

Ευφυή και Προσαρμοστικά Συστήματα

Αυτομάτου Ελέγχου

Εργασία 2

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΙΣΤΑΤΙΑΔΗΣ nikoista@ece.auth.gr 9175

Εκφώνηση

Έστω το σύστημα:

$$\dot{\varphi} = p$$

$$\dot{p} = \theta_1 \varphi + \theta_2 p + (\theta_3 |\varphi| + \theta_4 |p|) p + \theta_5 \varphi^3 + \theta_6 u \text{ με } p, u, \varphi \in \mathbb{R}$$

όπου φ [rad] παριστάνει γωνία και το p [rad/s] γωνιακή ταχύτητα. Το u [rad] είναι η είσοδος ελέγχου. Τα φ , p είναι μετρήσιμα και θ_6 είναι θετικό. Οι άγνωστες και σταθερές παράμετροι είναι:

$$\theta_1 = -0.018, \theta_2 = 0.015, \theta_3 = -0.062, \theta_4 = 0.009, \theta_5 = 0.021, \theta_6 = 0.75$$

Ερωτήματα-Απαντήσεις

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

Α) Να δείξετε ότι το $(0,0)$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος ανοιχτού βρόχου και να το επαληθεύσετε με τη βοήθεια προσομοιώσεων.

ΕΥΡΕΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Για να είναι το $A(0,0)$ σημείο ισορροπίας του συστήματος ανοιχτού βρόχου ($u=0$) πρέπει:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= 0 \\ \dot{p} &= 0\end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned}p &= 0 \\ \varphi(\theta_1 + \theta_5 \varphi^2) &= 0\end{aligned}$$

Άρα αφού το θ_1 στην εκφώνηση είναι μικρότερο του μηδενός, αυτό υποδηλώνει ότι μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές αλλά και το θ_5 είναι μεγαλύτερο του μηδενός, άρα μπορεί να πάρει θετικές τιμές και τιμές διάφορες

του μηδενός, τότε όταν αυτά ισχύουν το $[\varphi = \pm \sqrt{\frac{-\theta_1}{\theta_5}}, p=0]$ και $[\varphi = 0, p=0]$, αν δεν ορίζεται η υπόριζη ποσότητα τότε $[\varphi = 0, p=0]$.

Τέλος δείξαμε ότι το $A(0,0)$ είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος ανοιχτού βρόχου.

ΕΜΜΕΣΗ ΜΕΘΟΔΟ LYAPUNOV

Θα χρησιμοποιήσουμε την **έμμεση μέθοδο Lyapunov** όπου για το σημείο ισορροπίας $x_e=0$ υποθέτουμε ότι η συνάρτηση μας $f(t,x)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη για κάθε x και $t \geq 0$. Έτσι στην γειτονία του $x_e=0$, η f αναπτύσσεται σε σειρά Taylor γύρω από το 0 και μπορεί να γραφτεί ως:

$$\dot{x} = f(t,x) = A(t)x + f_1(t,x)$$

Όπου $A(t)=\nabla f|_{x=0}$ και είναι η Ιακωβιανός Πίνακας της f για $x=0$ και $f_1(t,x)$ ορίζουμε το υπόλοιπο της σειράς Taylor.

Θεώρημα

Θεωρούμε ότι ο $A(t)$ είναι ολικά φραγμένος Πίνακας και

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} \frac{|f_1(t,x)|}{|x|}$$

Για $z_e=0$ σημείο ισορροποίας του και το γραμμικοποιημένο σύστημα έχει τη μορφή $\dot{x} = A(x - x^*)$ και, θέτοντας $z = x - x^*$, έχουμε $\dot{z} = Az$

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t)$$

Και έχουμε τις εξής υποθέσεις για το σημείο ισορροποίας $x_e=0$

i) Αν το $z_e=0$ είναι γ.α.ε τότε το $x_e = 0$ είναι γ.α.ε.

ii) Αν το $z_e=0$ είναι ασταθές τότε το $x_e = 0$ είναι ασταθές.

iii) Αν το $z_e=0$ είναι γ.ε ή ευσταθές τότε δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα για την ευστάθεια του $x_e = 0$.

Οπότε για το σύστημα μας μετά απο πράξεις που εκτελούνται και στο Matlab

$$\text{έχουμε } f_x[0] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.018 & 0.015 \end{bmatrix} = A(t) \text{ με } \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 0.018\lambda + 0.015$$

Άρα έχουμε τις ιδιοτιμές $0.0075 \pm 0.1340i$ οπότε έχουμε το $\text{Re}\{\lambda_1(f_x[0])\} > 0$

Οπότε είναι ασταθές σημείο Ισορροποίας το $A(0,0)$ για το συστήματος ανοιχτού βρόχου.

Επίσης στο Matlab έχει γίνει ανάλυση :

```
idiotimes_exiswsh =  
  
lammda^2 - (3*lammda)/200 + 9/500  
  
1) IDIOTHMH TOU SUSTHMATOS 11 =  
  
3      sqrt(319) 3i  
--- - ----  
400      400  
  
2) IDIOTHMH TOU SUSTHMATOS 12 =  
  
sqrt(319) 3i      3  
----- + ---  
400      400  
  
ΟΠΟΤΕ Ο ΠΙΝΑΚΑΣ Α ΕΧΕΙ ΜΙΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΣΤΟ ΔΕΞΙ  
ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΗΜΙΕΡΙΠΕΔΟ ΟΠΟΤΕ fx[0] = ASYMPTWTIKA ΑΣΤΑΘΕΙΣ  
... 0/000
```

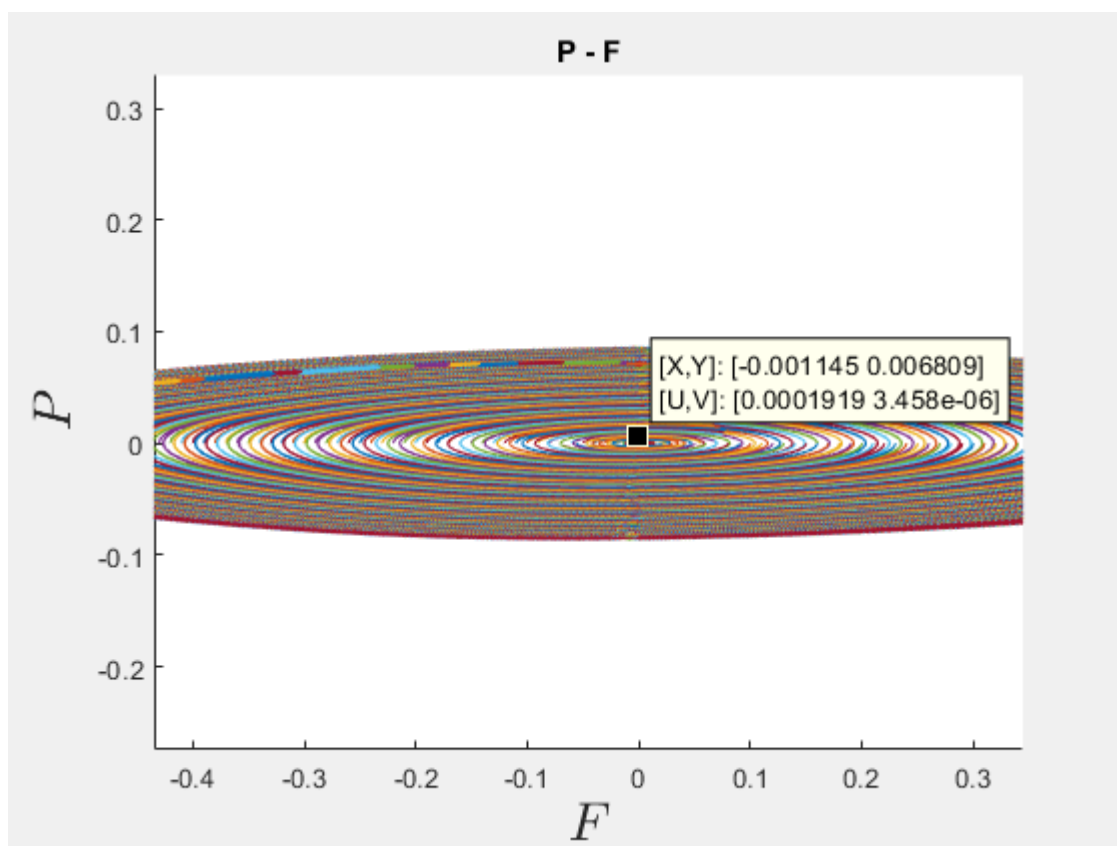
Η παραπάνω μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί μόνο για τοπική ευστάθεια, και δεν εξάγει βέβαια συμπεράσματα για ολική ευστάθεια. Ένα σύστημα που είναι ευσταθές για μικρές εκτροπές, δεν είναι απαραίτητα ευσταθές για μεγαλύτερες. Αντίθετα, αν είναι ασταθές για μικρές εκτροπές, τότε στις περισσότερες περιπτώσεις είναι ασταθές και για μεγαλύτερες.

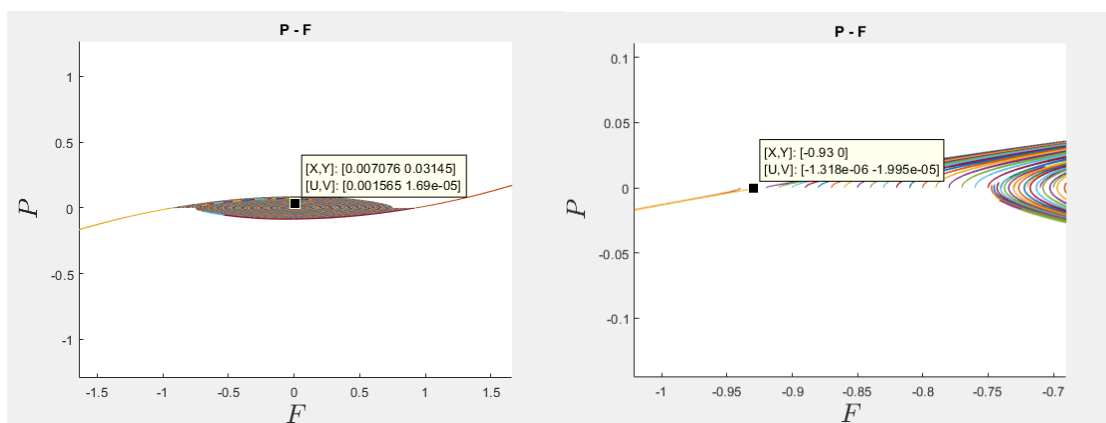
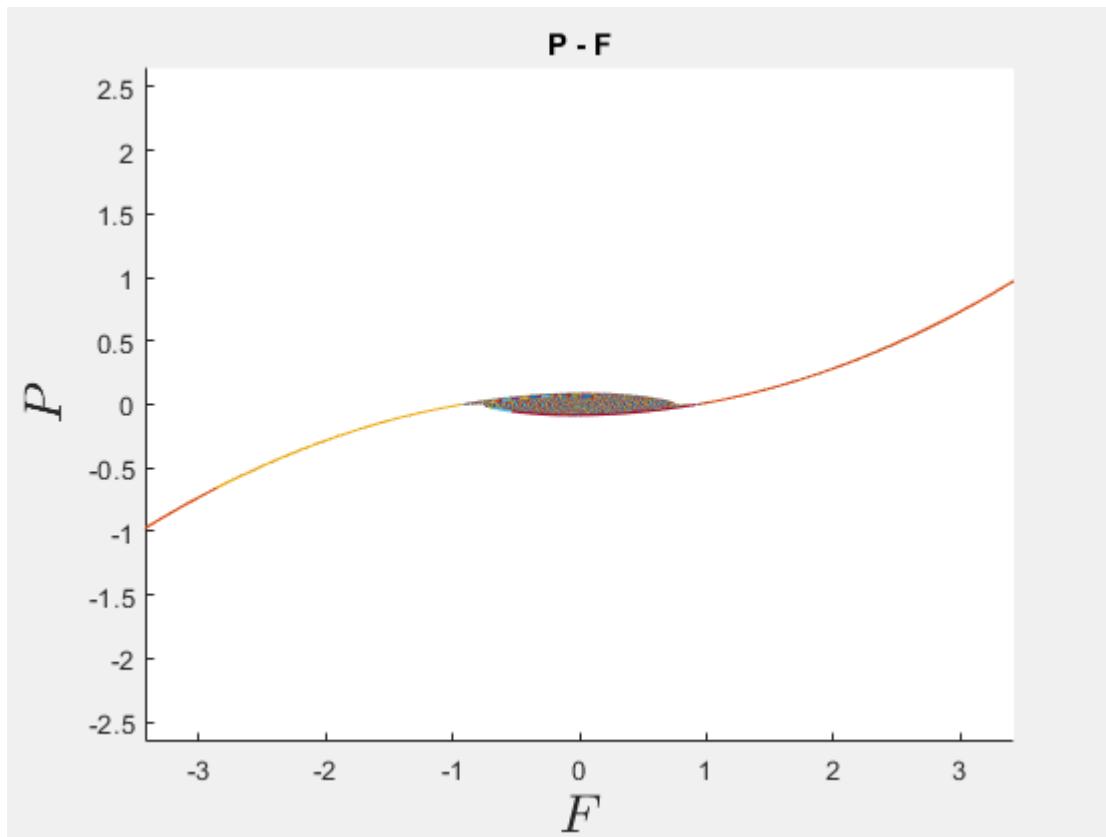
ΟΡΙΑΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

B) Να κάνετε το διάγραμμα $p - \phi$, με τη βοήθεια του οποίου να διαπιστώσετε την ύπαρξη οριακού κύκλου για το σύστημα ανοιχτού βρόχου και με τη βοήθεια προσομοιώσεων να αποφανθείτε για την ευστάθεια του οριακού κύκλου.

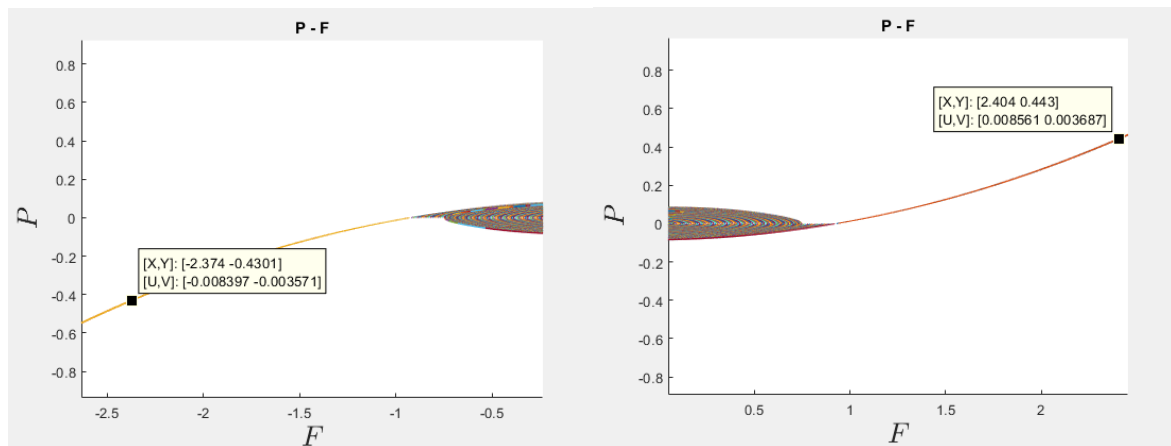
Αν τρέξουμε τον κώδικα στο Matlab θα δούμε ότι για διαφορετικές αρχικές συνθήκες έχουμε οριακό κύκλο :

Μερικά Plots από την quiver που μας δείχνουν την ύπαρξη οριακού κύκλου για τιμές της τάξης 10^{-4}





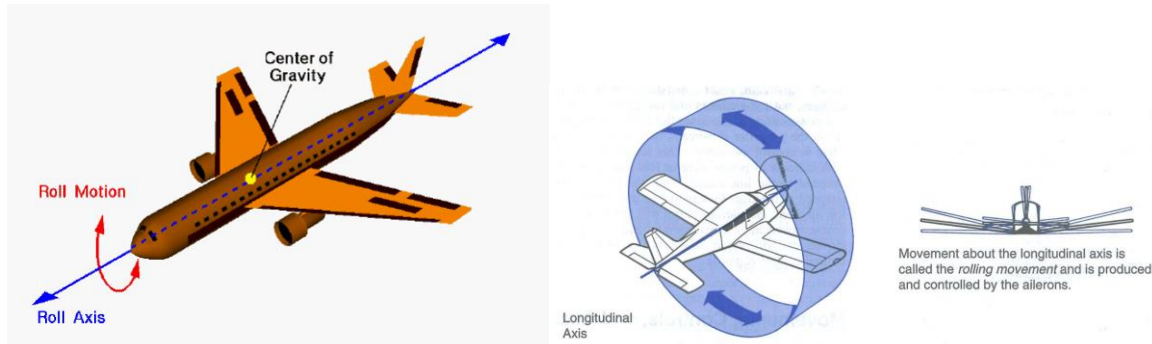
Παρατήρησα ότι για την αρχική συνθήκη του φ μεγαλύτερη από $[+0.09282, +0.093]$ τότε φεύγουμε από τον οριακό κύκλο και η έξοδος οδηγείται προς το άπειρο.



ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Γ) Με δεδομένο ότι το δοθέν μοντέλο περιγράφει την κατά roll κίνηση ενός αεροσκάφους με τριγωνικές πτέρυγες, με το ϕ να παριστάνει τη γωνία περιστροφής και το p τη γωνιακή ταχύτητα και λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα των ερωτημάτων **A)**, **B)**, να περιγράψετε ποιοτικά τη συμπεριφορά του συστήματος ανοιχτού βρόχου.

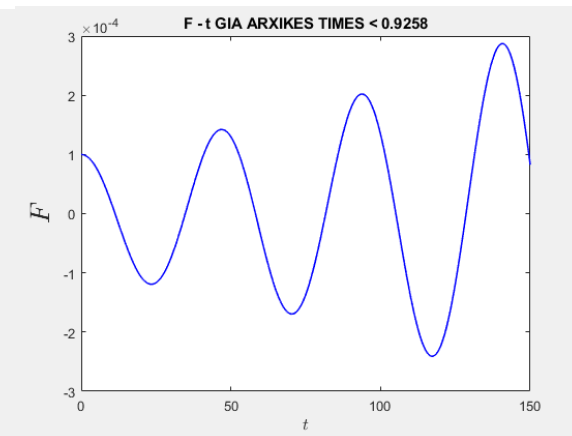
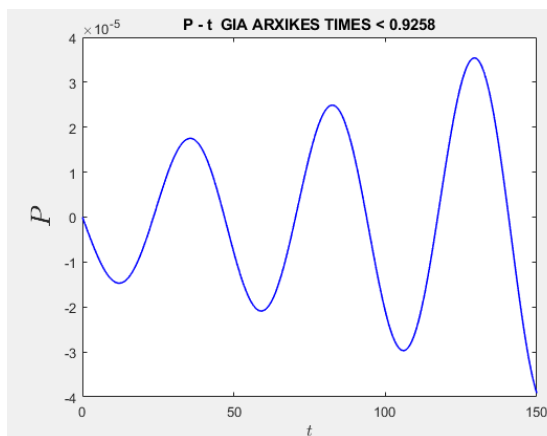
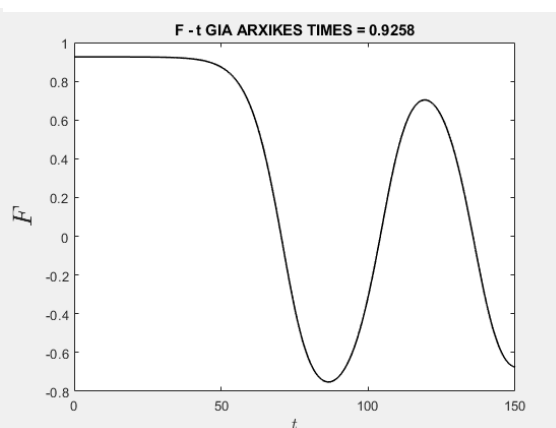
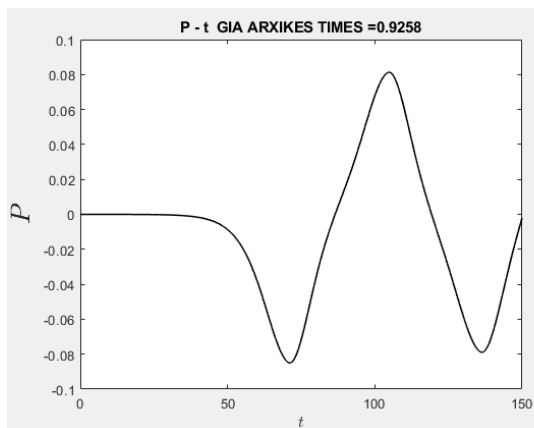
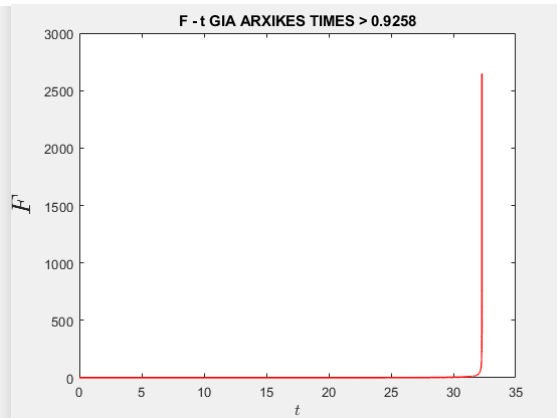
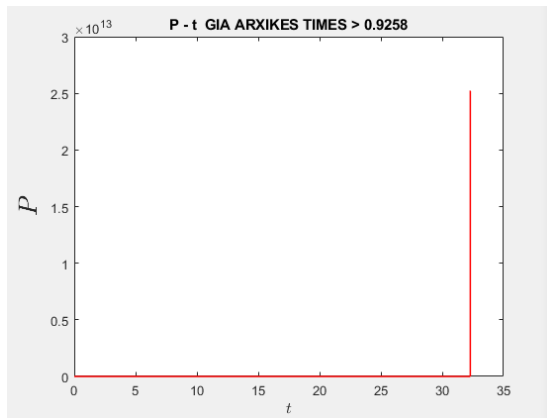
Καταρχάς η roll κίνηση ενός αεροσκάφους με τριγωνικές πτέρυγες είναι αυτή των εικόνων :



Κατά τη κίνηση αυτή το αεροσκάφος περιστρέφεται γύρω από τον διαμήκη άξονά του. Ο διαμήκης άξονας, είναι ο άξονας που διατρέχει την άτρακτο του αεροσκάφους από τη κεφαλή έως την ουρά. Η ευστάθεια γύρω από τον άξονα αυτό, ονομάζεται εγκάρσια ευστάθεια. Κατά τον διατοιχισμό, το αεροσκάφος κλίνει τις πτέρυγες προς τη μια ή την άλλη πλευρά. Η κίνηση αυτή γίνεται μέσω των πηδαλίων κλίσης (ailerons), τα οποία στη κίνηση αυτή περιστρέφονται αντίθετα.

Σύμφωνα με τα παραπάνω το αεροσκάφος λαμβάνει τιμές γωνιών -γωνιακών ταχυτήτων στην γειτονία του μηδενός, δηλαδή είναι μικρές σχεδόν μηδενικές (10^{-4} τάξης μεγέθους) μέχρις ότου να αποκτήσει γωνία ϕ μεγαλύτερη από ένα φράγμα (± 0.09282) τότε θα χάσει την ευστάθειά του, θα αρχίσει να στριφογυρνάει με γωνιακή ταχύτητα που θα αυξάνεται προς το άπειρο, με αποτέλεσμα το αεροσκάφος να οδηγηθεί στην συντριβή του.

Μερικά plots για διάφορες αρχικές τιμές όπου δείχνουν την γωνία συνάρτηση του χρόνου και την γωνιακή ταχύτητα συνάρτηση του χρόνου.



ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΑΠΕΜΑ

Δ) Να σχεδιαστεί προσαρμοστικός ελεγκτής που να καθιστά φραγμένα όλα τα σήματα στον κλειστό βρόχο και το σύστημα κλειστού βρόχου να συμπεριφέρεται όπως το μοντέλο αναφοράς:

$$\varphi_{ref}(s) = \frac{1}{s^2 + 1.4s + 1} r(s)$$

Ακολουθούμε την μεθοδολογία της 1ης Εργασίας και γράφουμε το σύστημα μας σε μορφή:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\theta_6] u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\theta_6] [\theta_3/\theta_6 \quad \theta_4/\theta_6 \quad \theta_5/\theta_6]^T \Phi$$

$$\text{Πίνακες:} \quad \mathbf{A} \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{\Lambda} \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{\Lambda} \quad \theta^T$$

όπου x το διάνυσμα καταστάσεων (φ, p) , το ζεύγος $(A, B\Lambda)$ ελέγξιμο και θεωρώ τον πίνακα $\Lambda = [\theta_6]$ για θ_6 να είναι θετικό, u ο νόμος ελέγχου που εισάγουμε στο σύστημα μας και είναι της μορφής $u = -K(t)x + L(t)r - \theta^T(t)\Phi$ και τέλος $\Phi = [|\varphi|p \quad |p|p \quad \varphi^3]^T$ αλλά και μας δίνεται το μοντέλο αναφοράς και το μετατρέπουμε στην εξής μορφή:

$$\dot{x}_{ref} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1.4 \end{bmatrix} x_{ref} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$\text{Πίνακες:} \quad \mathbf{A}_{ref} \quad \mathbf{B}_{ref}$$

Επίσης έχουμε ότι $A - B\Lambda K^* = A_{ref}$ και $B\Lambda L^* = B_{ref}$ $\theta_{\infty}^* \theta^T$ να συνθέτουν ένα περιοριστικό περιβάλλον :

$$(1) \theta_1 - \theta_6 K_1^* = -1$$

$$(2) \theta_2 - \theta_6 K_2^* = -1.4$$

$$(3) L_1^* = 1/\theta_6$$

$$(4) \Theta_3^* = \theta_3/\theta_6$$

$$(5) \Theta_4^* = \theta_4/\theta_6$$

$$(6) \Theta_5^* = \theta_5/\theta_6$$

επίσης έχουμε τους προσαρμοστικούς νόμους :

$$\dot{K} = B_{ref}^T P e x^T \operatorname{sgn}(l), \text{έστω } K(0) = \kappa_0 > 0$$

$$\dot{L} = -B_{ref}^T P e r^T \operatorname{sgn}(l), \text{έστω } L(0) = l_0 > 0$$

$$\dot{\theta}^T = B_{ref}^T P_e \phi^T \operatorname{sgn}(l), \text{έστω } \Theta(0) = \Theta_0 > 0$$

Θεώρημα Ευστάθειας του Lyapunov άρα για $V \in L^\infty \Rightarrow e, \tilde{\theta}^T, \tilde{K}, \tilde{L} \in L^\infty$

Και αφού το $\tilde{\theta}^T = \theta^T - \theta^{*T}$ καθώς και $\tilde{K} = K - K^*, \tilde{L} = L - L^*$ άρα K^*, L^*, θ^{*T}

οπότε $\theta^T, K, L \in L_\infty$ και στην συνέχεια $e = x - x_{ref}$ με $x_{ref} \in L_\infty$ εκ κατασκευής

άρα και $x \in L_\infty$ οπότε για Φ με γνωστές μη-γραμμικές συνάρτηση άπο υπόθεση

$$u = -Kx + Lr - \theta^T \Phi \in L_\infty \text{ ως}$$

συνδιασμός φραγμένων συναρτήσεων .Οπότε όλα τα σήματα στον κλειστό βρόγχο είναι φραγμένα .Σύμφωνα με το Λήμμα του Barbalat $e \in L_2$, $\dot{e} \in L_\infty$ άρα $e \in L_2 \cap L_\infty$ οπότε :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

Επίσης $\lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = 0$ και $\lim_{t \rightarrow \infty} \Theta_T(t) = 0$ σύμφωνα με τα παραπάνω.

Τέλος $e \rightarrow 0$, $x - x_{ref} \rightarrow 0$, $x \rightarrow x_{ref}$ οπότε έχουμε ασυμπτωτική παρακολούθηση του x_{ref} από το x .

Μετά από την θεωρητική ανάλυση που στην ουσία είναι η ίδια με την Εργασία 1 θα σχεδιάσουμε τον ΠΕΜΑ στο Matlab και θα κάνουμε προσομοιώσεις.

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΙΣ

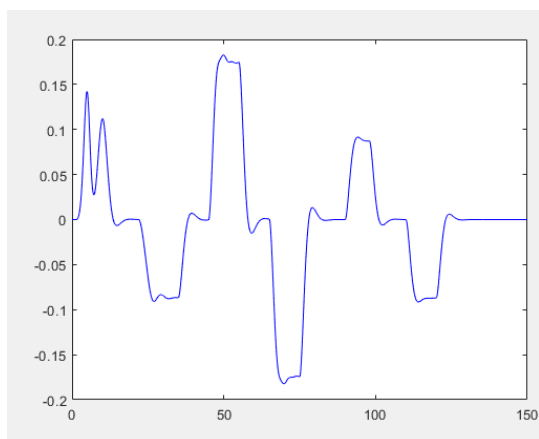
Ε) Να προσομοιώσετε την απόκριση του συστήματος κλειστού βρόχου για είσοδο αναφοράς:

$$r(t) = \begin{cases} 0^\circ, & 0 \leq t < 1 \\ 5^\circ, & 1 \leq t < 10 \\ 0^\circ, & 10 \leq t < 22 \\ -5^\circ, & 22 \leq t < 35 \\ 0^\circ, & 35 \leq t < 45 \\ 10^\circ, & 45 \leq t < 55 \\ 0^\circ, & 55 \leq t < 65 \\ -10^\circ, & 65 \leq t < 75 \\ 0^\circ, & 75 \leq t < 90 \\ 5^\circ, & 90 \leq t < 98 \\ 0^\circ, & 98 \leq t < 110 \\ -5^\circ, & 110 \leq t < 120 \\ 0^\circ, & 120 \leq t \leq 140 \end{cases}$$

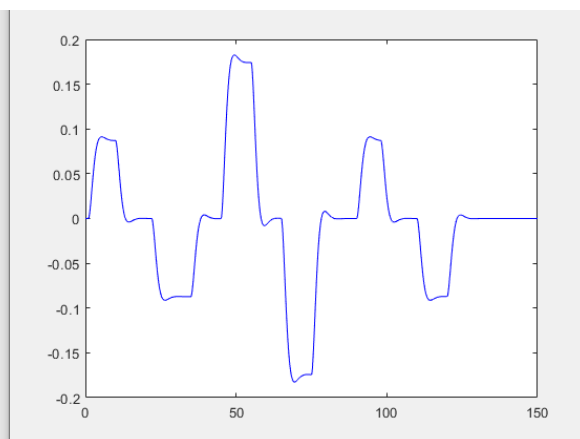
Το βασικό αρχείο που της εργασίας είναι το APEMA.m καθώς τα υπόλοιπα αρχεία είναι συναρτήσεις αυτού. Συνεπώς τρέχουμε το αρχείο APEMA.m στο Matlab. Μετά από πολλά Runs και Tunning τα Plots της Matlab που εμφανίζονται είναι τα ακόλουθα :

- Για ϕ και ϕ_{ref} έχουμε καλή παρακολούθηση διότι η κυματομορφές έχουν τεράστια ομοιότητα,

ϕ

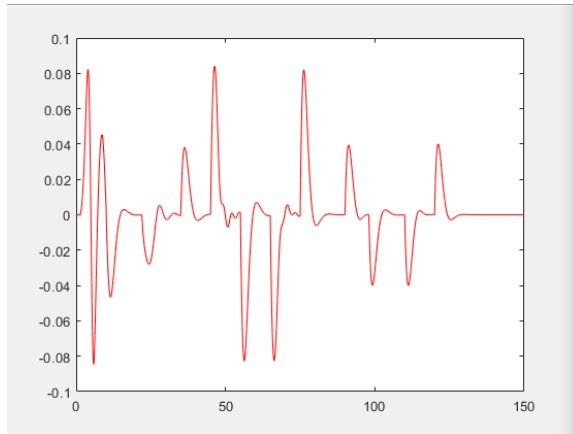


ϕ_{ref}

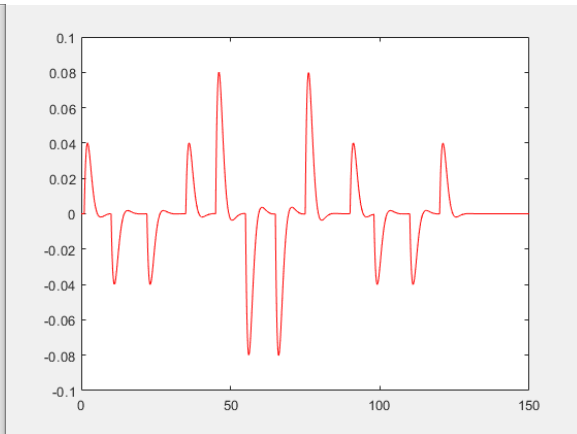


- Για p και p_{ref} έχουμε καλή παρακολούθηση διότι η κυματομορφές έχουν τεράστια ομοιότητα,

p



p_{ref}

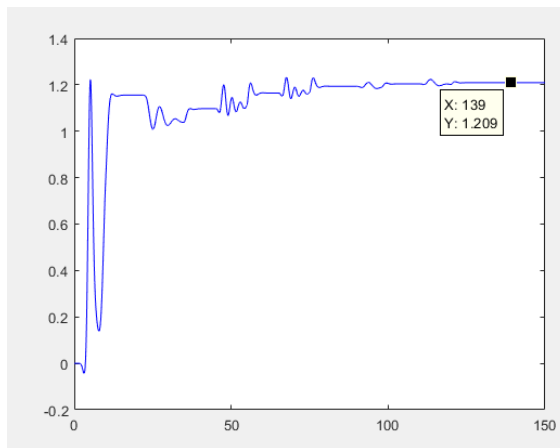


- Για τα προσαρμοστικά κέρδη έχουμε καλές προσεγγίσεις .

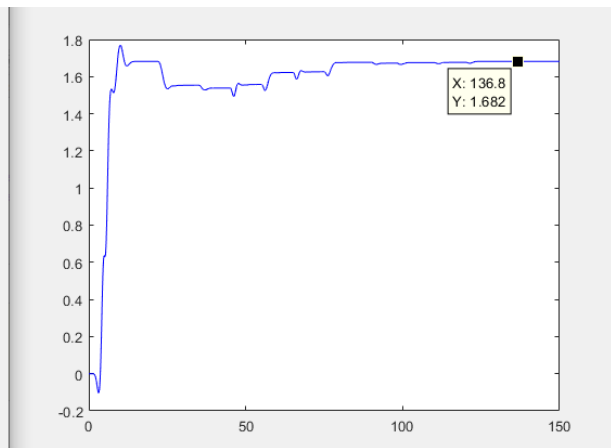
Τα $K1$ και $K2$ προσεγγίζουν καλά τα $K1^*$ και $K2^*$:

$K1$

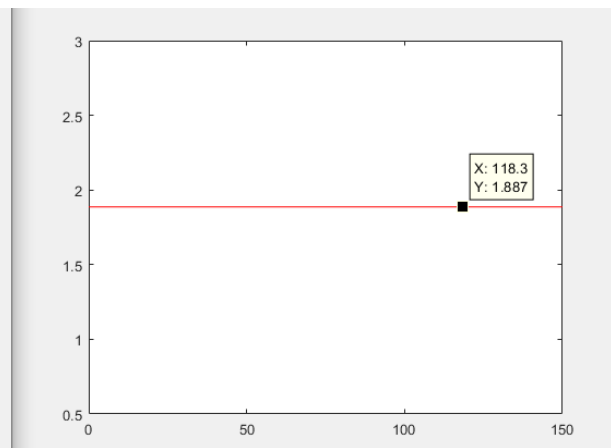
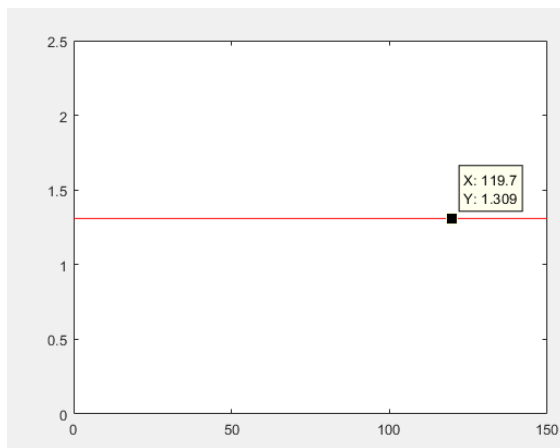
$K2$



$K1^*$



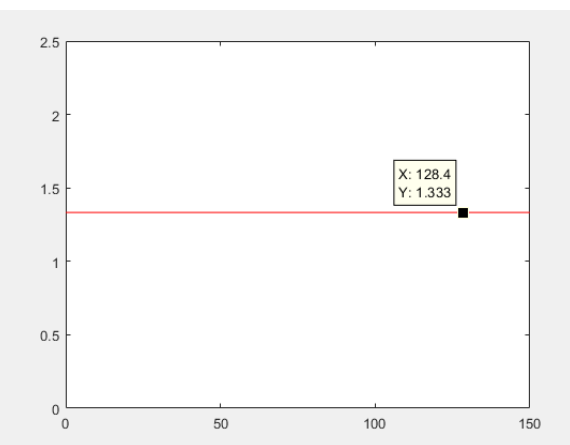
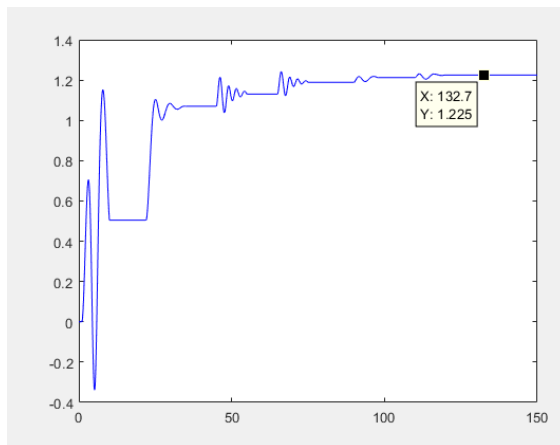
$K2^*$



Το $L1$ προσεγγίζει καλά τα $L1^*$:

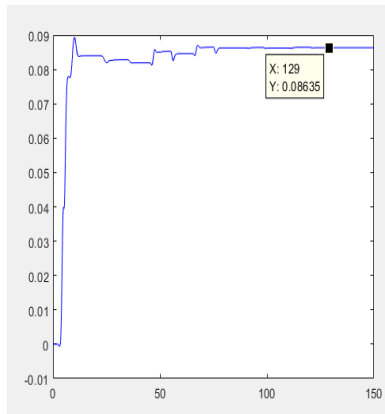
$L1$

$L1^*$

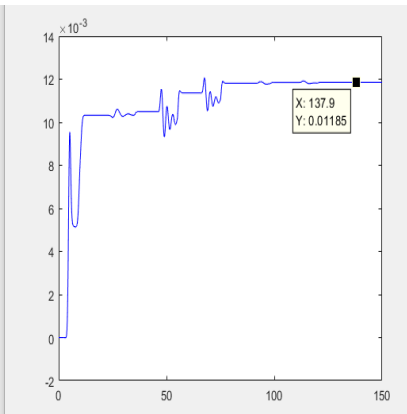


Ωστόσο τα Θ_3 , Θ_4 , Θ_5 προσεγγίζουν μέτρια τα Θ_3^* , Θ_4^* , Θ_5^* :

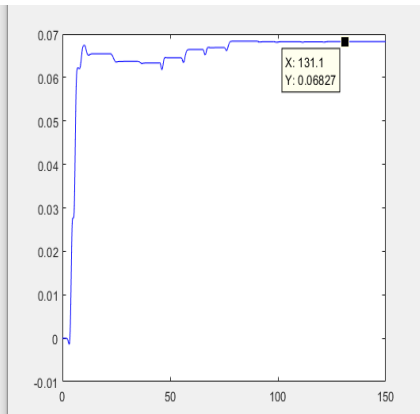
Θ_3



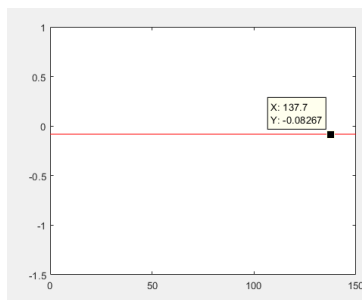
Θ_4



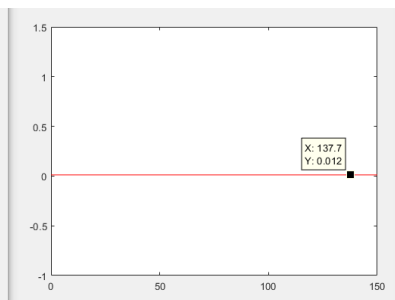
Θ_5



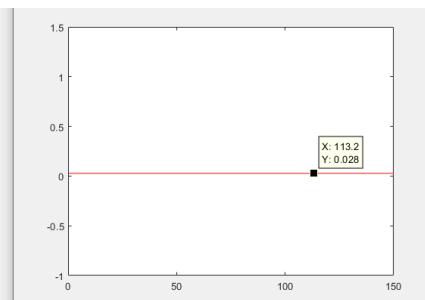
Θ_3^*



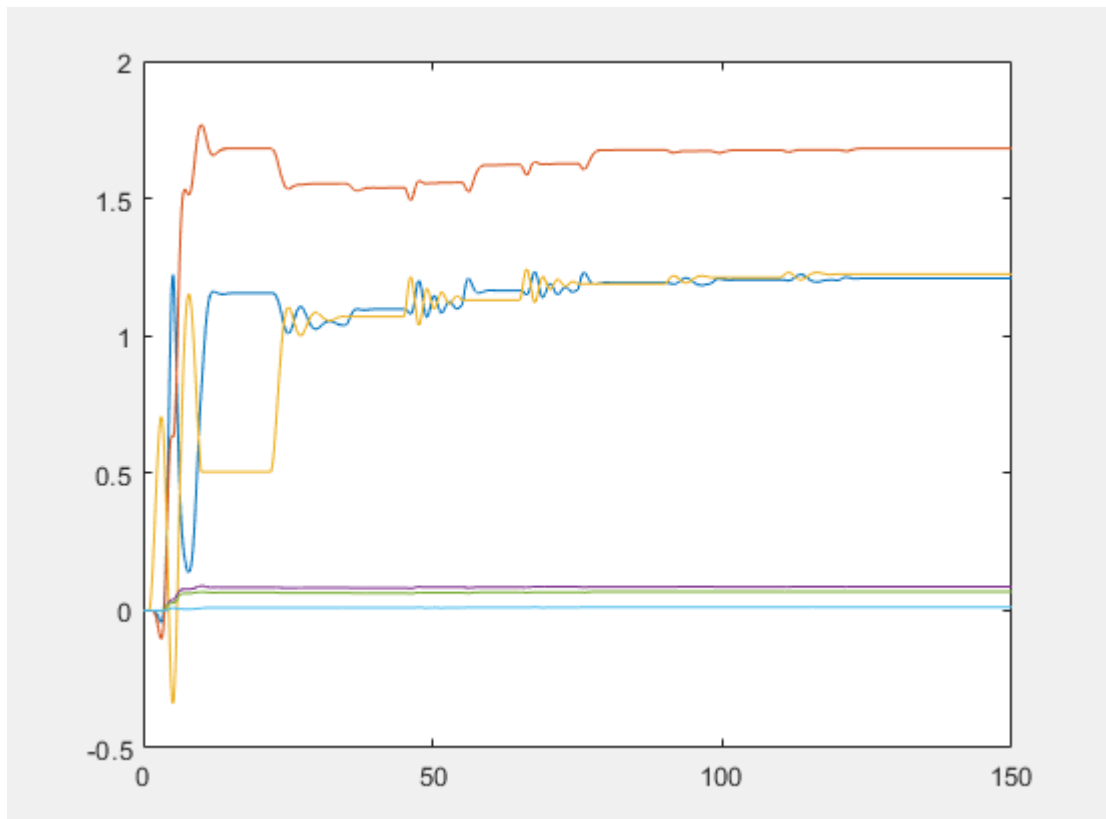
Θ_4^*



Θ_5^*



Εδώ έχουμε όλα μαζί τα προσαρμοστικά κέρδη και βλέπουμε την σταθεροποίηση των τιμών στο πέραςμα του χρόνου.



- Για τα σφαλμάτων παρακολούθηση έχουμε καλές προσεγγίσεις .

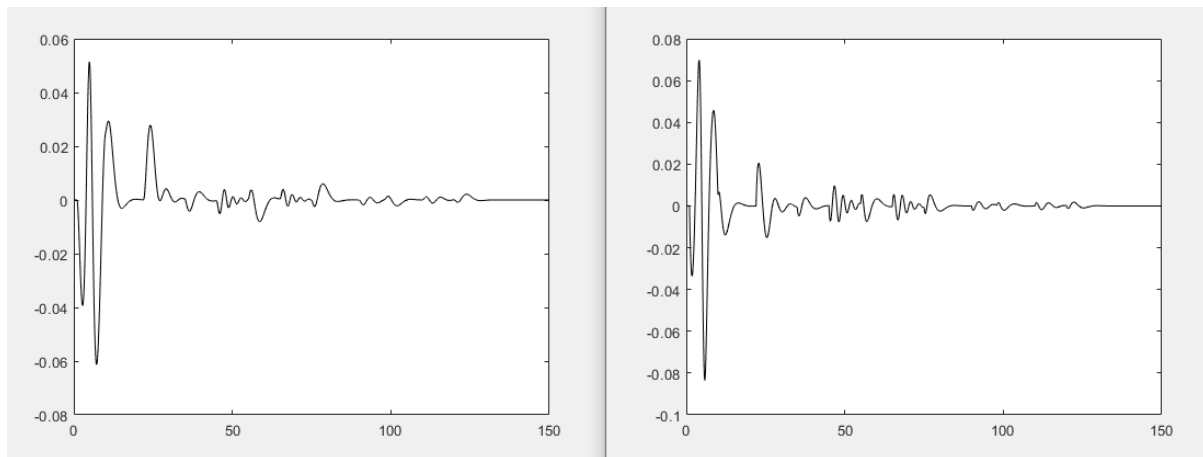
Τα error-φ και error-p είναι σχεδόν μηδενικά , άρα αφού $e \rightarrow 0$

$\varphi \rightarrow \varphi_{ref}$ οπότε έχουμε ασυμπτωτική παρακολούθηση του φ_{ref} από το φ

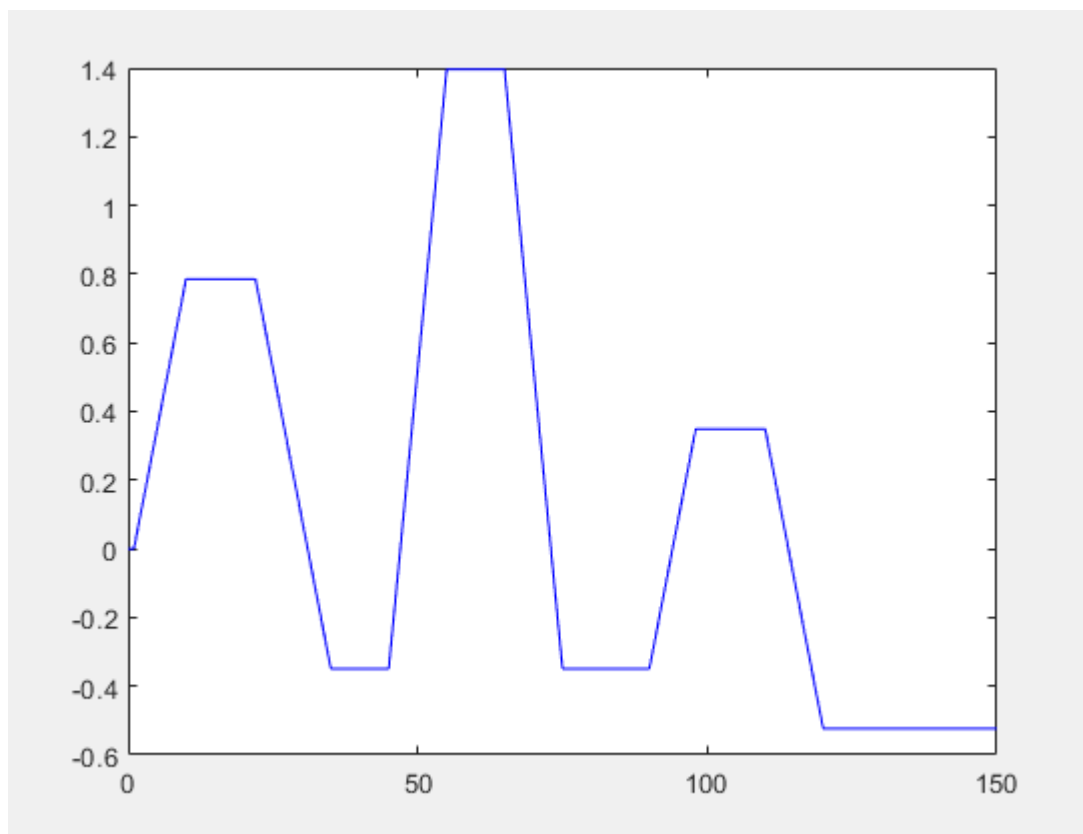
$p \rightarrow p_{ref}$ οπότε έχουμε ασυμπτωτική παρακολούθηση του p_{ref} από το p .

error-φ

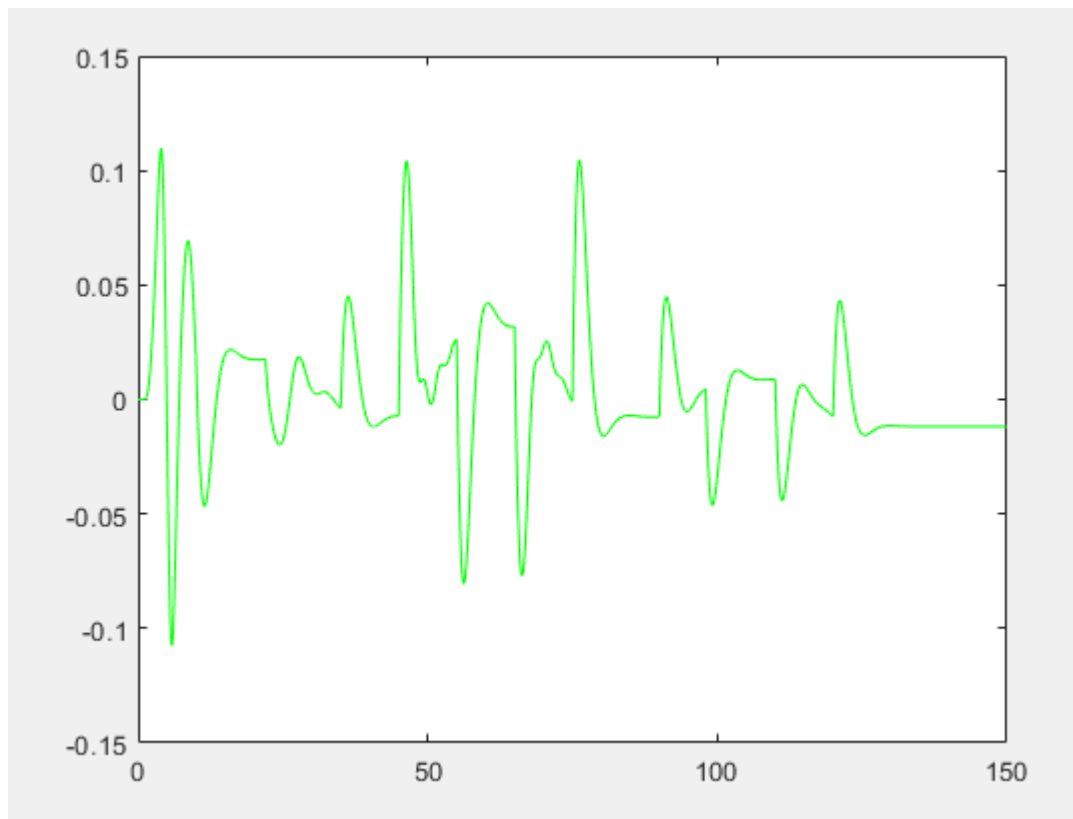
error-p



- Για τα είσοδο παρακολούθηση την αναμενόμενη κυματομορφή.



- Για τα νόμο ελέγχου υ έχουμε την εξής κυματομορφή που προσπαθεί να “σβήσει” τις μη γραμμικότητες.



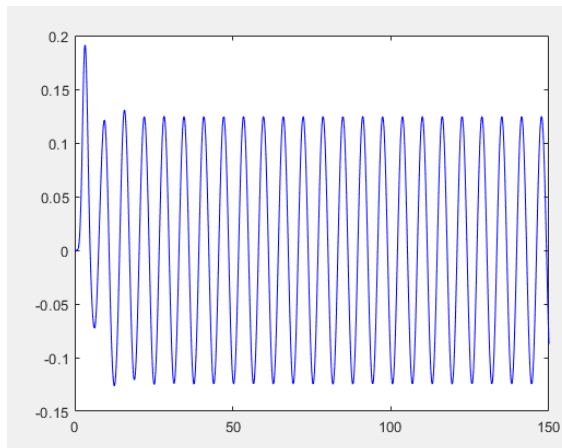
Ε) Να προσομοιώσετε την απόκριση του συστήματος κλειστού βρόχου για είσοδο αναφοράς:

$$r(t) 0.1745\sin(t), \quad t \in [0,140]$$

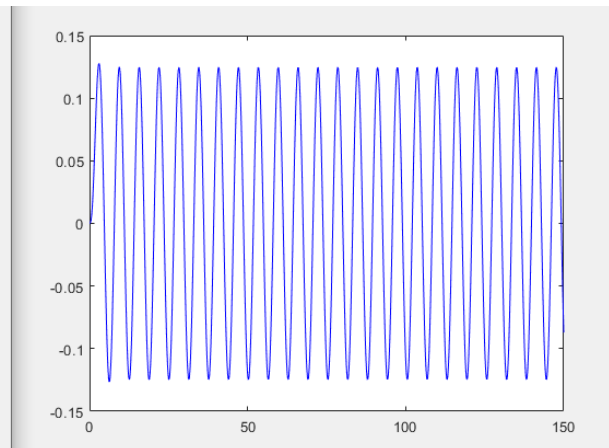
Έτσι για είσοδο αναφοράς πλούσια τάξης n με $n/2 = 1$ διακριτές συχνότητες έχουμε καλύτερα αποτελέσματα στο συστήμα μας καθώς το σφάλμα παρακολούθησης γίνεται σχεδόν μηδενικό από πολύ νωρίς αλλά και η εκτιμήσεις των παραμέτρων του συστήματος είναι σαφώς καλύτερες.

- Για φ και φ_{ref} έχουμε τέλεια παρακολούθηση διότι η κυματομορφές έχουν τεράστια ομοιότητα και η διαφορά τους στην αρχή δημιουργείται λόγω των αρχικών συνθηκών που ορίζουμε εμείς,

φ

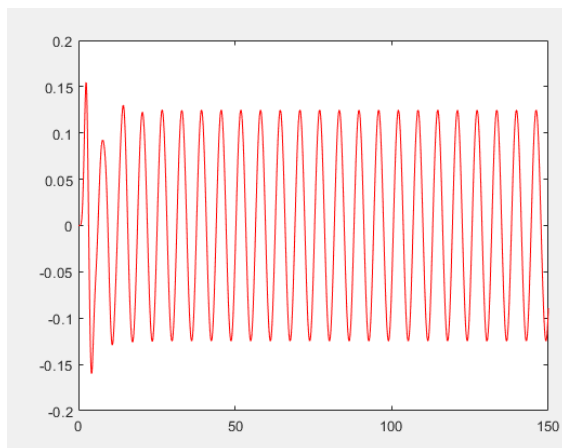


φ_{ref}

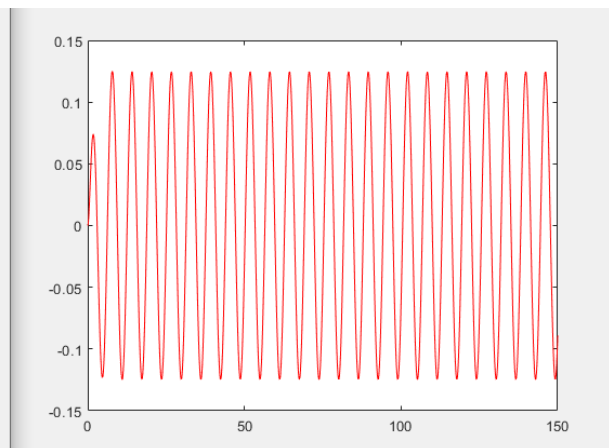


- Για p και p_{ref} έχουμε τέλεια παρακολούθηση διότι η κυματομορφές έχουν τεράστια ομοιότητα και η διαφορά τους στην αρχή δημιουργείται λόγω των αρχικών συνθηκών που ορίζουμε εμείς,

p



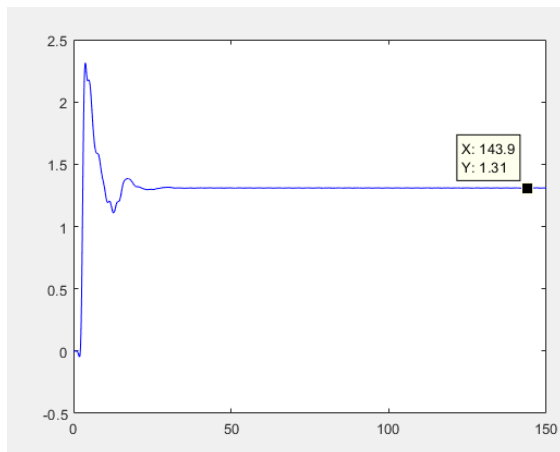
p_{ref}



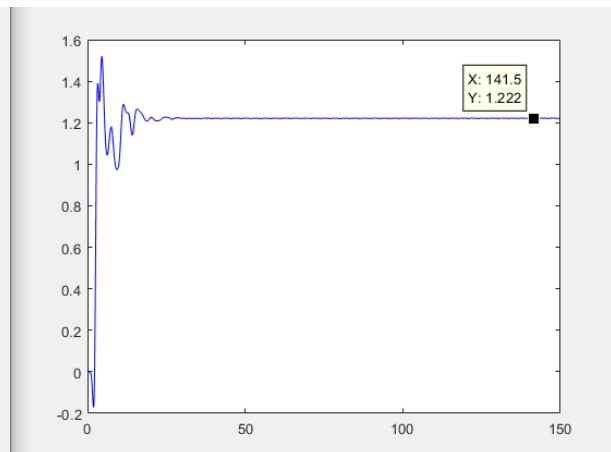
- Για τα προσαρμοστικά κέρδη έχουμε καλές προσεγγίσεις .

Τα $K1$ και $K2$ προσεγγίζουν πολύ καλά τα $K1^*$ και $K2^*$:

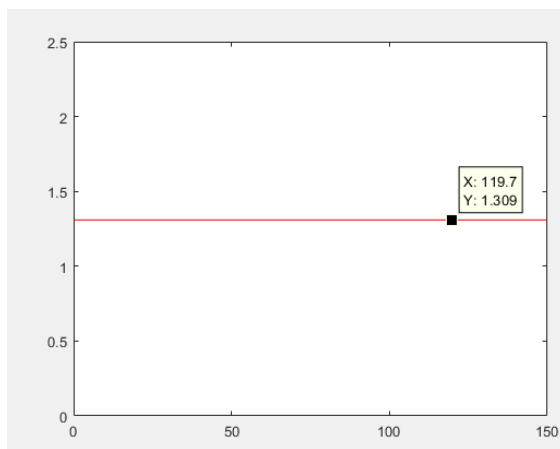
$K1$



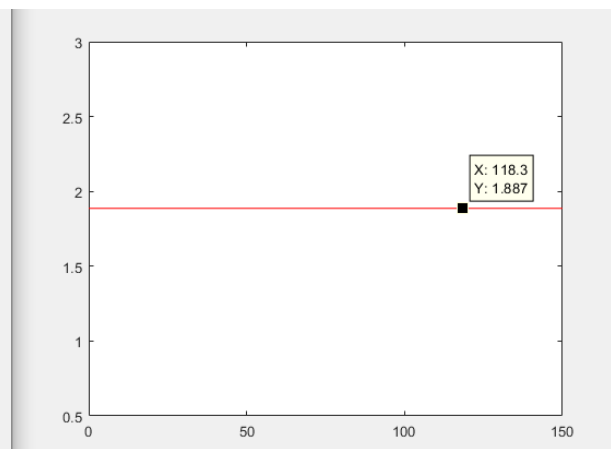
$K2$



$K1^*$



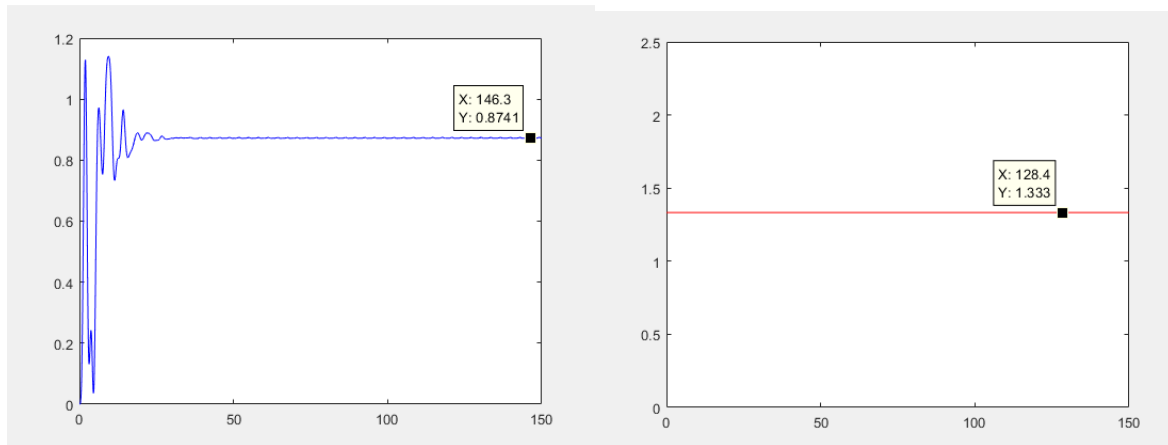
$K2^*$



Το $L1$ προσεγγίζει καλά τα $L1^*$:

$L1$

$L1^*$

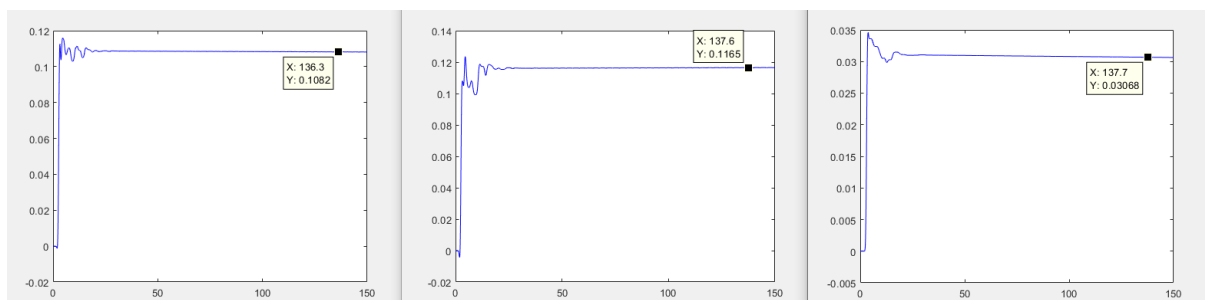


Ωστόσο τα Θ_3 , Θ_4 , Θ_5 προσεγγίζουν μέτρια τα Θ_3^* , Θ_4^* , Θ_5^* :

Θ_3

Θ_4

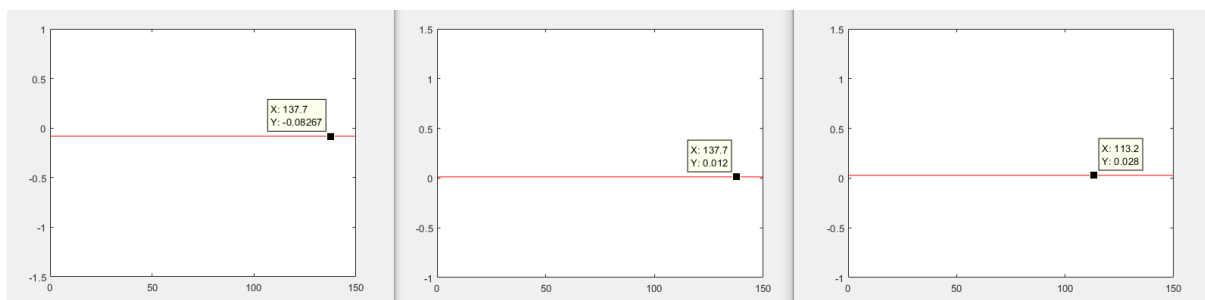
Θ_5



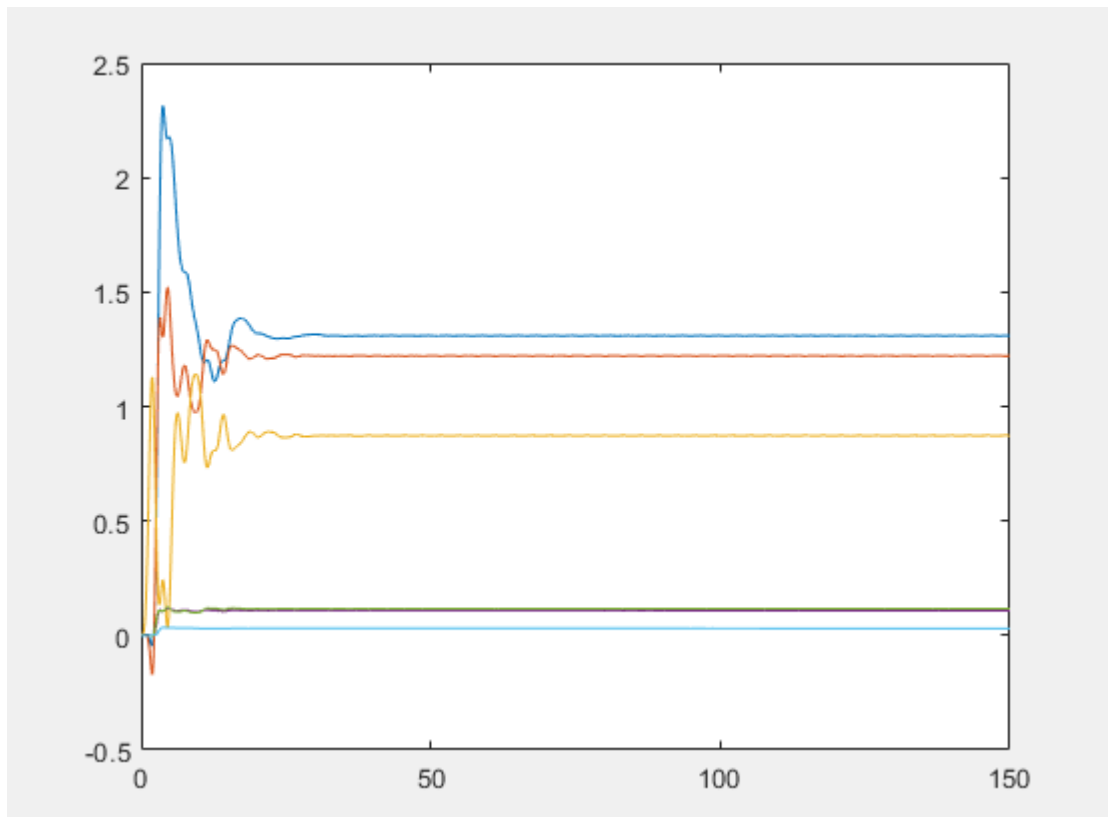
Θ_3^*

Θ_4^*

Θ_5^*



Εδώ έχουμε όλα μαζί τα προσαρμοστικά κέρδη και βλέπουμε την σταθεροποίηση των τιμών στο πέραςμα του χρόνου.



- Για τα σφαλμάτων παρακολούθηση έχουμε καλές προσεγγίσεις .

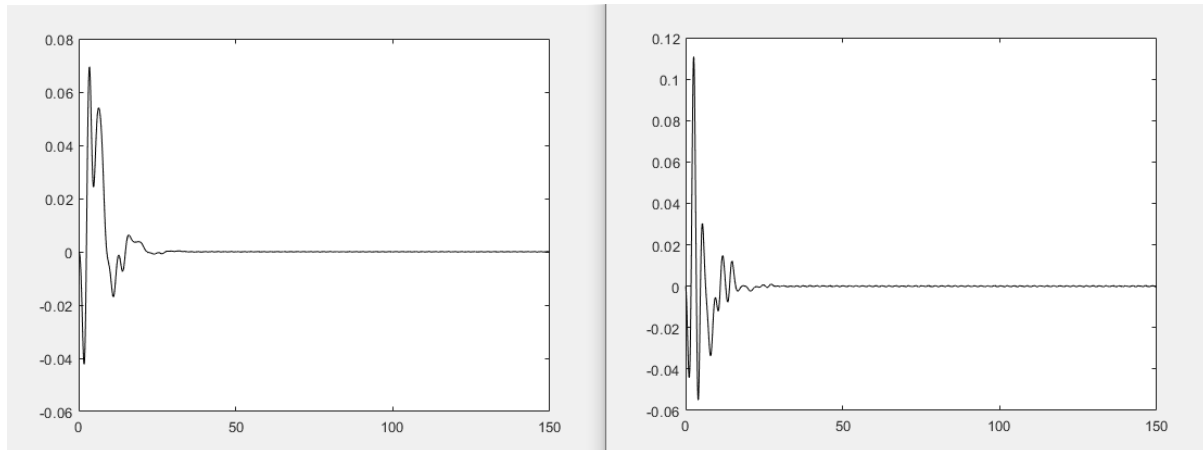
Τα error-φ και error-p είναι σχεδόν μηδενικά , άρα αφού $e \rightarrow 0$

$\varphi \rightarrow \varphi_{ref}$ οπότε έχουμε ασυμπτωτική παρακολούθηση του φ_{ref} από το φ

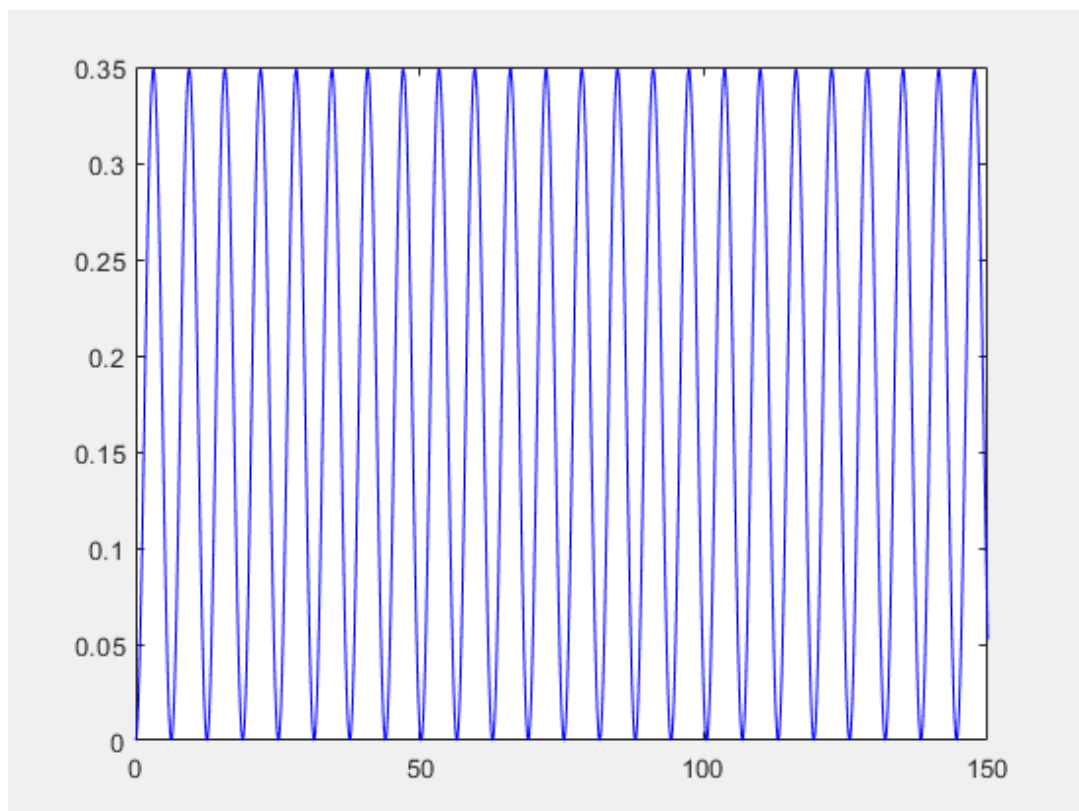
$p \rightarrow p_{ref}$ οπότε έχουμε ασυμπτωτική παρακολούθηση του p_{ref} από το p .

error-φ

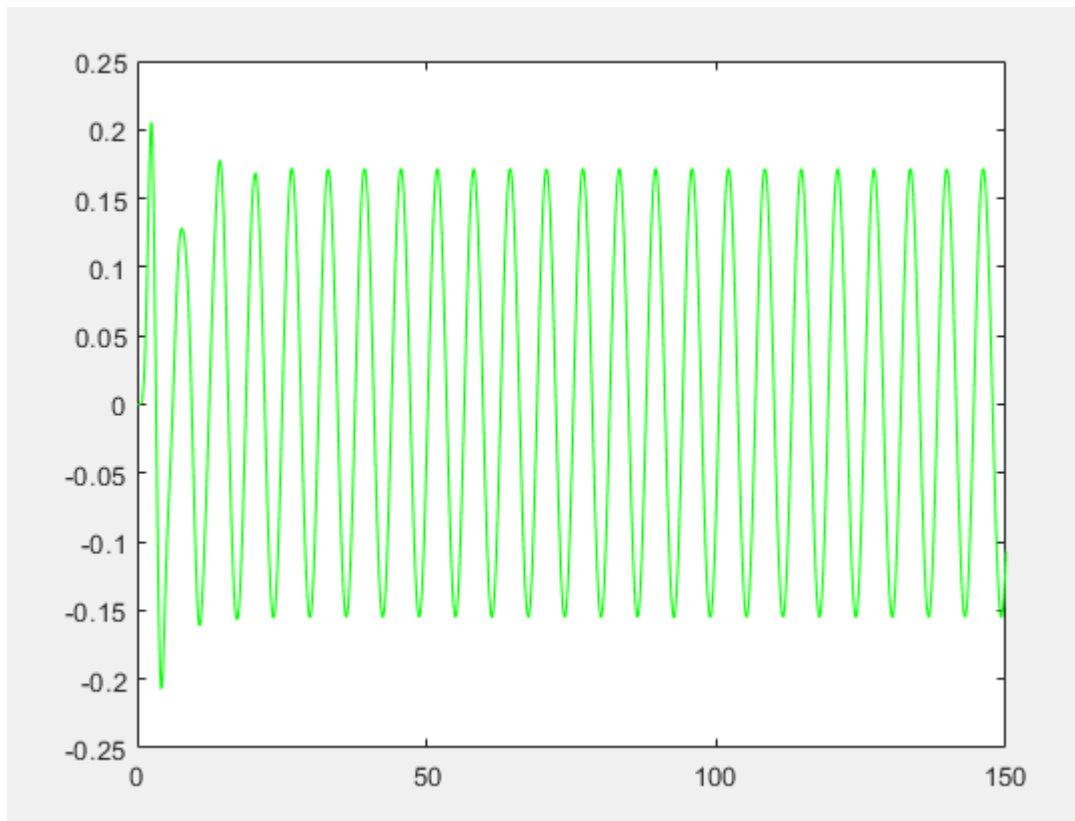
error-p



- Για τα είσοδο παρακολούθηση την αναμενόμενη κυματομορφή.



- Για τα νόμο ελέγχου u έχουμε την εξής κυματομορφής που προσπαθεί να "σβήσει" τις μη γραμμικότητες



Για περαιτέρω πληροφορίες και ακριβείς τιμές των παραπάνω στοιχείων υπάρχουν αν εκτελέσουμε τον κώδικα Matlab μέσω του οποίου κάναμε και τις προσομοιώσεις. Ο κώδικας για να εκτέλεση όλα τα ερωτήματα θέλει 5 λεπτά!

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ξεκινήσαμε με ένα σύστημα το οποίο απαρτίζονταν από μη-γραμμικότητες και το οδηγούσαν σε αστάθεια. Ωστόσο σχεδιάσαμε Προσαρμοστικό Ελεγκτή Μοντέλου Αναφοράς και εξαλείψαμε σε μεγάλο βαθμό τις μη γραμμικότητες μέσω του νόμου ελέγχου που σχεδιάσαμε :

$u = -K(t)x + L(t)r - \theta^T \phi$ και μέσω των παραμέτρων που εκτιμήσαμε

$u = -[1.3100 \ 1.2220]x + [0.8741]r - [0.1082 \ 0.1165 \ 0.0306]\Phi$

