Ευφυή και Προσαρμοστικά Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου

Εργασία 1

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΙΣΤΑΤΙΑΔΗΣ nikoista@ece.auth.gr 9175

Εκφώνηση

Έστω το σύστημα: $x = Ax + B\Lambda\big(u(x) + f(x)\big)$ όπου $x \in \mathrm{R}^n$ είναι το διάνυσμα των μεταβλητών κατάστασης, $u \in \mathrm{R}^m$ είναι το διάνυσμα των εισόδων ελέγχου, $B \in \mathrm{R}^{n\times n}$ είναι γνωστός σταθερός πίνακας και , $AE\mathrm{R}^{n\times n}$, $\Lambda \in \mathrm{R}^{m\times m}$ άγνωστοι αλλά σταθεροί πίνακες. Επιπλέον, ο Λ είναι διαγώνιος με στοιχεία $\lambda_i > 0$ 0,1,…, i . Το ζεύγος (A, BΛ) είναι ελέγξιμο. Η μη-γραμμική διανυσματική συνάρτηση θεωρείται $f\colon R^n \to R^m$ άγνωστη, αλλά ισχύει:

$$f(x) = \Theta^{\tau}\phi(x)$$

Όπου Θ∈ $\mathrm{R}^{N\times m}$ είναι σταθερός αλλά άγνωστος πίνακας και $\Phi(x) = [\phi_1(x) \dots \phi_N(x)] \in \mathrm{R}^N$ με $\varphi i(x)$ όπου i=0,1,...N γνωστές μη-γραμμικές συναρτήσεις

Πρόβλημα: Να σχεδιαστεί και να αναλυθεί προσαρμοστικός ελεγκτής που να επιτυγχάνει την ασυμπτωτική παρακολούθηση του Xref ∈ R^n από το x, όπου του Xref είναι το διάνυσμα των μεταβλητών κατάστασης του μοντέλου αναφοράς:

$$\dot{X}_{ref} = Aref x_{ref} + Bref r$$

όπου $Aref \in \mathrm{R}^{n\times n}$ ευσταθής πίνακας ,$Bref \in R^{n\times m}$και$r \in \mathrm{R}^m$ το διάνυσμα των εισόδων αναφοράς. Επιπλέον επιθυμούμε όλα τα σήματα στον κλειστό βρόχο να είναι φραγμένα. Να λυθεί θεωρητικά το παραπάνω πρόβλημα. Να συντάξετε τη σχετική αναφορά στην οποία θα περιγράψετε με κάθε λεπτομέρεια όλα τα βήματα της ανάλυσής σας.

Θεωρητική Ανάλυση.

Αν οι πίνακες Α , ΒΛ ήταν γνωστοί θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε το νόμο ελέγχου:

$$u = -K^* x + L^* r - \Theta^{*T} \phi(x)$$

και έστω ότι Φ(x) < $\bar{\Phi}$ φραγμένη συνάρτηση αλλά και για φραγμένη είσοδο αναφοράς r , σχηματίσουμε το σύστημα κλειστού βρόχου:

$$\dot{x} = (\mathrm{A} - \mathrm{B\Lambda K^*}) + \mathrm{B\Lambda L^*r}$$

επομένως αν τα $K^* \in R^{m\times n}$,$L^* \in R^{m\times m}$, $\Theta^{*T} \in R^{N\times m}$ επιλεγούν έτσι ώστε:

$$A – BΛK^* = Aref \quad , \; BΛL^*=Bref \; , \Theta = \Theta^* \qquad (\text{Σχέση } 1)$$

Όπου για Θ^{*T} έστω ότι είναι μια εκτίμιση των παραμέτρων του πίνακα Θ και έστω από υπόθεση ότι L* > 0 , τότε ο πίνακας μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου θα ταυτίζεται με αυτόν του μοντέλου αναφοράς και x(t) → xref(t) εκθετικά, για κάθε φραγμένο διάνυσμα εισόδου r(t). Οι συνθήκες ταύτισης (Σχέση 1) μπορεί να μην έχουν λύση, να μην υπάρχουν δηλαδή πίνακες K* L*, που να τις ικανοποιούν. Σε ότι ακολουθεί θα υποθέσουμε ότι οι σχέσεις στην (Σχέση 1) έχουν λύση,ικονοποιούνται.

Όταν τα A, BΛ είναι άγνωστα όπου στην δική μας περίπτωση είναι ο Λ και ο A προτείνουμε το νόμο ελέγχου:

$$u= -K(t)x + L(t)r - \Theta^T(t)\phi$$

όπου τα K,L, Θ^T είναι εκτιμήσεις των K* , L* , Θ^{*T} αντίστοιχα και οι οποίες παράγονται με τη βοήθεια προσαρμοστικών νόμων που θα σχεδιάσουμε παρακάτω. Προσθέτοντας και αφαιρώντας τον όρο -BΛ(K*x – L*r + $\Theta^{*T}\phi$) στην (Σχέση 1) προκύπτει:

$$\dot{x} = Ax - BΛK^*x + BΛL^*r +BΛ[\Theta^{*T} - \Theta^T]\, Φ + BΛ(K^*x – L^*r +\Theta^{*T}Φ + u)$$

Ή εξαιτίας των σχέσεων (Σχέση 1) :

$\dot{x}$

= Aref x + Bref r + BΛ(K*x – L*r + Θ^{*T}Φ +u)

Ορίζουμε το σφάλμα παρακολούθησης e = x - xref και δημιουργούμε τη διαφορική εξίσωση σφάλματος παρακολούθησης :

$$\dot{e}=\text{Aref } e + B\Lambda(K^*x - L^*r + \Theta^{*T}\Phi + u)$$

Το σύστημα εκτίμησης επιλέγεται:

$$\dot{\hat{e}}=\text{Aref } \hat{e} + B\Lambda(Kx - Lr + \Theta^{T} + u),\ \hat{e}(0) = 0$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση του ελεγκτή βρίσκουμε:

$$\dot{\hat{e}}= \text{Aref } \hat{e} + 0 ,\ \hat{e}(0)=0$$

Επομένως, $\hat{e}$(t)=0 ,$\forall t \geq 0$ και συνεπώς το σφάλμα εκτίμησης ε = e - $\hat{e}$. Οπότε το σφάλμα εκτίμησης ταυτίζεται με το σφάλμα παρακολούθησης και άρα μόνο το τελευταίο θα χρησιμοποιηθεί στην ανάλυση που ακολουθεί. Αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση του σφάλματος παρακολούθησης την έκφραση του ελεγκτή βρίσκουμε:

$$\dot{e} = \text{Aref } e + B\Lambda(-\tilde{K}x + \tilde{L}r - \tilde{\Theta}^{T}\phi)$$

όπου $\tilde{K}$ = K - K* , $\tilde{L}$= L – L* , $\tilde{\Theta}^{T}$=Θ^{T}- Θ^{*T}. Για να συνεχίσουμε, έχουμε ήδη υποθέσει ότι ο L* είναι είτε θετικά ορισμένος οπότε l=1 και ορίζουμε Γ^{-1}=L*sgn(l) και L^{*-1} = Γ sgn(l) . Τότε BΛ = Bref L^{*-1} και

$$\dot{e} = \text{Aref e} + \text{Bref}\, L^{*-1} \left(-\tilde{K}x + \tilde{L}r - \tilde{\Theta}^{T} \right)$$

Προτείνουμε την υποψήφια συνάρτηση Lyapunov :

$$V(e, \tilde{K}, \tilde{L}, \tilde{\Theta}) = e^{T}Pe + \text{tr}\{\tilde{K}^{T}\Gamma\, \tilde{K} + \tilde{L}\Gamma\tilde{L}^{T} + \tilde{\Theta}\Gamma\, \tilde{\Theta}^{T}\}$$

όπου ο P^{T}=P > 0 (τετραγωνικός πίνακας) ικανοποιεί την εξίσωση Lyapunov για κάποιο δοσμένο Q^{T} = Q > 0 (τετραγωνικός πίνακας).

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο προκύπτει:

$$\dot{V} = -e^{T}Qe + 2e^{T}PBrefL^{*-1}(-\tilde{K}x + \tilde{L}r - \tilde{\Theta}^{T}\Phi) + 2\text{tr}\{\tilde{K}\Gamma\dot{K} + \tilde{L}\Gamma\dot{L} + \tilde{\Theta}\Gamma\dot{\Theta}^{T}\}$$

Επομένως, αν κάνουμε τις πράξεις καταλήγουμε στο ότι :

Για $e^{T}PBrefL^{*-1}\tilde{K}x = \text{tr}\{\tilde{K}^{T}\Gamma\, B_{re}^{T}fPex^{T}\}\text{sgn}(l)$

Για $e^{T}PBrefL^{*-1}\tilde{L}r = \text{tr}\{\tilde{L}^{T}\Gamma\, Bref^{T}Per^{T}\}\text{sgn}(l)$

Για $e^{T}PBrefL^{*-1}\tilde{\Theta}^{T}\Phi = \text{tr}\{\tilde{\Theta}\Gamma Bref^{T}P_{e}\phi^{T}\}\text{sgn}(l)$

Επομένως αν επιλέξουμε :

$$\dot{K} = B_{re}^{T}fPex^{T}\ \text{sgn}(l)$$

$$\dot{L} = -\,Bref^{T}Per^{T}\text{sgn}(l)$$

$$\dot{\Theta}^{T} = Bref^{T}P_{e}\phi^{T}\text{sgn}(l)$$

Υλοποιήσιμη με τους (A - BK*) =Aref και BΛL* = Bref να συνθέτουν ένα περιοριστικό περιβάλλον. Τότε έχουμε :

$$\dot{V} = -e^T Q e \leq 0$$

Τώρα, θα ελέγξουμε αν είναι φραγμένα τα σήματα στον κλειστό βρόγχο από το 2ο Θεώρημα Ευστάθειας του Lyapunov άρα για $V \in L^{\infty}$ => e , $\tilde{\Theta}^{\tau}$, $\tilde{K}$, $\tilde{L}$ $\in L\infty$

Και αφού το $\tilde{\Theta}^{\tau}$= Θ^T - Θ^{*T} καθώς και $\tilde{K}$= K - K* , $\tilde{L}$ = L - L* άρα K*,L*, Θ^{*T} οπότε Θ^T , K , L $\in L_\infty$ και στην συνέχεια e = x – xref με xref $\in L_\infty$ εκ κατασκευής άρα και x $\in L_\infty$ οπότε για Φ με γνωστές μη-γραμμικές συνάρτηση άπο υπόθεση έχουμε πει ότι έστω ότι έχει ένα φράγμα $\bar{\Phi}$ Και u = -Kx + Lr - Θ^T Φ $\in L_\infty$ ως συνδιασμός φραγμένων συναρτήσεων .Οπότε όλα τα σήματα στον κλειστό βρόγχο είναι φραγμένα .Τέλος με το Λήμμα του Barbalat e $\in L_2$, $\dot{e} \in L_\infty$ άρα e$\in L_2 \cap\in L_\infty$ οπότε $\lim_{t \to \infty} e(t) = 0$, e → 0 , x – xref → 0 , x→ xref οπότε έχουμε ασυμπτωτική παρακολούθηση του xref από το x.