```julia
using PlutoUI, FileIO, Images
```

```julia
using DifferentialEquations, Plots, LinearAlgebra, CalculusWithJulia, SymPy,
ForwardDiff
```

Adimensionalización

Actividad realizada por Alan Acero, Johan López y Nicolás Duque

1. Análisis Dimensional y Resolución de la EDO $u'(t) = -ku^2(t)$

Suponga que $u'(t) = -ku^2(t)$ describe algún proceso físico con la condición inicial $u(0) = u_0$, donde u es una masa $[u] = M$, y t es el tiempo $[t] = T$.

(a). Determine las dimensiones de k.

> Sabemos que $[u'(t)] = \frac{[u]}{[t]} = \frac{M}{T}$, luego
>
> $$MT^{-1} = [k][u^2] = [k]M^2$$
>
> De esta manera, la dimensión de k está dada por
>
> $$[k] = M^{-1}T^{-1}$$

```
md"""

Sabemos que $[u'(t)]=\frac{[u]}{[t]}=\frac{M}{T}$, luego

$MT^{-1}=[k][u^2]=[k]M^2$

De esta manera, la dimensión de $k$ está dada por

$$[k]=M^{-1}T^{-1}$$

"""
```

(b). Demuestre que cualquier escala de tiempo característica de la forma $t_c = k^\alpha u_0^\beta$ está dada por $t_c = \frac{1}{ku_0}$.

Hallemos el α y β de tal forma que las dimensiones de t_c sean consistentes, así:

$$T = [t_c] = [k]^\alpha [u_0]^\beta = M^{-\alpha}T^{-\alpha}M^\beta = M^{-\alpha+\beta}T^{-\alpha}$$

De esta manera $-\alpha + \beta = 1$ y $-\alpha = 1$, resolviendo tenemos que $\alpha = -1$ y $\beta = -1$, lo que significa que

$$t_c = K^{-1}u_0^{-1}\frac{1}{ku_0}$$

(c). Demuestre que cualquier escala de masa característica de la forma $u_c = k^\alpha u_0^\beta$ está dada por $u_c = u_0$.

Encontremos el α y β de tal forma que las dimensiones de u_c sean consistentes:

$$M = [m_c] = [k]^\alpha [u_0]^\beta = M^{-\alpha}T^{-\alpha}M^\beta = M^{-\alpha+\beta}T^{-\alpha}$$

Luego, $-\alpha + \beta = 1$ y $-\alpha = 0$, lo que implica que $\beta = 1$ y

$$u_c = u_0$$

(d). Demuestre que la EDO adimensionalizada es:

$\frac{d\bar{u}}{d\bar{t}} = -\bar{u}^2$

con la condición inicial $\bar{u}(0) = 1$.

Definimos las variables adimensionales

$$\overline{u} = \frac{u}{u_c} = \frac{u}{u_0} \qquad \text{y} \qquad \overline{t} = \frac{t}{t_c} = ktu_0$$

ahora, $u(t) = u_0\overline{u}(\overline{t})$, y derivando tenemos que:

$$\frac{du(t)}{dt} = u_0\frac{d\overline{u}}{d\overline{t}} \cdot \frac{\overline{dt}}{dt} = ku_0^2\frac{d\overline{u}}{\overline{dt}}$$

entonces remplazando en $u'(t) = -Ku^2(t)$:

$$\cancel{ku_0^2}\,\frac{d\overline{u}}{\overline{dt}} = \cancel{ku_0^2}\,\overline{u}^2(\overline{t}) \qquad \text{con } u_0 = u_0\overline{u}(0)$$

esto es que, $\dfrac{d\overline{u}}{d\overline{t}} = -\overline{u}^2(t)$ con $\overline{u}(0) = 1$

(e). Resuelva la EDO $u'(t) = -ku^2(t)$ con $u(0) = u_0$ y calcule el tiempo necesario para que $u(t)$ decaiga desde u_0 hasta la mitad de ese valor, $u_0/2$.

Tenemos la EDO $\displaystyle \frac{du}{dt}=-Ku^2$, por lo tanto usemos el método de variables separables:

$$\frac{1}{u^2}du=-Kdt$$

integrando en ambas igualdades,

$$\begin{align*}
\int\frac{1}{u^2}du&=\int-Kdt\\
-\frac{1}{u}&=-Kt+C
\end{align*}$$

de esta manera $\displaystyle u(t)=\frac{1}{Kt-C}$ con $u(0)=u_0$, lo que significa que $\displaystyle C=-\frac{1}{u_0}$ y,

$$u(t)=\frac{1}{kt+\frac{1}{u_0}}$$

ahora, para que $u(t)$ decaiga a $\displaystyle\frac{u_0}{2}$

$$\displaystyle\frac{u_0}{2}=\frac{1}{kt+\frac{1}{u_0}}$$

esto es $\; \;u_0Kt+1=2$, por lo tanto, $\displaystyle t=\frac{1}{Ku_0}$, lo que verifica que es consistente con la escala de t_c, comprobando así el punto (f), que consiste en:

```
md"""
Tenemos la EDO $\displaystyle \frac{du}{dt}=-Ku^2$, por lo tanto usemos el método de variables separables:

$$\frac{1}{u^2}du=-Kdt$$

integrando en ambas igualdades,

$\begin{align*}
\int\frac{1}{u^2}du&=\int-Kdt\\
-\frac{1}{u}&=-Kt+C
\end{align*}$

de esta manera $\displaystyle u(t)=\frac{1}{Kt-C}$ con $u(0)=u_0$, lo que significa que $\displaystyle C=-\frac{1}{u_0}$ y,

$$u(t)=\frac{1}{kt+\frac{1}{u_0}}$$

ahora, para que $u(t)$ decaiga a $\displaystyle\frac{u_0}{2}$

$\displaystyle\frac{u_0}{2}=\frac{1}{kt+\frac{1}{u_0}}$

esto es $\; \;u_0Kt+1=2$, por lo tanto, $\displaystyle t=\frac{1}{Ku_0}$, lo que verifica que es consistente con la escala de $t_c$, comprobando así el punto (f), que consiste en:
"""
```

(f). Verifique si este tiempo es consistente con la escala de tiempo t_c.

2. Modificación de la Ecuación Logística con Tasa de Cosecha

Se propone la siguiente modificación de la ecuación logística para modelar poblaciones:

$$\frac{du}{dt} = -ru\left(1 - \frac{u}{K}\right)\left(1 - \frac{u}{P}\right),$$

donde r es la tasa intrínseca de crecimiento poblacional, K es la capacidad de carga, y P es el tamaño poblacional mínimo sostenible que satisface $0 < P < K$. Si $u(t) < P$, la especie se extingue, mientras que si $u(t) > P$, la población tiende hacia K.

```
md"""
## 2. Modificación de la Ecuación Logística con Tasa de Cosecha


Se propone la siguiente modificación de la ecuación logística para modelar poblaciones:

$\frac{du}{dt} = -ru \left(1 - \frac{u}{K}\right)\left(1 - \frac{u}{P}\right),$

donde $r$ es la tasa intrínseca de crecimiento poblacional, $K$ es la capacidad de carga, y $P$ es el tamaño poblacional mínimo sostenible que satisface $0 < P < K$. Si $u(t) < P$, la especie se extingue, mientras que si $u(t) > P$, la población tiende hacia $K$.
"""
```

(a). Esboce el retrato de fase de la ecuación y verifique que si $0 < u < P$, las soluciones decaen a cero, y si $u > P$, las soluciones se aproximan a K.

```
md"""
(a). Esboce el retrato de fase de la ecuación y verifique que si $0 < u < P$, las soluciones decaen a cero, y si $u > P$, las soluciones se aproximan a $K$.
"""
```

Se tiene que $0=-ru\left(1-\frac{u}{K}\right)\left(1-\frac{u}{P}\right)$, por lo que $-ru=0$, $\left(1-\frac{u}{K}\right)=0$ o $\left(1-\frac{u}{P}\right)=0$. Por lo tanto los puntos de equilibrio son $u=0$,$u=K$ o $u=P$. Además, se tiene que:

$$\begin{align*}
\text{si }u<0&: -ru>0 \text{,}& 1-\frac{u}{K}>0 \text{, }\quad & 1-\frac{u}{P}>0 & \text{ luego }\frac{dy}{dt}>0\\
\text{si }0<u<P&: -ru<0 \text{,}& 1-\frac{u}{K}>0 \text{, }\quad & 1-\frac{u}{P}>0 & \text{ luego }\frac{dy}{dt}<0\\
\text{si }P<u<K&: -ru<0 \text{,}& 1-\frac{u}{K}>0 \text{, }\quad & 1-\frac{u}{P}<0 & \text{ luego }\frac{dy}{dt}>0\\
\text{si }K<u&: -ru<0 \text{,}& 1-\frac{u}{K}<0 \text{, }\quad & 1-\frac{u}{P}<0 & \text{ luego }\frac{dy}{dt}<0
\end{align*}$$

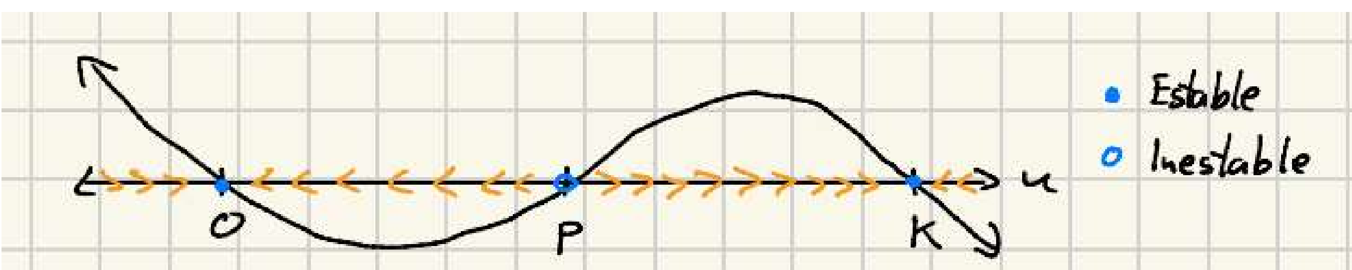
```
md"""
Se tiene que $\displaystyle 0=-ru\left(1-\frac{u}{K}\right)\left(1-\frac{u}{P}\right)$, por lo que $-ru=0$, $\displaystyle \left(1-\frac{u}{K}\right)=0$ o $\displaystyle \left(1-\frac{u}{P}\right)=0$.
Por lo tanto los puntos de equilibrio son $u=0$,$u=K$ o $u=P$. Además, se tiene que:

$\begin{align*}
\text{si }u<0&: -ru>0 \text{,}& 1-\frac{u}{K}>0 \text{, }\quad &  1-\frac{u}{P}>0 & \text{ luego }\frac{dy}{dt}>0\\

\text{si }0<u<P&: -ru<0 \text{,}& 1-\frac{u}{K}>0 \text{, }\quad &  1-\frac{u}{P}>0 & \text{ luego }\frac{dy}{dt}<0\\

\text{si }P<u<K&: -ru<0 \text{,}& 1-\frac{u}{K}>0 \text{, }\quad &  1-\frac{u}{P}<0 & \text{ luego }\frac{dy}{dt}>0\\

\text{si }K<u&: -ru<0 \text{,}& 1-\frac{u}{K}<0 \text{, }\quad &  1-\frac{u}{P}<0 & \text{ luego }\frac{dy}{dt}<0\\
\end{align*}$
"""
```



Se tiene entonces que:

- si $0<u<P$, u tiende a 0.
- si $P<u$, u tiende a K.

(b). Si N denota la dimensión de la población, entonces $[K]=[P]=N$.

¿Cuál es la dimensión de r?

Consideremos que:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{du}{dt}\right] &= \frac{N}{T} = NT^{-1}\\
\left[-ru\left(1-\frac{u}{K}\right)\left(1-\frac{u}{P}\right)\right] &= [r]\cdot[u]\cdot\left[1-\frac{u}{K}\right]\cdot\left[1-\frac{u}{P}\right]\\
&= [r]\cdot N\cdot 1\cdot 1 = [r]\cdot N
\end{aligned}$$

$$\text{Por lo tanto,}\quad NT^{-1}=[r]\cdot N$$

es decir $[r]=T^{-1}$

(c). Demuestre que la única escala de tiempo característica de la forma $t_c = r^\alpha K^\beta P^\gamma$ es $t_c = r^{-1}(K/P)^\beta$. Tome $\beta = 0$, de modo que $t_c = 1/r$. Si muestreamos la población en tiempos periódicos, ¿qué implicaciones tiene esto para la frecuencia de muestreo?

calculemos las dimensiones de t_c:

$$\begin{aligned}[t_c] &= [r^\alpha K^\beta P^\gamma] \\ T &= [r^\alpha][K^\beta][P^\gamma] \\ T &= T^{-\alpha} N^\beta N^\gamma = T^{-\alpha} N^{\beta+\gamma}\end{aligned}$$

por lo tanto, se tiene que $-\alpha = 1$ y $\beta + \gamma = 0$, por lo que $\alpha = -1$ y $\gamma = -\beta$.

De lo anterior tenemos entonces que $t_c = r^{-1} K^\beta P^{-\beta} = r^{-1}\left(\frac{K}{P}\right)^\beta$.

Ahora, si $\beta = 0$ se tiene que $t_c = r^{-1}$. Por lo tanto $\overline{t}$, la variable temporal adimensionada, es igual a $\frac{t}{t_c} = \frac{t}{r^{-1}} = rt$.

Cuando el periodo de muestreo se acerca a la escala de tiempo característica del sistema, la información que obtenemos será precisa y representativa de los cambios dinámicos del sistema. En este caso, el intervalo entre las muestras es lo suficientemente corto como para capturar correctamente la evolución del sistema.

Por otro lado, si la escala de tiempo característica es mucho mayor que el periodo de muestreo, los cambios importantes del sistema se "saltan" entre una muestra y otra, lo que puede llevar a una distorsión de la información. En este caso, perdemos detalles cruciales y la interpretación del comportamiento del sistema se vuelve menos confiable.

En el caso opuesto, si el periodo de muestreo es muy pequeño, podríamos obtener demasiada información sin que se observe un cambio significativo en el sistema, lo que podría hacer que el análisis sea más complejo de lo necesario y añadir ruido en lugar de claridad.

En resumen, para obtener una representación fiel del sistema, el periodo de muestreo debe estar cercano a la escala de tiempo característica.

(d). Demuestre que cualquier escala característica de población de la forma $u_c = r^\alpha K^\beta P^\gamma$ es $u_c = K^\beta P^\gamma$ con $\beta + \gamma = 1$, o equivalentemente $u_c = K(P/K)^\gamma$.

Calculemos las dimensiones de u_c:

$$\begin{aligned}[u_c] &= [r^\alpha][K^\beta][P^\gamma] \\ N &= T^{-\alpha} N^\beta N^\gamma = T^{-\alpha} N^{\beta+\gamma}\end{aligned}$$

por lo tanto, $-\alpha = 0$ y $\beta + \gamma = 1$, es decir $\alpha = 0$ y $\gamma = 1 - \beta$.

De lo anterior, tenemos que $u_c = r^0 K^{1-\gamma} P^\gamma = K^{1-\gamma} P^\gamma = K\left(\frac{P}{K}\right)^\gamma$

(e). Adimensionalice la ecuación usando $t_c = 1/r$ y $u_c = K$ (correspondiente a $\gamma = 0$ en $u_c = K(P/K)^\gamma$. ¿En qué se transforma la condición inicial $u(0) = u_0$ en el problema adimensionalizado?

Veamos la forma de las variables adimensionalizadas:

(·) $\overline{t} = \frac{t}{t_c} = \frac{t}{r^{-1}} = rt$, por lo que $t = \frac{\overline{t}}{r}$

(·) $\overline{u} = \frac{u}{u_c} = \frac{u}{K}$ por lo que $u = K\,\overline{u}$

De lo anterior, tenemos que $\dfrac{d\overline{t}}{dt} = r$, y que $\dfrac{du}{dt} = K \cdot \dfrac{d\overline{u}}{d\overline{t}} \cdot \dfrac{d\overline{t}}{dt} = Kr \cdot \dfrac{d\overline{u}}{d\overline{t}}$. Ahora remplazando en la ecuacion original

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= -ru\left(1-\frac{u}{K}\right)\left(1-\frac{u}{P}\right) \\
Kr\frac{d\overline{u}}{d\overline{t}} &= -r\left(K\overline{u}\right)\left(1-\frac{K\overline{u}}{K}\right)\left(1-\frac{\overline{u}}{P}\right) \\
\frac{d\overline{u}}{d\overline{t}} &= -\overline{u}\left(1-\overline{u}\right)\left(1-\frac{K}{P}\overline{u}\right)
\end{aligned}
$$

Ahora, sea $u(0) = u_0$, se tiene que: $\overline{u}(0) = \dfrac{u(0)}{K}$

(f). Adimensionalice la ecuación usando $t_c = 1/r$ y $u_c = P$ (correspondiente a $\gamma = 1$ en $u_c = K(P/K)^{\gamma}$). ¿En qué se transforma la condición inicial $u(0) = u_0$ en el problema adimensionalizado?

Veamos la forma de las variables adimensionalizadas:

$(\cdot)$ $\overline{t} = \dfrac{t}{t_c} = \dfrac{t}{r^{-1}} = rt$, por lo que $t = \dfrac{\overline{t}}{r}$

$(\cdot)$ $\overline{u} = \dfrac{u}{u_c} = \dfrac{u}{P}$ por lo que $u = P\,\overline{u}$

De lo anterior, tenemos que $\dfrac{d\overline{t}}{dt} = r$, y que $\dfrac{du}{dt} = P \cdot \dfrac{d\overline{u}}{d\overline{t}} \cdot \dfrac{d\overline{t}}{dt} = Pr \cdot \dfrac{d\overline{u}}{d\overline{t}}$. Ahora reemplazando en la ecuación original se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= -ru\left(1-\frac{u}{K}\right)\left(1-\frac{u}{P}\right) \\
Pr\frac{d\overline{u}}{d\overline{t}} &= -r\left(P\overline{u}\right)\left(1-\frac{P\overline{u}}{K}\right)\left(1-\frac{P\overline{u}}{P}\right) \\
\frac{d\overline{u}}{d\overline{t}} &= -\overline{u}\left(1-\frac{P}{K}\overline{u}\right)\left(1-\overline{u}\right)
\end{aligned}
$$

Ahora, sea $u(0) = u_0$, se tiene que: $\overline{u}(0) = \dfrac{u(0)}{P}$.

(g). Considere una versión con cosecha de la ecuación, dada por:

$$
\frac{du}{dt} = -ru\left(1-\frac{u}{K}\right)\left(1-\frac{u}{P}\right) - hu,
$$

donde $h > 0$ es la tasa de cosecha. Usando $t_c = 1/r$ y $u_c = K$, demuestre que la función adimensionalizada $\bar{u}(\tau) = \frac{u(t)}{K}$ (donde $\tau = \frac{t}{t_c} = rt$) satisface la ecuación:

$$
\frac{d\bar{u}}{d\tau} = -\bar{u}\left(1-\bar{u}\right)\left(1-\frac{K}{P}\bar{u}\right) - \varepsilon\bar{u},
$$

con $\varepsilon = h/r$.

como fue probado en **e)**, se tiene que $t_c = r^{-1}$, $u = k\overline{u}$ y $\dfrac{du}{dt} = Kr\dfrac{d\overline{u}}{d\overline{t}}$, por lo que:

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= -ru\left(1-\frac{u}{K}\right)\left(1-\frac{u}{P}\right)+hu \\
Kr\frac{d\overline{u}}{d\overline{t}} &= -r\left(K\overline{u}\right)\left(1-\frac{K\overline{u}}{K}\right)\left(1-\frac{K\overline{u}}{P}\right)+hK\overline{u} \\
Kr\frac{d\overline{u}}{d\overline{t}} &= -r\left(K\overline{u}\right)\left(1-\overline{u}\right)\left(1-\frac{K}{P}\overline{u}\right)+hK\overline{u} \\
&= -r\left(K\overline{u}\right)\left(1-\overline{u}\right)\left(1-\frac{K}{P}\overline{u}\right)-\varepsilon\overline{u} \quad \text{con} \quad \varepsilon=\frac{h}{r}
\end{aligned}$$

(h). Suponga que en la ecuación con cosecha, $P = K/10$. Escriba explícitamente la ecuación:

$$\frac{d\bar{u}}{d\tau} = -\bar{u}\left(1-\bar{u}\right)\left(1-10\bar{u}\right)-\varepsilon\bar{u}.$$

Muestre que si $\varepsilon > 2.025$, todas las soluciones con $u(0) > 0$ convergen a cero. Identifique los puntos fijos, esboce el retrato de fase y analice la dependencia con respecto a ε. ¿Qué restricción impone esto sobre h/r para evitar la extinción en la ecuación original?

La ecuación original con cosecha es:

$$\frac{du}{dt} = -ru\left(1-\frac{u}{K}\right)\left(1-\frac{u}{P}\right)-hu.$$

Utilizando las escalas adimensionales $t_c = \frac{1}{r}$ y $u_c = K$, tenemos:

$$u = K\bar{u}, \quad \frac{du}{dt} = rK\frac{d\bar{u}}{d\tau}, \quad \tau = rt.$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$rK\frac{d\bar{u}}{d\tau} = -rK\bar{u}\left(1-\bar{u}\right)\left(1-\frac{K}{P}\bar{u}\right)-hK\bar{u}.$$

Dividiendo por rK y usando $\varepsilon = \frac{h}{r}$, obtenemos:

$$\frac{d\bar{u}}{d\tau} = -\bar{u}\left(1-\bar{u}\right)\left(1-\frac{K}{P}\bar{u}\right)-\varepsilon\bar{u}.$$

Sustituyendo $P = \frac{K}{10}$, obtenemos la ecuación adimensionalizada:

$$\frac{d\bar{u}}{d\tau} = -\bar{u}\left(1-\bar{u}\right)\left(1-10\bar{u}\right)-\varepsilon\bar{u}.$$

Los puntos fijos se encuentran al resolver:

$$\frac{d\bar{u}}{d\tau} = 0,$$

lo que implica:

$$\bar{u}\left[-\left(1-\bar{u}\right)\left(1-10\bar{u}\right)-\varepsilon\right] = 0.$$

Esto da como soluciones:

(·) $\bar{u} = 0$,

(·) $-\left(1-\bar{u}\right)\left(1-10\bar{u}\right)-\varepsilon = 0$.

Resolvemos la ecuación cuadrática:

$$\left(1-\bar{u}\right)\left(1-10\bar{u}\right) = \varepsilon,$$

expandiendo:

$$1 - 10\bar{u} - \bar{u} + 10\bar{u}^2 = \varepsilon,$$

$$10\bar{u}^2 - 11\bar{u} + (1 - \varepsilon) = 0.$$

Las soluciones para $\bar{u}$ son:

$$\bar{u} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 40(1-\varepsilon)}}{20}.$$

Simplificando:

$$\bar{u} = \frac{11 \pm \sqrt{81 + 40\varepsilon}}{20}.$$

Si $\varepsilon > 2.025$, el discriminante $81 + 40\varepsilon$ es positivo, y las soluciones para $\bar{u}$ incluyen una positiva y una negativa. La solución positiva será lo suficientemente pequeña como para que el sistema se estabilice en $\bar{u} = 0$, lo que indica la extinción de la población.

Los puntos fijos son:

(·) $\bar{u} = 0$ (extinción),

(·) La solución positiva depende de ε.

Esbozando el retrato de fase:

- Cuando ε es pequeño, las soluciones positivas convergen a un valor de $\bar{u}$ mayor que cero, representando una población estable.
- Cuando $\varepsilon > 2.025$, todas las soluciones con $u(0) > 0$ convergen a $\bar{u} = 0$, indicando la extinción.

Para evitar la extinción, debemos tener $\varepsilon \leq 2.025$, lo que implica que:

$$\frac{h}{r} \leq 2.025.$$

Esta es la restricción que debe cumplirse en la ecuación original para evitar la extinción de la población.