

```
1 using PlutoUI, Plots, Statistics
```

```
►PlotlyBackend()
```

```
1 plotly()
```

Modelo de Desperdicio de Grafito en Lápices

por Alan David Acero Cortes, Johan Andres Lopez Botero y Nicolas Duque Molina

1. Problema

Para un lápiz de madera con núcleo de grafito, afilado con un sacapuntas tradicional, ¿cuál es el porcentaje de grafito que se desperdicia? Construya un modelo que permita estimar este porcentaje por cada lápiz.



2. Contexto del Problema

2.1 Breve Historia del Lápiz

El lápiz de grafito apareció por primera vez alrededor de 1564, luego del descubrimiento de un yacimiento de grafito cerca de Borrowdale, Cumbria, en Inglaterra. Este yacimiento de gran tamaño, y pureza (que no se ha encontrado en otro yacimiento a nivel mundial) pronto adquirió gran valor, en un principio fue usado para marcar ovejas, pero al poder ser usado para revestir bolas de cañón, la corona británica tomó control de las minas. Por su utilidad para marcar, artistas del todo el mundo conocido fueron atraídos por sus propiedades, además por ser blando se usaba envuelto en cordeles o en cuero de oveja. En los depósitos de grafito que han sido encontrados en otras partes del mundo, no poseían la pureza del de Borrowdale, entonces tenía que ser purificado para limpiar impurezas.



La idea de los lápices de madera fue dada por una pareja italiana, Simonio y Lyndiana Bernacotti, su principal idea (que de hecho es como yo pensaba que se hacían) es perforando la madera e insertando la mina, posteriormente pensaron en cortar 2 pedazos de madera en forma de semicírculo, dejando así el espacio para la mina, y después pegarlos con presión, este es el método vigente hoy en día.

Mientras las guerras napoleónicas, los lápices ingleses y alemanes no estaban al alcance de los franceses, así el interés por estos por parte de un oficial, Nicolas-Jacques Conté, lo llevó a inventar un método para endurecer las minas, mezclando el grafito con arcilla y agua, y cocinando, pese a que había sido descubierto 5 años antes por el austriaco Josef Hardtmuth fundador de Koh-I-Noor (empresa que lo patentó en Alemania), por la necesidad en la guerra se le dio mucho más importancia a Nicolás Corté.

Cuando llegaron a estados unidos, después de la guerra de independencia, se empezó a hacer en gran escala, y Ebenezer Wood, al notar que el proceso era tan lento se propuso a automatizar el proceso, dentro de eso fue el primero en construirlas con formas octogonales y hexagonales. A finales del siglo XIX, se utilizaban más de 240.000 lápices al día en Estados Unidos, cuya madera más usada era la del cedro rojo, la cual es aromática. Cuando empezaron a escasear los recursos, se empezó a usar cedro de incienso, el cual después de pintar y perfumar se parecía lo suficiente al cedro rojo. Esta es la madera que se usa más para hoy en día.

El accesorio del borrador fue añadido el 30 de marzo de 1858, cuando Hymen Lipman recibió la primera patente para colocar una goma de borrar en el extremo de un lápiz. A su vez otro artículo muy usado son los extensores de lápiz, tanto entre ingenieros como artistas, para sacar el mayor provecho de estos artilugios. con ello el pedazo de lápiz que no pudieran usar por no tener suficiente superficie de agarre, no sería desperdiciado.

2.2 Composición del Lápiz

La mina del lápiz actual comprende una mezcla entre grafito y arcilla, junto con agua. Fue descubierto que diversas proporciones entre estos materiales cambian si la mina será muy dura o muy suave, lo cual influye tanto en la oscuridad de las marcas, como en la facilidad de su uso. Un mayor contenido de arcilla da como resultado una mina de lápiz más dura, ideal para trazos precisos y limpios sin la preocupación de que se rompa con frecuencia.

Los lápices, por tanto, tienen un espectro en su nivel de dureza. para eso hay una clasificación, la cual corresponde a las letras que aparecen por el borde del lápiz. 'H' representa las minas duras, 'B' representa las minas negras o suaves, El término medio es 'HB', equilibrando dureza y negrura. en lo que aumenta el número del 'H', corresponde a mayor suavidad de trazo, lease '2H' es más oscuro que '8H', por su parte con las 'B' es alrevez, el '2B' es más claro que '8B'.

Ahora, un lapiz para ser lápiz necesita de la madera, la madera que se consigue para la fabricación es en forma de paneles precortados; posteriormente, cada panel se talla con una sierra eléctrica, formando canales delgados para la mina de grafito; a esto le sigue distribuir los paneles para hacer un “sandwich” con la madera, se dividen con tal que uno acunara la mina del lapiz, en lo que el otro panel lo tapara, completando la icónica forma de lápiz; entonces en camino a ser prensados, se añade un pegamento especializado, y a esto le sigue apilar la madera y la mina; al esto haberse hecho, se coloca todo junto, prensando los paneles con maquinaria de alta presión que puede ejercer fuerza de hasta 1 000 kg. Ya habiendo sido prensados, se cortan de manera individual y se añaden detalles, tal como la goma de borrar, logotipos, información del lápiz, entre otros. así los lápices están listos para ser enviados y distribuidos a lo largo del mundo.

3. Desarrollo y ajuste del modelo

Para modelar correctamente la cantidad de grafito desperdiciado es esencial primero establecer cuáles son estas partes relevantes para este caso específico. Mediante la observación del proceso de tajado, se puede apreciar que éste se compone de desprender finas capas de tanto el recubrimiento

de madera como la mina para lograr una punta cuya forma se asemeja a un cilindro. Solo ocurre desperdicio de grafito cuando se retiran capas de la mina, independientemente del volumen del recubrimiento. Por lo tanto, es adecuado sugerir que un modelo que aproxime el grafito perdido en este proceso debe centrarse en la aproximación de la mina únicamente. Para simplificar el uso del lenguaje se llamará mina al cilindro completo de grafito de un lápiz y la punta solo incluirá su sección compuesta de este mismo material

3.1 Primer acercamiento

Se puede notar que al asemejarse la mina y la punta de un lápiz a las figuras geométricas del cilindro y el cono respectivamente, se puede aproximar igualmente sus volúmenes a través de éstas. Por ende, se tiene que:

$$V_{mina} = \pi r^2 l$$

$$V_{punta} = \frac{1}{3} \pi r^2 h_{punta}$$

donde l corresponde a la longitud de la mina y h_{punta} es la altura de la punta. En un principio se podrían tomar r como un valor variable y h_{punta} como un valor constante en cada lápiz.

Supongamos que el lápiz es tajado únicamente cuando la punta se reduce por completo, es decir cuando es completamente plana. Entonces es posible modelar el desperdicio de una sección de mina de longitud h_{punta} por cada tajada como:

$$d(r) = V_{seccion.Mina} - V_{punta} = (\pi r^2 h_{punta}) - \left(\frac{1}{3} \pi r^2 h_{punta}\right)$$

$$d(r) = \frac{2}{3} \pi r^2 h_{punta}$$

Ahora únicamente basta con conocer cuántas veces es tajado un lápiz. Suponiendo que el lápiz no está tajado inicialmente y que el lápiz se tajaré hasta consumir por completo la longitud de la mina, se tiene la siguiente expresión:

$$l = n_{tajadas} \cdot h_{punta}$$

luego

$$n_{tajadas} = \frac{l}{h_{punta}}$$

Por lo tanto la cantidad total de grafito perdido será por lápiz será:

$$D(r) = d(r) \cdot n_{tajadas} = \frac{2}{3} \pi r^2 h_{punta} \cdot \frac{l}{h_{punta}}$$

$$D(r) = \frac{2}{3}\pi r^2 l$$

Lo cual se puede expresar como un porcentaje del grafito total contenido en el lápiz:

$$P_{desperdiciado} = \frac{D(r)}{V_{mina}} = \frac{\frac{2}{3}\pi r^2 l}{\pi r^2 l}$$

$$P_{desperdiciado} = \frac{2}{3}$$

Según este modelo, $\frac{2}{3}$ del grafito contenido en un lápiz es desperdiciado al tajar el lápiz.

3.2 Refinamiento Condición de Tajado

La observación del uso de un lápiz revela que asumir que el lápiz se tajará una vez la punta sea perfectamente plana no refleja la realidad. En efecto, la punta presenta cierta curvatura en el momento en que ya no se considera afilada. Es claro que este caso no se presenta en la primera tajada, es decir cuando el lápiz incia no teniendo ningún tipo de punta, y que esta situación puede utilizar el modelo anterior.

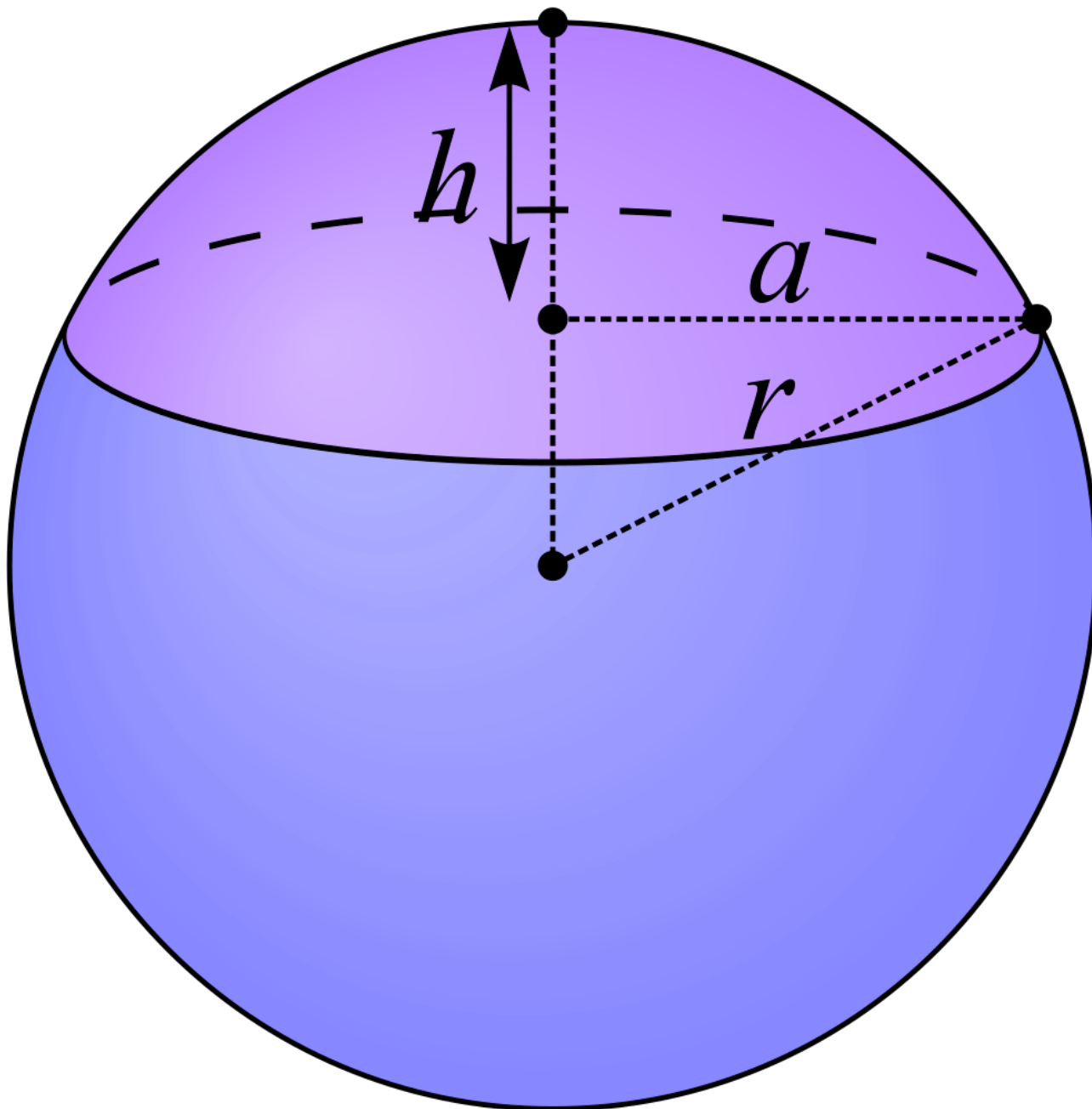
El segundo caso, cuando se taja la punta partiendo desde una punta no afilada, se puede modelar añadiendo un casco esférico al cilindro de la mina. La punta sería entonces obtenida a partir de este nuevo sólido:

$$d(r) = V_{sólido} - V_{punta}$$

$$d(r) = (V_{CE} + V_{seccionMina}) - V_{punta}$$

Note además que la altura de este nuevo sólido será igual a la altura de la punta:

$$h_{punta} = h_{CE} + h_{seccionMina}$$



Para este modelo asumiremos que el radio de la esfera a la que pertenece este casco esférico es $2r$ y que el radio propio del casco $a = r$, con r siendo el radio de la mina del lápiz. Mediante el teorema de Pitágoras, se puede encontrar una expresión para la altura de este sólido:

$$h_{CE} = 2r - \sqrt{(2r)^2 - r^2} = 2r - r\sqrt{3}$$

$$h_{CE} = r(2 - \sqrt{3})$$

Ésto nos permite encontrar el área del casco en términos del radio de la esfera y su altura:

$$V_{CE} = \frac{\pi h_{CE}^2}{3} \cdot (3r_{esfera} - h_{CE}) = \frac{\pi(r(2 - \sqrt{3}))^2}{3} \cdot (3(2r) - r(2 - \sqrt{3}))$$

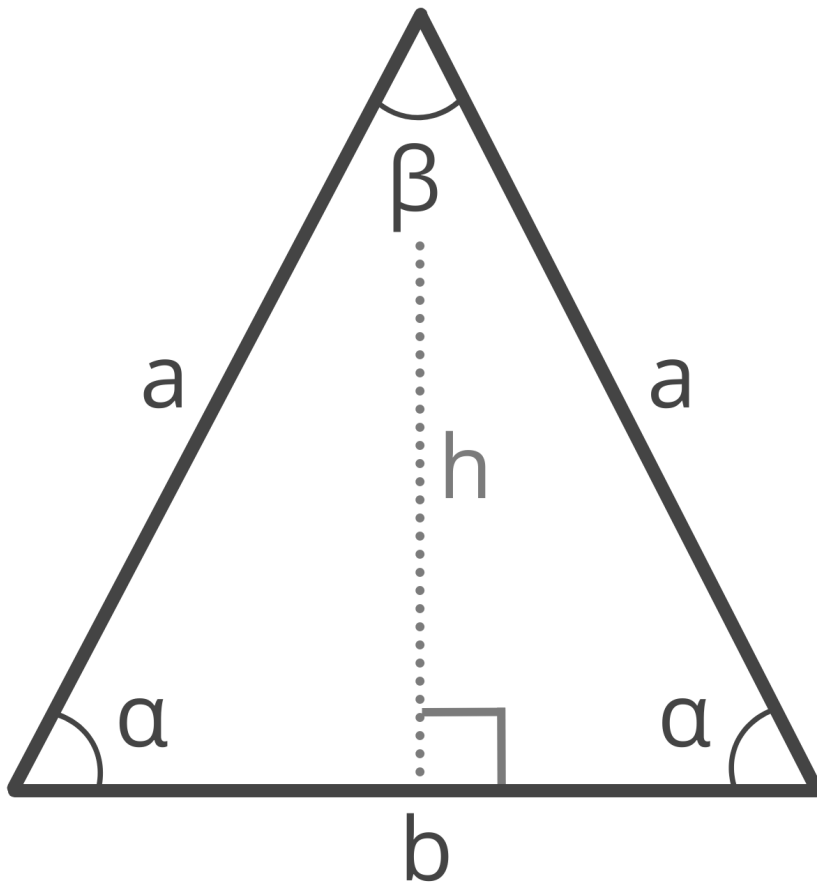
$$V_{CE} = \frac{\pi r^3}{3} \cdot (16 - 9\sqrt{3})$$

Teniendo el resultado de h_{CE} en cuenta, también se tiene la siguiente expresión para la altura de la sección cilíndrica de la mina no afilada:

$$h_{seccionMina} = h_{punta} - h_{CE} = h_{punta} - r(2 - \sqrt{3})$$

3.3 Refinamiento del Modelo de Punta

Mediante la observación de un tajalápiz se puede apreciar que no todos los modelos comparten el mismo ángulo de apertura. Este ángulo tiene influencia directa sobre las hipótesis planteadas en el primer modelo, ya que influencia la altura de la punta y a su vez, el volumen de la misma. Un corte vertical del modelo de punta puede interpretarse como un triángulo isósceles:



donde β corresponde al ángulo de apertura del tajalápiz, b al diámetro de la mina $2r$ y h a h_{punta} . Por lo tanto, se puede expresar h_{punta} en términos de r y β :

$$\cot\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{h_{punta}}{r}$$

$$h_{punta} = r \cdot \cot\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

Por lo tanto, se puede expresar el volumen de la punta como:

$$V_{punta} = \frac{\pi r^2}{3} (r \cdot \cot(\frac{\beta}{2}))$$

$$V_{punta} = \frac{\pi r^3}{3} \cot(\frac{\beta}{2})$$

3.4 Volumen de la Sección Cilíndrica de la Punta sin Afilar

Los anteriores resultados nos permiten establecer una expresión para la altura de la sección cilíndrica:

$$h_{seccionMina} = h_{punta} - r(2 - \sqrt{3}) = r \cdot \cot(\frac{\beta}{2}) - r(2 - \sqrt{3})$$

$$h_{seccionMina} = r(\cot(\frac{\beta}{2}) - 2 + \sqrt{3})$$

Este resultado nos permite hallar el volumen de dicha sección:

$$V_{seccionMina} = \pi r^2 h_{seccionMina}$$

$$V_{seccionMina} = \pi r^3 (\cot(\frac{\beta}{2}) - 2 + \sqrt{3})$$

3.5 Modelo Refinado Propuesto

Los resultados anteriores permiten expresar el desperdicio por tajada teniendo en cuenta la condición de tajado refinada:

$$d(r, \beta) = (V_{CE} + V_{seccionMina}) - V_{punta}$$

$$d(r, \beta) = ((\frac{\pi r^3}{3} \cdot (16 - 9\sqrt{3})) + (\pi r^3 (\cot(\frac{\beta}{2}) - 2 + \sqrt{3}))) - (\frac{\pi r^3}{3} \cot(\frac{\beta}{2}))$$

$$d(r, \beta) = \pi r^3 (\frac{10}{3} - 2\sqrt{3} + \frac{2}{3} \cot(\frac{\beta}{2}))$$

Note que los resultados de secciones anteriores nos permiten expresar la longitud de lapiz utilizada entre cada tajada. Esto corresponderá a la diferencia entre las alturas de la punta y el casco esférico, es decir:

$$\Delta h = h_{punta} - h_{CE} = r \cdot \cot(\frac{\beta}{2}) - r(2 - \sqrt{3})$$

$$\Delta h = r(\cot(\frac{\beta}{2}) - 2 + \sqrt{3})$$

Ahora para encontrar el desperdicio total por lápiz basta con encontrar el número de tajadas en términos del volumen del grafito. Chalmpes et. al (2022) aseguran que en promedio, los lápices son descartados una vez se gasta 60% de su longitud original. Asumiendo la anterior hipótesis, se puede representar la relación entre longitud y número de tajadas como:

$$\frac{3}{5}l = n_{tajadas} \cdot \Delta h$$

luego

$$n_{tajadas} = \frac{3l}{5\Delta h} = \frac{3l}{5r(\cot(\frac{\beta}{2}) - 2 + \sqrt{3})}$$

Utilizando el modelo refinado y el resultado anterior, se tiene una nueva expresión para el porcentaje de grafito desperdiciado en un lápiz que está inicialmente tajado:

$$P(r, \beta) = 100\% \cdot \frac{n_{tajadas} \cdot d(r, \beta)}{V_{mina}}$$

$$P(r, \beta) = 100\% \cdot \frac{3l}{5r(\cot(\frac{\beta}{2}) - 2 + \sqrt{3})} \cdot \frac{\pi r^3(\frac{10}{3} - 2\sqrt{3} + \frac{2}{3}\cot(\frac{\beta}{2}))}{\pi r^2 l}$$

$$P(\beta) = 100\% \cdot \frac{2(\cot(\frac{\beta}{2}) + 5 - 3\sqrt{3})}{5(\cot(\frac{\beta}{2}) - 2 + \sqrt{3})}$$

Claramente la aproximación propuesta no tiene en cuenta la tajada de fábrica, ya que asume el volumen de la mina como el volumen de un cilindro completo. Bajo las ecuaciones planteadas, la punta inicial sería ligeramente curva. Sin embargo, el aporte de esta sección añadiría un grado de complejidad al modelo sin aportar un cambio significativo a la solución numérica.

4. Implementación del modelo

A continuación se implementa el modelo a través de una función escrita en Julia:

DesperdicioLapizT (generic function with 1 method)

```
1 # Funcion del Modelo propuesto segun el angulo
2 function DesperdicioLapizT(beta)
3     p = 2 * (cot(beta / 2) + 5 - 3 * sqrt(3))
4     q = 5 * (cot(beta / 2) - 2 + sqrt(3))
5
6     return 100 * p/q
7 end
```

Ahora, utilizando los ángulos de apertura que presentan los tajalapiz encontrado en bleistift.blog, se puede encontrar el desperdicio de grafito por cada ángulo de apertura:

angulosArr =

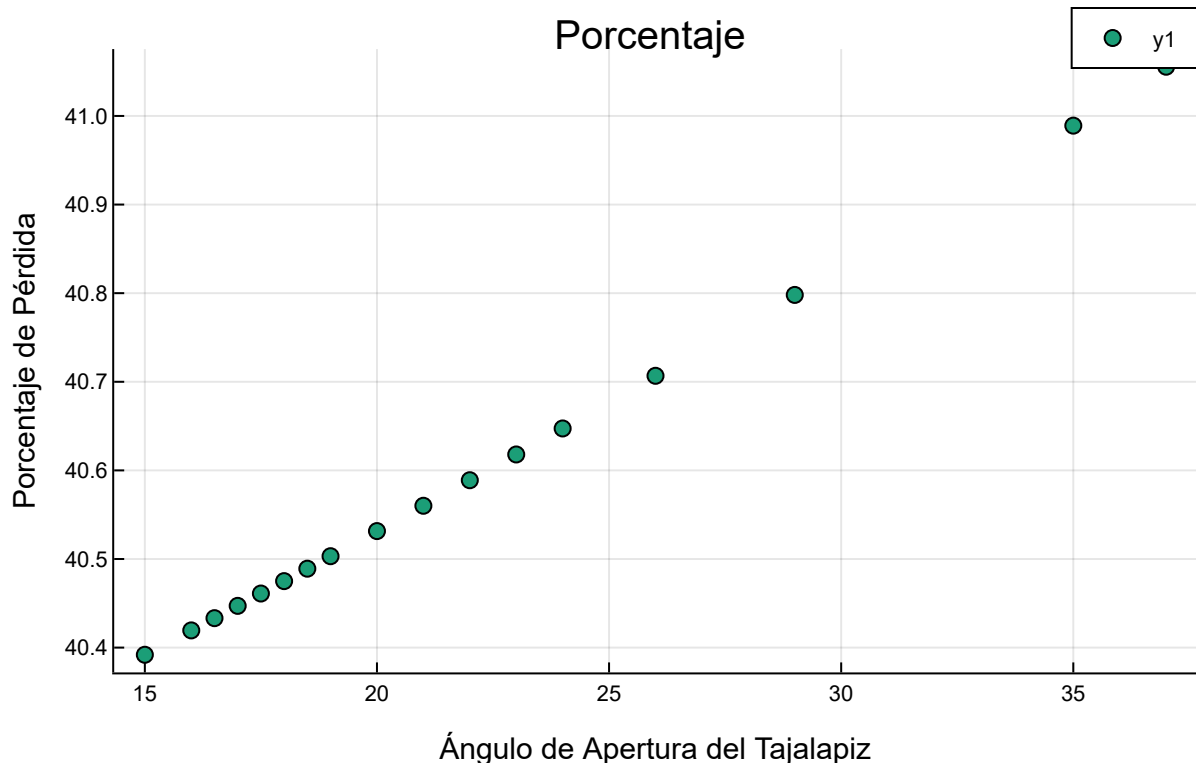
► [15.0, 16.0, 16.5, 17.0, 17.5, 18.0, 18.5, 19.0, 20.0, 21.0, 22.0, 23.0, 24.0, 26.0, 29.0,

```
1 # Array de Ángulos de Apertura de Tajalapiz
2 angulosArr = [
3     15.0, 16.0, 16.5, 17.0, 17.5, 18, 18.5, 19.0, 20.0, 21.0, 22.0, 23.0,
4     24.0, 26.0, 29.0, 35.0, 37.0
5 ]
```

despArr =

► [0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0]

```
1 for i in eachindex(angulosArr)
2     despArr[i] = DesperdicioLapizT(deg2rad(angulosArr[i]))
3 end
```



El valor promedio de pérdida es 40.595, el valor medio es 40.531 y la desviación estándar es 0.1939329.

5. Estimaciones globales

Los lápices de grafito han sido uno de los elementos más utilizados en el ámbito educativo y profesional, tanto en Colombia como en el resto del mundo. En este análisis, se evaluará la cantidad de grafito consumido a nivel nacional y mundial, correlacionándolo con la producción y el uso de lápices.

Para estimar la cantidad de lápices usados en Colombia, nos basamos en un estudio realizado en la zona andina del país, que calcula el uso promedio de lápices entre los colombianos (Universidad del Valle, 2021). A partir de éste, extrapolamos los datos a nivel nacional. Según el estudio, el 98% de la población utiliza entre 1 y 4 lápices al año, distribuidos de la siguiente manera: el 52% usa 4 lápices, el 18% usa 3, el 4% usa 2 y el 24% usa solo 1 lápiz.

Con base en los datos del DANE del censo de 2018 (48 258 494 habitantes), se estima que aproximadamente 47 293 324 personas utilizan lápices de grafito en Colombia. A continuación, se presenta una tabla con el desglose del uso de lápices:

Cantidad de lápices al año	Cantidad de personas	Cantidad total de lápices
4	24 592 528	98 370 112
3	8 512 798	25 538 394
2	1 891 732	3 783 464
1	11 350 397	11 350 397

Por lo tanto, la cantidad total de lápices utilizados anualmente en Colombia se estima en aproximadamente **139 042 367** lápices. A continuación, se estima el desperdicio de grafito en el país.

Para este cálculo, suponemos que se utiliza un lápiz HB (que contiene un **68%** de grafito), de **19** cm de largo y un radio de **0.1** cm. Además, se considera un tajalápiz común con un ángulo de abertura de **20°**. Sabemos que cada lápiz contiene aproximadamente **0.305** gr de grafito, lo que implica que la pérdida de grafito por cada lápiz es de **0.28** gr. De este modo, para la cantidad total de lápices usados en Colombia, el desperdicio de grafito asciende a **38 931 862** gr, es decir, **38 931.862** kg de grafito desperdiciado.

Según estimaciones, este desperdicio de grafito en el mercado colombiano podría generar un costo aproximado de **366 387.86** USD, considerando un valor de **9.411** USD por kilogramo de grafito (respecto al lápiz). Este cálculo se basa en las exportaciones de lápices de Colombia.

A nivel mundial, la producción y el consumo de lápices alcanzan los **18 000** millones de unidades al año. A partir de los datos anteriores, podemos estimar que la pérdida de grafito a nivel global es de aproximadamente **5 040 000 000** gr, lo que equivale a **5 040 000** kg de grafito desperdiciado. El costo del desperdicio global de grafito se estima en **37 800 000** USD, asumiendo un precio de **7.5**

USD por kilogramo de grafito (respecto al lápiz).

Es importante destacar que este desperdicio ocurre principalmente cada vez que un lápiz es afilado y cuando no se utiliza completamente, dejando restos de grafito en el suelo, en el tajalápiz y en los basureros. Este desperdicio, en su mayoría, no se recicla, lo que contribuye a una mayor ineficiencia en el uso de los recursos.

6. Impacto del desperdicio de grafito

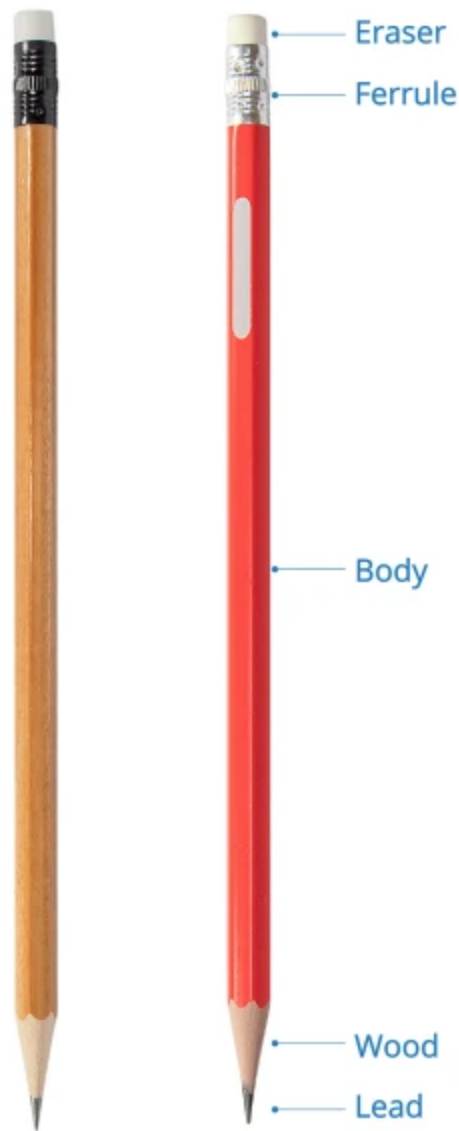
Dado el inesperado desperdicio que genera el uso de un solo lápiz, podemos notar que este trae varias implicaciones significativas en diferentes ámbitos:

Económicas: La mayor parte del grafito utilizado en Colombia es importado de países productores masivos como China, Alemania o Brasil. El mal uso y desperdicio de este recurso intensifican la dependencia a estos proveedores, aumentando la vulnerabilidad frente a las fluctuaciones de precios y problemas de suministro. Esto afecta no solo la manufactura de lápices, sino también sectores clave como la producción de baterías, acero y las industrias automotriz, metalúrgica y química.

Ambientales: El grafito no aprovechado a menudo termina en el suelo o en cuerpos de agua debido a una gestión inadecuada de los residuos. Este mal manejo contribuye a la contaminación del agua y a la acumulación de material en ciertos ecosistemas, lo que puede impactar negativamente la flora y fauna local. Además, la extracción de grafito, ya sea a través de minería o mediante procesos sintéticos que consumen mucha energía, genera un impacto ambiental que resulta injustificado si el material no es utilizado de manera eficiente.

Industriales: El uso ineficiente de grafito representa un obstáculo para las empresas hacia la implementación de tecnologías más sostenibles. Este problema puede afectar la productividad y la capacidad de adaptación de las industrias a nuevos estándares de sostenibilidad.

En resumen, el desperdicio de grafito acarrea importantes repercusiones en los ámbitos económico, ambiental e industrial. Es esencial optimizar el uso y promover el reciclaje de este recurso para reducir sus impactos y fomentar un desarrollo más sostenible.



7. Propuestas de solución

Dentro de nuestro modelo, planteamos entonces cómo hallar el desperdicio, y encontramos tanto numéricamente como intuitivamente una posible mejora en el asunto, lo cual es variar el ángulo. Al variar el ángulo se podría llegar a hallar un punto fijo en el cual pudiéramos minimizar la pérdida. Hay que tener en cuenta que tenemos dos límites teóricos en la parte matemática, el primero es de 0° , ya que no podríamos hacer una mina de ángulo de punta menor o igual a 0° , y superiormente de 150° , puesto que en caso de ser mayor, el cono de la punta tajada no quedaría inscrito dentro del segmento de circunferencia usado y el modelo no podría ser aplicable. Ahora, en la gráfica es claro ver una tendencia creciente, lo que nos deja claro que los valores para minimizar pérdida se dan mientras menor sea el valor del ángulo. La cuestión ahora es que por una parte no podemos crear una mina con un ángulo muy cercano a 0, ya que siempre matemáticamente, siempre encontraremos una solución mejor, por otra parte, en el ámbito directo de la practicidad

una mina muy puntuda nos llevaría a que la mina se pudiera partir por falta de estabilidad. Una solución alterna podría ser estudiada desde lo trabajado en Chalmers et. al (2022), donde se usan los restos a la hora de tajar lápiz, y un proceso de síntesis para poder construir una nueva mina con estos desperdicios. En este caso el desperdicio respecto a la tajada de punta sería minimizado, y siendo que nosotros encontramos que esta es una de las dos mayores razones de desperdicio, siendo alrededor del 40% del lápiz total, sería una importante mejoría. Ahora teniendo en cuenta que según habíamos mirado anteriormente alrededor del 40% del lápiz no se usaba, entonces el segundo mayor aporte para evitar desperdicios de la mina de lápiz, irónicamente, sería usar el lápiz completo.

8. Referencias y metodología de búsqueda

- [1] La producción de lápices a lo largo del tiempo. (n.d.). Faber-Castell. Retrieved November 7, 2024, from <https://www.faber-castell.com.co/corporate/history/production>
- [2] Little, A. D., & Faber, E. (2011, July 27). Drafting Pencils. ManufacturingET.org. Retrieved November 7, 2024, from <http://www.manufacturinget.org/2011/07/drafting-pencils/>
- [3] Proceso de fabricación del grafito. (n.d.). GAB Neumann. Retrieved November 7, 2024, from <https://www.gab-neumann.com/Grafito-impermeable-Proceso-de-fabricaci%C3%B3n>
- [4] Proceso Productivo. (n.d.). Nacional de Grafite. Retrieved November 7, 2024, from <http://www.grafite.com/es/proceso-productivo>
- [5] Wu, J. (n.d.). The Complete Guide to Graphite Pencil Lead Grade - Interwell. Interwell Stationery. Retrieved November 7, 2024, from <https://www.interwell.cn/the-complete-guide-to-graphite-pencil-lead-grade>
- [6] Wu, J. (n.d.). Detailed Guide on How Pencils are Made: The Production Process. Interwell Stationery. Retrieved November 7, 2024, from <https://www.interwell.cn/how-pencils-are-made-a-detailed-production-process-guide>
- [7] Faber-Castell. (n.d.). Facts & figures. Retrieved November 8, 2024, from <https://www.faber-castell.com.co/corporate/facts-figures>
- [8] Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD). (n.d.). Pencils and crayons. Retrieved November 8, 2024, from <https://oec.world/es/profile/hs/pencils-and-crayons>
- [9] Webcartucho. (2021, December 23). Tipos de lápices más comunes. Retrieved November 8, 2024, from <https://www.webcartucho.com/blog/tipos-de-lapices-mas-comunes#:~:text=Tipos%20de%20l%C3%A1pices%20m%C3%A1s%20comunes,-23/12/2021&text=C>
- [10] Veritrade. (n.d.). Importaciones y exportaciones de lápices. Retrieved November 8, 2024, from <https://www.veritrade.com/es/Colombia/importaciones-y-exportaciones/lapices/960910>
- [11] Hernández Trujillo, J., & Restrepo Ospina, K. (2021). Propuesta de un plan de factibilidad para la creación de una empresa dedicada a la producción y comercialización de lápices ecológicos en el municipio de Cartago, Valle del Cauca. Universidad del Valle. Retrieved November 8, 2024, from <https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/server/api/core/bitstreams/dbce24ee-de8c-4cd7-9d89-996d1211214f/content>
- [12] N. Chalmers, G. Asimakopoulos, M. Baikousi, C. E. Salmas, D. Moschovas, A. Avgeropoulos, A. B.

Bourlinos, I. Tantis, A. Bakandritsos, D. Gournis, et al., "Microwave Synthesis, Characterization and Perspectives of Wood Pencil-Derived Carbon," Appl. Sci., vol. 12, no. 1, p. 410, 2022, doi: 10.3390/app12010410. [13] Bleistift, "Sharpeners," Bleistift Blog, [Online]. Available: <https://bleistift.blog/sharpeners/>. [Accessed: Nov. 8, 2024].