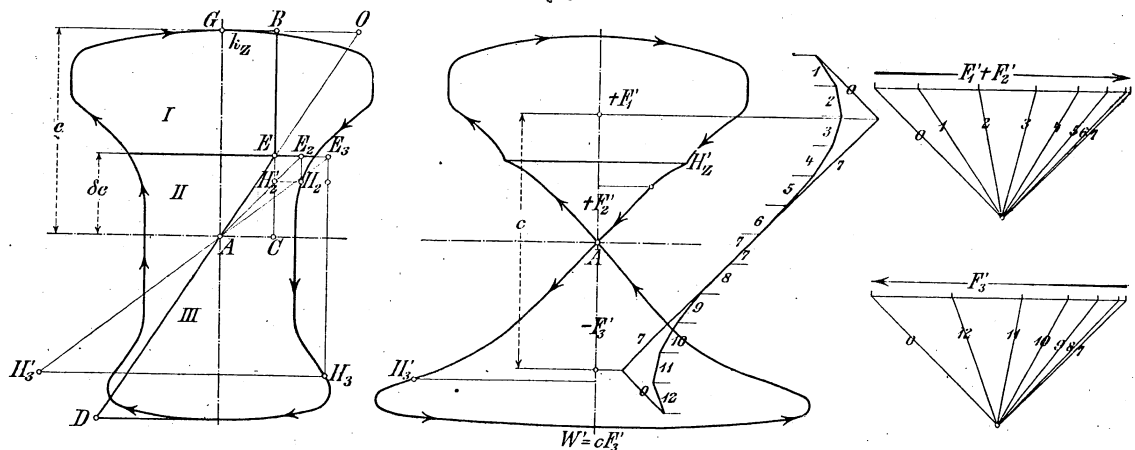
vorhanden sind. So werden Stäbe gleichen Materials, nachdem sie vorher bis nahe zur Bruchgrenze belastet gewesen sind, sämtlich eine gleiche, und zwar sehr hohe Proportionalitätsgrenze aufweisen müssen, wenn sie sich auch ursprünglich in dieser Hinsicht ganz verschieden verhalten hätten; dies wird in der That durch die Beobachtungen von Bach bestätigt (a. a. O. S. 38).

In gleicher Weise wird jede auf Beseitigung der molekularen Ungleichförmigkeiten gerichtete Thätigkeit, wie Hämmern, Pressen, Walzen und dergl., die Proportionalitätsgrenze erhöhen; auch das Härten als plötzliche sehr kräftige Zusammenziehung der Oberflächenschicht wirkt in dieser Richtung.

Werden die Belastungen und Entlastungen beliebig oft wiederholt, so tritt streng genommen ein schon einmal dagewesener Zustand des Körpers niemals zum zweitenmale ein, weil die molekularen plastischen Umlagerungen zwar mit jedem Wechsel kleiner und kleiner werden, aber nie ganz verschwinden; die Uebereinanderlagerung aller dieser Einzeländerungen wird entweder zu einem Beharrungszustande führen, wenn die fortschreitenden Umlagerungen in jedem Punkte eine konvergente Reihe bilden, oder es wird nach einer gewissen Anzahl von Wechsellagen ein Bruch erfolgen, wenn die Reihe der plastischen Verschiebungen divergent ist, und zwar um so eher, je größer an und für sich die Maximallast ist und je weiter die beiden Grenzwerte der wechselnden Lasten von einander entfernt sind. Dies ist das berühmte, zuerst von Wöhler durch Beobachtung gefundene Gesetz.

Es erübrigt nun noch zu untersuchen, welchen Einfluss die plastischen Verschiebungen auf die Biegezugfestigkeit haben. Wenn zwei benachbarte, ursprünglich parallele Querschnitte eines Balkens durch ein auf ihn wirkendes Biegemoment gegen einander geneigt werden und dabei eben

Fig. 7.



bleiben, so sind die Dehnungen der einzelnen Fasern proportional den Abständen von einer gewissen Achse, der Nullachse des Querschnitts; die hierzu gehörigen Spannungen werden also unter den oben besprochenen vereinfachenden Annahmen einen durch eine gebrochene gerade Linie  $DAEB$ , Fig. 7, dargestellten Verlauf nehmen, und zwar wird im besonderen für Gusseisen auf der S-ite der gedrückten Fasern der Bruchpunkt wohl ohne Ausnahme in die Verlängerung von  $AD$  fallen, wegen der bedeutenden Größe von  $k_a$  im Verhältnis zu  $k_z$ .

Um das diesem Spannungsverlauf entsprechende Biegemoment für einen beliebigen Querschnitt zu bestimmen, nehmen wir zunächst nach bloßer Schätzung den Spannungsnullpunkt  $A$ , Fig. 7, an, tragen auf der Nullachse die beliebige Strecke  $AC$  ab, errichten die Senkrechte  $CB$ , machen  $CE = \delta \cdot CB$  und ziehen  $EAD$ , so ist  $BEAD$  der im Querschnitt herrschende Spannungsverlauf unter der Voraussetzung, dass bei  $G$  die äußerste gezogene Faser liege und diese eben im Begriffe sei, unter der Spannung  $k_z = GB$  zu zerreißen. Ziehen wir durch  $E$  eine Parallele zur Nullachse, so schneidet diese von dem ganzen Querschnitt  $F$  denjenigen Teil  $I$  ab, dessen Fasern gleichmäßig mit  $\sigma = +k_z$



gespannt sind; in dem anstossenden Teile II nimmt die Spannung bis Null ab, ersetzen wir aber diese Fläche  $F_2$  durch eine neue Fläche  $F_2'$ , deren Breiten im Verhältnis der abnehmenden Spannungen mittels des Linienzuges  $H_2 E_2 H_2'$  verkleinert sind, so dürfen wir uns vorstellen, dass auch über die Fläche  $F_2'$  gleichmässig eine Spannung  $+k_z$  verteilt sei; ebenso ergibt sich für den gedrückten Teil  $F_3$  eine reduzierte Fläche  $F_3'$ , deren Umfangspunkte  $H_3'$  aus dem Linienzuge  $H_3 E_3 H_3'$  hervorgehen. Da  $F_1$  ungeändert bleibt, also  $F_1' = F_1$  ist, so erhalten wir anstelle der ursprünglichen Querschnittsfläche  $F$  mit ihren wechselnden Zug- und Druckspannungen eine reduzierte Fläche  $F' = F_1' + F_2' - F_3'$ , welche gleichmässig unter der Zugspannung  $k_z$  steht, insofern der entgegengesetzten Druckrichtung im Teil III schon durch das Vorzeichen von  $F_3'$  Rechnung getragen ist. Da die algebraische Summe aller Spannungen Null sein muss, so folgt  $F_1' + F_2' = F_3'$  als Bedingung dafür, dass der Nullpunkt  $A$  richtig gewählt war, was zunächst als zutreffend angenommen werden möge. Vereinigen wir jetzt alle Zugspannungen zu einer im Schwerpunkt von  $F_1' + F_2'$  angreifenden Kraft  $(F_1' + F_2') k_z$ , ebenso die Druckspannungen zu der im Schwerpunkt von  $F_3'$  angreifenden entgegengesetzten gleichen Kraft  $F_3' k_z$  und bezeichnen mit  $c$  den Abstand jener beiden Schwerpunkte, so ist das gesuchte Biegemoment

$$M = F_3' k_z c = k_z W',$$

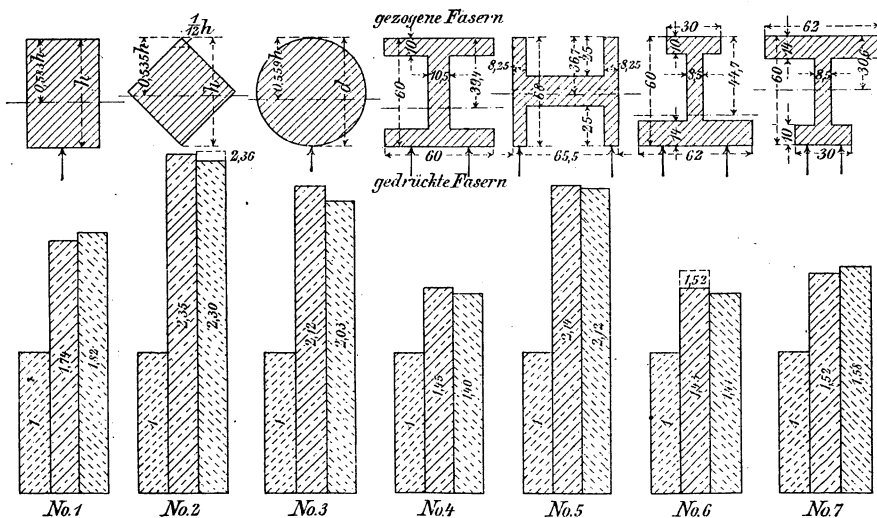
worin  $W' = c F_3'$  das reduzierte Widerstandsmoment des Querschnitts  $F'$  genannt werden möge. Die Ermittlung von  $c$  geschieht natürlich am besten durch Verzeichnung des zu  $F'$  gehörigen Seilpolygons.

Ist die Bedingung  $F_1' + F_2' = F_3'$  bei der ersten Aufzeichnung nicht genau erfüllt, also  $F'$  etwas von Null verschieden, etwa gleich  $\Delta F'$ , so berechne man aus  $GA = e$  mittels der Gleichung (vergleiche Zusatz 5)

$$\Delta e = - \frac{e \delta \Delta F'}{F - (1 - \delta) F_1'}$$

den Wert  $\Delta e$ , wähle den neuen Nullpunkt  $A'$  im Abstände

Fig. 8.



$GA' = e + \Delta e$  und ziehe die Gerade  $OA'D'$ , deren Schnitt mit  $BE$  die neue Lage  $E'$  bestimmt.

Nach diesem Verfahren habe ich die den Bruch herbeiführenden Biegemomente für diejenigen Querschnitte berechnet, welche Bach bei seinen grundlegenden Untersuchungen über die Biegezugfestigkeit des Gusseisens ausgewählt hat (vergl. Z. 1888 S. 193 u. ff.); als Maß der Sprödigkeit nahm ich  $\delta = 0,3$  und fand damit die in Fig. 8 bildlich dargestellten Ergebnisse; die Höhe des mittleren Streifens stellt überall die von Bach beobachtete wirkliche Tragfähigkeit vor, der Streifen links die aus dem gewöhnlichen Widerstandsmomente  $W$  berechnete, der Streifen rechts die aus dem reduzierten Widerstandsmomente  $W'$  berechnete Tragfähigkeit. Die Uebereinstimmung mit den Beobachtungswerten ist jedenfalls befriedigend, wenigstens gegenüber den auf die alte Art berechneten; dazu muss ich allerdings bemerken, dass ich die

von Bach für den Querschnitt Nr. 6 gegebene Zahl 1,52 auf 1,43 herabgesetzt habe, um den Umstand etwas auszugleichen, dass die übrigen Werte mit Stäben von 1000 mm Versuchslänge erhalten wurden und nur jener allein mit solchen von halber Länge. Schneidet man beim Querschnitt Nr. 2 die äußersten gezogenen Fasern bis zur Höhe  $11/12 h$  weg, so hat der verbleibende Querschnitt das Widerstandsmoment 2,36.

Als besonders bemerkenswert möge noch hervorgehoben werden, dass das zur Bestimmung des reduzierten Widerstandsmoments  $W'$  angegebene Verfahren unverändert gültig bleibt und ebenso schnell zum Ziele führt, wenn die Spannungslinie  $DAEB$  nicht aus geraden Stücken zusammengesetzt, sondern in ihrer wahren krummlinigen Gestalt zugrunde gelegt wird. Zu meinem Befremden wurde aber die Uebereinstimmung mit den Bachschen Zahlen nicht durchgängig besser, wenn ich gekrümmte Spannungslinien nach irgend einem für alle Querschnitte gleichen Gesetze annahm, woraus man offenbar schließen muss, dass es in erster Linie der Wert von  $\delta$  ist, auf den es ankommt; denn wenn ein Flachstab schon beim einfachen Zerreißen nicht dieselbe Bruchspannung ergibt wie ein Rundstab, so muss auch bei der Biegung der Wert von  $\delta$  abhängig sein von der Form des Querschnittes an der am meisten gespannten Kante. Sehr überzeugend in dieser Richtung wirkt der Vergleich zwischen den Profilen Nr. 6 und 7, Fig. 8; beide sind aufgrund derselben Spannungslinie, also mit gleichem Werte von  $\delta$  berechnet, trotzdem bei Nr. 6 der schmale Flansch, bei Nr. 7 der breite Flansch der gezogene ist; nach Früherem hat aber ein breiter Stab eine geringere Zugfestigkeit, daher ist Nr. 7 in der Rechnung zu günstig gegenüber Nr. 6 behandelt, und es muss also das Rechnungsergebnis bei Nr. 7 zu günstig, bei Nr. 6 zu ungünstig ausfallen.

Für die Anwendungen scheint es mir, um die Frage nicht unnötig zu verwickeln, durchaus hinreichend, sich mit dem Durchschnittswerte  $\delta = 0,3$  für Gusseisen zu begnügen; so lange man nämlich keinen Anstoß nimmt, bei Berechnung eines Flachstabes auf Zugfestigkeit das Verhältnis von Breite zu Dicke unberücksichtigt zu lassen, trotz der mit zunehmender Breite etwas abnehmenden Bruchspannung, würde es zum mindesten gedankenlos sein, wenn man bei der Biegezugfestigkeit die aus derselben Quelle fließenden kleinen Unterschiede in Rechnung ziehen wollte.

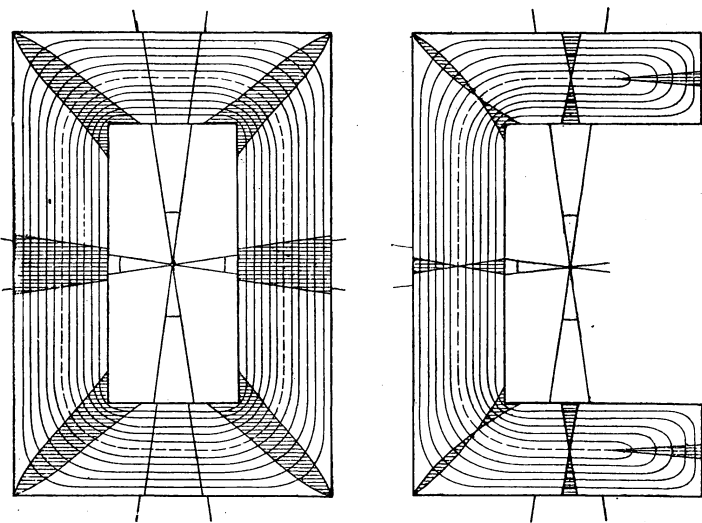
Gestatten Sie mir nunmehr noch ein kurzes Wort über die Drehzugfestigkeit, bei welcher die Verhältnisse allerdings ungleich schwieriger liegen als bei der Biegung. An und für sich wird man für die hier auftretenden Schubspannungen ein ähnliches Verhalten annehmen dürfen wie vorher für die Normalspannungen, so lange die Verschiebungen proportional dem Abstände von der Drehachse zunehmen; diese Proportionalität ist indes nur ein Ausnahmefall, weil sie nur bei denjenigen Querschnitten vorhanden ist, welche durch konzentrische Kreise begrenzt werden, also dem Vollkreise und dem Kreisringe. Legt man hier eine ähnliche Spannungslinie zugrunde wie bei der Biegung, so ergibt sich aus den entsprechenden, von Bach gefundenen Beobachtungswerten (El. u. Festig. II 182), dass der Quotient  $\delta$  für Gusseisen bei der Drehung den Wert  $\delta = 0,63$  haben müsste, wenn die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung gleich gut sein sollte.

Inbetreff der Stäbe von nicht kreisförmigem Querschnitt glaubte man früher ebenfalls annehmen zu dürfen, dass die Schubspannungen proportional den Abständen vom Schwerpunkte zunehmen, trotzdem de St. Venant schon im Jahre 1855 gezeigt hatte, dass dies unrichtig sei; nicht genug hiermit, hatte sogar wenig später Sir William Thomson (Lord Kelvin) das wahre Verhalten der Schubspannungen in einem auf Drehung beanspruchten vollkommen elastischen Prisma in zwei wunderbar schönen Sätzen vollständig klargelegt<sup>1)</sup>; doch sind diese in ihrer abstrakt mathematischen

<sup>1)</sup> Thomson und Tait: Theoretische Physik, Braunschweig 1871, §§ 705 und 706.

Form ziemlich unbeachtet geblieben, obgleich sie wohl verdienten, gerade in technischen Kreisen bekannt zu sein. Ich glaube, meinen Vortrag nicht besser beschließen zu können, als wenn ich Ihnen in einem dem Ingenieur geläufigen Bilde den Inhalt dieser Sätze zur Anschauung bringe. Zu diesem Zwecke denken wir das beiderseits rechtwinklig abgeschnittene Prisma von beliebiger Höhe in einem Punkte der Verlängerung seiner Schwerpunktschwerachse drehbar aufgehängt und mittels einer Spiralfeder in seiner Gleichgewichtslage erhalten, gleich der Unruhe einer Taschenuhr; darauf hohlen wir das Prisma vollständig aus und füllen es mit einer gleich schweren reibungslosen Flüssigkeit, welche wir nur der Kürze wegen als Wasser bezeichnen wollen; nunmehr setzen wir durch ein äußeres Kräftepaar diese Uhr in Gang, warten ab, bis der Beharrungszustand der Schwingungen eingetreten ist, und beobachten dann das in dem schwingenden Prisma enthaltene Wasser; da wir bemerken, dass in allen Querschnitten dasselbe vorgeht, so verringern wir die Höhe des Prismas bis auf eine sehr kleine Größe, sodass wir gewissermaßen nur noch einen zwischen zwei parallelen Ebenen eingeschlossenen flüssigen Querschnitt vor uns haben, welcher in einer Horizontalebene periodische Schwingungen um seinen Schwerpunkt ausführt. An diesen Schwingungen nimmt offenbar das Wasser nur so weit teil, als es durch die Form des Querschnittsumfanges dazu gezwungen wird, und jedenfalls bleibt der Ausschlagwinkel fast aller Flüssigkeitsteilchen hinter demjenigen eines starren Umfangsteilchens zurück. Vom Standpunkte eines am Umfang des Querschnittes aufgestellten Beobachters würde es also scheinen, als machte die ganze Wassermasse im Rahmen dieses Umfangs periodische Schwingungen um ihren Schwerpunkt. Das Bild dieser vom festen Umfange aus gesehenen Schwingungen, Fig. 9, der einzelnen Wasserteilchen ist nun zu-

Fig. 9.



gleich das genaue Bild der Schubspannungen in diesem Querschnitt in dem Sinne, dass der absolute Schwingungsweg eines Flüssigkeitsteilchens nach Größe und Richtung gleich ist der dort herrschenden Schubspannung, wobei die Schwingung, um keine krummen Linien zu erhalten, unendlich klein zu denken ist und der absolute Weg, welchen der stillstehend gedachte, in Wirklichkeit aber bewegte Beschauer gleichzeitig selbst zurücklegt, die Einheit der Spannungen bildet.

Anstatt der Schwingungen darf man sich übrigens auch den flüssigen Querschnitt in eine gleichmäßig beschleunigte fortschreitende Drehung versetzt denken; dann wird das Wasser gegenüber dem Umfange mehr und mehr zurückbleiben und für den am Umfange feststehenden Beobachter als eine im Rahmen dieses Umfangs stetig kreisende Wassermasse erscheinen. Jedes Wasserteilchen durchläuft dann eine geschlossene Stromlinie, Fig. 9, während die jeweilige Stromgeschwindigkeit die Größe der Schubkraft darstellt; je zwei benachbarte Stromlinien begrenzen einen Stromfaden von wechselnder Breite und unveränderlicher Wassermenge, daher sind die Geschwindigkeiten längs eines solchen Stromfadens umgekehrt proportional seiner Breite, und es genügt die

Kenntnis der Geschwindigkeit eines Punktes, um die aller übrigen daraus zu entnehmen. In den beiden Querschnitten der Figur 9 sind die Stromlinien nach bloßer Schätzung eingezeichnet, ebenso die Schwingungen der Wasserteilchen für einen in beiden Fällen gleich großen Drehwinkel; man gewinnt aber schon aus dieser ungenauen Skizze sehr wertvolle Aufschlüsse über das Verhältnis der Schubspannungen in dem geschlossenen und dem offenen Querschnitt, sowie über die Lage der Punkte größter Spannung und die Schädlichkeit der einspringenden scharfen Ecken.

Wir kehren jetzt in Gedanken noch einmal zu der zuerst gedachten schwingenden Bewegung zurück, zählen die Schwingungen in der Zeiteinheit und bestimmen daraus das Trägheitsmoment  $J'$  des flüssigen Querschnittes, in bezug auf die Schwingungsachse; hierauf lassen wir die Flüssigkeit erstarrten, wodurch das Trägheitsmoment vergrößert wird, weil jetzt alle Teile gezwungen sind, die volle Schwingung mitzumachen; wir zählen abermals die Schwingungen und bestimmen den nunmehrigen Wert des Trägheitsmoments, welcher offenbar übereinstimmt mit dem polaren Trägheitsmoment  $J$  der alten Theorie der Drehungsfestigkeit, aus dessen Größe man früher fälschlich das Drehungsmoment und den Drehungswinkel berechnete. Will man hierfür die richtigen Werte erhalten, so muss das polare Trägheitsmoment  $J$  des starren Querschnittes vermindert werden um das Trägheitsmoment  $J'$  des flüssigen; dies ist der kurze Inhalt des anderen Thomsonschen Satzes. Nur bei konzentrisch kreisförmigen Umgrenzungen kann der Querschnitt gedreht werden, ohne die reibungslose Flüssigkeit mitzunehmen; daher ist dies der einzige Fall, wo  $J' = 0$ , also die alte Theorie richtig ist; im übrigen wächst der Fehler der alten Rechnungsweise proportional mit  $J'$ , wird also umso größer, je mehr die Flüssigkeit durch die Form der Querschnittsumgrenzung gezwungen ist, an einer Drehung des Querschnittes teilzunehmen.

Von diesem Bilde wird man mutmaßlich ausgehen müssen, wenn man bei Stäben von beliebigem Querschnitt außer den rein elastischen Schiebungen auch die plastischen berücksichtigen will; vor der Hand lässt sich aber darüber nichts Bestimmtes angeben.

Die vorstehenden Betrachtungen liefern ein lehrreiches Beispiel für die Richtung, in welcher sich die technischen Wissenschaften bewegen müssen, um im weitesten Sinne des Wortes nutzbar zu werden; denn mehr als auf allen übrigen Gebieten gilt für die technischen Wissenschaften der Satz, dass nicht die Herleitung abstrakter Kenntnisse ihr Zweck ist, sondern nur die aus diesen fließende Vertiefung unserer sinnlichen Vorstellung von den in der Wirklichkeit uns umgebenden Dingen.

## Zusatz 1.

Der symmetrische Querschnitt, Fig. 3a, habe das Widerstandsmoment  $W$  und die Rippenbreite  $b$  im Abstände  $e$  von der Nullachse; wir vergrößern  $e$  beiderseits um  $de$ , dann bleibt die Lage der Nullachse unverändert, und das Trägheitsmoment wächst beiderseits um  $b \cdot de \cdot e^2$ , also überhaupt um  $dJ = 2be^2 \cdot de$ . Das ursprüngliche Widerstandsmoment  $W = \frac{J}{e}$

geht über in  $W + dW = \frac{J + dJ}{e + de}$ , wächst sonach um  $dW = \frac{e \cdot dJ - J \cdot de}{e^2}$ , woraus folgt, dass eine Zunahme oder

Abnahme von  $W$  stattfindet, je nachdem  $e \cdot dJ > J \cdot de$  oder  $e2be^2 \cdot de > J \cdot de$ , d. h. je nachdem  $b > \frac{W}{2e^2}$  ist.

Verlangt man, dass  $W$  unverändert den Wert  $\frac{1}{6} Bh^2$  behält, so muss die veränderliche Rippenbreite  $b = 2x$  im Abstände  $e = y$ , Fig. 3, der Bedingung  $2x = \frac{1}{6} Bh^2}{2y^2}$  genügen, woraus  $x = \frac{Bh^2}{24y^2}$  folgt.

Lassen wir dagegen beim unsymmetrischen Querschnitt, Fig. 3b, die Höhe der Rippe um  $dy$  zunehmen, unter  $y$  den Abstand von einer festen Achse, etwa der Mittellinie des



rippenlosen Querschnitts, verstanden, so rückt die Schwerpunktsachse um  $\Delta y$  in die Höhe, entsprechend der Gleichung  $F \cdot \Delta y = b \cdot dy \cdot e$ , worin  $F$  die Gesamtfläche des Querschnitts einschließlich Rippe bedeutet, sodass  $\Delta y = \frac{b \cdot e}{F} dy$  wird; der Schwerpunktabstand  $e$  von Oberkante geht hierbei über in  $e + dy - \Delta y$ , wächst also um  $de = dy - \Delta y = (1 - \frac{b \cdot e}{F}) dy$ .

Fig. 3a.

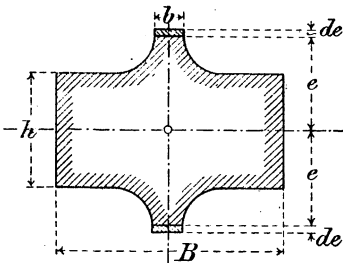
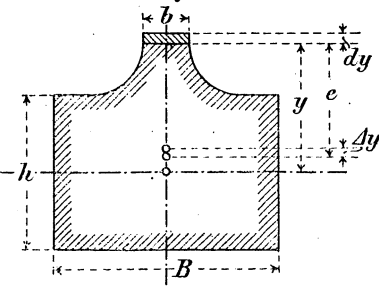


Fig. 3b.



Das Trägheitsmoment  $J$  nimmt zu um  $dJ = b \cdot dy \cdot e^2$ , und das Widerstandsmoment  $W$  wächst wie vorher um  $dW = \frac{e \cdot dJ - J \cdot de}{e^3}$ ; dies giebt eine Zu- oder Abnahme von  $W$ , je nachdem  $e \cdot dJ > J \cdot de$  oder  $b e^3 \cdot dy > J (1 - \frac{b \cdot e}{F}) dy$ , d. h. je nachdem

$$b > \frac{FW}{(Fe + W)e} \text{ ist.}$$

Soll die veränderliche Rippenbreite  $b = 2x$ , Fig. 3, überall so gewählt werden, dass  $W$  weder zu- noch abnimmt, also unveränderlich den Wert  $\frac{1}{6} B h^2$  wie vor dem Anbringen der Rippe behält, so muss  $2x = \frac{FW}{(Fe + W)e}$  sein, worin nur  $W$  konstant ist, während für die beiden veränderlichen Größen  $F$  und  $e$  die Werte  $F = \int b \cdot dy = 2 \int x \cdot dy$  und  $F(y - e) = \int b y \cdot dy = 2 \int x y \cdot dy$  eingesetzt werden müssen. Die strenge Lösung dieser Aufgabe ist zu umständlich im Verhältnis zu ihrer Wichtigkeit, um sie hier durchzuführen; es genüge daher die Angabe, dass sich annähernd der Wert

$$x = \frac{B h^2}{12 y^2} \left[ 1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + 60 y^2}} \right]$$

ergiebt.

#### Zusatz 2.

Um die Gleichungen für ein nach allen Richtungen gleichmäßig gespanntes, unendlich ausgedehntes gelochtes Blech zu erhalten, denken wir uns ein cylindrisches Gefäß, dessen äußerer Radius  $r_a$  unendlich groß und dessen äußerer Mantel der Zugspannung  $p$  unterworfen ist, während der innere Druck Null beträgt; die Endflächen dieses Cylinders von unbegrenzter Länge seien unbelastet, also die Längsspannung Null, und nun werde schließlich der ganze Cylinder rechtwinklig zu seiner Achse in Scheiben von beliebiger Dicke zerschnitten, so stellt jede derselben ein Blech von den vorausgesetzten Eigenschaften dar. Die Gleichungen für diesen Fall können wir unmittelbar aus Bach »Elastizität und Festigkeit« (3. Auflage S. 498 Gl. 9) entnehmen, indem wir nur anstelle der dort benutzten Bezeichnungen

$$r_a \quad r_i \quad p_a \quad p_i \quad z \quad \sigma_y \quad \sigma_z$$

die neuen Werte

$$\infty \quad a \quad -p \quad 0 \quad r \quad \sigma_u \quad \sigma_r$$

einzusetzen haben, woraus die im Text angegebenen Ausdrücke hervorgehen.

#### Zusatz 3.

Die allgemeinen Grundgleichungen der Theorie der Elastizität sind in der »Festigkeitslehre« von Bach nicht entwickelt und infolgedessen auch in den neuesten Auflagen der »Hütte« nicht mehr aufgeführt, sodass wir auf Grashof oder

ein anderes Werk von vorwiegend mathematischer Richtung zurückgehen müssen; ich wähle hierzu die »Festigkeitslehre« von Föppl, Leipzig 1897, weil diese auch in anderer Hinsicht in höchstem Grade lesenswert ist und in ihren Bezeichnungen kaum nennenswert von Grashof abweicht; um mich recht kurz fassen zu können, bezeichne ich dementsprechend in den folgenden Entwicklungen mit (287 F) die Gl. (287) der Festigkeitslehre von Föppl.

Wir nehmen die Mittelebene des Bleches zur  $xy$ -Ebene, die Mitte des Loches zum Nullpunkt der Koordinaten und lassen die  $x$ -Achse mit der Zugrichtung des Bleches zusammenfallen. Für die elastischen Verschiebungen  $\xi, \eta, \zeta$  des Punktes  $xyz$  wählen wir (nach mehrfachen vergeblichen Voruntersuchungen) die Werte

$$\begin{aligned} \frac{G\xi}{p} &= Cx + \frac{m-1}{m} \cdot \frac{a^2 x}{r^2} + \frac{(r^2 - a^2)(x^2 - y^2) a^2 x}{4r^6} \\ \frac{G\eta}{p} &= Cy - \frac{m-2}{2m} \cdot \frac{a^2 y}{r^2} + \frac{(r^2 - a^2)(3x^2 - y^2) a^2 y}{4r^6} \\ \frac{G\zeta}{p} &= C''z, \end{aligned}$$

worin  $r^2 = x^2 + y^2$  und  $C, C', C''$  drei Konstanten bedeuten. Durch Differenzieren dieser Ausdrücke ermitteln wir die spezifische Volumenänderung

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \dots (287 F)$$

und finden

$$\frac{Ge}{p} = C + C' + C'' - \frac{m-2}{m} \cdot \frac{a^2 (x^2 - y^2)}{r^4},$$

woraus nach (292 F) die Ausdrücke für  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  gebildet werden können. Um die Konstanten zu bestimmen, hat man zu beachten, dass in unendlichem Abstände vom Loch überall  $\sigma_x = p, \sigma_y = 0, \sigma_z = 0$  werden muss, woraus sich

$$C = \frac{m}{2(m+1)}, \quad C' = C'' = -\frac{1}{2(m+1)}$$

ergiebt. Hiermit wird nach (292 F)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= p - \frac{3a^2 p (x^2 - y^2)}{2r^4} - \frac{a^2 p (2r^2 - 3a^2)(r^4 - 8x^2 y^2)}{2r^8} \\ \sigma_y &= -\frac{a^2 p (x^2 - y^2)}{2r^4} + \frac{a^2 p (2r^2 - 3a^2)(r^4 - 8x^2 y^2)}{2r^8} \\ \sigma_z &= -\frac{2}{m} \cdot \frac{a^2 p (x^2 - y^2)}{r^4} \end{aligned}$$

Die Schubspannungen  $\tau$  berechnen sich aus (288 F) zu

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= \tau_{zy} = G \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) = 0 \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} = G \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) = 0 \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = -\frac{a^2 p x y}{r^4} - \frac{2a^2 p (2r^2 - 3a^2)(x^2 - y^2) x y}{r^8} \end{aligned}$$

Diese Spannungen müssen nun noch den drei Gleichgewichtsbedingungen (5 F oder 292a) genügen, welche, da nur äußere Kräfte, also keine Massenkräfte  $XYZ$  vorhanden sind, die Form

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

besitzen; wie man sich durch die Ausführung der freilich etwas sehr zeitraubenden Differenziationen überzeugt, sind sämtliche Bedingungen thatsächlich erfüllt, daher obige Werte die der vollkommenen Elastizitätstheorie entsprechenden.

Führen wir anstatt der rechtwinkligen Koordinaten  $xy$  die Polarkoordinaten  $r, \vartheta$  ein mittels der Gleichungen

$$x = r \cos \vartheta \quad y = r \sin \vartheta,$$

so ergeben sich die Radialspannung  $\sigma_r$  und die Umfangsspannung  $\sigma_u$  sowie die zugehörige Schubspannung  $\tau_{ru}$  aus der bekannten Umformung

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \vartheta + \sigma_y \sin^2 \vartheta + 2\tau_{xy} \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \sigma_u &= \sigma_x \sin^2 \vartheta + \sigma_y \cos^2 \vartheta + 2\tau_{xy} \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \tau_{ru} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \vartheta \cos \vartheta + \tau_{xy} (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta); \end{aligned}$$

die Ausführung dieser Rechnung mittels der obigen Werte von  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  liefert die im Text angeführten Ausdrücke für die Spannungen  $\sigma_r, \sigma_u, \tau_{ru}$ .

Inbetriff der elastischen Verschiebungen  $\xi\eta\zeta$  ergibt sich aus den obigen Gleichungen nach Substitution von  $CC'C''$ , dass  $\zeta$  gar kein  $a$  enthält, also durch das Vorhandensein eines Loches überhaupt nicht beeinflusst wird; das Gleiche gilt von dem ersten Summanden von  $\xi$  und  $\eta$ , sodass wir diesen Teil  $\xi_0$  und  $\eta_0$  von dem übrigen abtrennen und als die elastische Verschiebung des ungelochten Bleches oder als die Grundverschiebung bezeichnen können; der dann noch verbleibende Rest  $\xi - \xi_0$  und  $\eta - \eta_0$  stellt die von  $a$  abhängige, also durch das Anbringen des Loches hervorgerufene zusätzliche Verschiebung dar, und endlich giebt das Verhältnis zwischen der zusätzlichen Verschiebung  $\xi - \xi_0$  und der Grundverschiebung  $\xi_0$  an, in welchem Grade die elastische

äusseren 100 mm kommt ausschliesslich auf Rechnung der besonderen oder zusätzlichen Verlängerung infolge Einschnürung an der Bruchstelle, welche wir mit  $\lambda'$  bezeichnen wollen, wonach  $\lambda'$  den Wert annimmt:

$$\lambda' = \lambda_{100} - (\lambda_{200} - \lambda_{100}) = 2\lambda_{100} - \lambda_{200}.$$

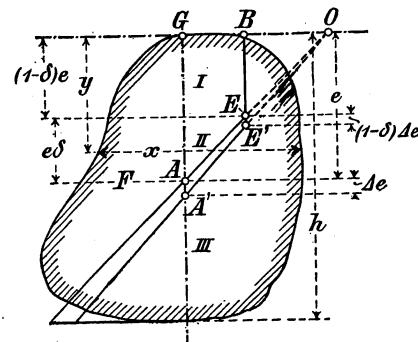
Die gleichmässige Verlängerung  $\lambda''$  auf je 100 mm Stablänge ohne Einschnürung beträgt

$$\lambda'' = \lambda_{200} - \lambda_{100}.$$

#### Zusatz 5.

Wir bezeichnen die im Abstände  $y$  von der Oberkante gemessene Breite des beliebigen, auch unsymmetrischen Querschnitts  $F$ , Fig. 7a, mit  $x$ , dann ergeben sich nach der im

Fig. 7a.



Texte vorgeschriebenen Konstruktion für die reduzierten Flächen  $F'$  die Werte

$$F_1' = \int x \cdot dy, \quad F_2' = \int x \frac{e-y}{e\delta} dy, \quad F_3' = \int x \frac{y-e}{e\delta} dy$$

mit den Integrationsgrenzen

$$\begin{aligned} y &= 0 \text{ bis } y = (1-\delta)e \\ y &= (1-\delta)e \text{ bis } y = e \\ y &= e \text{ bis } y = h. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir noch mit  $S_1 S_2 S_3$  die statischen Momente der Flächenteile  $F_1 F_2 F_3$  in bezug auf die Oberkante der Fläche  $F$ , so giebt die Ausführung der Integration die Werte

$$F_1' = F_1, \quad F_2' = \frac{F_2}{\delta} - \frac{S_2}{e\delta}, \quad F_3' = \frac{S_3}{e\delta} - \frac{F_3}{\delta}.$$

Vergrössern wir nun  $e = GA$  um den sehr kleinen Betrag  $\Delta e = AA'$  und lassen  $\delta$  unverändert, so muss auch das Verhältnis  $\frac{BE}{GA}$  unverändert den Wert  $1 - \delta$  behalten, also muss

$$EE' = (1 - \delta)AA' = (1 - \delta)\Delta e \text{ sein.}$$

Infolge dieser Aenderungen geht der unter dem Integralzeichen stehende Quotient

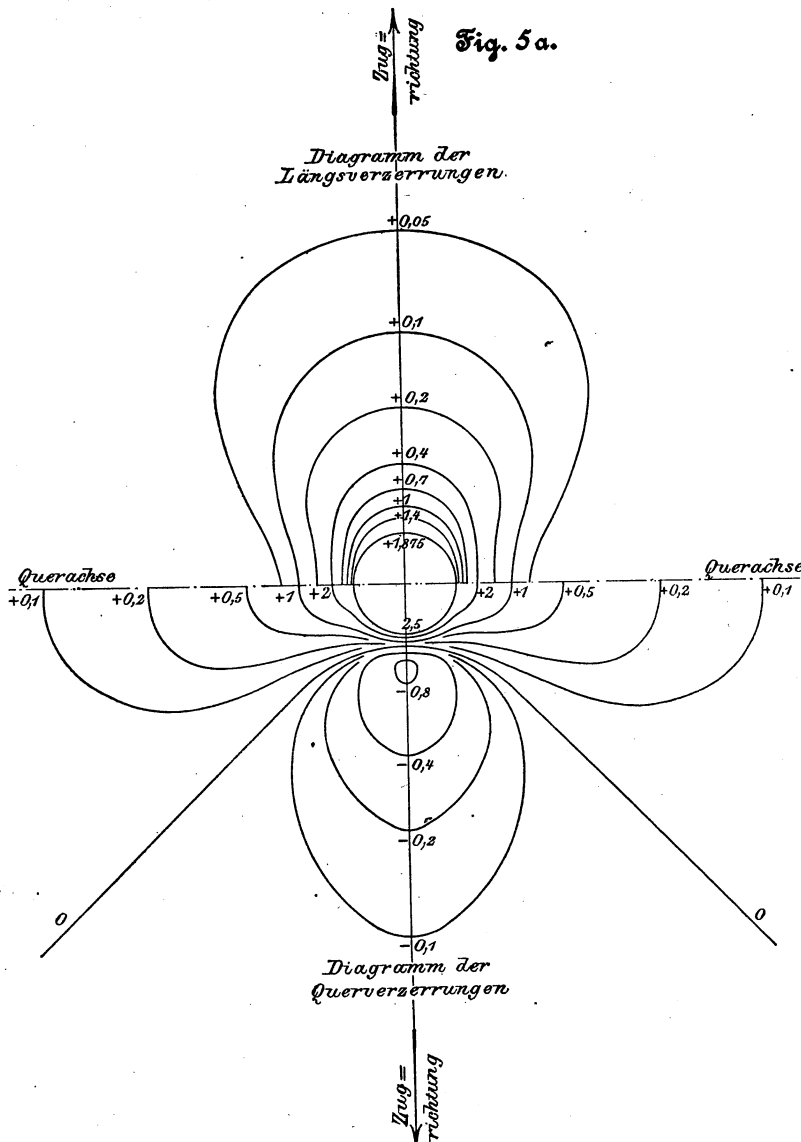
$$\frac{e-y}{e\delta} \text{ über in } \frac{e+\Delta e-y}{(e+\Delta e)\delta} \text{ oder } \frac{e-y}{e\delta} + \frac{y}{e^2\delta}\Delta e;$$

die Integrationsgrenzen ändern sich ebenfalls um sehr kleine Beträge; da es aber für das Gesamtergebnis nur einen kleinen Unterschied höherer Ordnung ausmacht, ob man den an der Grenze zweier Flächenteile liegenden unendlich schmalen Streifen als zu dem einen oder dem anderen Integral gehörig rechnet, so dürfen wir die Integrationsgrenzen ungeändert lassen und erhalten dann für die Aenderungen der einzelnen reduzierten Flächenteile die Werte

$$\Delta F_1' = 0, \quad \Delta F_2' = \int x \frac{y\Delta e}{e^2\delta} dy = \frac{\Delta e}{e^2\delta} S_2, \quad \Delta F_3' = -\frac{\Delta e}{e^2\delta} S_3,$$

woraus als Gesamtänderung von  $F' = F_1' + F_2' - F_3'$  der Wert  $\frac{\Delta e}{e^2\delta} (S_2 + S_3)$  folgt. Nach unserer im Text gemachten Annahme war aber  $F'$  nicht genau gleich Null, wie es eigentlich sein sollte, sondern hatte den sehr kleinen Wert  $\Delta F'$ , welcher erst durch das Verschieben der Nullachse um  $\Delta e$  zum Verschwinden gebracht werden soll; daher muss

Fig. 5a.



Verschiebung des ungelochten Bleches durch den Einfluss des Loches verzerrt wird; sonach können wir die beiden Quotienten  $\frac{\xi - \xi_0}{\xi_0}$  und  $\frac{\eta - \eta_0}{\eta_0}$  als das Mass der durch das Loch verursachten Längs- und Querverzerrung bezeichnen. Das hiernach gezeichnete Diagramm, Fig. 5a, zeigt den Verlauf dieser Verzerrungen, welche schon in geringem Abstände vom Loch unmerklich werden.

#### Zusatz 4.

Bezeichnen wir die Gesamtverlängerung der 200 mm langen Versuchsstrecke mit  $\lambda_{200}$ , die Verlängerung der inneren 100 mm, nämlich je 50 mm rechts und links von der Bruchstelle, mit  $\lambda_{100}$ , so ist  $\lambda_{200} - \lambda_{100}$  die absolute Verlängerung der äusseren 100 mm, von der wir annehmen dürfen, dass sie nicht mehr durch die Bruchstelle beeinflusst wird. Die Differenz zwischen den Verlängerungen der inneren und

$\Delta F' + \frac{\Delta e}{e^2 \delta} (S_2 + S_3) = 0$  werden, woraus sich die erforderliche Verschiebung  $\Delta e$  zu

$$\Delta e = - \frac{e^2 \delta \cdot \Delta F'}{S_2 + S_3}$$

berechnet.

Die Momente  $S_2$  und  $S_3$  kann man nach dem Gesagten ersetzen durch  $e(F_2 - F_2' \delta)$  und  $e(F_3' \delta + F_3)$ , woraus

$$S_2 + S_3 = e(F_2 + F_3) - e(F_2' - F_3') \delta$$

folgt; da nun noch

$$F_2 + F_3 = F - F_1 = F - F_1'$$

sowie  $F_2' - F_3' = -F_1'$  ist, weil  $F' = 0$  sein muss, so folgt schliesslich

$$\Delta e = - \frac{e \delta \cdot \Delta F'}{F - (1 - \delta F_1')}.$$

#### Zusatz 6.

Die Knickfestigkeit konnte wegen der Kürze der für den Vortrag zur Verfügung stehenden Zeit garnicht berührt werden, weshalb hierüber noch einige Worte folgen mögen. Dass ein gerader prismatischer Stab einem in seiner Längsrichtung wirkenden Drucke von genügender Grösse durch seitliche Ausbiegung ausweicht, ist natürlich in erster Linie darauf zurückzuführen, dass die vorausgesetzten Bedingungen nie genau erfüllt sind, indem der Stab weder genau gerade, noch auch genügend homogen ist; besonders der letztere Umstand ist die Veranlassung, dass er sich infolge ungleicher Verkürzung krumm zieht und dass dann der hierdurch entstandene Biegungspeil eine zur Stabachse senkrechte Kraft  $Q$  hervorruft, welche die Durchbiegung nach Umständen bis zum Bruche vergrößert.

Sei  $f_0$  die durch ungleiche Verkürzung entstandene oder auch von Haus aus schon vorhanden gewesene und  $f$  die durch die Querkraft  $Q$  noch hinzugekommene Ausbiegung, Fig. 10, dann besteht zwischen diesen Grössen das Verhältnis

$$\frac{1}{2} Q : P = (f_0 + f) : \frac{1}{2} l,$$

woraus  $Q = \frac{f_0 + f}{l} 4 P$  folgt; andererseits hat die durch  $Q$  hervorgerufene Ausbiegung  $f$  nach der Biegungslehre den Wert

$$f = \frac{1}{48} \frac{Q l^3}{E J};$$

durch Elimination von  $Q$  folgt  $f = \frac{P l^3}{12 E J - P l^2} f_0$ , woraus sich ergibt, dass  $12 E J > P l^2$  oder  $P < 12 \frac{E J}{l^2}$  sein muss, wenn  $f$  nicht unendlich gross werden soll. Der Form nach ist dies die Eulersche Gleichung; nur ist der Zahlenfaktor ungenau, was aber nicht viel verschlägt, da auch der Eulersche Faktor  $\pi^2$  keine grosse praktische Bedeutung hat. Uebrigens ist es ein leichtes, auf demselben Wege eine beliebig genauere Zahl für jenen ersten groben Wert 12 abzuheften; anstatt nämlich den gekrümmten Balken wie oben ganz roh durch ein Polygon von nur zwei Seiten zu ersetzen, können wir genauer ein mehrseitiges Polygon wählen und erhalten dann in jeder Ecke dieses Gelenk- oder Seilpolygons eine gewisse Querkraft, welche graphisch ermittelt werden kann; die Grösse dieser Querkraft hängt natürlich von der Form der gekrümmten Mittellinie ab, und umgekehrt wieder

ergibt sich die Form dieser Linie erst aus der Grösse der Kräfte  $Q$ , sodass man auf graphisches Ausprobieren angewiesen ist. Nehmen wir anstelle dessen einmal an, was jedenfalls sehr annähernd zutrifft, die Mittellinie wäre eine Parabel von der Pfeilhöhe  $f_0 + f$ , so hätte das Seilpolygon unendlich viele Eckpunkte, also löste sich die Einzelkraft  $Q$  in eine stetig, und zwar gleichmässig über den ganzen Stab verteilte Querkraft auf. Bei der Zerlegung an den Enden wäre dann allerdings zu beachten, dass der Längsdruck  $D$  nicht die Richtung der Sehne des halben Bogens, sondern die Richtung der Endtangente haben muss und dass diese die Achse der Parabel im doppelten Abstände  $2(f_0 + f)$  trifft, sodass wir jetzt die Proportion hätten:

$$\frac{1}{2} Q : P = 2(f_0 + f) : \frac{1}{2} l,$$

woraus

$$Q = \frac{f_0 + f}{l} 8 P$$

folgt; diese gleichmässig über die Länge  $l$  verteilte Last ruft aber bekanntlich die Durchbiegung  $f = \frac{5}{384} \frac{Q l^3}{E J}$  hervor, woraus sich dann durch Elimination von  $Q$  der Wert

$$f = \frac{P l^3}{9,6 E J - P l^2} f_0$$

ergibt, sodass  $P < 9,6 \frac{E J}{l^2}$  wird.

Um die Uebereinstimmung dieser Gleichung mit der Wirklichkeit zu prüfen, wählen wir den auch von Bach in seiner »Festigkeitslehre« (3. Aufl. S. 239) mitgetheilten Versuch von Bauschinger; setzen wir für diesen Fall  $f_0 = 1,44$  mm und  $9,6 \frac{E J}{l^2} = 4119$  kg, so erhalten wir

$$f = \frac{1,44 P}{4119 - P},$$

woraus sich die folgende Tabelle berechnet, in welcher die von Bauschinger beobachteten Werte mit  $f'$  bezeichnet sind.

$P$	$f$ berechnet	$f'$ beobachtet	Fehler $f - f'$
200	0,07	0,00	+ 0,07
400	0,16	0,04	+ 0,12
600	0,24	0,11	+ 0,13
800	0,35	0,20	+ 0,15
1000	0,46	0,34	+ 0,12
2000	1,36	1,25	+ 0,11
3000	3,86	3,88	- 0,02
3200	5,01	5,08	- 0,07
3400	6,80	6,86	- 0,06
3600	9,98	9,92	+ 0,06
3800	17,14	17,14	+ 0,00

Die vorstehende Ableitung hat jedenfalls den Vorteil, dass die unendlich grosse Durchbiegung beim Bruch nicht unvermittelt aus dem geheimnisvollen Dunkel einer Differenzialgleichung in den Vorstellungskreis emportaucht, sondern dass man sie vor seinen Augen Schritt für Schritt entstehen sieht.

## Die elektrische Kraft- und Lichtanlage in der Buchdruckerei von Rudolf Mosse in Berlin.

Von B. Stein, Civilingenieur in Berlin.

Die Vorteile des elektrischen Einzelbetriebes haben seit kurzem auch in dem Buchdruckereiwesen Anerkennung gefunden. In diesem Geschäftszweige sind bezüglich der Kraftverteilung bedeutende Schwierigkeiten zu überwinden. Die Räumlichkeiten, in denen die Druckereimaschinen Platz finden, sind meist beschränkt und liegen oft in verschiedenen Stockwerken; ferner ist der Betrieb der Druckerpressen, weil die Zurichtung von Zeit zu Zeit erneuert werden muss, durch

Ruhepausen unterbrochen. Unter solchen Umständen erweist sich der elektrische Einzelbetrieb als vorzüglich, und die bekannten hervorragenden Eigenschaften des Elektromotors treten in das hellste Licht. Sie beruhen in dem geringen Gewicht und Raumbedarf, in dem stoffsreien und geräuschlosen Gange, in der bequemen und gefahrlosen Bedienung, in der Reinlichkeit und leichten Betriebsregelung, endlich aber auch noch in dem hohen, von der Belastung fast unab-

Fig. 10.

