1. Sets and intervals

Zápis

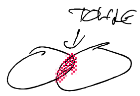
Jako M = $\emptyset$ když se jedná o prázdnou množinu

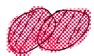
Nebo výčtem prvků: M = {0,2,5,8} - pokud je množina konečná

Nebo výčtem vlastností: M = {x $\in$ Z : V (x)} Z je zde základní množina ze které vybíráme prvky, a V(x) je nějaké omezení té množiny

Vztahy

$M \subset N$: M je **podmnožina** N => všechny M jsou i v N

$M \cap N$: M **průnik** N => výpis společných prvků obou množin 

$M \cup N$: M **sjednocení** N => výpis všech prvků dohromady (není to doublování) 

$M \setminus N$: M **rozdíl** N => výpis všech, co jsou pouze nalevo a nejsou vpravo 

$\overline{M}$: M **doplněk** => opak rozdílu. Všechny, co nejsou v M 

$\cap$ se dá zapsat i takto $\wedge$ aby v tom bylo jasno…
$\cup$ se dá zapsat i takto $\vee$

|M| **mohutnost** množiny => jmenuje se blbě, ale je to length nebo count, počet prvků v množině

2. Number properties

Sunday 20 March 2022 12:52

Základní číselné obory

- Přirozená čísla.	$\mathbb{N}$	Kladná celá čísla bez nuly	1, 2, 3 , 400
- Celá čísla	$\mathbb{Z}$	Kladná i záporná celá čísla i s nulou	1, -1, 0, 400
- Racionální čísla	$\mathbb{Q}$	Lze vyjádřit zlomkem	0.5, 2/3, …
- Reálná čísla	$\mathbb{R}$	Vše z tohoto + iracionální čísla, co nejdou vyjádřit zlomkem	

Iracionální + komplexní

Pravidla
Násobení a dělení má přednost před sčítáním a odčítáním
$-1^2 = 1$ ale $(-1)^2 = 1$

Největší společný dělitel (NSD)
126 = 2 * 3 * 3 * 7
30 = 2 * 3 * 5

NSD = 2 * 3 = 6

Nejmenší společný násobek (nsn)
126 = 2 * 3 * 3 * 7
30 = 2 * 3 * 5

nsn = 2 * 3ˆ2 * 5 * 7 = 630

Změna poměru
a : b

Když a je větší, tak jde o zvětšení — Změna 500 v poměru 2 : 1 = 1000
Když a je menší, tak jde o zmenšení — Změna 500 v poměru 1 : 2 = 250

3. Algebraic expressions

Sunday 20 March 2022 13:35

Useful formulas

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a \pm b)(a^2 \pm ab + b^2) = a^3 - b^3$$

Doplnění na čtverec dvojčlenu

$$ax^2 + bx + c = a\cdot\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$$= a\cdot\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \underbrace{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}}_{0}\right) + c$$

$$= a\cdot\underbrace{\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)}_{a^2 + 2ab + b^2} + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$\underbrace{= a\cdot\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}}_{\text{čtverec dvojčlena a zbytek}}$$

4. Rovnice a nerovnice

Sunday 20 March 2022 14:15

Neekvivalentní úpravy

<u>Pokaždé musíme udělat zkoušku, pokud jsme je dělali</u>

- Odmocnina s jednou neznámou => dát jí na jednu stranu rovnice a umocnit
- Odocnina s více neznámými => dát je zase na jednu stranu a umocňovat, dokud nemám vše umocněno, zbytek zůstává na druhé straně rovnice

Odmocnina = umocním celou rovnici
Více odmocnin, umocňuji celou rovnici, používám základní vzorce, a zkouším odebírat kusy, co jsou stejné.

Podle stupně polynomu $P(x)$ rozlišujeme různé typy polynomických rovnic/nerovnic.

1. $st(P(x)) = 1$ - lineární rovnice/nerovnice;
2. $st(P(x)) = 2$ - kvadratická rovnice/nerovnice;
3. $st(P(x)) = 3$ - kubická rovnice/nerovnice;
4. $st(P(x)) = 4$ - kvartická rovnice/nerovnice;
5. atp.

Lineární (ne)rovnice
ax + b = 0 / -b
ax = - b / :a
x = -b/a

a,b E R, a != 0

Kvadratická (ne)rovnice

Obecný tvar:
$ax^2+bx+c=0 \quad a,b,c \in R, \ a \notin 0$

1. můžu řešit pomocí vzorce

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\underbrace{b^2-4ac}} }{2a} \Rightarrow D$$

když $D > 0$ rovnice má dva kořeny
když $D = 0$ rovnice má jeden dvojnásobný reálný kořen
když $D < 0$ rovnice <u>nemá</u> žádný reálný kořen

2. můžu řešit pomocí doplnění na čtverec a rozložení na kořenové činitele

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \\
&= a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\underbrace{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}}_{0}\right)+c \\
&= \underbrace{a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)}_{\sim(A^2+2AB+B^2)}+c-\frac{b^2}{4a} \\
&= \underbrace{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}}_{\text{čtverec dvojčlenu a zbytek}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2x^2+4x-30 &= 2(x^2+2x)-30 \\
&= 2(x+1)^2-30-2 \\
&= 2(x+1)^2-32
\end{aligned}
$$

V tuto chvíli máme rozklad na čtverec. Pokračujme jako v obecném příkladu výše:

$$
\begin{aligned}
2\left[(x+1)^2-16\right] &= 2(x+1+4)\cdot(x+1-4) \\
&= 2(x-(-5))\cdot(x-3)
\end{aligned}
$$

Kořeny tohoto polynomu jsou tedy čísla -5 a 3.

3. můžu použít vietovy vzorce, konkrétně:

$x_1+x_2=-\frac{a}{b}$

$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

4. mohu použít speciální vzorce

např. $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$

Strategie řečení kvadratických nerovnic:

1. Nalezení nulových bodů, tj. kořenů.
2. Rozdělení číselné osy na intervaly s kořeny na krajích.
3. Nalezení znamének kořenových činitelů v jednotlivých intervalech.
4. Závěr a shrnutí.

Speciální typy rovnic

Rovnice s odmocninou - popsal jsem nahoře

Rovnice s absolutní hodnotou

$|x-7|=5$

řeším v zásadě více rovnic pro různá znaménka v absolutní hodnotě
= když je kladné, tak kladné, když je záporné, tak záporné

$x-7<0$: $-x+7=5$
$\underline{x=2}$

$x-7>0$: $x-7=5$
$\underline{x=12}$

$x-7>0$: $x-7=5$

$\underline{\underline{x=12}}$

5. Lineární a kvadratické funkce

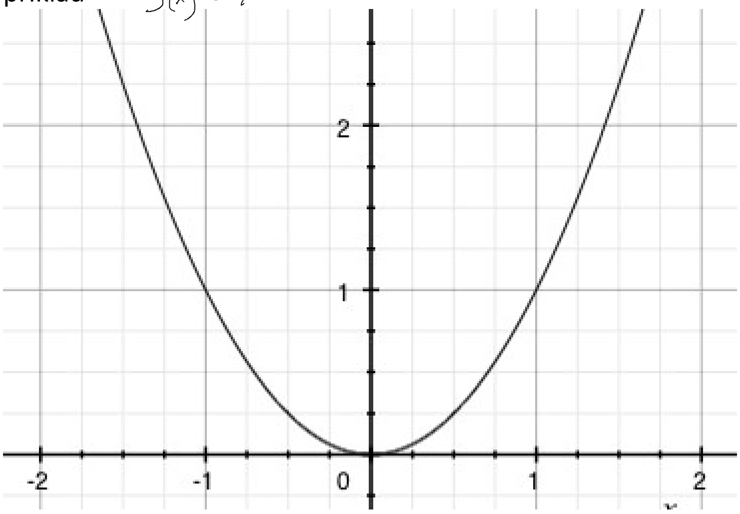
Sunday 20 March 2022 17:20

Monotonie:
- rostoucí
- klesající
- neroustoucí
- neklesající
- konstantní

Omezenost
- omezená na množině
- omezená ze shora nebo zdola
- neomezená

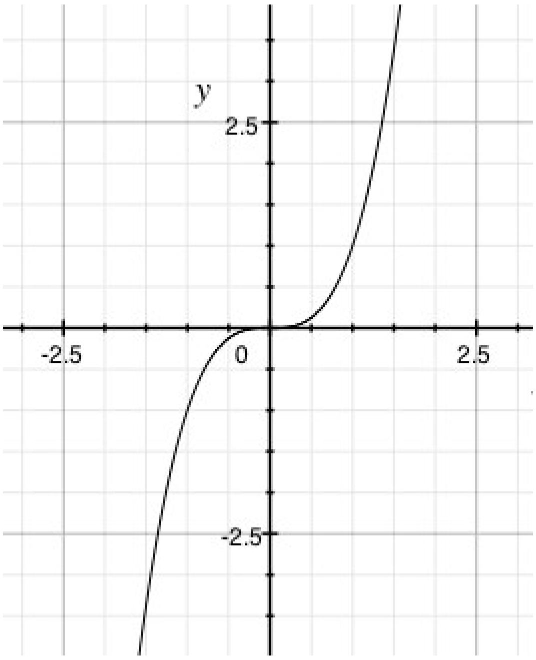
Parita
- sudá
- lichá

sudá
příklad $f(x) = x^2$



Když do funkce dám x a -x, tak to vrátí stejnou hodnotu.
Hodnotu y - např. 1, když jsem dal -1 a 1.

lichá
příklad $f(x) = x^3$
je inverzní, když má [-a, -b], tak má i [a, b]



Pozn.:

- Funkce nemusí být ani sudá ani lichá.
- x^n je sudá pro sudá n a lichá pro lichá n.

Periodicita

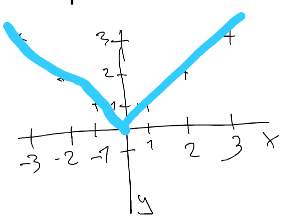
Je když $f(x+p) = f(x) \quad \forall x \in D_f$

$\frac{1}{p}$ = frekvence

Spojitost
Když není přerušená - jen jedna čára

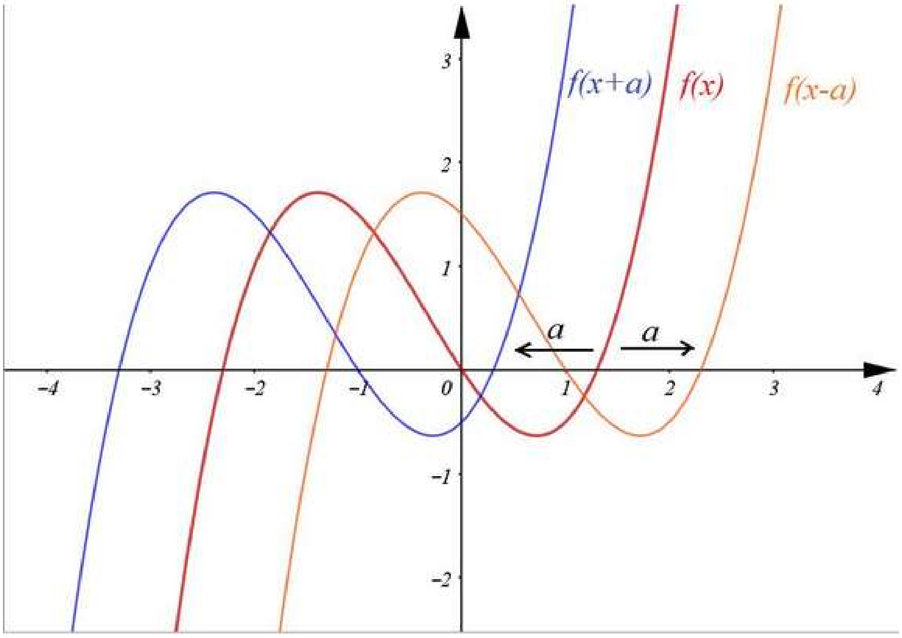
Hladkost
Je hladká, když nemá ostré zlomy a je spojitá

$y = |x|$ například není hladká



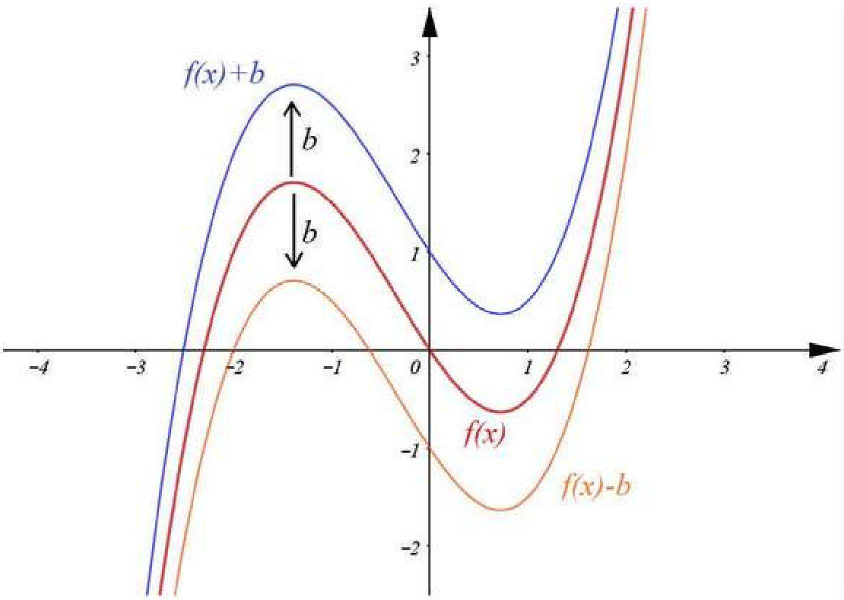
Transformace
Posunutí ve směru osy x

Posunutí ve směru osy x:
$y = f(x \pm a),\ a > 0$



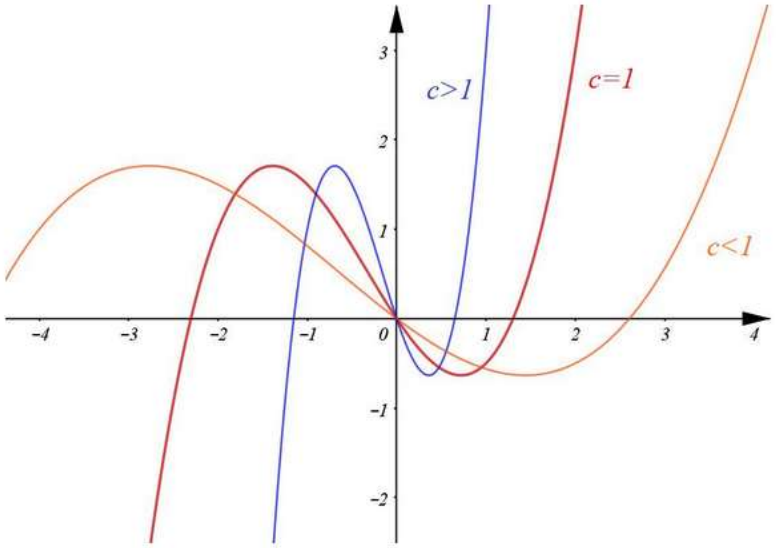
Posunutí ve směru osy y

Posunutí ve směru osy y:
$y = f(x) \pm b,\ b > 0$



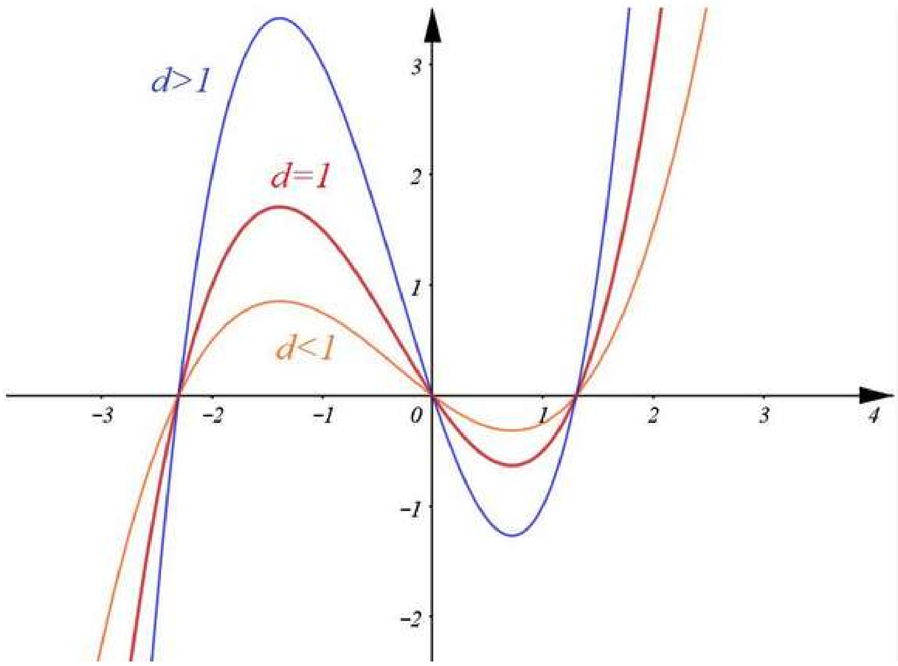
Kontrakce a dilatace ve směru osy x

Kontrakce a dilatace ve směru osy x:
$y = f(c \cdot x),\ c > 0$



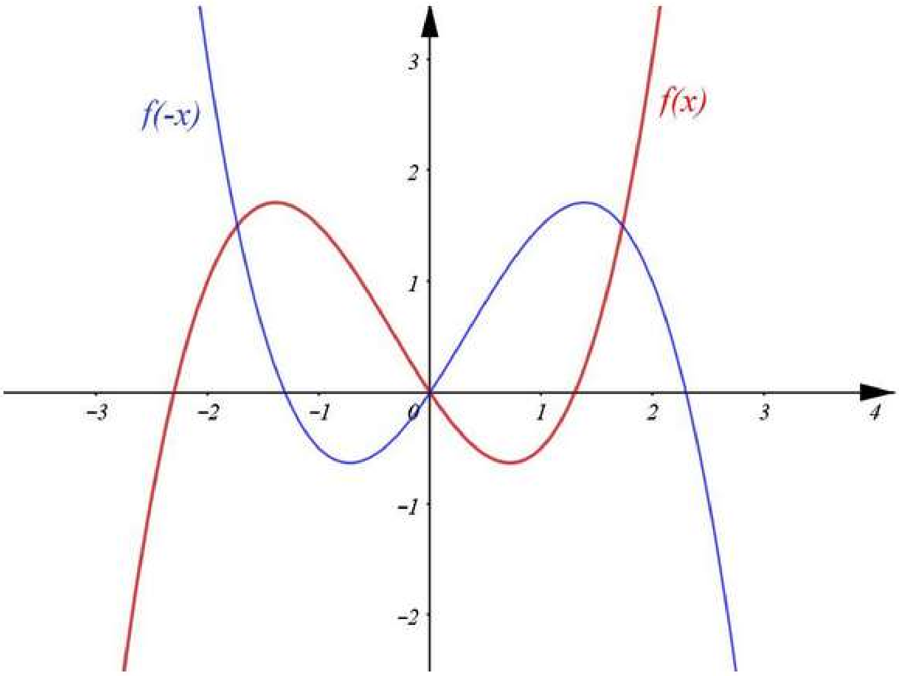
Kontrakce a dilatace ve směru osy y

Kontrakce a dilatace ve směru osy y:
$$y = d \cdot f(x),\ d > 0$$



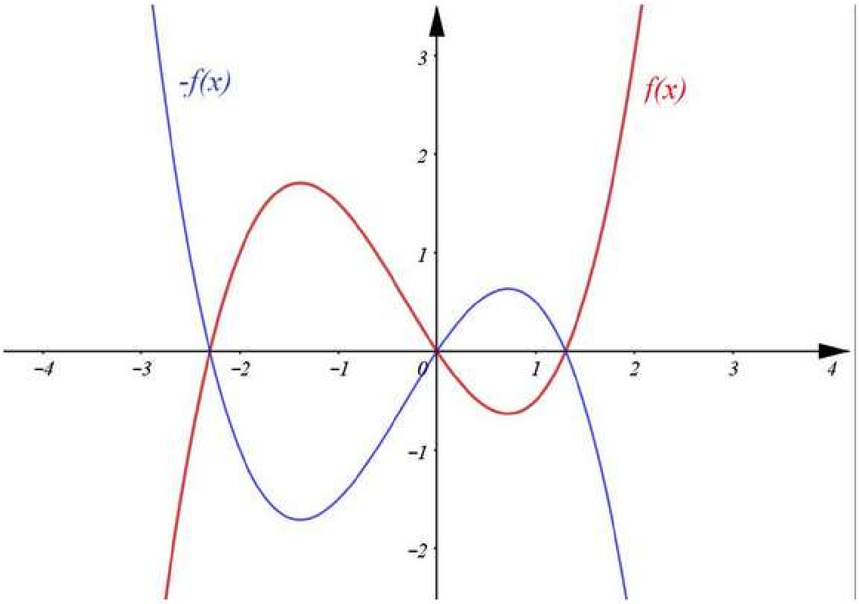
Překlopení podle osy y

Překlopení podle osy y:
$$y = f(-x)$$



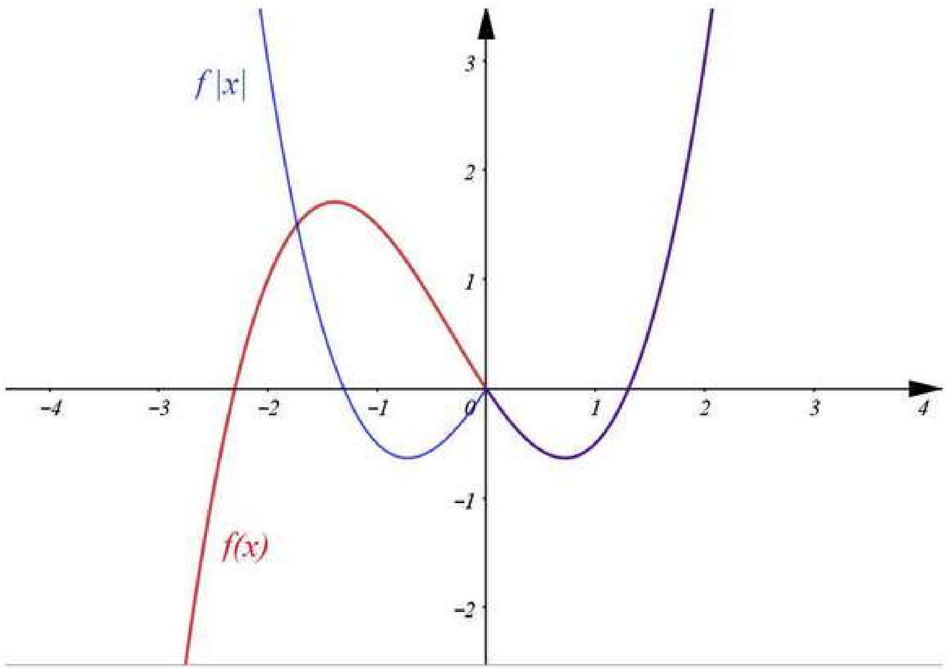
Překlopení podle osy x

Překlopení podle osy x:
$y = -f(x)$



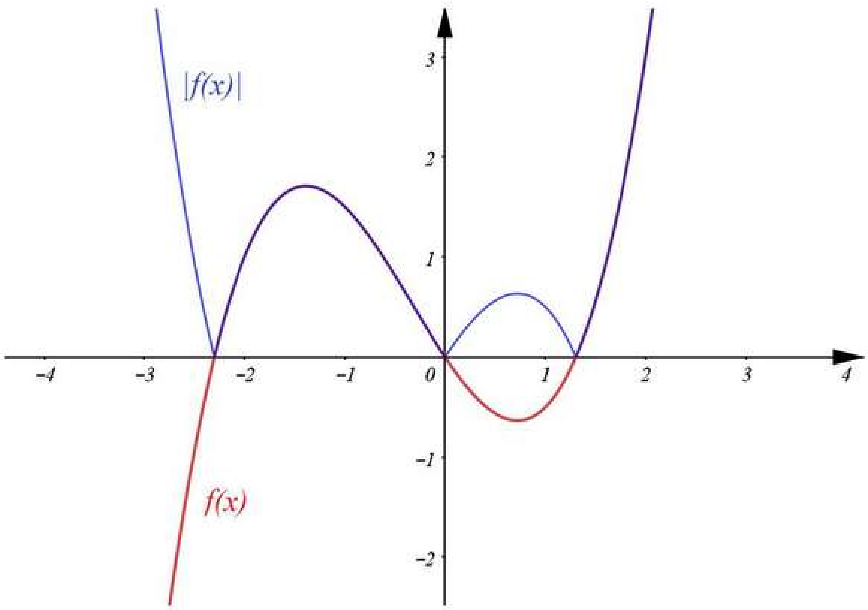
Absolutní hodnota argumentu

Absolutní hodnota argumentu:
$y = f(|x|)$



Absolutní hodnota funkční hodnoty

Absolutní hodnota funkční hodnoty:
$y = |f(x)|$



5. Lineární a kvadratické funkce, základ

Sunday 20 March 2022 17:54

Lineární funkce, neboli polynom prvního stupně je akždá funkce tvaru $f: y = ax + b;\ a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

> Grafem je přímka.

> Písmenka a, b představují koeficienty, jsou to obecně nějaká reálná čísla. a nazýváme směrnice a b absolutní člen/prusečík.

> Definičním oborem lineární funkce jsou obecně všechna reálná čísla, stejně tak obor hodnot jsou všechna reálná čísla. ($D_f = \mathbb{R},\ H_f = \mathbb{R}$)

> Smernice je číselně rovna $\tan\varphi$, kde φ je úhel, který svírá přímka a kladná poloosa x.

> Pro $a > 0$ je funkce rostoucí, pro $a < 0$ je klesající.

Pozn.: Přímku kolmou k ose x takto ($y = ax + b$) nelze popsat (není to funkce).

Lineární lomená funkce je každá funkce tvaru $f: y = \dfrac{a}{x+b} + c;\ a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

> Písmenka a, b, c představují koeficienty, jsou to obecně nějaká reálná čísla.

> Grafem lineární lomené funkce je křivka, kterou nazýváme (rovnoosá) hyperbola. Její asymptoty budou přímky $y = c$ a $x = -b$, tedy střed bude mít souřadnice $[-b, c]$.

> Definičním oborem jsou všechna reálná čísla kromě hodnoty $-b$, tuto jednu hodnotu nemůžeme dosadit, jelikož bychom se tím dopustili dělení nulou. ($D_f = \mathbb{R} \setminus \{-b\}$).

> Oborem hodnot je množina všech reálných čísel kromě čísla c, tuto hodnotu nezískáme žádným dosazením za x (zlomek nikdy nebude nula, do čitatele se nedosazuje). ($H_f = \mathbb{R} \setminus \{c\}$)

Kvadratická funkce (polynom druhého stupně) je každá funkce tvaru $f : y = ax^2 + bx + c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$.

Grafem kvadratické funkce je křivka, kterou nazýváme parabola. U paraboly určujeme vždy její vrchol.

Definičním oborem kvadratické funkce jsou obecně všechna reálná čísla. ($D_f = \mathbb{R}$)

Oborem hodnot této funkce je vždy jen podmnožina reálných čísel. ($H_f = (-\infty; v_y\rangle$, nebo $\langle v_y; \infty)$, kde v_y je y-souřadnice vrcholu)

Tato funkce je vždy omezená shora ($a < 0$), nebo zdola ($a > 0$).

Připomeňmě, že kvadratický polynom má v závislosti na hodnotě diskriminantu D buď 2 kořeny ($D > 0$), jeden dvojnásobný kořen ($D = 0$), nebo žádný reálný kořen ($D < 0$). Počtu kořenů odpovídá počet průsečíků grafu této funkce s osou x.

Často je pro nás při vykreslení grafu této funkce výhodnější tvar v podobě čtverce dvojčlenu (můžeme udělat vždy, viz. kapitola Algebraické výrazy): $y = a \cdot (x - B)^2 + C$, kde $B = -\dfrac{b}{2a}$ a $C = c - \dfrac{b^2}{4a}$. Souřadnice vrcholu této paraboly pak jsou: $V = [B, C] = [-\dfrac{b}{2a}, c - \dfrac{b^2}{4a}]$. Uvažujeme-li $y = x^2$ jako výchozí graf, pak konstanta a nám zde udává kontakci/dilataci (příp. překlopení) ve směru osy y, B posun ve směru osy x a C posunutí ve směru osy y.

Lineární funkce s absolutní hodnotou je funkce ve tvaru $y = a \cdot |x + b| + c$ (kde $a \neq 0$). (atp. pro další funkce)

Při práci s funkcemi s absolutní hodnotou se budeme řídit pravidly popsanými v této sekci výše.