

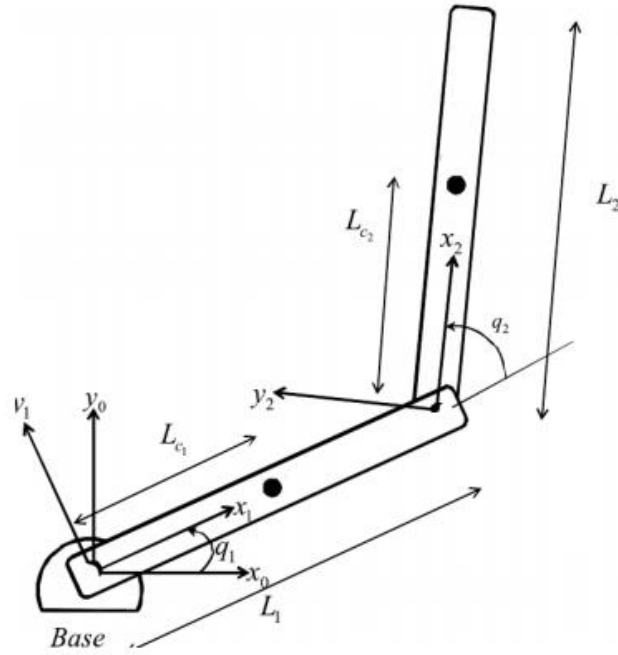
ΣΑΕ ΙΙΙ

ΕΡΓΑΣΙΑ Β

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΙΣΤΑΤΙΑΔΗΣ

9175 nikoista@ece.auth.gr

Ρομποτικός βραχίονας 2 αρθρώσεων



Θεωρούμε το σύστημα ρομποτικού βραχίονα που περιγράφεται από την σχέση:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}$$

$$\mathbf{q} = [q_1 \ q_2]^T, \dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2]^T$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_2(L_{c2}^2 + 2L_1L_{c2}\cos(q_2) + L_1^2) + L_{c1}^2m_1 + I_{z2} + I_{z1} & m_2L_{c2}^2 + L_1L_{c2}m_2\cos(q_2) + I_{z2} \\ L_{c2}^2m_2 + L_1L_{c2}m_2\cos(q_2) + I_{z2} & L_{c2}^2m_2 + I_{z2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -m_2L_1L_{c2}\sin(q_2)\dot{q}_2 & -m_2L_1L_{c2}\sin(q_2)(\dot{q}_2 + \dot{q}_1) \\ m_2L_1L_{c2}\sin(q_2)\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_2L_{c2}g\cos(q_1 + q_2) + (m_2L_1 + m_1L_{c1})g\cos(q_1) \\ m_2L_{c2}g\cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

- q διάνυσμα 2×1 των γωνιών της άρθρωσης με παραγώγους \dot{q}, \ddot{q} .
- u διάνυσμα 2×1 των ροπών που ασκούνται στις αρθρώσεις.
- $H(q)_{\ddot{q}}$ είναι ένας 2×2 Πίνακας αδράνειας συμμετρικός και θετικά ορισμένος όπως θα αποδείξουμε στην συνέχεια.
- $C(q, \dot{q})_{\dot{q}}$ είναι ένας 2×2 Πίνακας κεντρομόλων ροπών.
- $G(q)$ είναι ένας 2×2 Πίνακας βαρυτικών ροπών.

Ταυτόχρονα οι παράμετροι $L1, L2$ είναι τα μήκη των συνδέσμων, $m1, m2$ είναι οι σημειακές μάζες των συνδέσμων $Iz1, Iz2$ οι ροπές αδράνειας των συνδέσμων, $Lc1, Lc2$ η απόσταση μεταξύ της άρθρωσης και του κέντρου μάζας του συνδέσμου 1 και 2 αντίστοιχα και g είναι η σταθερά βαρύτητας.

Στόχος ελέγχου είναι η παρακολούθηση της τροχιάς

$$q_{1d}(t) = \begin{cases} (-90^\circ + 50^\circ(1 - \cos(0.63t))) & t \leq 5 \\ 10^\circ & t > 5 \end{cases}$$

$$q_{2d}(t) = \begin{cases} 170^\circ - 60^\circ(1 - \cos(0.63t)) & t \leq 5 \\ 50^\circ & t > 5 \end{cases}$$

Οι τιμές των παραμέτρων του συστήματος για την προσομοίωση είναι: $m_1 = 6 \text{ kg}$, $m_2 = 4 \text{ kg}$, $L_1 = 0.5 \text{ m}$, $L_2 = 0.4 \text{ m}$, $L_{c1} = 0.2 \text{ m}$, $L_{c2} = 0.4 \text{ m}$, $I_{z1} = 0.43 \text{ kg m}^2$, $I_{z2} = 0.05 \text{ kg m}^2$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Θεωρείστε τις αρχικές τιμές $q_1(0) = -87^\circ$, $q_2(0) = 167^\circ$, $\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$.

Για την ανάλυση και σχεδίαση του ελεγκτή της εργασίας χρησιμοποιήθηκε θεωρία από το βιβλίο του **Slotine and Li applied nonlinear control**.

Θέμα Α

Γραμμικοποίηση εισόδου κατάστασης

Θεωρώντας τις παραμέτρους του ρομποτικού συστήματος γνωστές, επιλέξτε κατάλληλη είσοδο ώστε να γραμμικοποιήσετε το σύστημα και να επιτύχετε τον στόχο ελέγχου (τοποθετήστε τους πόλους του ΣΚΒ σφάλματος παρακολούθησης στο -10). Οι πραγματικές τιμές των παραμέτρων και η αρχική θέση του βραχίονα δίνονται στο τέλος.

Θεωρητική Ανάλυση

Η κινητική ενέργεια του χειριστή είναι για ένα σύστημα ελευθερίας ενός βαθμού

$$\text{είναι : } \mathbf{K} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

Πράγματι, η κινητική ενέργεια πρέπει να είναι αυστηρά θετική για οποιαδήποτε κοινή θέση \mathbf{q} και οποιαδήποτε μη μηδενική ταχύτητα άρθρωσης $\dot{\mathbf{q}}$. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι το $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ είναι ομοιόμορφα θετικά ορισμένος, δηλαδή ότι υπάρχει μια σταθερά $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ τέτοια ότι, για όλες τις θέσεις \mathbf{q} στο χώρο εργασίας του ρομπότ, $\mathbf{H}(\mathbf{q}) > \mathbf{a} \mathbf{I}$ όπου \mathbf{I} είμαι ο μοναδιαίος πίνακας. Αυτή η ιδιότητα μπορεί να παρατηρηθεί διότι εάν δεν υπήρχε τέτοιο $\mathbf{a} > \mathbf{0}$,

τότε θα υπήρχε μια θέση \mathbf{q} στον χώρο εργασίας όπου το πίνακας αδράνειας θα έχει μηδενική ιδιοτιμή, επειδή ο χώρος εργασίας είναι ένα κλειστό σύνολο.

Ορίζοντας \mathbf{v}_0 το ιδιοδιάνυσμα που σχετίζεται με αυτήν την μηδενική ιδιοτιμή,

ο βραχίονας του ρομπότ θα μπορούσε να κινηθεί με ταχύτητα $(\mathbf{v}_0 / \|\mathbf{v}_0\|)$

αλλά με μηδενική κινητική ενέργεια, που είναι αδύνατο. Έτσι, Το $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ είναι

πράγματι ομοιόμορφα θετικό και θα το αποδείξουμε στην συνέχεια .

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένας συμμετρικός πίνακας θετικά

ορισμένος, είναι να έχει θετικές πρωτεύουσες ορίζουσες οπότε για το

$\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{bmatrix}$ τοποθετούμε τις τιμές των παραμέτρων και έχουμε :

- $H_{11} = 2.36 + 1.6\cos(q_2)$ με $\det(H_{11}) = 2.36 + 1.6\cos(q_2) > 0$ αφού
 $-\leq \cos(q_2) \leq 1$.
- $H_{12} = -0.69 - 0.8\cos(q_2)$ και $H_{22} = 0.69$
- Οπότε $\det(H) = (2.36 + 1.6\cos(q_2)) \cdot 0.69 - (-0.69 - 0.8\cos(q_2))^2$ και αυτό
καταλήγει στην μορφή $\det(H) = 1.152 - 0.64\cos^2(q_2) > 0$ διότι $0 < \cos^2(q_2) \leq 1$ και συνεχίζοντας την ανισότητα καταλήγουμε ότι $\det(H) > 0$.

Συνεπώς ο $H(\mathbf{q})$ είναι Θετικά Ορισμένος Συμμετρικός Πίνακας 2x2 και

ορίζεται ο αντίστροφός του $H^{-1}(q) = \frac{adj(H)}{\det(H)}$ και γνωρίζουμε από την γραμμική

άλγεβρα πως $adj(H) = \begin{bmatrix} H_{22} & -H_{12} \\ -H_{12} & H_{11} \end{bmatrix}$ και $\det(H)$ που υπολογίσαμε άρα $H^{-1}(q)$

$$= \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix}$$

Οπότε έχουμε :

- $h_{11} = \frac{0.69}{1.152 - 0.64\cos^2(q_2)}$
- $h_{12} = \frac{-0.69 - 0.8\cos(q_2)}{1.152 - 0.64\cos^2(q_2)}$
- $h_{22} = \frac{2.36 + 1.6\cos(q_2)}{1.152 - 0.64\cos^2(q_2)}$

Θα προσεγγίσουμε την δυναμική του συστήματός μας από την άποψη της ενεργειακής μεταφοράς (δηλαδή, σε μορφή Χάμιλτον) και μπορούμε να γράψουμε τη διατήρηση της ενέργειας στη μορφή :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\dot{q}^T \mathbf{H}_q \dot{q}] = \dot{q}^T \mathbf{u}$$

όπου η αριστερή πλευρά είναι ή παράγωγο της κινητικής ενέργειας του manipulator , και στην δεξιά πλευρά έχουμε την είσοδο από τους ενεργοποιητές.

Η απόδειξη της ευστάθειας και σύγκλισης για έναν κοινού τύπου ελεγκτής τύπου (P.D) είναι αναμενόμενη. Ο (P.D) ελεγκτής είναι ένας νόμος ελέγχου ανατροφοδότησης που επιλέγει κάθε είσοδο ενεργοποιητή ανεξάρτητα, με βάση τις τοπικές μετρήσεις σφαλμάτων θέσης $\tilde{q}_j = q_j - q_{dj}$ και ταχύτητες αρθρώσεων $\dot{\tilde{q}}_j = \dot{q}_j - \dot{q}_{dj}$ με $j = 1, 2$ και νόμο ελέγχου:

$$u = -K_p \tilde{q}_j - K_D \dot{\tilde{q}}_j \text{ με } K_D, K_p > 0$$

Πίνακες με στοιχεία - κέρδη πάνω στην κύρια διαγώνιο $\text{diag}(K_D)$, $\text{diag}(K_p)$.

Αν σκεφτούμε το συνολική μηχανική ενέργεια και την ορίσουμε σαν V που θα σχετίζεται με το σύστημα εάν ο νόμος ελέγχου εφαρμοστεί χρησιμοποιώντας φυσικά ελατήρια και αποσβεστήρες. Συνεπώς ορίζουμε την V ως :

$$V = \frac{1}{2} [\dot{q}^T \mathbf{H}_q \dot{q} + \tilde{q}^T \mathbf{K}_p \tilde{q}]$$

Για να αναλύσουμε τη συμπεριφορά κλειστού βρόχου του ελεγχόμενου συστήματος, θα χρησιμοποιήσουμε την V ως συνάρτηση Lyapunov.

Η παράγωγος ως προς τον χρόνο της V είναι :

$$\dot{V} = \dot{q}^T (u + Kp_q)$$

και χρησιμοποιώντας τον νόμο ελέγχου που ορίσαμε πιο πάνω

$$\dot{V} = -\dot{q}^T K D \dot{q} \leq 0$$

Τώρα πρέπει μόνο να ελέγξουμε ότι το σύστημα δεν θα “κολλήσει” σε ένα στάδιο όπου το \dot{V} ισούται με 0 ενώ το q δεν ισούται με το q_d , άρα στην ουσία θα επικαλεστούμε θεώρημα αμετάβλητου συνόλου . Δεδομένου ότι $\dot{V} = 0$ υπονοεί ότι $\dot{q} = 0$ το οποίο με τη σειρά του υποδηλώνει ότι $\ddot{q} = H^{-1}Kp_q$

Έχει \dot{V} ίσο με το μηδέν μόνο αν $\tilde{q} = 0$. Επομένως, το σύστημα συγκλίνει στην επιθυμητή κατάσταση (θα πετύχουμε επιθυμητή παρακολούθηση της τροχιάς) .

Όπως έχουμε πει το u είναι u διάνυσμα εισόδων ελέγχου με διάσταση 2×1 και

$u = [u_1 \ u_2]^T$. Για την επίτευξη της διεργασίας ελέγχου παρακολούθησης , θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο νόμο ελέγχου:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$$

Ορίζουμε σύμφωνα με την θεωρία γραμμικοποίησης με ανάδραση :

$$\ddot{q} = v \quad , \quad v = [v_1 \ v_2]^T$$

Επιλέγουμε ελεγκτή που θα έχει την εξής μαθηματική μορφή :

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{v} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

$$\mathbf{v} = \ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{K}_2 (\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d) - \mathbf{K}_1(\mathbf{q} - \mathbf{q}_d) \text{ με } \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2 > \mathbf{0}$$

όπου για σφάλμα παρακολουθησης $\mathbf{e} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d$ και τις παραγώγους του μπορεί να γραφτεί το παραπάνω σε μορφή εξωτερικής δυναμικής :

$$\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_2\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_1\mathbf{e} = \mathbf{0}$$

$$\ddot{q}_1 - \ddot{q}_{d1} = -\mathbf{K}_1(\dot{q}_1 - \dot{q}_{d1}) - \mathbf{K}_2(q_1 - q_{1d})$$

$$\ddot{q}_2 - \ddot{q}_{d2} = -\mathbf{K}_1(\dot{q}_2 - \dot{q}_{d2}) - \mathbf{K}_2(q_2 - q_{2d})$$

Αυτό προϋποθέτει, φυσικά, ότι το δυναμικό μοντέλο, που χρησιμοποιείται στο στην εργασία μας είναι ακριβές.

Στην συνέχεια ορίζουμε τις νέες καταστάσεις z_1, z_2, z_3, z_4 :

- $z_1 = q_1 - q_{1d}$
- $z_2 = q_2 - q_{2d}$
- $z_3 = \dot{q}_1 - \dot{q}_{1d}$
- $z_4 = \dot{q}_2 - \dot{q}_{2d}$

Οι παράγωγοι των καταστάσεων ορίζονται και είναι :

- $\dot{z}_1 = z_3$

- $\dot{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{z}_4$
- $\ddot{\mathbf{z}}_3 = (\ddot{q}_1 - \ddot{q}_1 d) = -\mathbf{K}_1 \mathbf{z}_3 - \mathbf{K}_2 \mathbf{z}_1$
- $\ddot{\mathbf{z}}_4 = (\ddot{q}_2 - \ddot{q}_2 d) = -\mathbf{K}_1 \mathbf{z}_4 - \mathbf{K}_2 \mathbf{z}_2$

Θα δημιουργήσουμε τον πίνακα \mathbf{A} όπου $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A} \mathbf{z}$ συνεπώς για την τοποθέτηση των πόλων του ΣΚΒ σφάλματος παρακολούθησης στο -10 θα υπολογίσουμε

την $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ και σε πιο αναλυτική μορφή :

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -K_2 & 0 & -K_1 & 0 \\ 0 & -K_2 & 0 & -K_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda(\mathbf{K}_1 + \lambda) + \mathbf{K}_2)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \mathbf{K}_1 \lambda + \mathbf{K}_2 = 0$$

Έχουμε έναν διπλό πόλο στο -10 συνεπώς έχουμε μια διπλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης στο -10 άρα :

$$(\lambda + 10)(\lambda + 10) = \lambda^2 + 20\lambda + 100 = \lambda^2 + \frac{K_1}{2} \lambda + \frac{K_2}{2} \text{ άρα } \mathbf{K}_1 = 20 \mathbf{K}_2 = 100 \text{ τα}$$

κέρδη του ελεγκτή.

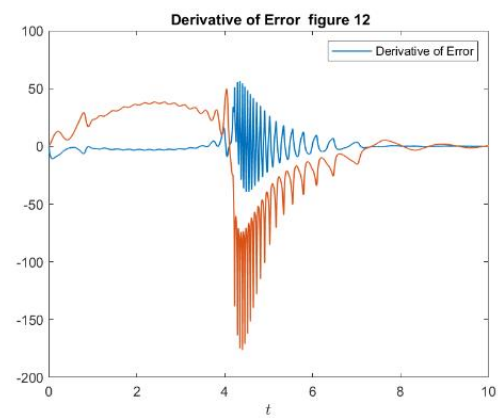
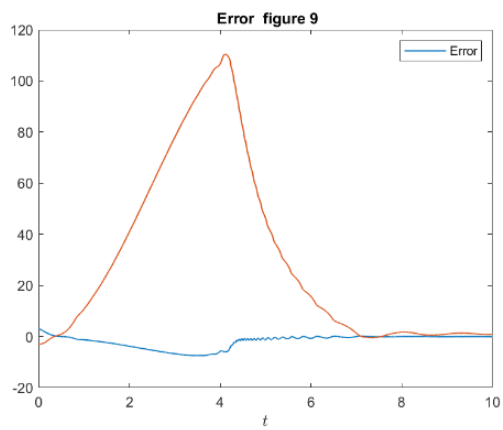
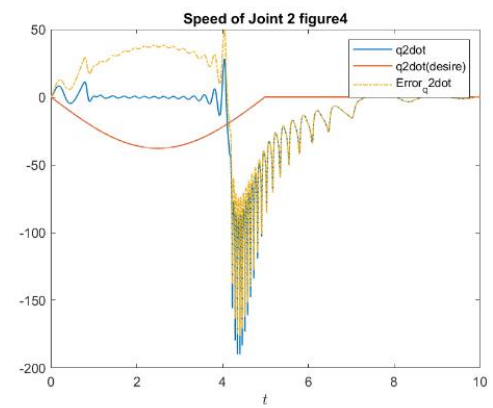
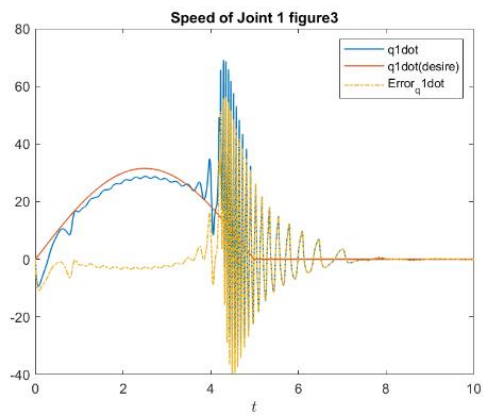
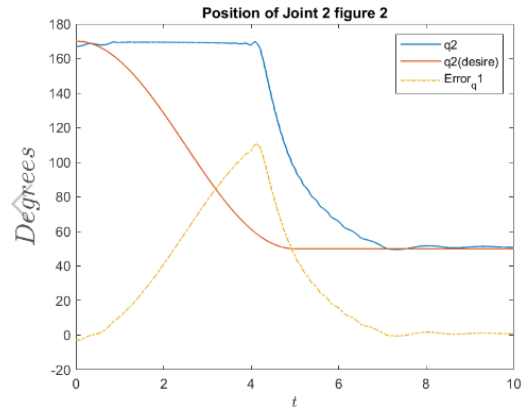
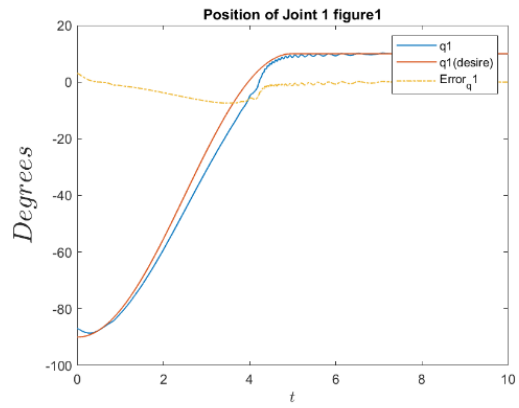
Θέμα Β

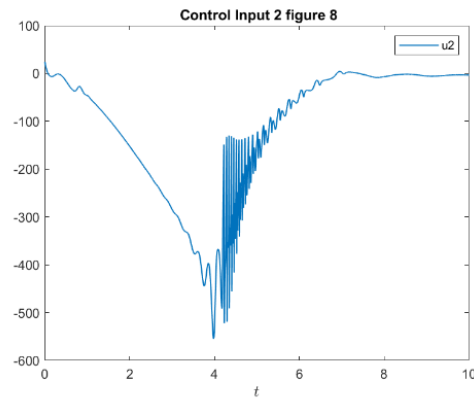
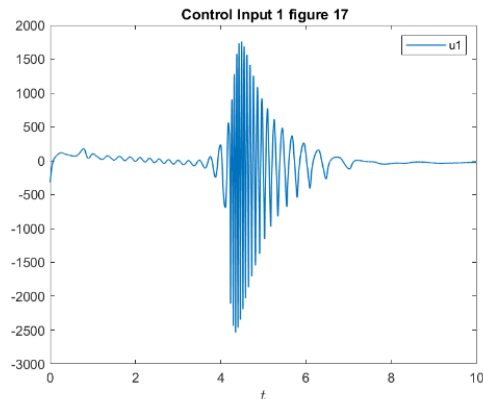
Έστω ότι οι τιμές των παραμέτρων $I_{z1}, I_{z2}, L_{c1}, L_{c2}, m_2$ του μοντέλου δεν είναι γνωστές αλλά εκτιμώνται στις τιμές $\hat{I}_{z1} = 0.05, \hat{I}_{z2} = 0.02, \hat{L}_{c1} = 0.35, \hat{L}_{c2} = 0.1, \hat{m}_2 = 2$ που διαφέρουν γενικά από τις πραγματικές. Επίσης γνωρίζουμε ότι $0.02 < I_{z1} < 0.5, 0.01 < I_{z2} < 0.15, 0.1 < L_{c1} < 0.4, 0.05 < L_{c2} < 0.45, 0.5 < m_2 < 5$ και ότι $\lambda_{\min}(H) \geq 0.2$ και $\lambda_{\max}(H) \leq 4$

1) Προσομοιώστε το σύστημα με τον ελεγκτή του Α με τις εκτιμώμενες τιμές

Χρησιμοποιώντας τις εκτιμήσεις των παραμέτρων $I_{z1}, I_{z2}, L_{c1}, L_{c2}, m_2$ και σχεδιάζοντας στο Matlab τον ελεγκτή που προέκυψε από την θεωρητική ανάλυση παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα.

Εργασία Β





Σχολιασμός αποτελεσμάτων

Όπως βλέπουμε από τις γραφικές παραστάσεις με την γραμμικοποίηση που εφαρμόσαμε πετυχαίνουμε στο “τέλος” παρακολούθηση του σήματος q_d από το q και συνεπώς το σφάλμα παρακολούθησης μηδενίζεται. Ωστόσο βλέπουμε πως το q_1 και το q_{1d} είναι κοντά ενώ το q_2 και q_{2d} έχουν απόκλιση. Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση του dq_1/dt , dq_{1d}/dt και dq_2/dt , dq_{2d}/dt όπου όπως βλέπουμε εμφανίζεται ένα φαινόμενο chattering και στο τέλος μηδενίζεται το σφάλμα παρακολούθησης. Όπως θα δούμε στην συνέχεια οι νόμοι ελέγχου που σχεδιάσαμε θα αποκτήσουν “εύρωστους” μηχανισμούς μέσω της μεθόδου ολίσθησης σφάλματος.

2) Εύρωστο νόμος ελέγχου με την μέθοδο ολίσθησης σφάλματος

Σχεδιάστε έναν εύρωστο νόμο ελέγχου με την μέθοδο ολίσθησης σφάλματος με $\Lambda = 10$ I πίνακας 2×2 έτσι ώστε να επιτυγχάνεται η παρακολούθηση της τροχιάς παρά τις αβεβαιότητες που υπάρχουν. Για την ομαλή μορφή της συνάρτησης προσήμου του ελεγκτή σας χρησιμοποιείτε την συνάρτηση κορεσμού που δίνεται παρακάτω. Προσομοιώστε το σύστημα και σχολιάστε τα αποτελέσματα.

Η ομαλή συνάρτηση προσήμου:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & |x| \geq \epsilon \\ \frac{x}{\epsilon}, & |x| < \epsilon \end{cases}$$

όπου ϵ μια μικρή θετική τιμή πχ. $\epsilon = 0.0001$. Σχολιάστε την επίπτωση μιας μεγαλύτερης τιμής του ϵ στο σήμα ελέγχου και στα σφάλματα παρακολούθησης

Θεωρητική Ανάλυση

Σχεδίαση Μη - Γραμμικών Ελεγκτών

Προδιαγραφές

- Ευστάθεια (περιοχή ευστάθειας και σύγκλισης)
- Ακρίβεια κ ταχύτητα απόκρισης (κατά προτίμηση ανεξάρτητη από την επιθυμητή τροχιά)
- Ευρωστία (σχετίζεται με ευαισθησία στις διαταραχές, θόρυβο και μη μοντελοποιημένη δυναμική)

Γενική δομή ελέγχου παρακολούθησης:

Ανάδραση - Προσωτροφοδότηση (feedback , feedforward)

Feedback σταθεροποιεί την δυναμική του σφάλματος παρακολούθησης.

Feedforward : μας δίνει πληροφορία για την επιθυμητή τροχιά και αντισταθμίζει γνωστές διαταραχές ή μη γραμμικότητες του συστήματος.

Έλεγχος ολίσθησης σφάλματος

Σε αυτό το κομμάτι της εργασίας θα δημιουργήσουμε έναν ισχυρό ελεγκτή τροχιάς. Στην περίπτωση πολλαπλών εισόδων, όπως στην περίπτωση μας υπάρχουν πολλές δυνατότητες για τον καθορισμό της ανάλογης ολισθαίνουσας κατάστασης. Μπορεί να απαιτούνται ολισθαίνουσες συνθήκες της μορφής :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} S_i^2 \leq -\eta_i |s_i|, \quad \eta_i > 0$$

να επαληθεύονται μεμονωμένα σε κάθε βαθμό ελευθερίας i , Επιπλέον, ας ορίσουμε μια επιφάνεια $S(t)$ που ποικίλει χρονικά στον χώρο των καταστάσεων R^n με τη βαθμιαία εξίσωση $s(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = 0$, όπου :

$$s(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \tilde{x}$$

Η αλλιώς μπορεί να γραφτεί σε μορφή $\dot{s}_i = \dot{q}_1 - \dot{q}_{1d} + \lambda_i (q_i - q_{id})$.

Στην περίπτωση μας $n = 2$ και προσπαθώντας να γενικεύσουμε την περίπτωση της μιας εισόδου, ορίζουμε τον πίνακα $\Lambda = 10 I (2 \times 2)$ που είναι θετικά ορισμένος, οπότε η εξίσωση έχει την μορφή :

$$\dot{s} = \dot{\tilde{x}} + \Lambda \tilde{x}$$

Που μπορεί και να ονομαστεί και σαν σφάλμα ταχύτητας

$$s = \dot{q} - \dot{q}_r$$

$$\dot{q}_r = \dot{q}_d - \Lambda \tilde{q}$$

Το διάνυσμα \dot{q}_r "ταχύτητα αναφοράς" σχηματίζεται μετατοπίζοντας τις επιθυμητές ταχύτητες \dot{q}_d σύμφωνα με το σφάλμα θέσης \tilde{q} .

Το διάνυσμα "ταχύτητα αναφοράς" \dot{q}_r , σχηματίζεται μετατοπίζοντας τις επιθυμητές ταχύτητες \dot{q} σύμφωνα με το σφάλμα θέσης \tilde{q} . Ομοίως με την περίπτωση μιας εισόδου, το διάνυσμα s μεταφέρει πληροφορίες σχετικά με τον περιορισμό και τη σύγκλιση των \tilde{q} και $\dot{\tilde{q}}$ δεδομένου ότι η παραπάνω σχέση του s μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως μια σταθερή διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης στο \tilde{q} , με το s ως είσοδο. Έτσι, υποθέτοντας ότι οι αρχικές συνθήκες είναι οριοθετημένες, δείχνοντας επίσης με αυτό τον τρόπο την οριοθέτηση που του s καθώς δείχνει και τα όρια των \tilde{q} και $\dot{\tilde{q}}$ και συνεπώς των \tilde{q} και $\dot{\tilde{q}}$. Ομοίως, αν το s τείνει 0 καθώς το t τείνει στο άπειρο, το ίδιο ισχύει και για τα διανύσματα \tilde{q} και $\dot{\tilde{q}}$.

Ο πίνακας Λ μας δίνεται από την εκφώνηση ως ένας 2×2 πίνακας με

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Στην αρχή μιλήσαμε για την διατήρηση της ενέργειας του συστήματος χωρίς να λάβουμε υπόψη τις βαρυτικές ροπές $g(q)$. Κανονικά θα έπρεπε να αναλύσουμε περαιτέρω και να παρουσιάσουμε την συλλογιστική πορεία σύμφωνα με την οποία η διατήρηση της ενέργειας μπορεί να γραφτεί ως:

$$\dot{\tau}^T (\tau - q) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\dot{\tau}^T H_q \dot{\tau}]$$

Συνεχίζοντας τις πράξεις καταλήγουμε στο ότι ο πίνακας $(\dot{H} - 2C)$ πρέπει να είναι λοξό-συμμετρικός, όμως αυτό εξαρτάται από το \dot{q} .

Στην πραγματικότητα, ο πίνακας C και το διάνυσμα ταχύτητας άρθρωσης \dot{q} είναι μοναδικά καθορισμένες φυσικές ποσότητες, αυτό όμως δεν καθορίζει την μοναδικότητα του C .

Δεδομένου ότι το H , και συνεπώς ο \dot{H} , είναι συμμετρικοί πίνακες, τότε μπορεί να γραφτεί και η λοξή συμμετρική του πίνακα $(\dot{H} - 2C)$ σε μορφή:

$$\dot{H} = C + C^T.$$

Στην εργασία μας όμως έχουμε μόνο βαθμούς ελευθερίας 2, αυτή η ισότητα μπορεί να είναι επαρκής για την παραγωγή της κατάλληλης μορφής C . Με αυτήν την περαιτέρω γενίκευση της διατήρησης της ενέργειας, είμαστε τώρα έτοιμοι να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα ελέγχου τροχιάς. Οπότε ορίσουμε την συνάρτηση Lyapunov :

$$V(t) = \frac{1}{2}[s^T H s]$$

και με παραγωγή ως προς τον χρόνο έχουμε :

$$\dot{V}(t) = s^T \left(H \dot{q} - \dot{H} \dot{q} \right) + \frac{1}{2} s^T \dot{H} s$$

$$\frac{1}{2} s^T \dot{H} s$$

και αφαιρούμε τον όρο \ddot{H}_q η παραπάνω εξίσωση έχει την μορφή :

$$\dot{V}(t) = s^T (\tau - H_{q_r} \ddot{q} - C_{q_r} \dot{q} - g)$$

Όπου ο πίνακας $\dot{H} - 2C$ χρησιμοποιήθηκε για να εξαφανίσει τον όρο $\frac{1}{2} s^T \dot{H} s$

Στη συνέχεια ορίζουμε την είσοδο ελέγχου :

$$\tau = u = \hat{u} - k g(x)$$

$$g(x) = \frac{|x|}{x} = \text{sgn}(x) \text{ για } |x| > \varepsilon, \quad g(x) = \frac{x}{\varepsilon} \text{ με } |x| < \varepsilon.$$

Η \hat{u} είναι η συνάρτηση ελέγχου του συστήματος μας και για είσοδο ελέγχου που οδηγεί το \dot{x} στο 0, αν τα δυναμικά στοιχεία του συστήματος είναι γνωστά όπου :

$$\hat{u} = \hat{H} \ddot{q}_r + \hat{C} \dot{q}_r + \hat{g}$$

Θα έχουμε

$$\dot{V} = s^T [\tilde{H}(q) \ddot{q}_r + \tilde{C}(q, \dot{q}) \dot{q}_r + \tilde{g}(q)] - \sum_{i=1}^n k_i |s_i| \quad \text{για } i=1,2$$

Όπου για δοθείσα φράγματα για τα σφάλματα μοντελοποίησης $\tilde{H}, \tilde{C}, \tilde{g}$

$$\tilde{H} = \hat{H} - H \quad \tilde{C} = \hat{C} - C \quad \tilde{g} = \hat{g} - g$$

βλέπουμε ότι επιλέγοντας τις τιμές του \mathbf{k}_i του διανύσματος \mathbf{k} έτσι ώστε

$$\mathbf{k}_i \geq | [\tilde{H}(q)\ddot{q}_r + \tilde{C}(q,\dot{q})\dot{q}_r + \tilde{g}(q)]_i | + \eta_i \quad \text{για } i=1,2$$

Όπου η σταθερές η_i είναι αυστηρά θετικές, και έτσι ικανοποιείται η συνθήκη ολίσθησης

$$\dot{V} \leq -\sum_{i=1}^n \eta_i |s_i| \quad \text{για } i=1,2$$

Η παραπάνω ολισθαίνουσα κατάσταση εγγυάται ότι η επιφάνεια $s = 0$ επιτυγχάνεται σε έναν πεπερασμένο χρόνο καθώς οι τροχιές θα παραμείνουν στην επιφάνεια, και ως εκ τούτου τείνει στο $q_d(t)$ εκθετικά. Ο έλεγχος του φαινομένου chattering που δημιουργείτε από τα κέρδη μεταγωγής k μπορεί να εξαλειφθούν χρησιμοποιώντας ομαλές παρεμβολές, όπως η συνάρτηση $g(x)$.

Η δυναμική του καθεστώτος ολίσθησης είναι $\dot{s} = 0$ οπότε λύνοντας ως προς u θεωρώντας γνωστή δυναμική βρίσκουμε την ισοδύναμη είσοδο ελέγχου u_{eq} που διατηρεί το καθεστώς ολίσθησης.

Τέλος θα σχεδιάσουμε ελεγκτή, με $\mathbf{k} = [k_1 \ k_2]^T$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{eq} - \mathbf{k} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \Rightarrow$$

$$\mathbf{u} = \hat{H}(\mathbf{q})\ddot{q}_r + \hat{C}(q,\dot{q})\dot{q}_r + \hat{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{k}\mathbf{g}(\mathbf{x})$$

Ευρωστία του ελέγχου

Στο σύστημα μας έχουμε παραμετρικές αβεβαιότητες. Έχοντας τις εκτιμήσεις των φυσικών μεγεθών του ρομποτικού βραχίονα θα προσπαθήσουμε να βρούμε τα φράγματα των αβεβαιοτήτων έτσι ώστε να ορίσουμε το k_i με $i = 1, 2$.

Αρχικά θα ορίσουμε τους πίνακες $Y(q, \dot{q}_r)$ TH

- Y περιέχουν τους μη γραμμικούς γνωστούς όρους των πινάκων H, C, g .
- TH περιέχουν τις αγνώστους παραμέτρους.

Γνωρίζουμε από εκφώνηση πως για τις άγνωστες παραμέτρους τις εκτιμήσεις και τα όρια τους. Επίσης γνωρίζουμε τις πραγματικές παραμέτρους οπότε θα βρούμε τα άνω φράγματα των παραμέτρων, ΔH , ΔC , ΔG , για ένα εύρωστο

έλεγχο. Συνεπώς ο πίνακας $Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 y_6 \\ y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} & y_{11} y_{12} \end{bmatrix}$ όπου έχουμε:

$$Y1 = [-L1*\sin(q(2))*w + g*\cos(q(1) + q(2)) \quad L1*g*\cos(q(1)) \quad m1*g*\cos(q(1))]$$

$$[L1*\sin(q(2))*dq(1)*q(3) + g*\cos(q(1) + q(2)) \quad 0 \quad 0]$$

$$Y2 = [d2qr(1) + d2qr(2) \quad 2*L1*cos(q(2))*(d2qr(1) - 2qr(2)) \quad L1^2*d2qr(1) \quad m1*d2qr(1) \\ d2qr(1)+d2qr(2) \quad d2qr(1)]$$

$$[d2qr(1) + d2qr(2) \quad L1*cos(q(2))*d2qr(1) \quad 0 \quad 0 \quad d2qr(1)+d2qr(2) \quad 0]$$

Για την εύρεση των φραγμάτων των αβεβαιοτήτων μπορούμε να γράψουμε τους μη γραμμικούς όρους του μοντέλου ως προς τις αβέβαιες παραμέτρους, δηλαδή:

$$H\ddot{q} + (C\dot{q} + G) = Y1(q, \dot{q})TH1 + Y2(q, \dot{q})TH2$$

Θα ορίσουμε τα άνω φράγματα των αγνώστων παραμέτρων ως **TH1** , **TH2**

Τα οποία υπολογίζονται από τον τύπο :

$$E = \max(TH_{max} - TH_{estimation}, TH_{min} - TH_{estimation})$$

Υπολογίσει τα άνω φράγματα των αγνώστων έχουμε τον πίνακα

$$TH = [2.55, 1.1225, 1.025, 20.1105, 22.0725]$$

Χρησιμοποιούμε την έννοια άνω φράγματα διότι “αν ξέρω την μέγιστη αβεβαιότητα τότε είμαι σίγουρος και για τιμές κάτω από αυτά”.

Οπότε η εξίσωση για την επιλογή των τιμών k_i θα αλλάξει μορφή:

$$k_i = |Y(q, \dot{q}_r)| \Delta TH + \eta_i \quad \text{για } i=1,2$$

Οπότε για επιλογή του διανύσματος $\eta = [\eta_1 \ \eta_2]^T$ έχουμε $\eta = \begin{bmatrix} 0.036 \\ 0.036 \end{bmatrix}$.

Το συνδιαζόμενο σφάλμα που ορίσαμε πριν γράφεται ως :

$$\mathbf{s}(\mathbf{t}) = \dot{\mathbf{q}}(t) - \dot{\mathbf{q}}_d(t) + \Lambda(\mathbf{q}(\mathbf{t}) - \mathbf{q}_d(\mathbf{t}))$$

Σύμφωνα με την θεωρία του μαθήματος , αν $\mathbf{s}(0) \neq 0$ η συνθήκη ολίσθησης

(ΣΟ) εξασφαλίζει την σύγκλιση στην S σε πεπερασμένο χρόνο t_r , άρα :

$$\mathbf{s}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -87^\circ \\ 167^\circ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -90^\circ \\ 170^\circ \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 30^\circ \\ -30^\circ \end{bmatrix} \neq 0$$

Συνεπώς ισχύει η παραπάνω πρόταση για χρόνο t_r είναι :

$$t_r \leq \frac{|s(0)|}{\eta} \Rightarrow t_r \leq \begin{bmatrix} 833.33 \\ 833.33 \end{bmatrix}$$

Όταν το σύστημα ξεπεράσει τους χρόνους $t_{r1}, t_{r2} = 833.33$ θα βρίσκεται σε καθεστώς ολίσθησης και το σφάλμα θα συγκλίνει εκθετικά στο 0 με χρονική σταθερά :

$$\mathbf{a} = \frac{n-1}{\Lambda} = (n-1)\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} -9.64 \\ -9.64 \end{bmatrix}$$

Η είσοδος u που επιτυγχάνει καθεστώς ολίσθησης είναι ασυνεχής στην S , παρουσιάζει chattering . Ο ασυνεχής όρος της u ομαλοποιείται με συνεχείς συναρτήσεις. Έτσι η $s(t)$ φράσσεται από λεπτό οριακό στρώμα $|\mathbf{s}(\mathbf{t})| < \Phi$

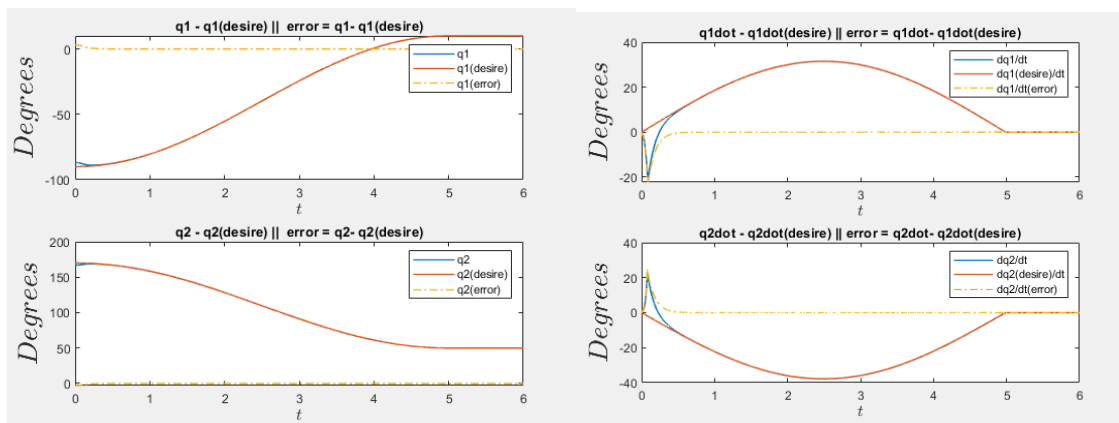
όπως το έχουμε πει στην θεωρία του μαθήματος.

Θέμα Γ

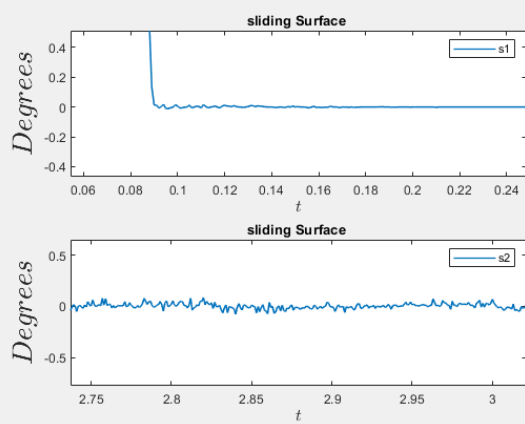
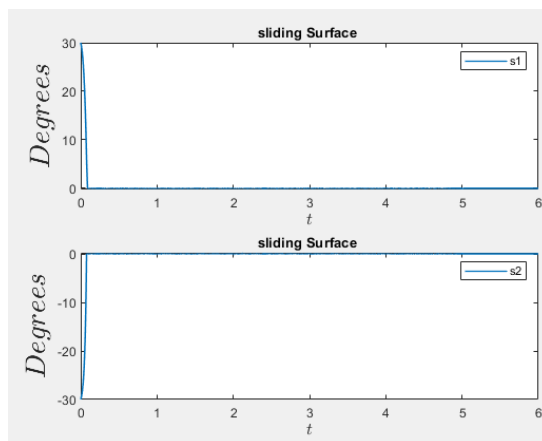
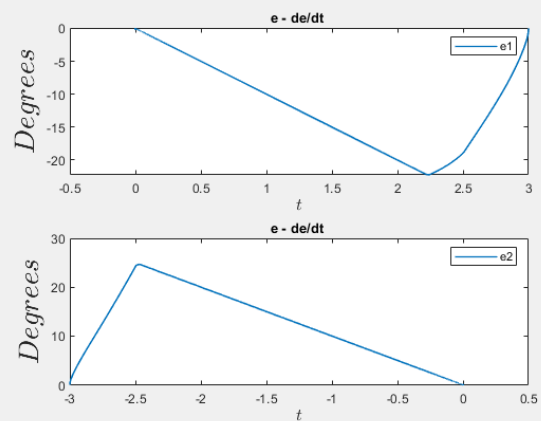
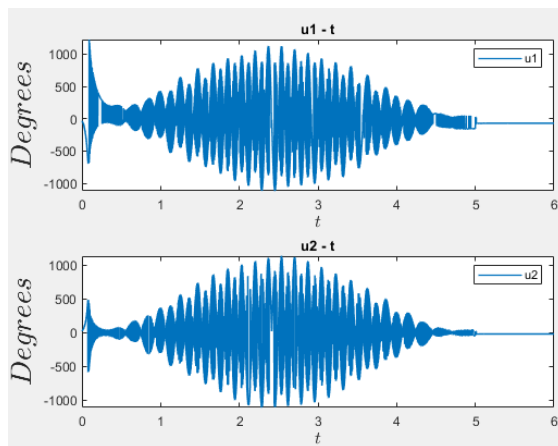
Προσομοιώσεις

Γραφική αποτύπωση των αποκρίσεων των συνδυασμένων σφαλμάτων καθώς και την τροχιά της λύσης για κάθε άρθρωση στο επίπεδο κατάστασης σφάλμα παρακολούθησης, παράγωγος σφάλματος παρακολούθησης.

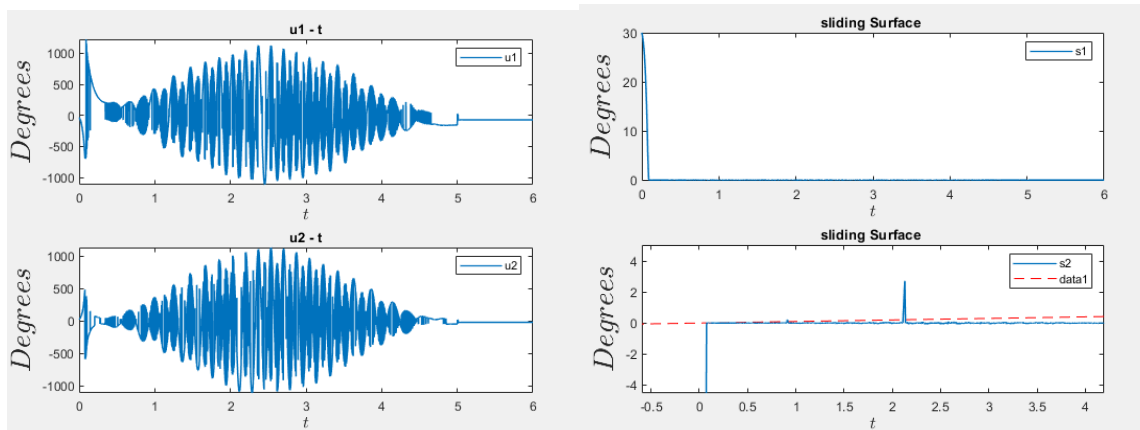
Για $\varepsilon = 0.0001$



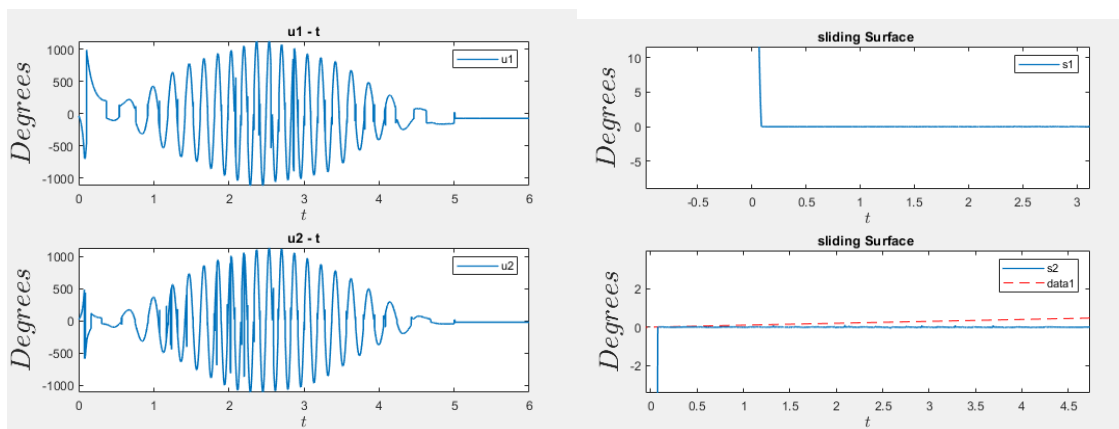
Εργασία Β

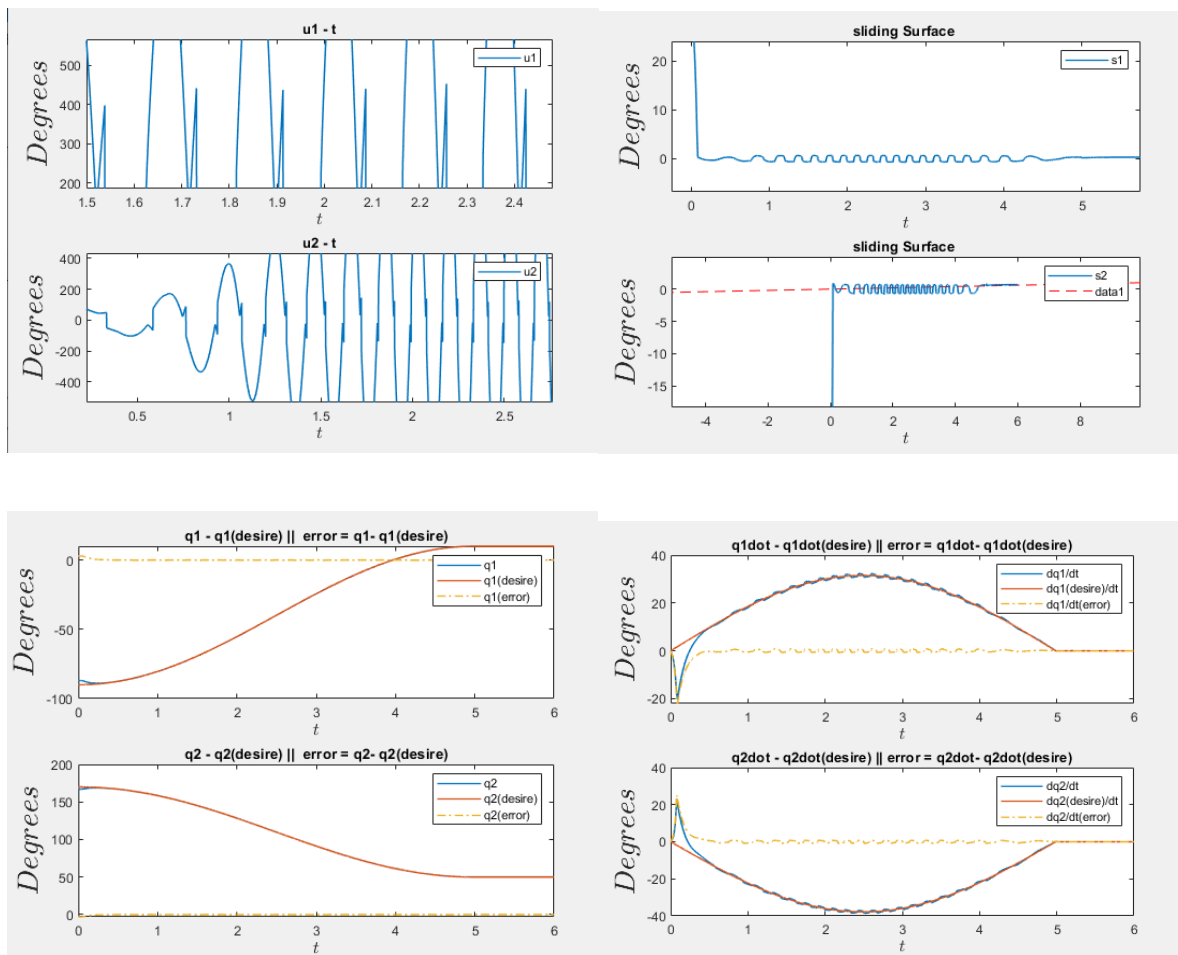


Για $\varepsilon = 0.001$



Για $\varepsilon = 0.01$



Για $\varepsilon = 1$ 

Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία αποτυπώσαμε την λειτουργία της μεθόδου σφάλματος ολίσθησης καθώς και την γραμμικοποίηση με ανάδραση.

Τέλος θα μιλήσουμε για το πως επηρεάζει το ε την λειτουργία του συστήματος μέσω του smoothing function $g(x)$. Για μικρό ε υπάρχει chattering, διότι αν κάνουμε zoom στην είσοδο (u) θα δούμε ότι είναι ασυνεχής σε κάποια σημεία. Αυτό το συναντάμε, όταν για μικρό ε , η $g(x)$ συμπεριφέρεται σαν την sgn . Έτσι οδηγεί στην καθυστέρηση του συστήματος, ενώ για μεγαλύτερο ε είναι το σύστημα μας έχει γρηγορότερη απόδοση καθώς επίσης δεν έχει chattering αλλά και δεν παρακολουθεί τόσο καλά, κυρίως την ταχύτητα.

Για την δημιουργία των plot και την αποτύπωση των συμπερασμάτων πρέπει να γίνει εκτέλεση των αρχείων **SAE_III_ERGASIA_B_1** και **SAE_III_ERGASIA_B_2**