Tarea Retratos de Fase

Actividad realizada por Alan Acero, Johan López y Nicolás Duque

```
using PlutoUI, FileIO, Images
```

```
using DifferentialEquations, Plots, LinearAlgebra, CalculusWithJulia, SymPy,
ForwardDiff
```

1. Realizar el bosquejo de los retratos de fase de los siguientes sistemas de EDOs:

1.1 Primer Sistema

$$x' = x^2 - y$$

$$y' = x - y$$

Para visualizar los retratos de fase de la ecuación, primero hallemos la matriz asociada dada por el Jacobiano:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial(x^2-y)}{\delta x} & \frac{\partial(x^2-y)}{\partial y} \\ \frac{\partial(x-y)}{\delta x} & \frac{\partial(x-y)}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora encontremos los puntos de equilibrio:

$$x^2 - y = 0$$

$$x - y = 0$$

Por lo que $x = y$ y se tiene que:

$$x^2 - x = 0$$

Lo cual se tiene cuando:

$$x = y = 0$$

$$o$$

$$x = y = 1$$

Por lo tanto, se tienen dos puntos fijos:

$$p_1 = (0,0)$$

$$p_2 = (1,1)$$

Veamos que comportamiento tiene cada punto: Para p_1 se tiene que:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

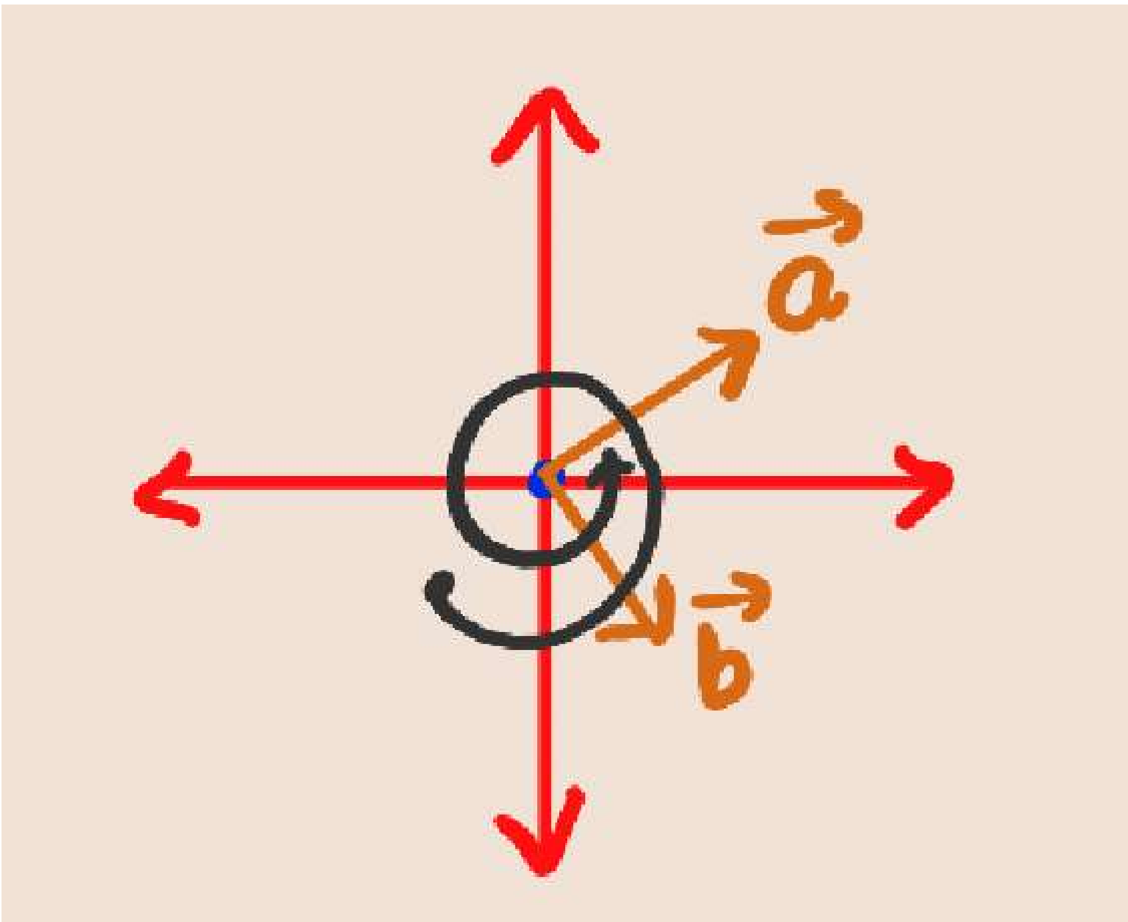
Ahora calculamos los valores propios de esta matriz:

$$det(\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}) = \lambda(\lambda+1)+1 = (\lambda-(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i))(\lambda-(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i))$$

Así, $\lambda \approx -0.5 \pm 0.866i$ y los vectores propios son los siguientes respectivamente:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix}$$

Ahora como $Re(\lambda) < 0$, se tendrá un espiral estable en este punto y como $Im(\lambda) < 0$ va de $\vec{b}$ a $\vec{a}$. Lo anterior puede visualizarse en la siguiente figura:



Para p_2 se tiene que:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

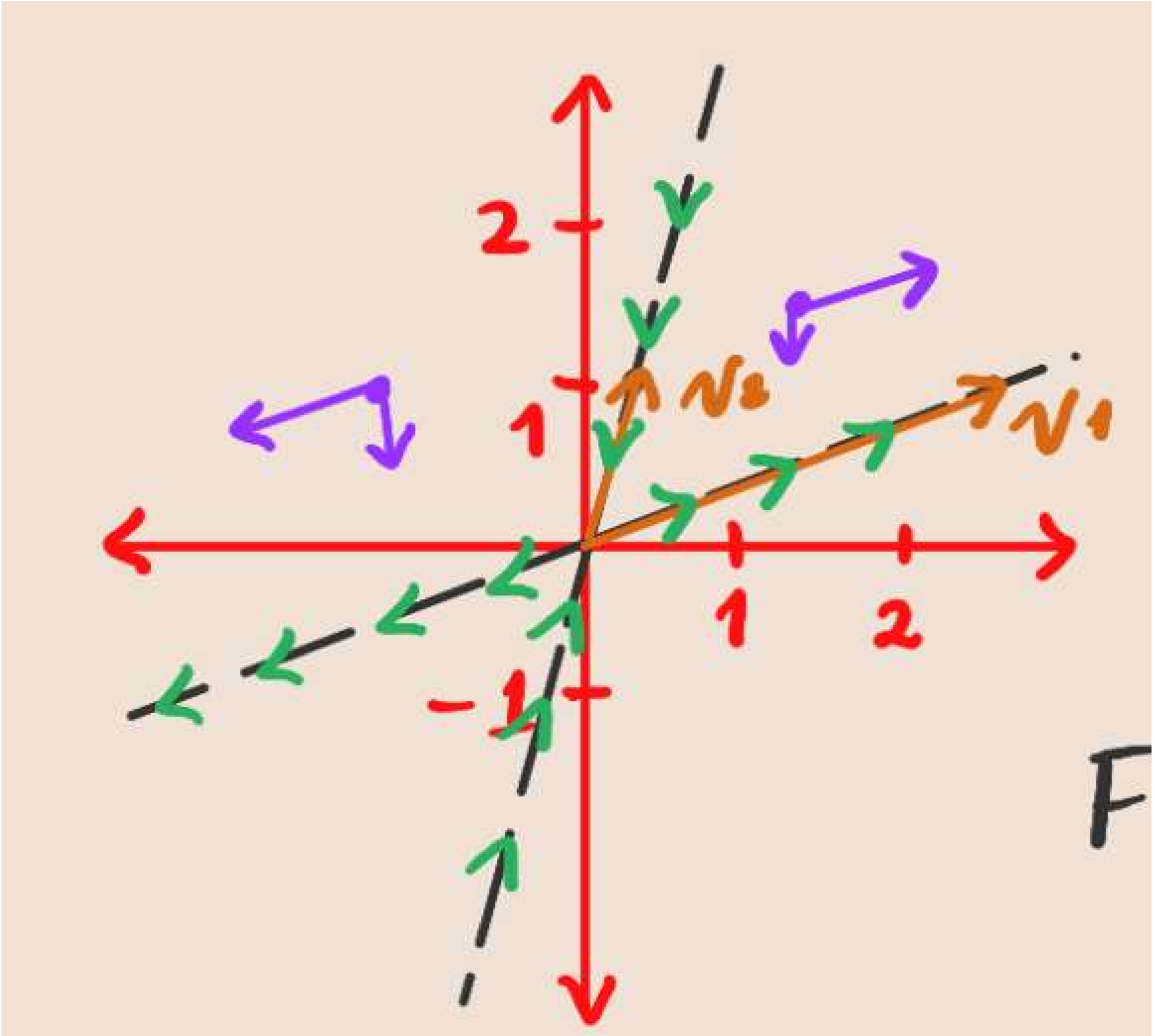
Ahora calculamos los valores propios de esta matriz:

$$det(\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}) = (\lambda-2)(\lambda+1)+1 = (\lambda-(\frac{1+\sqrt{5}}{2}))(\lambda-(\frac{1-\sqrt{5}}{2}))$$

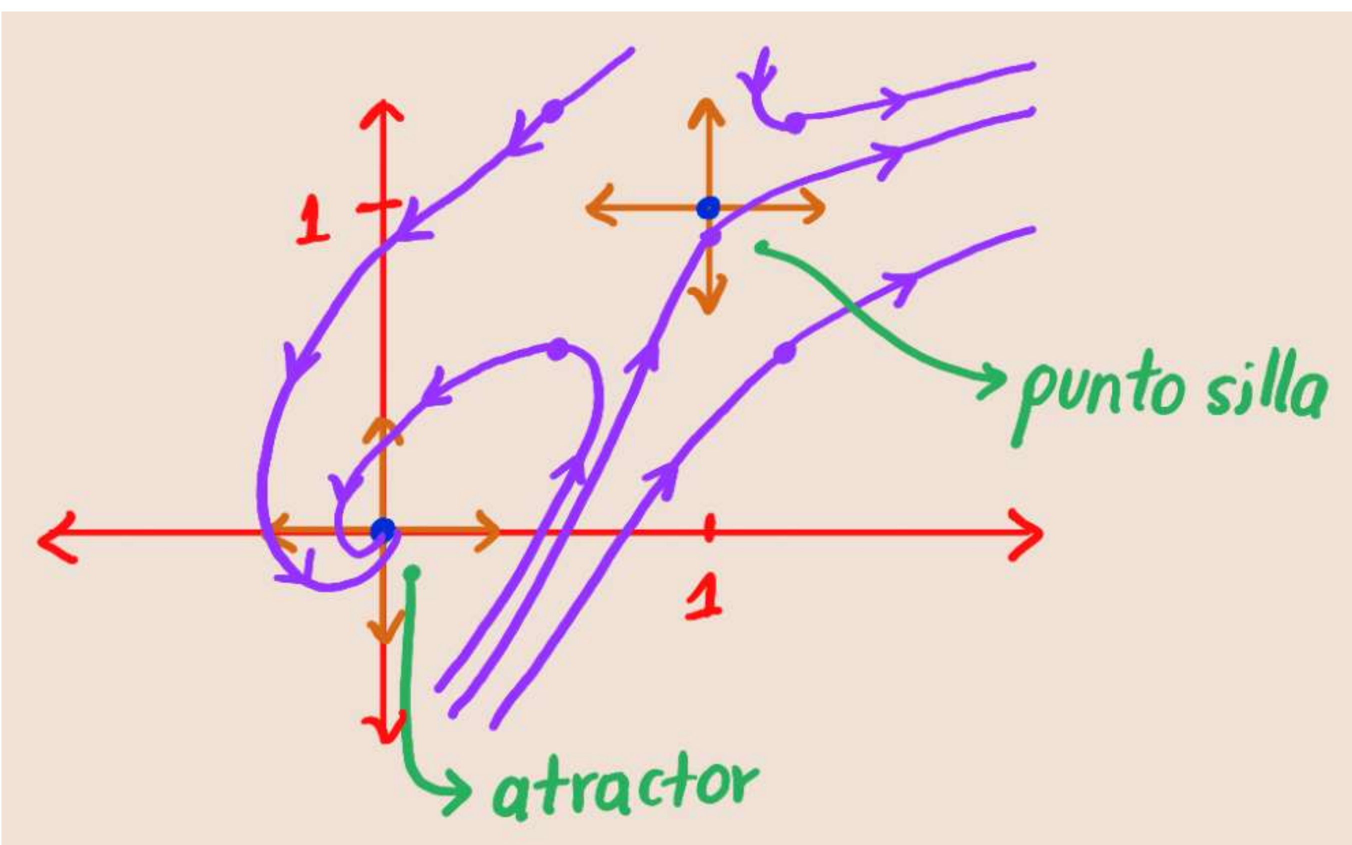
Así, $\lambda_1 \approx 1.618$ y $\lambda_2 \approx -0.618$. Además se tienen los siguientes vectores propios:

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2.618 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0.381 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Este punto fijo es un punto silla. Lo anterior puede visualizarse en la siguiente figura:



Finalmente, se tiene el siguiente retrato de fase para ambos:



1.2 Segundo Sistema

$$x' = x(2 - x - y) = 2x - x^2 - xy$$

$$y' = x - y$$

Para visualizar los retratos de fase de la ecuación, primero hallemos la matriz asociada dada por el Jacobiano:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial(2x-x^2-xy)}{\partial x} & \frac{\partial(2x-x^2-xy)}{\partial y} \\ \frac{\partial(x-y)}{\partial x} & \frac{\partial(x-y)}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2x-y & -x \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora encontremos los puntos de equilibrio:

$$2-2x-y=0$$

$$x-y=0$$

Por lo que $x=y$ y se tiene que:

$$x(1-x)=0$$

Lo cual se tiene cuando:

$$x=y=0$$

$$o$$

$$x=y=1$$

Por lo tanto, se tienen dos puntos fijos:

$$p_1=(0,0)$$

$$p_2=(1,1)$$

Veamos que comportamiento tiene cada punto: Para $p_1=(0,0)$ se tiene que:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

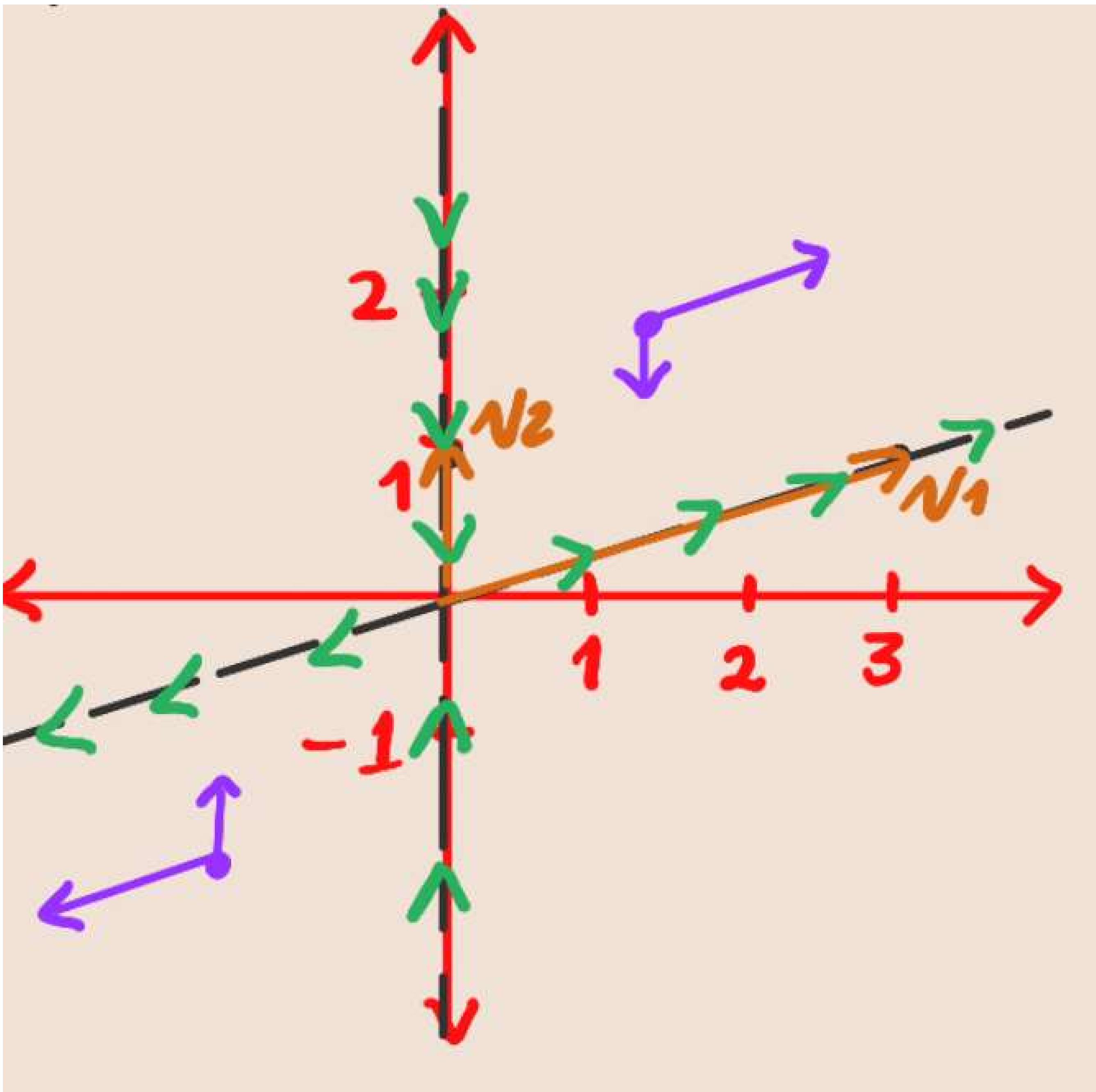
Ahora calculamos los valores propios de esta matriz:

$$det(\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}) = (\lambda-2)(\lambda+1)$$

Así, $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-1$ los vectores propios son los siguientes respectivamente:

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El comportamiento de lo anterior puede visualizarse en la siguiente figura:



Para $p_2 = (1,1)$ se tiene que:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

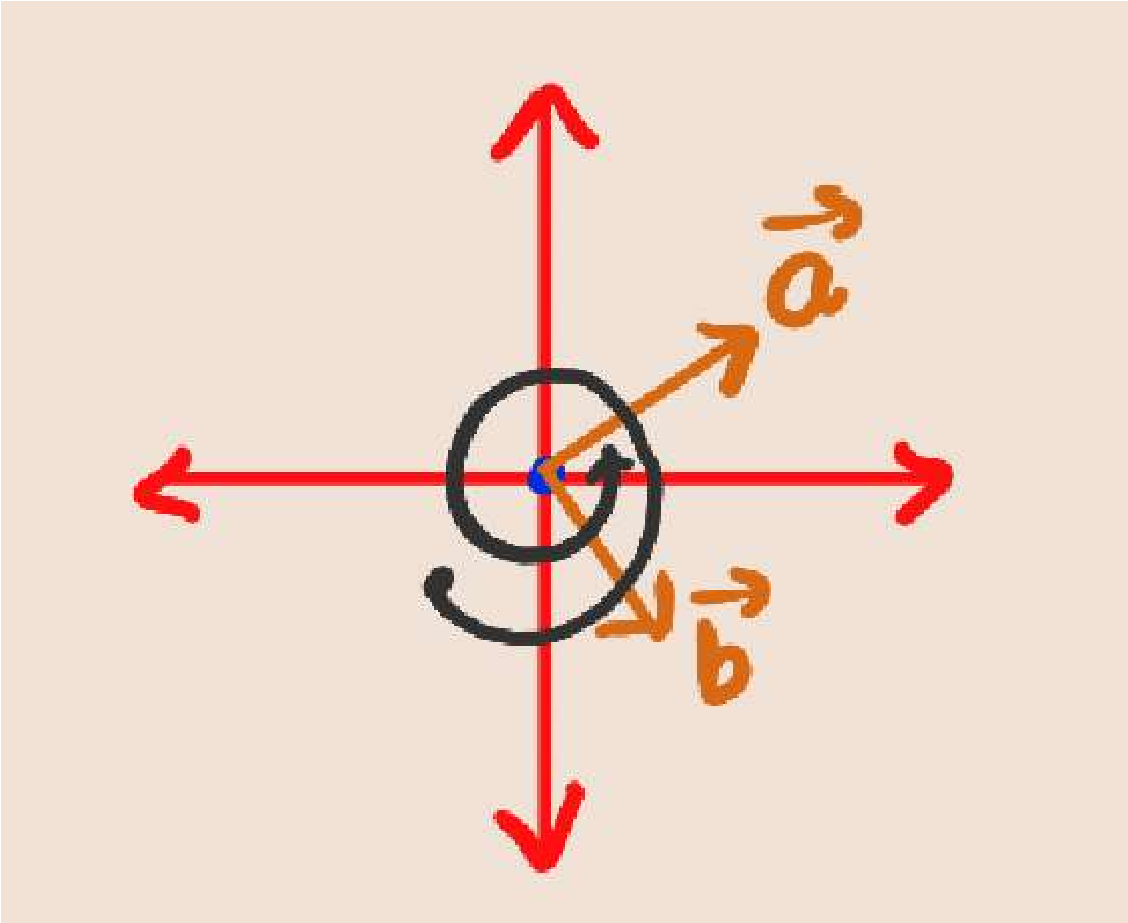
Ahora calculamos los valores propios de esta matriz:

$$det(\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}) = (\lambda+1)^2 + 1 = (\lambda - (-1+i)(\lambda - (-1-i))$$

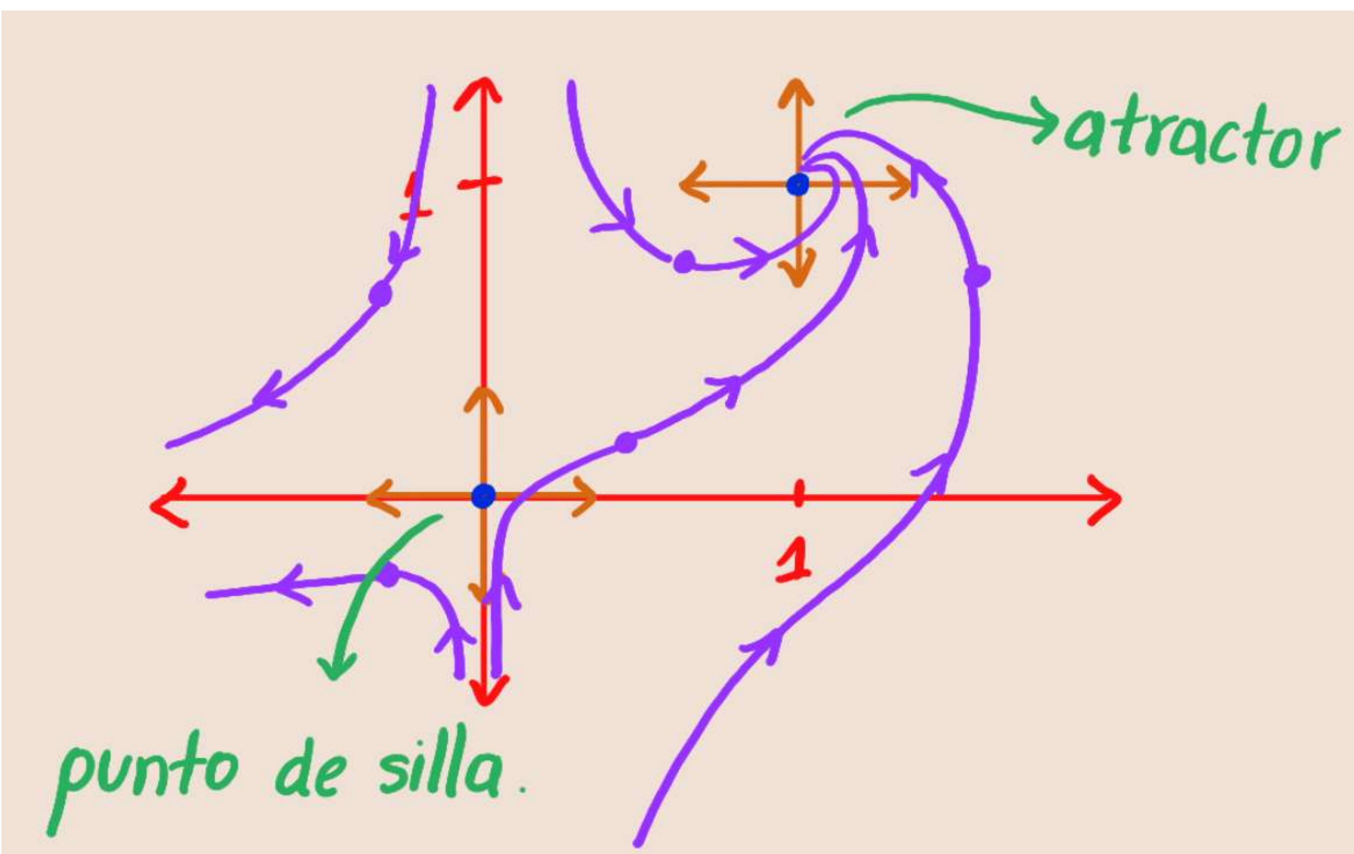
Así, $\lambda_1 = -1 + i$ y $\lambda_2 = -1 - i$. Además se tienen los siguientes vectores propios:

$$\vec{v_1} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad \vec{v_2} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Ahora como $Re(\lambda) < 0$, se tendrá un espiral estable en este punto y como $Im(\lambda) < 0$ va de $\vec{b}$ a $\vec{a}$. Lo anterior puede visualizarse en la siguiente figura:



Finalmente, con la información obtenida se tiene el siguiente retrato de fase:



1.3 Tercer Sistema

$$x' = xy - 1$$

$$y' = x - y^3$$

Para visualizar los retratos de fase de la ecuación, primero hallemos la matriz asociada dada por el Jacobiano:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial(xy-1)}{\partial x} & \frac{\partial(xy-1)}{\partial y} \\ \frac{\partial(x-y^3)}{\partial x} & \frac{\partial(x-y^3)}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & -3y^2 \end{pmatrix}$$

Ahora encontremos los puntos de equilibrio:

$$xy - 1 = 0$$

$$x - y^3 = 0$$

Por lo que $x = y^3$ y se tiene que:

$$y^4 - 1 = 0$$

Lo cual se tiene cuando:

$$x = y = 1$$

$$o$$

$$x = y = -1$$

Por lo tanto, se tienen dos puntos fijos:

$$p_1 = (1, 1)$$

$$p_2 = (-1, -1)$$

Veamos que comportamiento tiene cada punto: Para $p_1 = (1, 1)$ se tiene que:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

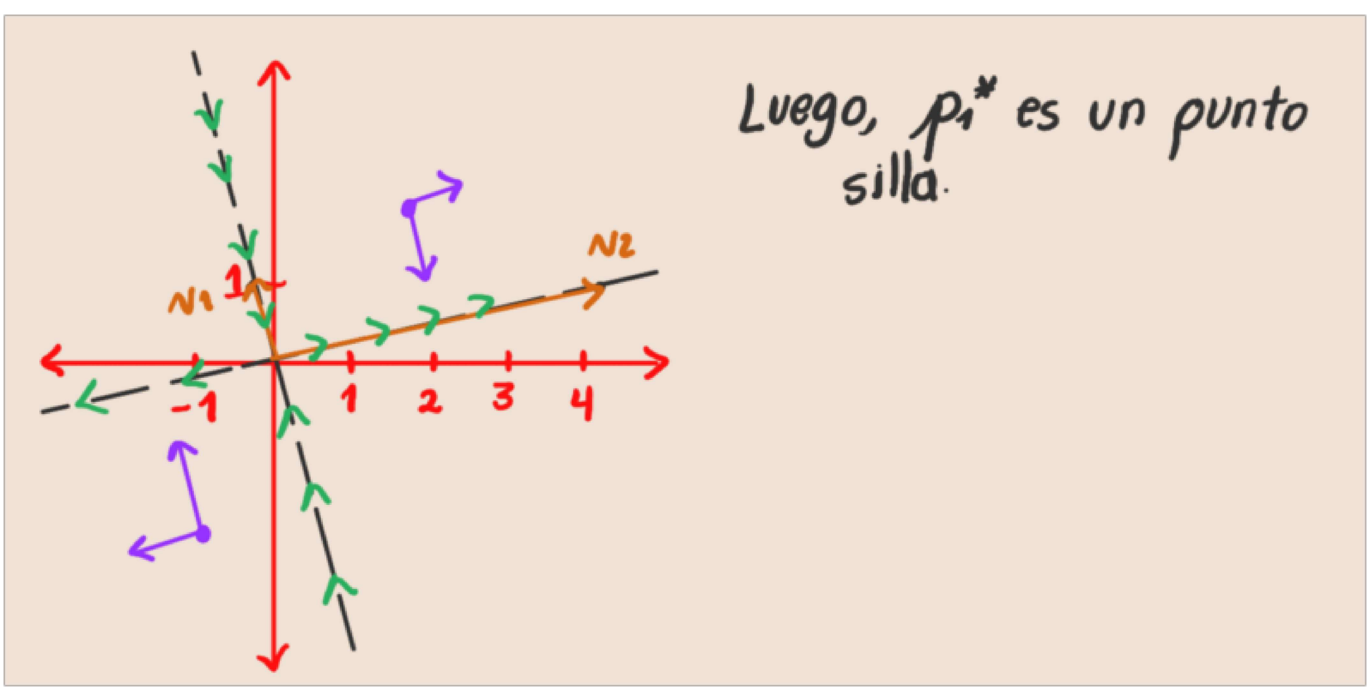
Ahora calculamos los valores propios de esta matriz:

$$det(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix}) = (\lambda - 1)(\lambda + 3) - 1 = (\lambda - (-1 + \sqrt{5}))(\lambda - (-1 - \sqrt{5}))$$

Así, $\lambda_1 \approx -3.236$, $\lambda_2 \approx 1.236$ los vectores propios son los siguientes respectivamente:

$$\vec{v_1} \approx \begin{pmatrix} -0.236 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_2} \approx \begin{pmatrix} 4.236 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El comportamiento de lo anterior puede visualizarse en la siguiente figura:



Para $p_2 = (-1, -1)$ se tiene que:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

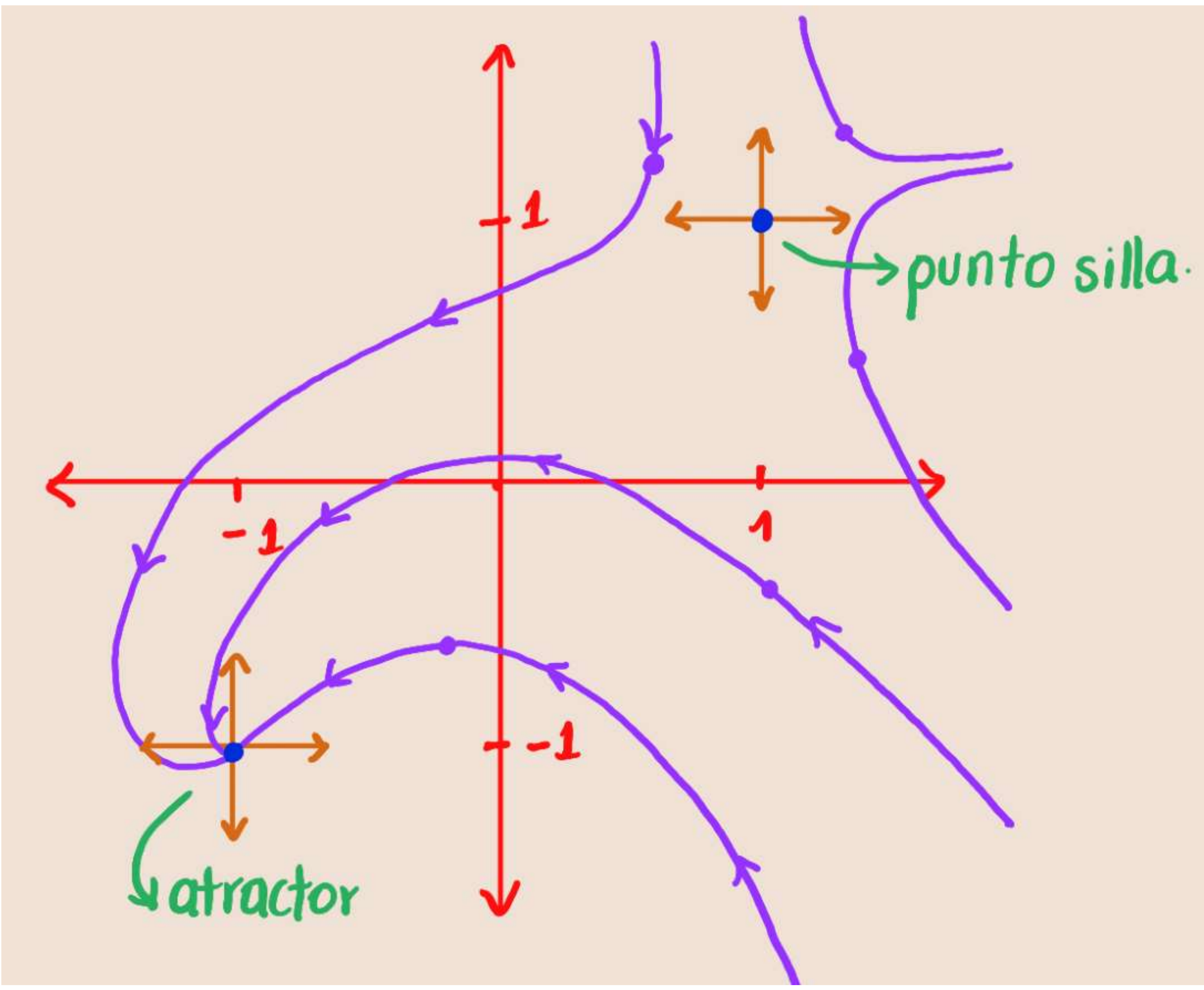
Ahora calculamos los valores propios de esta matriz:

$$det(\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix}) = (\lambda+1)(\lambda+3)+1 = (\lambda+2)^2$$

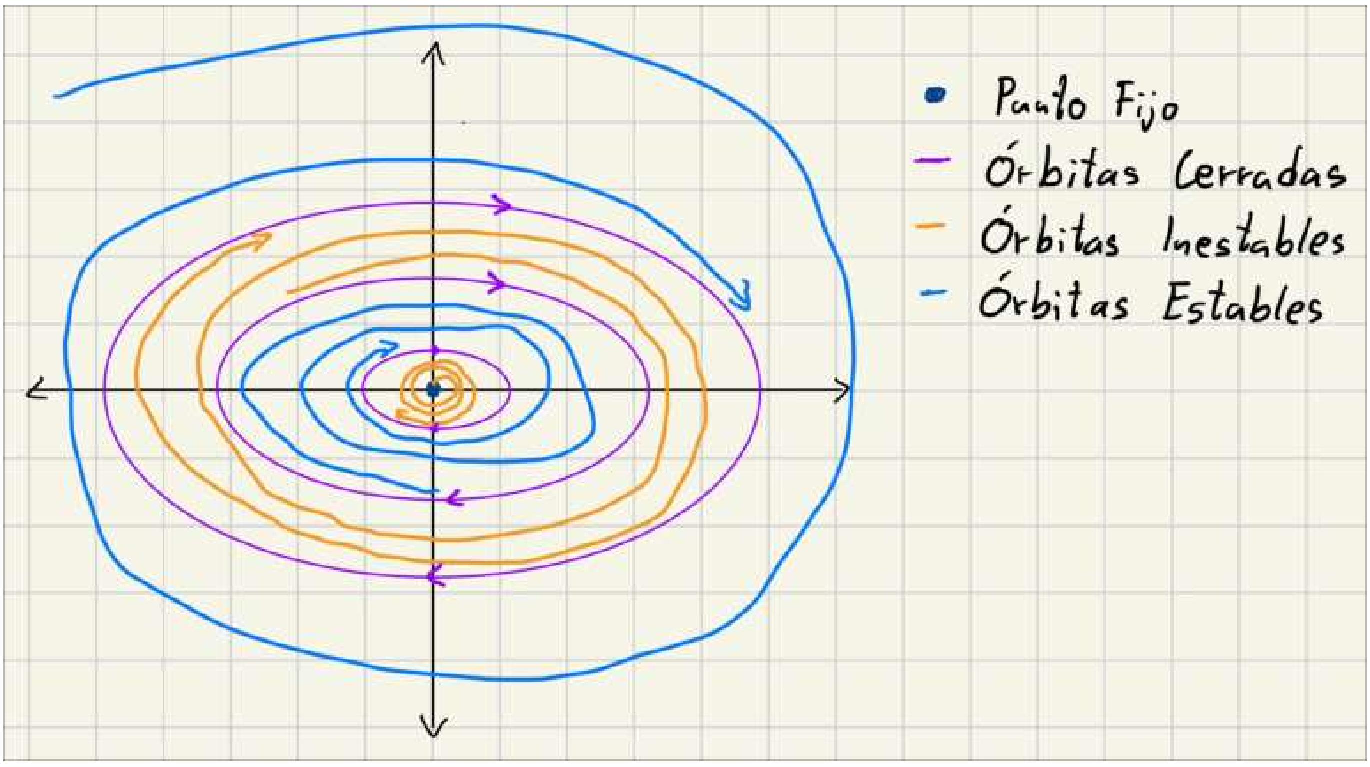
Así, $\lambda = -2$ con multiplicidad algebráica 2. Además tiene multiplicidad geométrica 1 y al ser $\lambda < 0$, el punto es un atractor:

$$\vec{v} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lo anterior puede visualizarse en la siguiente figura:



2. Imagine un retrato de fase que tenga exactamente tres orbitar cerradas y un punto fijo.



Es importante aclarar que las fases entre órbitas cerradas y en el interior de la órbita "interior" deben ser necesariamente órbitas o espirales, ya que no es posible que las órbitas cerradas sean atravesadas por otra trayectoria.

3. Usar un sistema de computo para calcular los retratos de fase de los siguientes sistemas. Comentar los resultados

$$\begin{array}{lll} \textbf{A} & x' = y & y' = -x + y(1-x^2) \\ \textbf{B} & x' = y + y^2 & y' = -0.5x - 0.2y - xy + 1.2y^2 \\ \textbf{C} & x' = y + y^2 & y' = -x + 0.2y - xy + 1.2y^2 \end{array}$$

Para este ejercicio intentamos hacer un codigo, con la función graficadorRetratoDeFase a continuación. A su vez hacemos un comparativo con el realizado en la pagina siguiente, de donde salen las imagenes.

https://aeb019.hosted.uark.edu/pplane.html

```
graficadorRetratoDeFase (generic function with 3 methods)
```

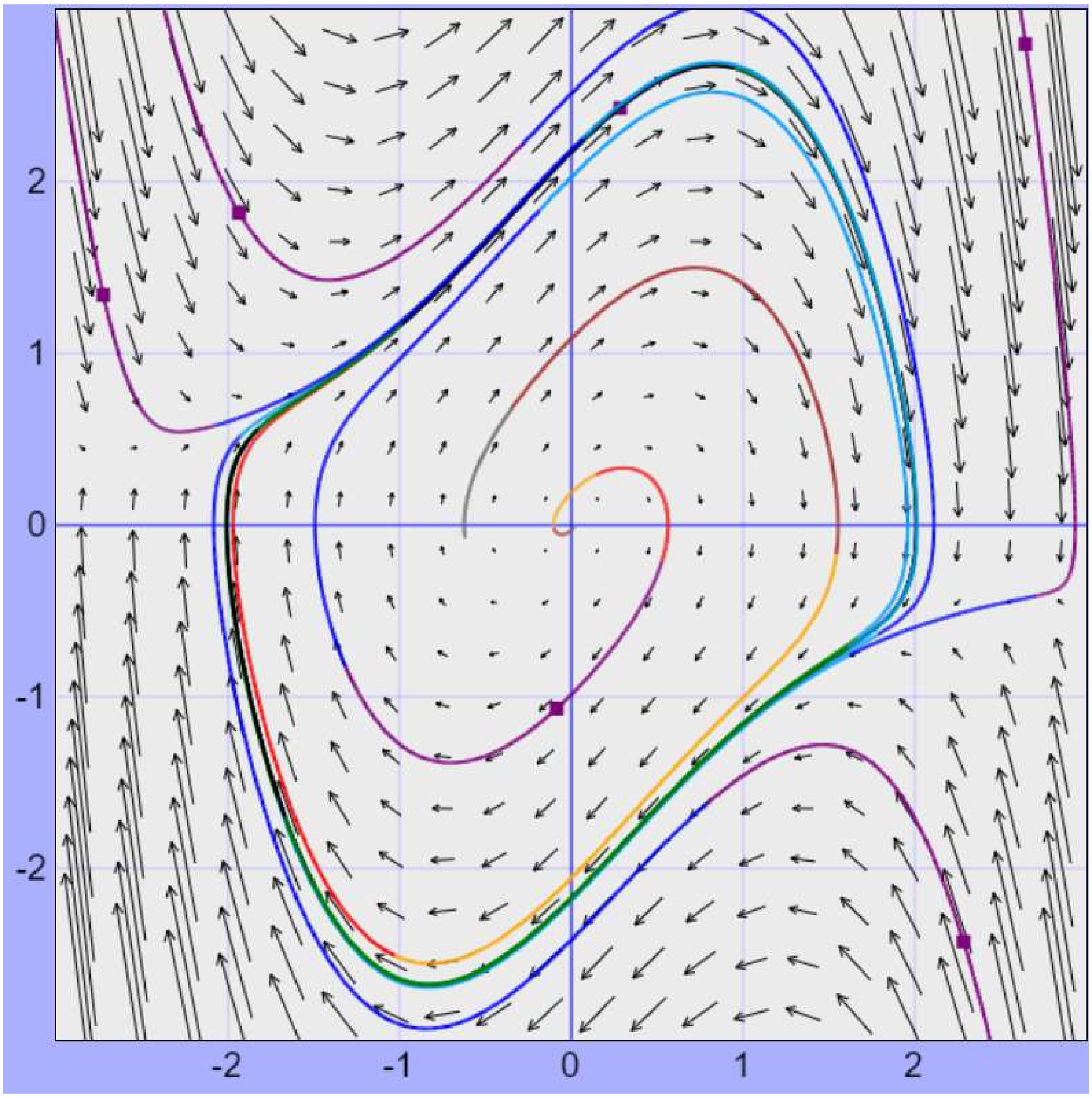
```
function graficadorRetratoDeFase(sistema, xlim, ylim, nx=10, ny=10)
    vectorfieldplot(sistema, xlim=xlim, ylim=ylim, nx=nx, ny=ny)
end
```

Definición del sistema A:

$$x' = y$$

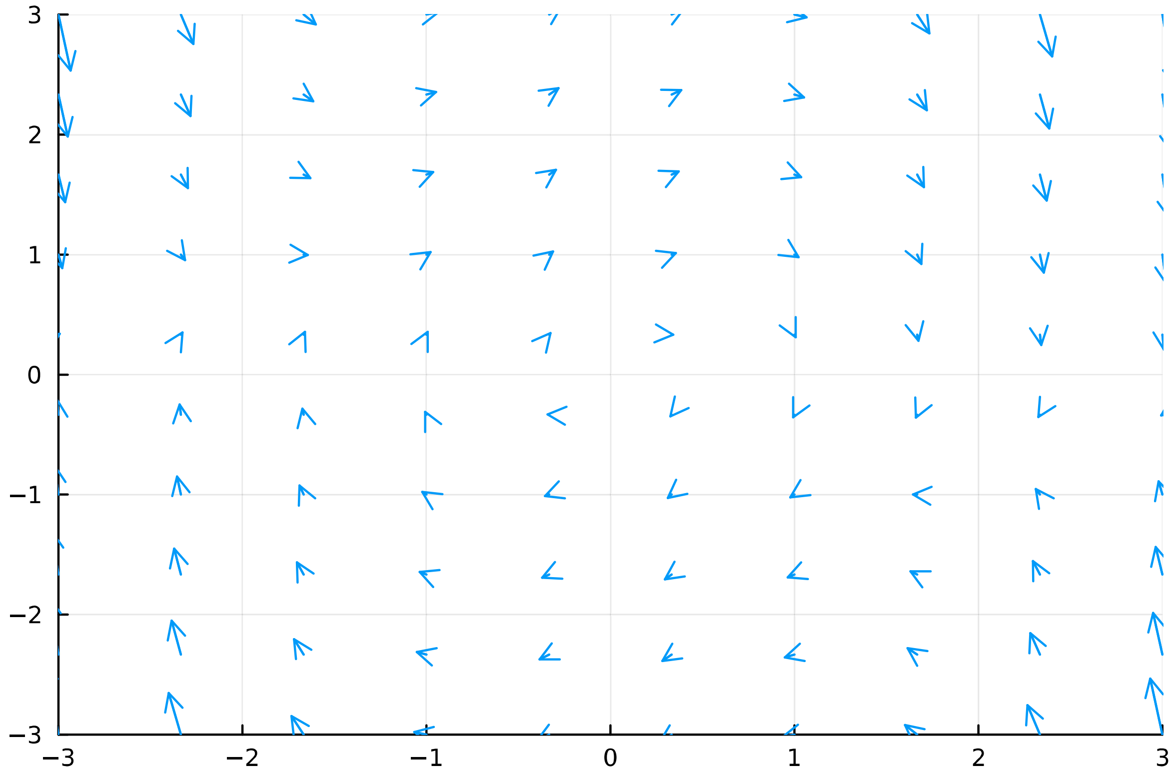
$$y' = -x + y(1-x^2)$$

en la grafica de abajo podemos ver como las trayectorias cercanas al origen convergen a $(0,0)$, lo que indica que este es un punto de equilibrio estable. Sin embargo, también se observa una órbita cerrada en forma de "ocho", donde las trayectorias más alejadas del origen siguen un ciclo cerrado y no se acercan al punto fijo. Esto sugiere que el sistema tiene un punto de equilibrio estable en $(0,0)$ y un ciclo límite estable en otras regiones del plano de fases.



A (generic function with 1 method)

```
function A(x, y)
    return [y, -x + y * (1 - x^2)]
end
```



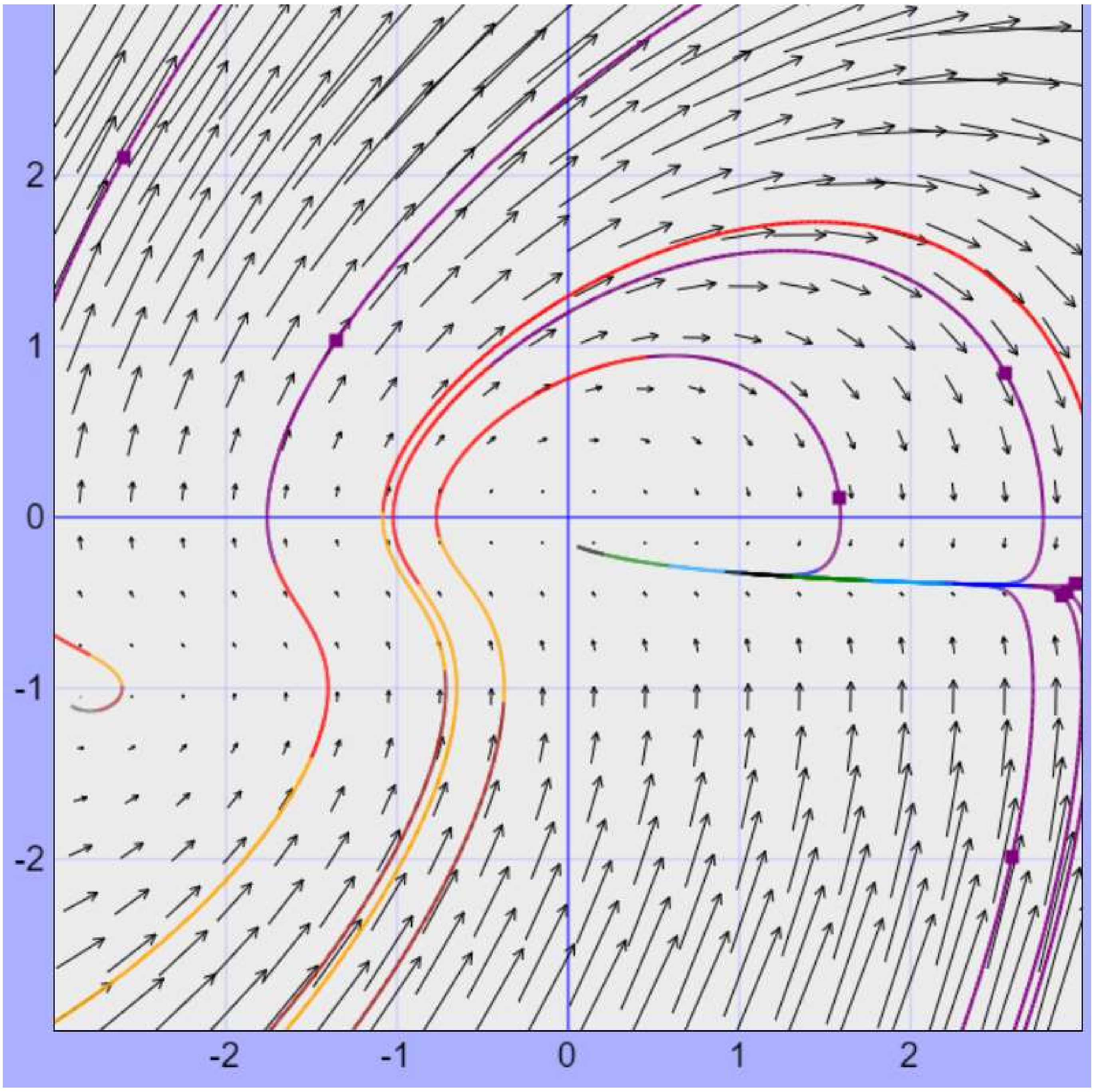

```
graficadorRetratoDeFase(A, (-3, 3), (-3, 3))
```

Definición del sistema B:

$$x' = y + y^2$$

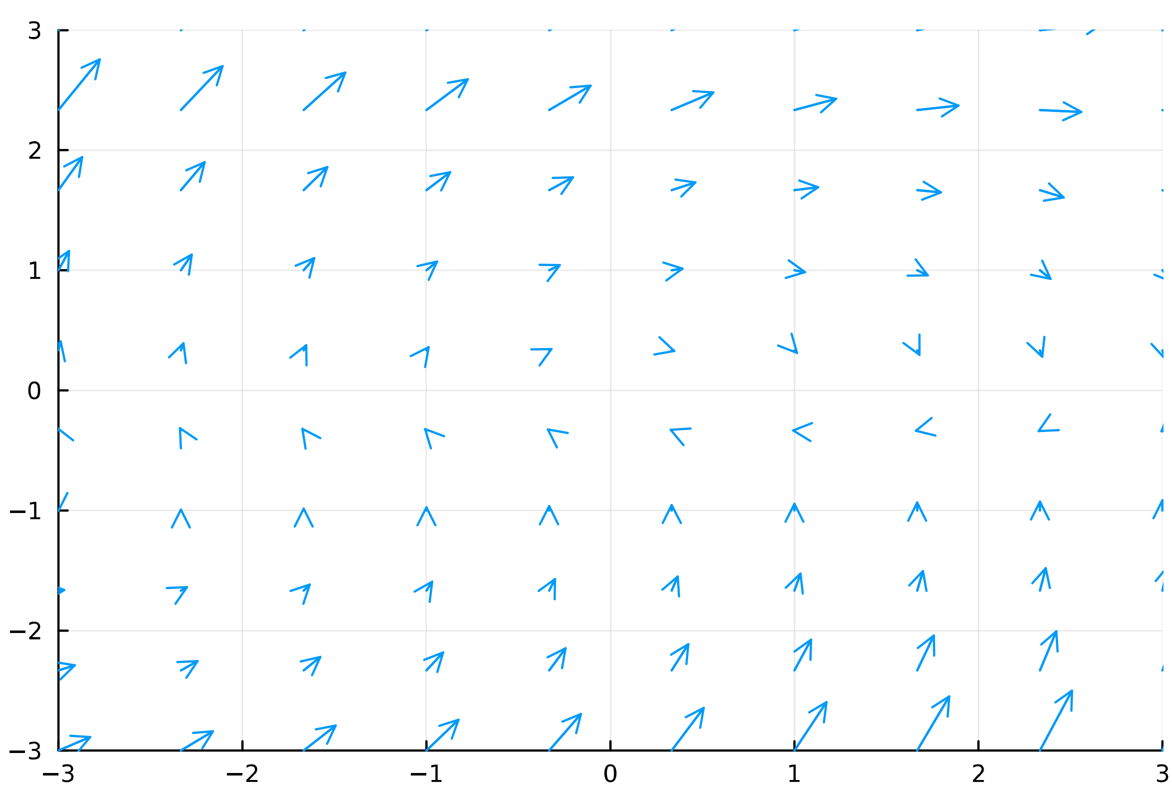
$$y' = -0.5x - 0.2y - xy + 1.2y^2$$

Acá también podemos ver cómo las trayectorias parecen converger hacia el origen $(0, 0)$, lo que indica que es un punto de equilibrio estable. Sin embargo, también se observa una curva que proviene desde la zona a la derecha, un poco por debajo del eje x, donde todas las trayectorias se acercan a esa curva antes de continuar hacia el origen. Esta curva parece ser un camino que todas las trayectorias siguen antes de converger al origen. El comportamiento de las trayectorias cambia alrededor del corte entre el tercer y cuarto cuadrante, donde parece haber una transición entre las trayectorias que se dirigen directamente hacia esta curva y las que siguen un ciclo cerrado alrededor del origen antes de ir hacia esta curva. Esta transición podría estar relacionada con la presencia de otro punto fijo que afecta la dinámica en esa región.




```
B (generic function with 1 method)
```

```
function B(x, y)
    return [y + y^2, -0.5 * x - 0.2 * y - x * y + 1.2 * y^2]
end
```



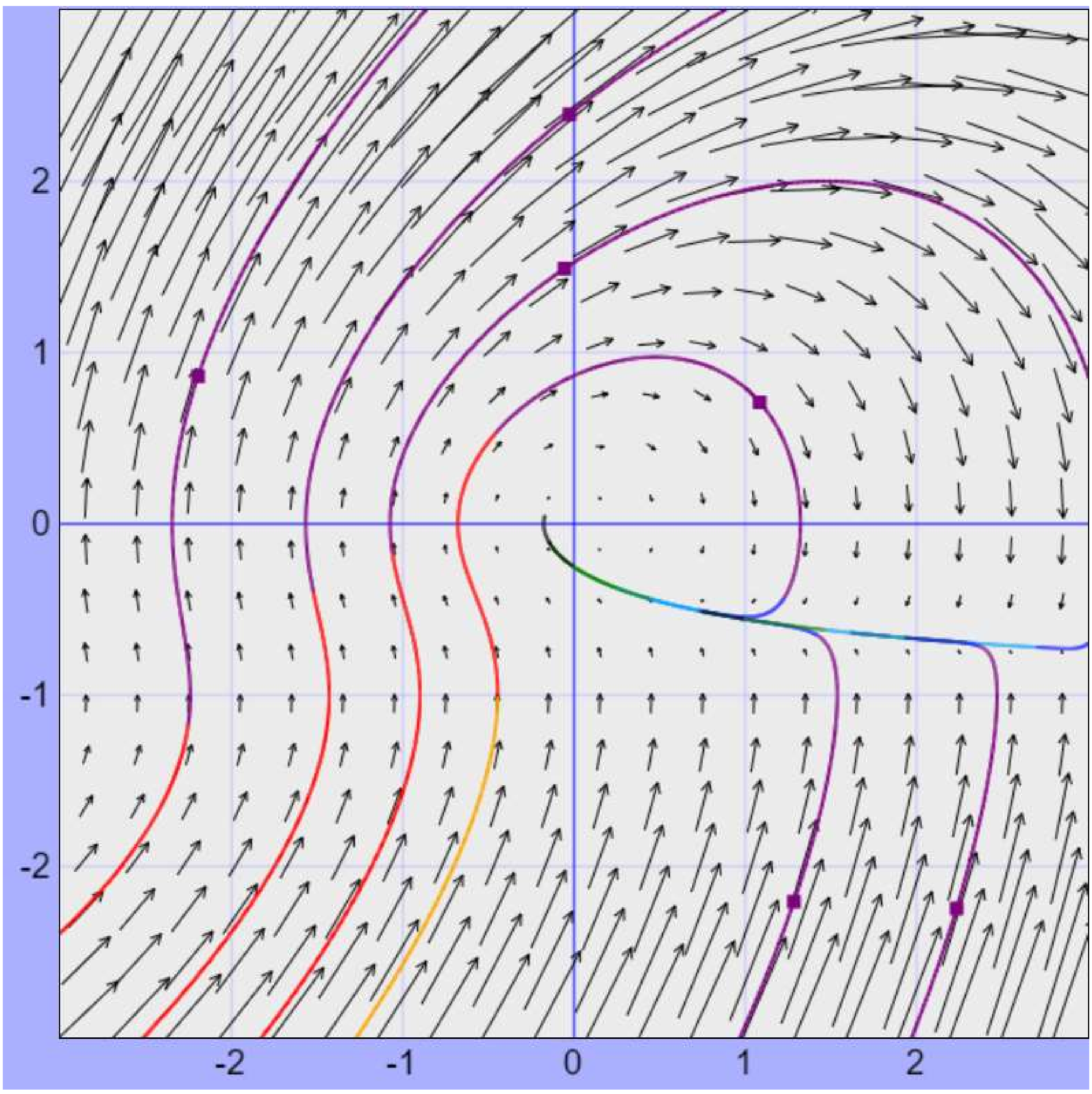

```
graficadorRetratoDeFase(B, (-3, 3), (-3, 3))
```

Definición del sistema C:

$$x' = y + y^2$$

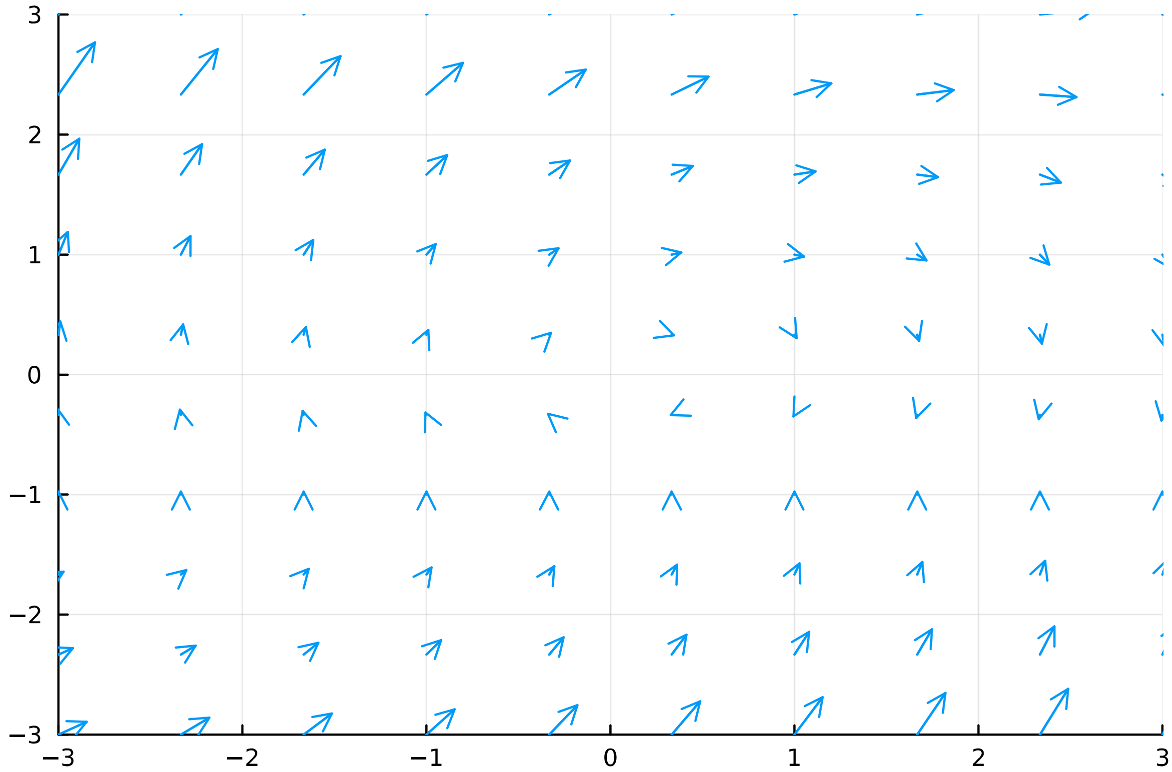
$$y' = -x + 0.2y - xy + 1.2y^2$$

Por último, en este ejercicio podemos observar cómo las trayectorias en este sistema también convergen hacia el origen $(0, 0)$, lo que indica que es un punto de equilibrio estable. A diferencia del sistema anterior, el giro alrededor del origen no es ovalado, sino más circular. Las trayectorias parecen seguir un patrón más simétrico y equilibrado cerca del origen, moviéndose de manera más uniforme antes de converger al punto de equilibrio. Aunque la forma del giro es diferente, el comportamiento general es similar: las trayectorias se aproximan al origen de manera estable, dirigiéndose hacia la curva que viene desde la derecha hasta la zona de convergencia, pero con un patrón más circular alrededor del eje x.




```
C (generic function with 1 method)
```

```
function C(x, y)
    return [y + y^2, -x + 0.2 * y - x * y + 1.2 * y^2]
end
```




```
graficadorRetratoDeFase(C, (-3, 3), (-3, 3))
```

En general, las graficas de los sistemas nos pueden ayudar a darnos una idea intuitiva de los puntos estables e inestables, las orbitas, etc. de un sistema de ecuaciones y permiten describir el comportamiento del sistema.