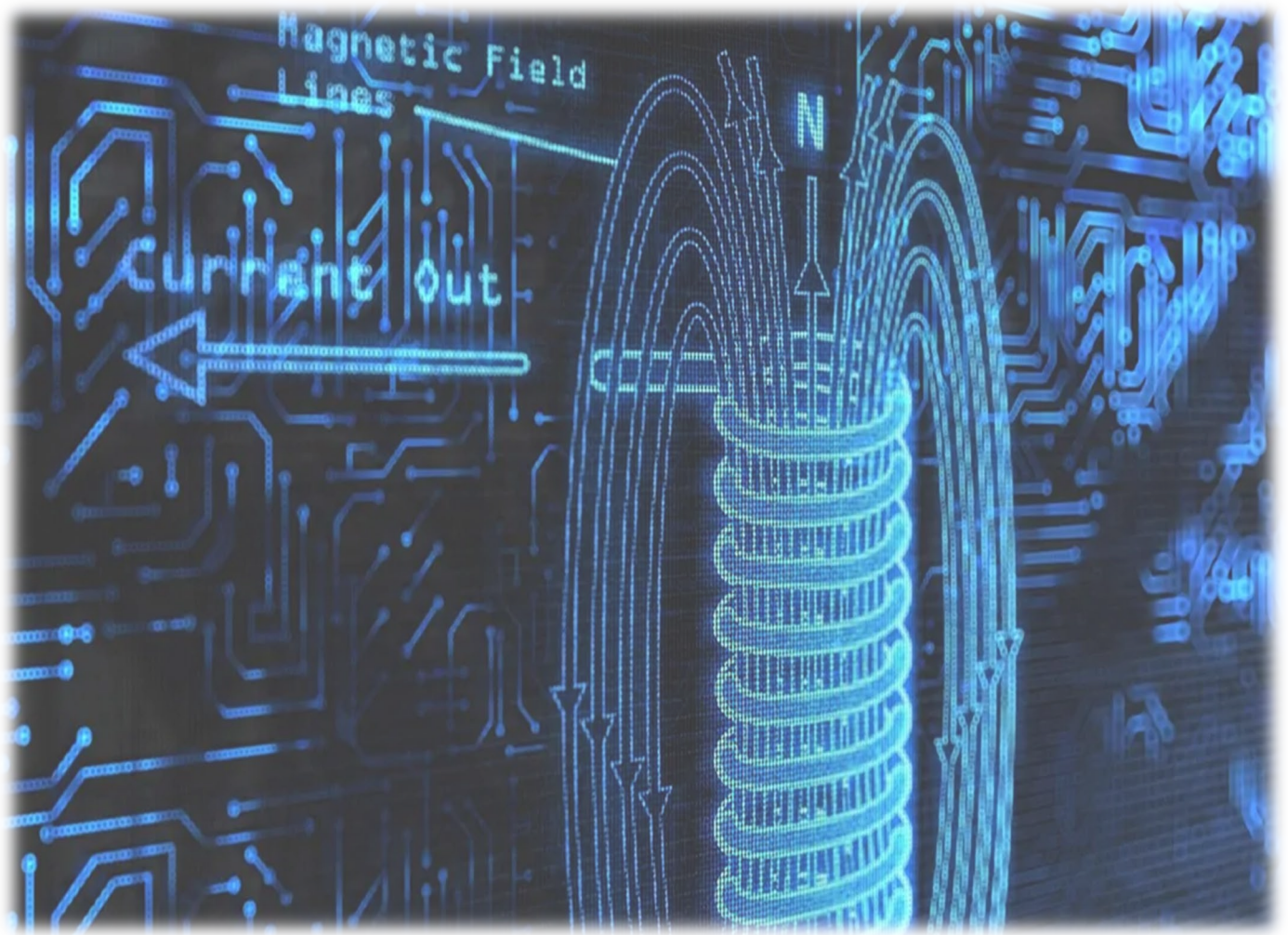


**Υπολογιστικός Ηλεκτρομαγνητισμός
Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών στο χρόνο
(FDTD)**



Στην παρούσα εργασία μας ζητείται να προσομοιάσουμε έναν δισδιάστατο χώρο πλέγματος 100×100 βήματος $\Delta x = \Delta y = \lambda_0 / 10$. Σε αυτό το χώρο θέλουμε να μελετήσουμε την συμπεριφορά των ηλεκτρομαγνητικών συστησιστών που δημιουργούνται από κύμα TM μέσο ημιτονοειδής πηγής (hard source) Ez συνιστώσας (το κύμα κατευθύνεται προς τα πάνω κατά z και εμείς παρατηρούμε το επίπεδο xy). Στο χώρο αυτό τοποθετούμε και ένα κύλινδρο με αγωγιμότητα (άπειρος κατά z) που λειτουργεί ως σκεδαστής.

Τέλος καθώς η μέθοδος υπολογισμού των συνιστωσών είναι η FDTD (Finite domain time differences) στην αριστερή πλευρά του πλέγματος θα εφαρμόσουμε απορροφητικές συνθήκες MUR ή θα προσθέσουμε PML συγκεκριμένου πλάτους ώστε το κύμα να συμπεριφέρεται σαν να ήμαστε στον ελεύθερο χώρο χωρίς την προσθήκη παραπάνω υπολογιστικού χώρου και την αύξηση τις διακριτοποίησης του πλέγματος.

Σημείωσή: εννοώ η χρήση PML και MUR δεν παρουσιάζουν μηδενικό σφάλμα σε σύγκριση με την περίπτωση ελεύθερου χώρου, η “εξοικονόμηση” στο υπολογιστικό χώρο είναι ιδιαίτερα σημαντική σε μεγαλύτερα προβλήματα και όταν κάνουμε την ίδιο ανάλυση σε 3D χώρο.

A1) Αρχικά προκειμένου να μην οδηγούμε σε αστάθεια κατά την προσομοίωση FDTD θα χρειαστώ ένα κριτήριο ευστάθειας, προφανώς αυτό θα εκφράζεται σαν κριτήριο του μέγιστου χρονικού βήματος που επιτρέπεται και δύνανται από τον τύπο

$$\Delta t \leq \frac{1}{v_p \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}}}$$

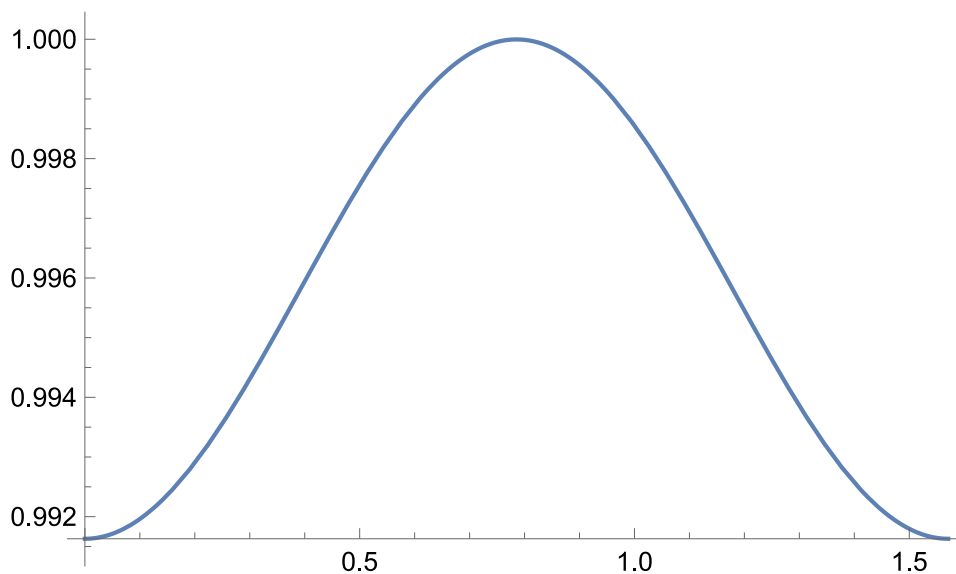
Που στην περίπτωση μας με $\Delta x = \Delta y = \lambda_0 / 10$ και διάδοση κύματος $v_p = c$ ταχύτητα του φωτός, υπολογίζεται ότι $\Delta t \leq 7.07 \cdot 10^{-12}$

Σημείωση: στο κύλινδρο θα έχουμε μικρότερο $\Delta t'$ ωστόσο για να μην έχω αστάθεια στον ελεύθερο χώρο θα χρησιμοποιήσω την παραπάνω σχέση.

A2) Λόγω της διακριτοποίησης του πλέγματος , ειδικά στην FDTD που διακριτοποιούμε ορθογώνια δημιουργούνται σφάλματα , ένα από αυτά η διαφορά τις φασικής ταχύτητας που παρουσιάζεται στο πλέγμα από την πραγματική. Η αριθμητική φασική ταχύτητα υπολογίζεται

$$\bar{v}_p = \pm \frac{2}{k\Delta t} \sin^{-1} \left\{ \frac{v_p \Delta t}{\Delta x} \sqrt{\sin^2 \left(\frac{k \cos \theta \Delta x}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{k \sin \theta \Delta x}{2} \right)} \right\}$$

Το διάγραμμα λόγου της φασικής ταχύτητας του αριθμητικού πλέγματος προς την πραγματική φασική ταχύτητα δίνεται από το παρακάτω διάγραμμα



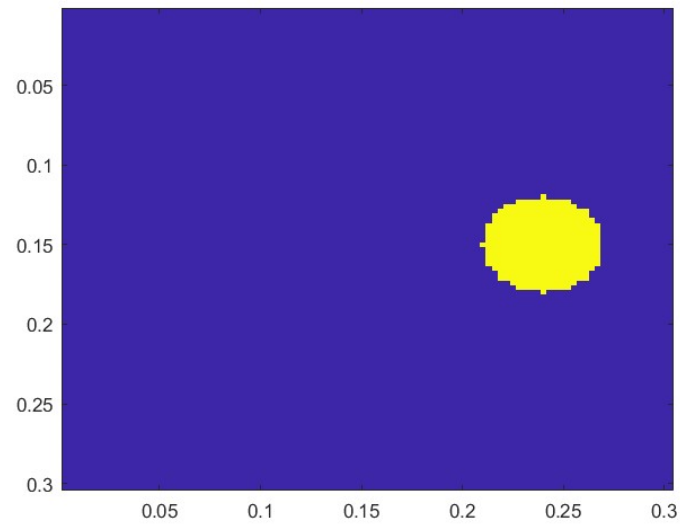
Με ανάλυση στο γράφημα φαίνεται ότι το μέγιστο είναι στα 0,78 rad η 45 μοίρες.

B) Αρχικά λίγα λόγια για το κώδικα αποτελείται από τα αρχεία FDTD_CEM_9958 (free space $E_z=0$ οριακά στο πλέγμα) , FDTD_CEM_objct_9958 (ομοίως άλλα με τον αγωγίμο κύλινδρο) , FDTD_CEM_9958_with_object_MUR και FDTD_CEM_9958_with_object_PML που προσθέτουν στη αριστερή πλευρά απορροφητικές συνθήκες MUR και PML αντίστοιχα.

Επίσης χρησιμοποιούνται και αρχεία error_free_space (χώρος πλέγματος 200x200) , MUR_error και PML_error (δεν περιέχουν αγωγίμο κύλινδρο) και χρησιμοποιούνται για να μελετήσουν το σφάλμα το απορροφητικών συνθηκών συγκρίνοντας το με τον χώρο μεγαλύτερου πλέγματος.

Ο κώδικας είναι παραμετροποιημένος ώστε με απλές αλλαγές από τον χρήστη να μπορέσει να πύκνωση η να αραιώσει το πλέγμα , επίσης για την ανανέωση των ηλεκτρομαγνητικών συνιστωσών δεν χρησιμοποιείται “for loop” αλλά απλή αντιγραφή και πράξεις πινάκων που στο MATLAB καθιερώνουν το κώδικα πιο γρήγορο.

B1) Μπορεί να φανεί στα αρχεία που στέλνονται ευδιάκριτα, η γεωμετρία του κυλίνδρου φαίνεται με το παρακάτω



B2)

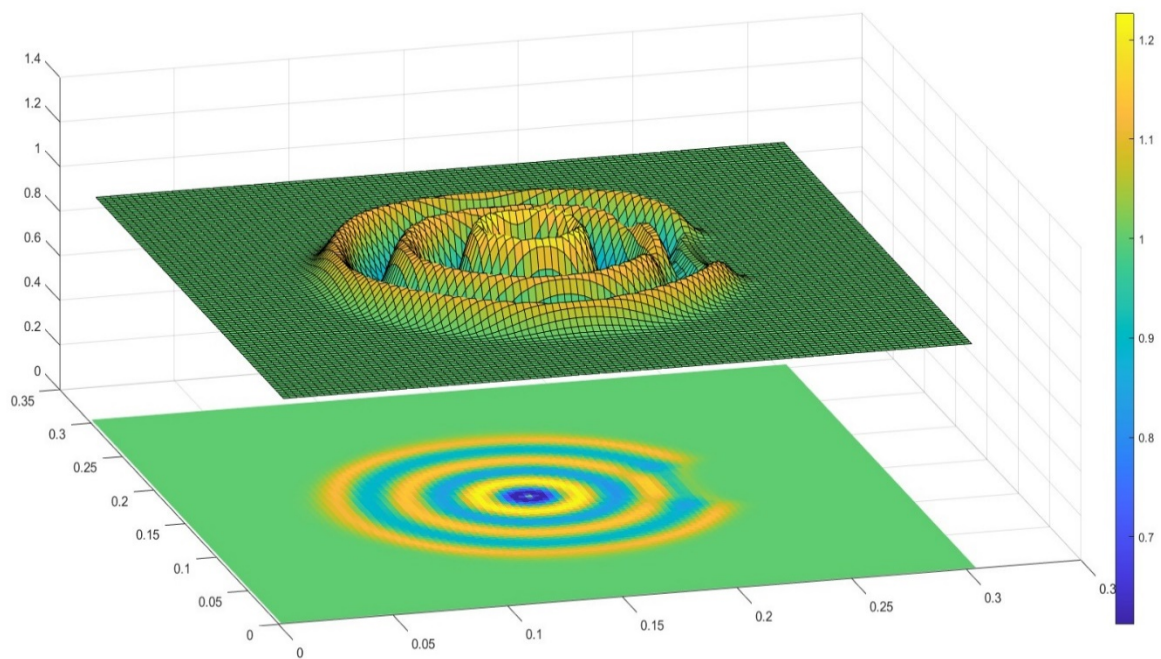


Figure 1 Χρονική στιγμή $3 \cdot T_0$

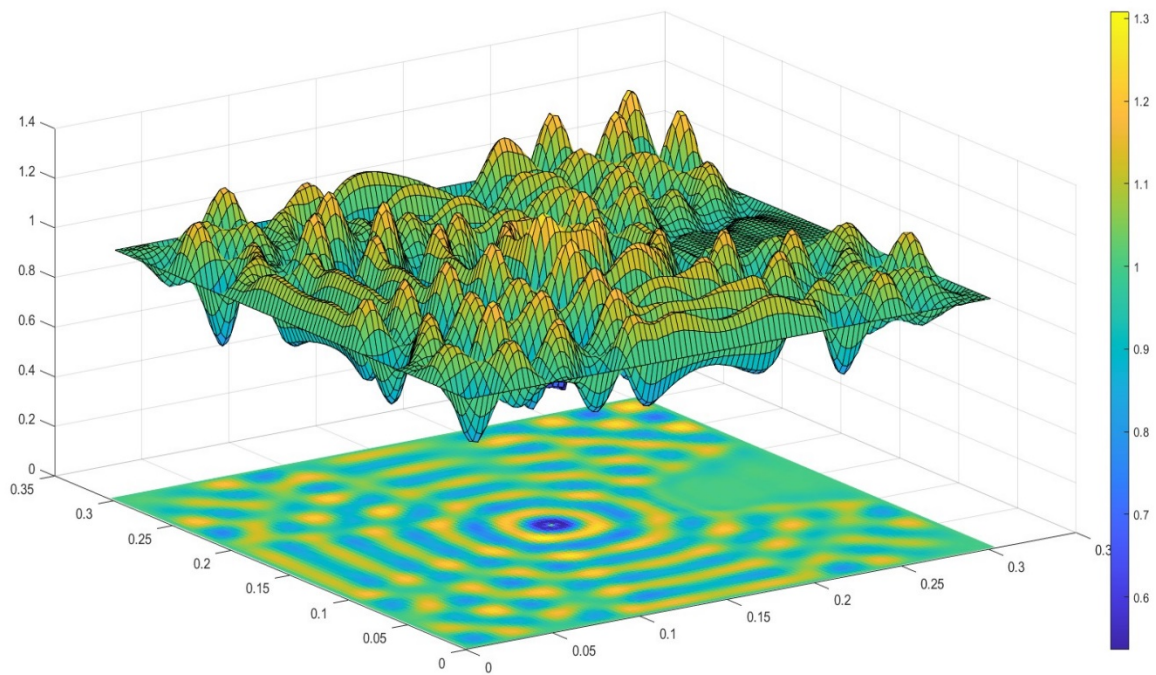


Figure 2 Χρονική στιγμή $10 \cdot T_0$

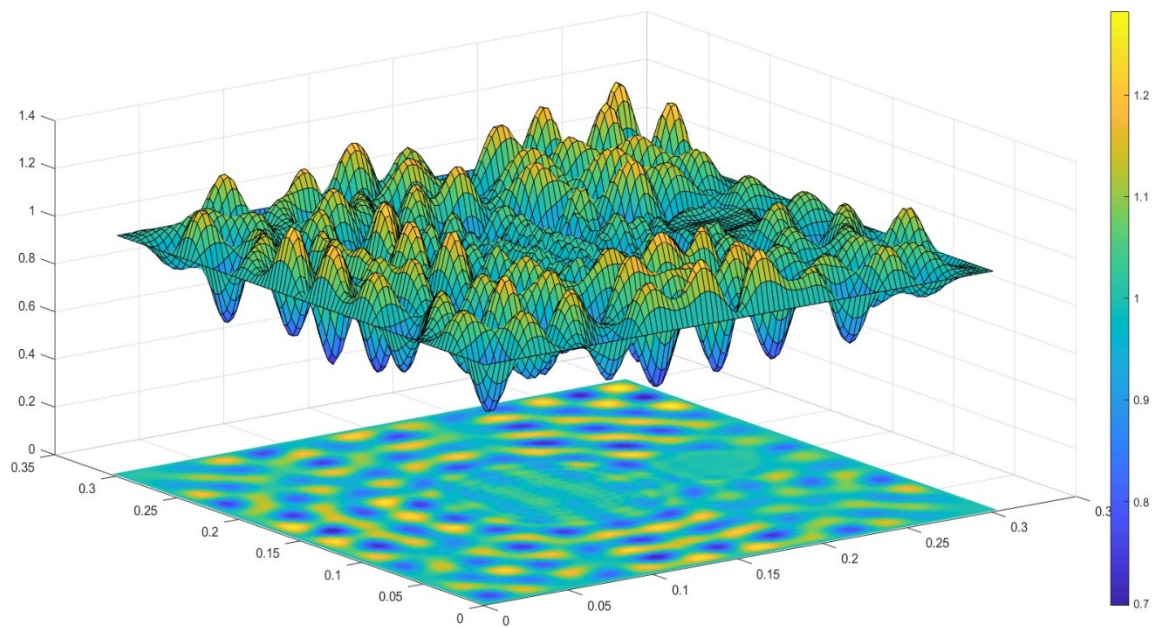


Figure 3 Χρονική στιγμή $12 \cdot T_0$

Χρονική στιγμή $3 \cdot T_0$: παρατηρούμε ότι το κύμα δεν έχει διαδοθεί σε όλο το υπολογιστικό χώρο και μόνο στην μία πλευρά του κυλίνδρου.

Χρονική στιγμή $10 \cdot T_0$: παρατηρούμε ότι το κύμα έχει διαδοθεί πλήρως ωστόσο η αναπαράσταση δεν είναι σωστή λόγω των ανακλάσεων του κύματος από την οριακή συνθήκη $E_z=0$.

Χρονική στιγμή $13 \cdot T_0$: παρατηρούμε ότι το κύμα έχει διαδοθεί πλήρως ωστόσο η πηγή έχει σταματήσει την διάδοσή της , αυτό φαίνεται στο ποιο αραιό όσο αφορά τα πεδία κεντρικό χώρο.

Σημείωση : για το color bar αρχίζει από 1 το οποίο αντίστοιχά όμως στο 0 χρειάστηκε να το υλοποιήσω έτσι ώστε να έχω το 2D και 3D διάγραμμα μαζί.

Τώρα θα κάνουμε ανάλυση με $\Delta t = 1.2 \Delta x / c$

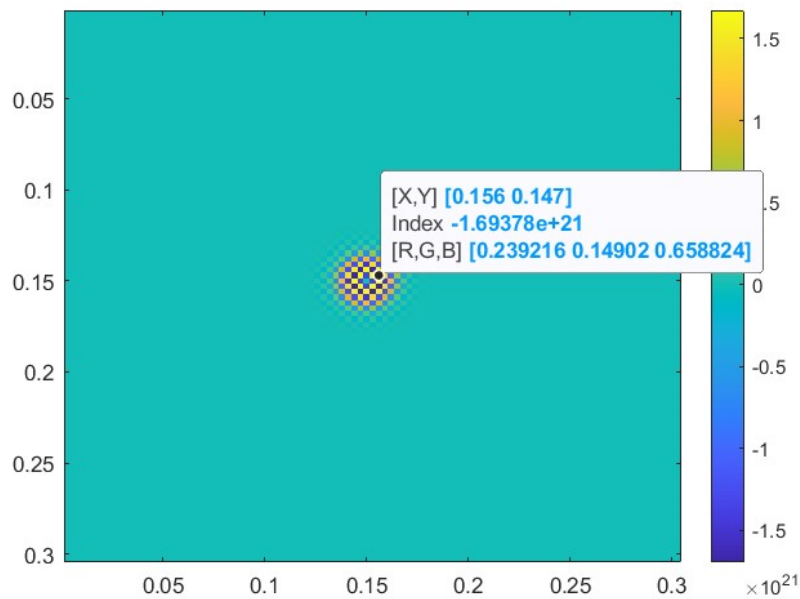


Figure 4 Χρονική στιγμή $3 \cdot T_0$ αστάθεια

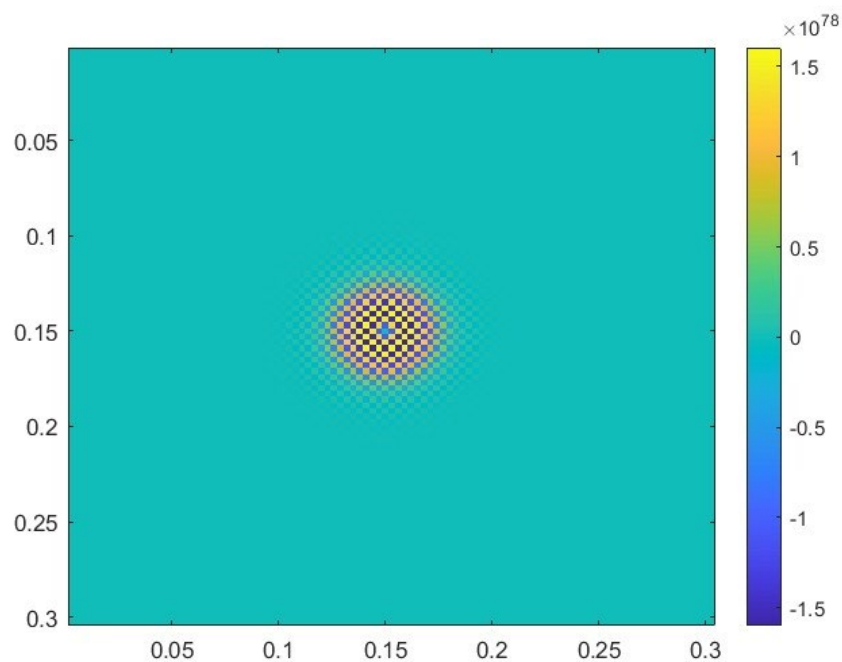


Figure 5 Χρονική στιγμή $10 \cdot T_0$ αστάθεια

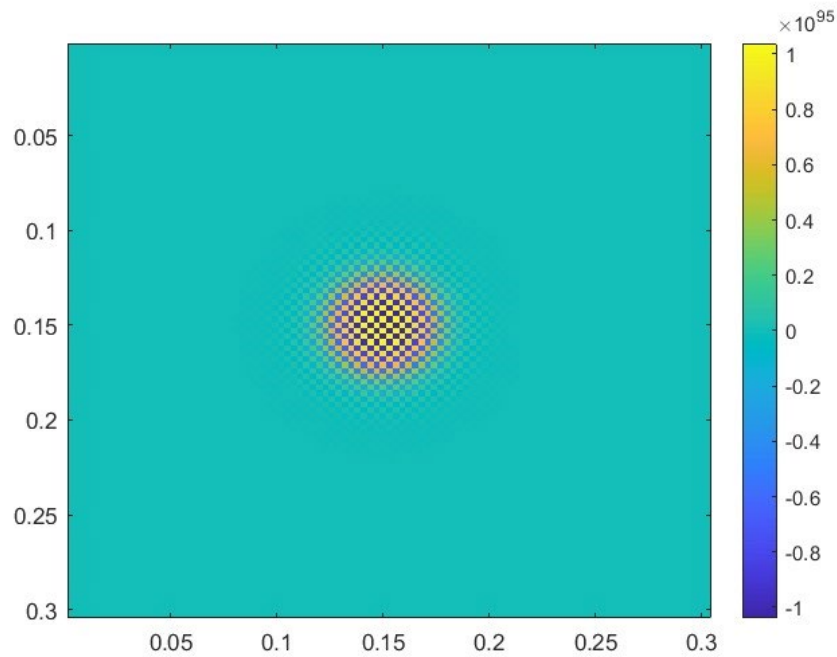


Figure 6 Χρονική στιγμή $12 \cdot T_0$ αστάθεια

Για όλες τις χρονικές στιγμές παρατηρούμε ότι οδηγούμαστε σε αστάθεια το κύμα δεν διαδίδεται σωστά, δεν είναι ανάγκη να κάνουμε 3D διάγραμμα καθώς με τόσο μεγάλη διαφορά στο εύρος τιμών δεν οπτικοποιείται σωστά

B3) Για την χρονική στιγμή $8 \cdot T_0$ θα δούμε τα διαγράμματα PML και Mur καθώς τότε φαίνεται εμφανή η χρησιμότητα των απορροφητικών συνθηκών (δεν έχουν φτάσει ακόμα η ανακλάσεις από τις άλλες πλευρές).

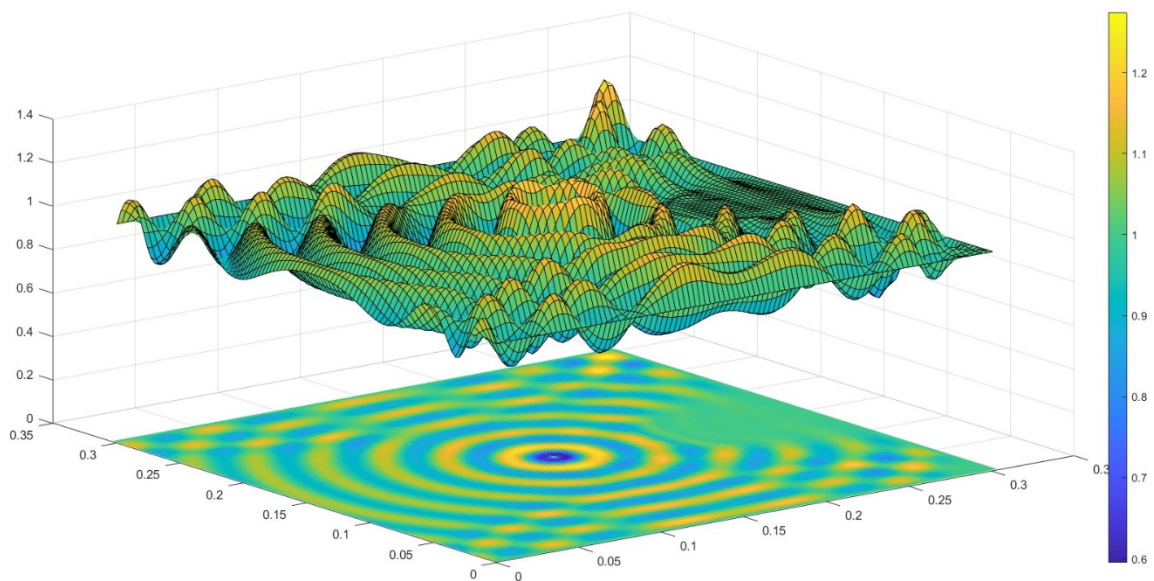


Figure 7 συνθήκη MUR για $8T$

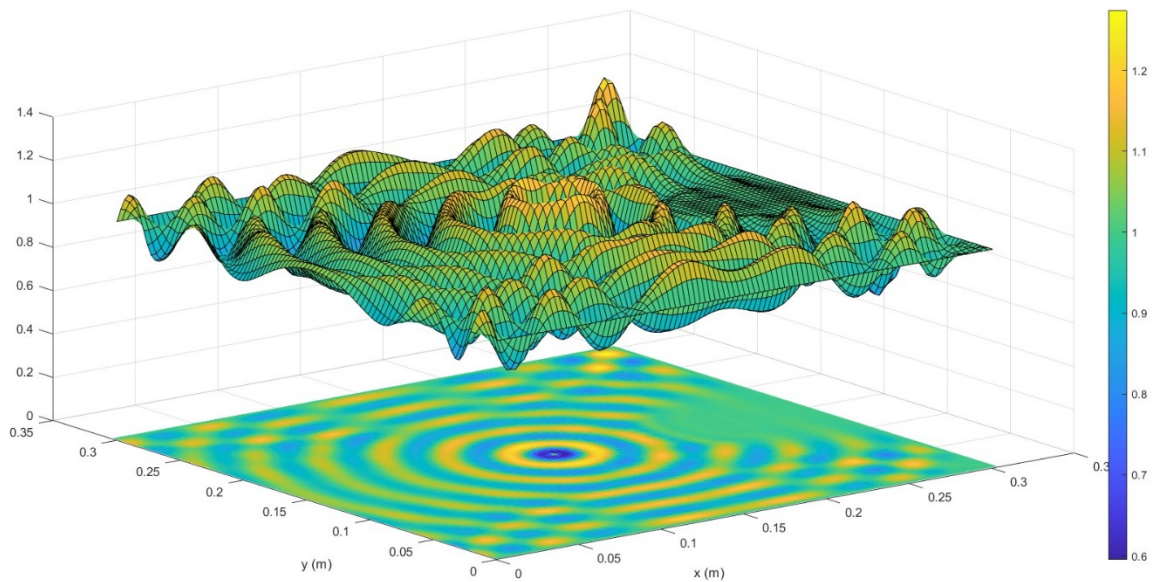
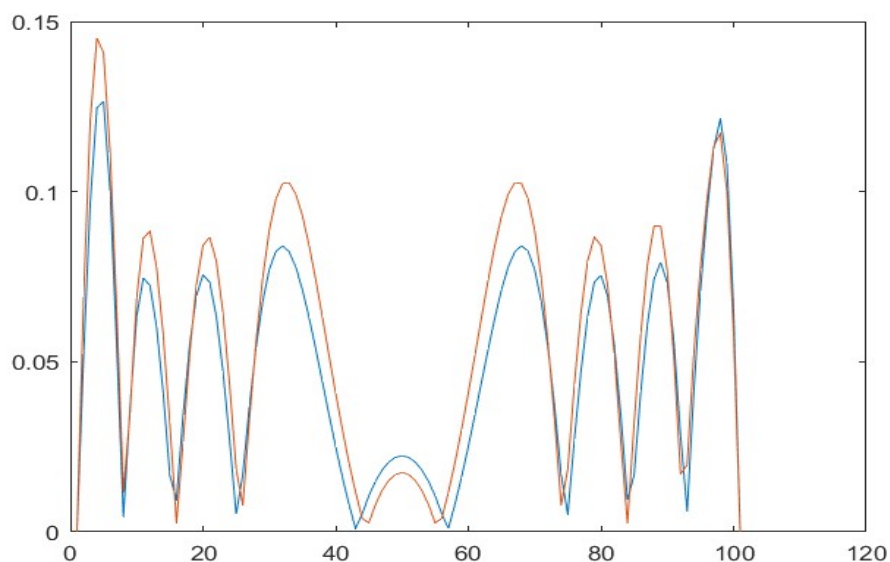


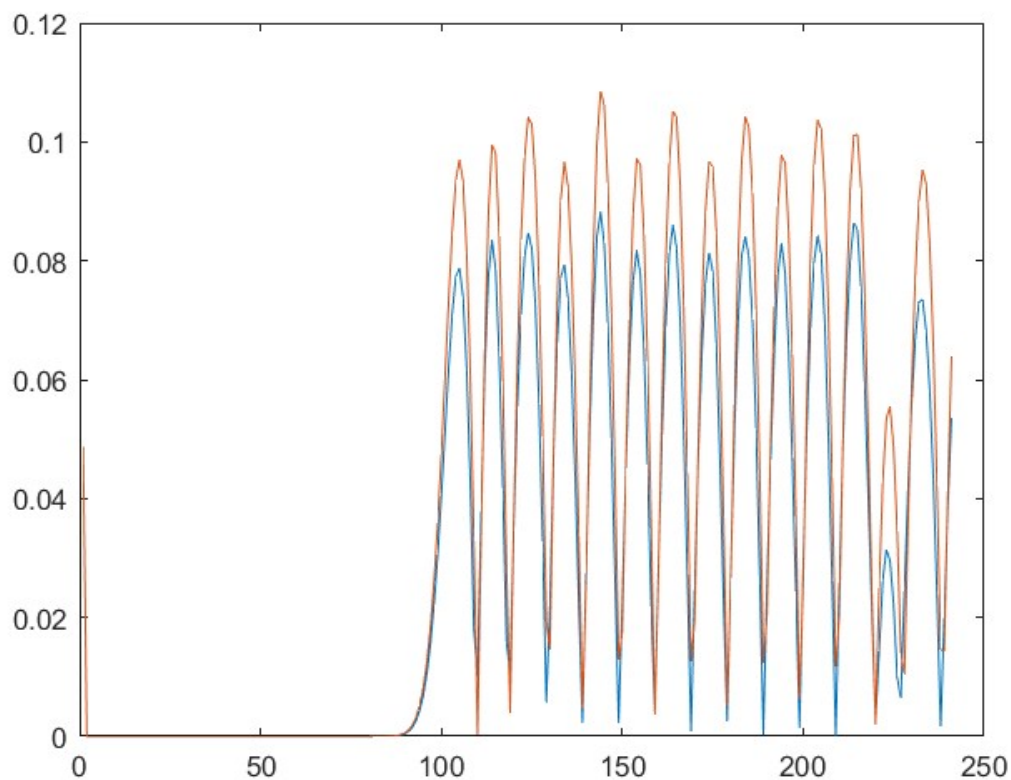
Figure 8 συνθήκη PML για 8T

Ελάχιστη διαφορά φαίνεται στις δυο περιπτώσεις για αυτό θα κάνουμε διάγραμμα απόλυτου λάθους με την περίπτωση επεκταμένου 200x200 ελεύθερου χώρου με τις δύο περιπτώσεις για να δούμε ποια επιφέρει καλύτερο αποτέλεσμα . Χρησιμοποιώντας τα αρχεία error για χρονική στιγμή αποθηκεύουμε την διαφορά με την περίπτωση ελεύθερου χώρου για το αριστερό μέρος του πλέγματος και κάνουμε το παρακάτω διάγραμμα



Το PML (Κόκκινο) φαίνεται να συμπεριφέρεται καλύτερα σε ποιο επίπεδο κύμα (40-60 πλέγμα) ωστόσο και τα δύο παρουσιάζουν μικρή διαφορά (το PML έπρεπε να έχει καλύτερη συμπεριφορά, αλλά δεν κατάφερα να το κάνω)

Παρέχεται και ένα επιπλέον διάγραμμα που δείχνει το απόλυτο σφάλμα του σημείου 1, 50 του πλέγματος σε σχέση με το χρόνο από χρονική 0 έως $12 \cdot T_0$ (241 βήματα με το επιλεγμένο dt)



B4) Σύμφωνα με την εκφώνηση δημιουργούμε τα εξής διαγράμματα για MUR και PML αντίστοιχα.

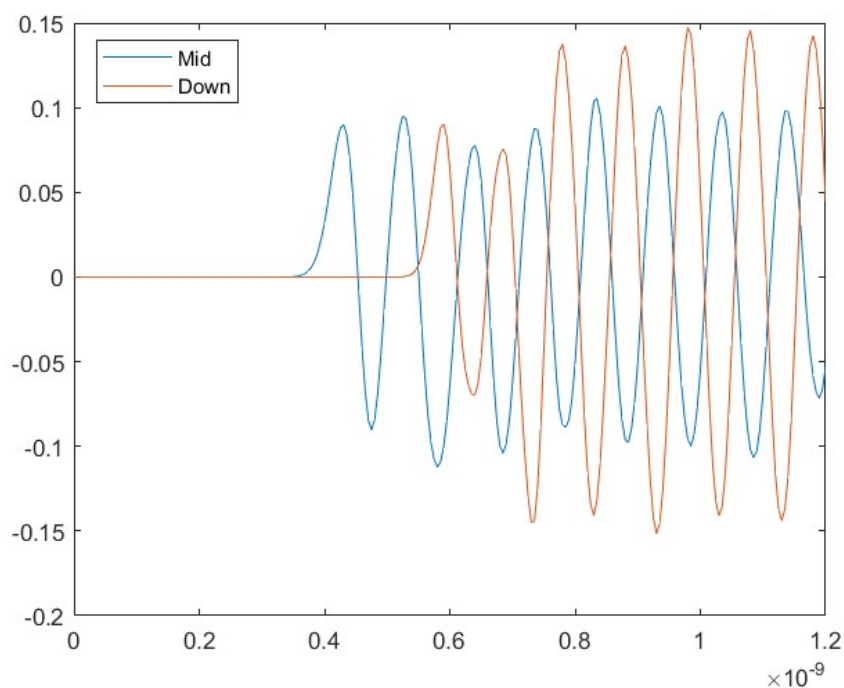


Figure 9 σημεία στο MUR

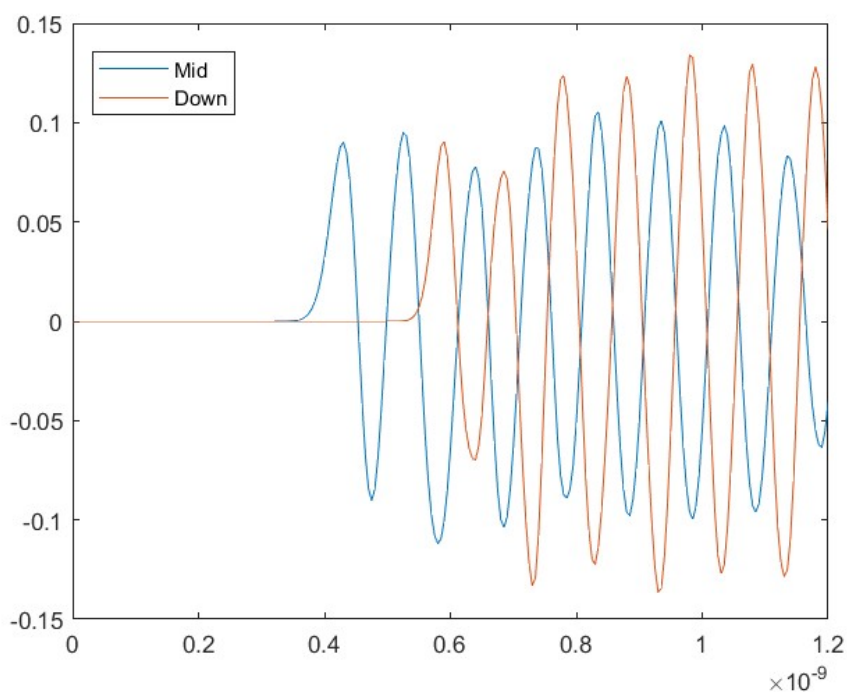


Figure 10 σημεία στο PML

Σχεδόν παρόμοια διαγράμματα το , στο PML ωστόσο παρατηρούμε μια μείωση στην μέγιστη τιμή του πεδίου (και το ότι το κάτω αριστερά σημείο και στις δύο περιπτώσεις εφόσον είναι ποιο μακριά αρχίζει να ταλαντώνεται ποιο μετά)

Σημειώσει και λίγα λόγια για το κώδικα καθώς και κάποιες γενικές πληροφορίες για την καλύτερη κατανόησή του.

Όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω έχει δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στην παρατροποίηση των μεταβλητών του κώδικα ώστε να μπορεί να αλλαχθούν εύκολα η συνθήκες λειτουργίας

Το πλέγμα αλλάζει εύκολα αλλάζοντας τις μεταβλητές GridX , GridY .

Σημείωση : το πλέγμα δεν χρειάζεται να είναι τετραγωνικό αλλά προτείνεται).

dt, dx, dy, GridDiv: βήμα χρόνου , βήμα x , βήμα y ,

υποδιαίρεση του πλέγματος σε λ/GridDiv.

tTimes=0: dt: Tmax όπου Tmax ο επιθυμητός χρόνος προσομοιώσεις

Αντίστοιχα εύκολα διαμόρφωση είναι της πηγής και προσθήκη άλλων σκεδαστών (μπορούμε εύκολα πχ να προσθέσουμε ένα κύβο).

Επίσης στο MATLAB η αντιμετώπιση πινάκων γίνεται rows x columns που στην οπτικοποίηση έχει αποτέλεσμα το $(i,j) \rightarrow (y,x)$ αλλά η υλοποίηση του κώδικα γίνεται με $(i,j) \rightarrow (x,y)$ έτσι για την σωστή οπτικοποίηση χρειάζεται η πράξη A' στα plot.

Δίνεται η επιλογή να δούμε μόνο το 2D διάγραμμα κάνοντας comment την 1,2,4 γραμμή του κώδικα και αφαιρώντας το +1

```
surf(x,y,Ez'+1)
hold on
imagesc(x,y,Ez'+1)
hold off
```