Τεχνικές Βελτιστοποιήσεις

ΕΡΓΑΣΙΑ 1

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΙΣΤΑΤΙΑΔΗΣ

9175

nikoista@ece.auth.gr

Ελαχιστοποίηση κυρτής συνάρτησης μιας μεταβλητής σε δοσμένο διάστημα.

Στην εργασία αυτή ζητούμενο είναι η ελαχιστοποίηση μιας δοσμένης συνάρτησης f(x) όταν $x \in [a, b]$. Το πρόβλημα αυτό αποτελεί την βάση των αλγορίθμων εύρεσης ελαχίστου συναρτήσεων με περισσότερες μεταβλητές. Οι αλγόριθμοι που θα υλοποιηθούν είναι:

Μέθοδοι αναζήτησης ελαχίστου χωρίς την χρήση παραγώγων:

1) Μέθοδος της Διχοτόμου

2) Μέθοδος του Χρυσού Τομέα

3) Μέθοδος Fibonacci

Μέθοδοι αναζήτησης με χρήση παραγώγων:

4) Μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση παραγώγου.

Σε όλες τις παραπάνω μεθόδους ξεκινάμε από ένα αρχικό διάστημα [α , b] μέσα στο οποίο βρίσκεται το ελάχιστο x * της f (x) . Με τη χρησιμοποίηση ενός ακολουθιακού αλγόριθμου καταλήγουμε σε ένα διάστημα $[a_k, b_k]$ με προδιαγεγραμμένη ακρίβεια l , δηλαδή $b_k - a_k < l$. Δοσμένου του αρχικού διάστηματος [2,5], οι συναρτήσεις που θα ελαχιστοποιηθούν είναι:

- $f_1(x) = (x-2)^2 - \sin(x+3)$
- $f_2(x) = e^{-5x} + (x+2)\cos^2(0.5x)$
- $f_3(x) = x^2\sin(x+2) - (x+1)^2$

Να παραδώσετε όλους του κώδικες των προγραμμάτων που γράψατε και μία αναφορά με τα διαγράμματα, τα σχόλια, τα συμπεράσματα σας και ό,τι άλλο κρίνετε αναγκαίο για την παρουσίαση της δουλειάς σας. Στην αναφορά να περιλαμβάνεται και συγκριτικός σχολιασμός πάνω στην αποδοτικότητα των υπο μελέτη μεθόδων για τις τρεις συναρτήσεις.

Θεωρητική Ανάλυση:

Αρχικά οι Αλγόριθμοι Βελτιστοποίησης που θα αναπτύξουμε αναφέρονται σε αυστηρά κυρτές συναρτήσεις όπου :

$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda x_2)\big) < \max\{f(x_1), f(x_2)\}$$

$$\forall x_1, x_2 \in S,\ \ \lambda \in (0,1)$$

Άρα για κάθε συνάρτηση έχουμε :

- $f_1(x) = (x-2)^2 - \sin(x+3)$

Όπου σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.6 :

$$\nabla^2 f_1(x) = 2 + \sin(x+3) > 0\ ,\ \ \forall x \in R$$

άρα η f_1γνησίως κυρτή συνάρτηση στο [2 , 5].

- $f_2(x) = e^{-5x} + (x+2)\cos(^2 0.5x)$

Όπου σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.6:

$\nabla^2 f_2(x) = 25e^{-5x} - 2\cos(0.5x)\sin(0.5x) + (2+x)(-0.5\cos^2(0.5x) + 0.5) > 0\ ,\forall x \in R$ άρα η f_2 γνησίως κυρτή συνάρτηση στο [2 , 5].

- $f_3(x) = x^2\sin(x+2) - (x+1)^2$

Όπου σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.6 :

$$\nabla^2 f_3(x) = -2 + 4x\cos(x+2) + (2 -)x^2 \sin(x+2)$$

δέν έχει σταθερό πρόσημο για $\forall x \in R$ όμως για το [2 , 5] αν κάνουμε διερεύνηση θα βρούμε ότι για [2 , 2.4968...] η $\nabla^2 f_3$ είναι αρνητική, άρα η f_3 γνησίως κυρτή συνάρτηση όμως για [2.4968... , 5] η $\nabla^2 f_3$ είναι θετική , άρα η f_3 γνησίως κοίλη συνάρτηση , οπότε στο 2.4 - 2.5 παρουσιάζει ελάχιστο που θα το βρούμε στην συνέχεια.Για αυτή την ανάλυση έχω κάνει αρχείο στο matlab με όνομα

TEX_BEL_THEORIA.m

Θεώρημα 5.5.1

Έστω f(x) μια αυστηρά σχεδόν-κυρτή συνάρτηση στο διάστημα [α,β].

Έστω x_1, x_2 ∈[α,β] τέτοια ώστε $x_1 < x_2$:

- Αν f(x_1) < f(x_2) τότε f(x) > f(x_1) , $\forall x \in (x_2, b]$
- Αν $f(x_1) \geq f(x_2)$ τότε $f(x) \geq f(x_2)$ $\forall x \in [a, x_1)$

ΑΠΟΔΟΣΗ ΜΕΘΟΔΟΥ

Η απόδοση μιας μεθόδου που χρησιμοποιεί διαστήματα αβεβαιότητας δίνεται από τον συντελεστή μείωσης r(n), που ορίζεται ως ο λόγος r(n) = d(n)/ d0 όπου d(n) είναι το μήκος του διαστήματος αβεβαιότητας μετά από n κλήσεις της συνάρτησης (επιπλέον των δύο υπολογισμών στα άκρα του διαστήματος a και b που δεν μετρώνται), και d0 είναι το μήκος του αρχικού διαστήματος αβεβαιότητας. Όπως είναι φανερό, δεν υπάρχει ένας μοναδικός συντελεστής μείωσης, αλλά μια σειρά από τιμές r(1), r(2), . . . r(n).

MATLAB:

Για κάθε Θέμα επιλέγω ένα από τα αρχεία .m και σε κάθε Run επιλέγω την συνάρτηση μου βγάζοντας το '%' από την αρχή της σειράς κώδικα που θέλω να εκτελέσω.

```
%% Choose a Function to begin calculations.

%f=f1;

f=f2;

%f=f3;
```

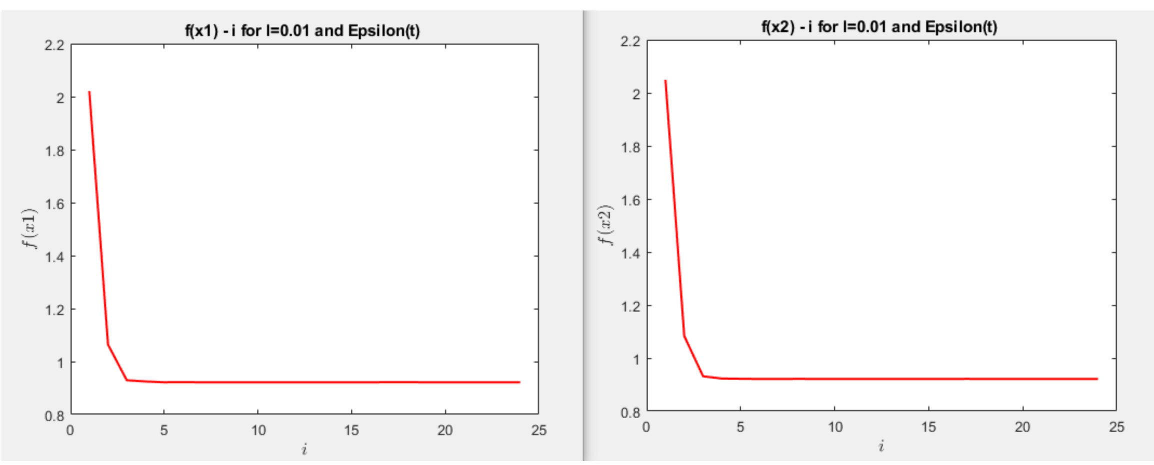
Θέμα 1:

Υλοποιήστε στο Matlab τη **Μέθοδο της Διχοτόμου** και εφαρμόστε τη στις συναρτήσεις.

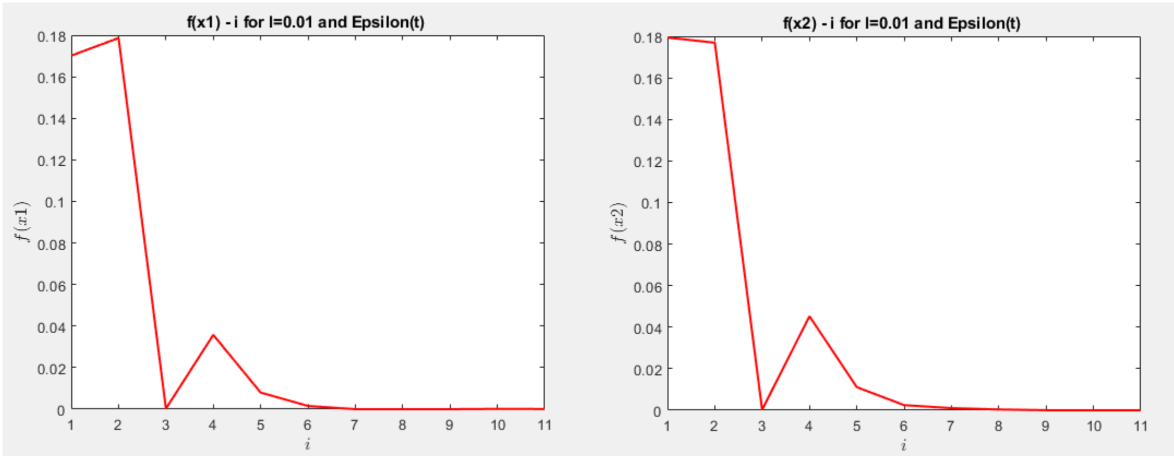
1) Κρατώντας σταθερό το τελικό εύρος αναζήτησης l = 0.01 μελετήστε τη μεταβολή των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης $f_i(x)$ καθώς μεταβάλλουμε τη σταθερά ε (απόσταση από τη διχοτόμο). Δημιουργήστε την αντίστοιχη γραφική παράσταση από τις τιμές που προκύπτουν (για όλες τις συναρτήσεις).

Τα plots που εμφανίζει η MATLAB για l=0.01 και ε(t) (μεταβαλόμενο) για x1 ,x2 να ανήκουν στο [2, 5] είναι:

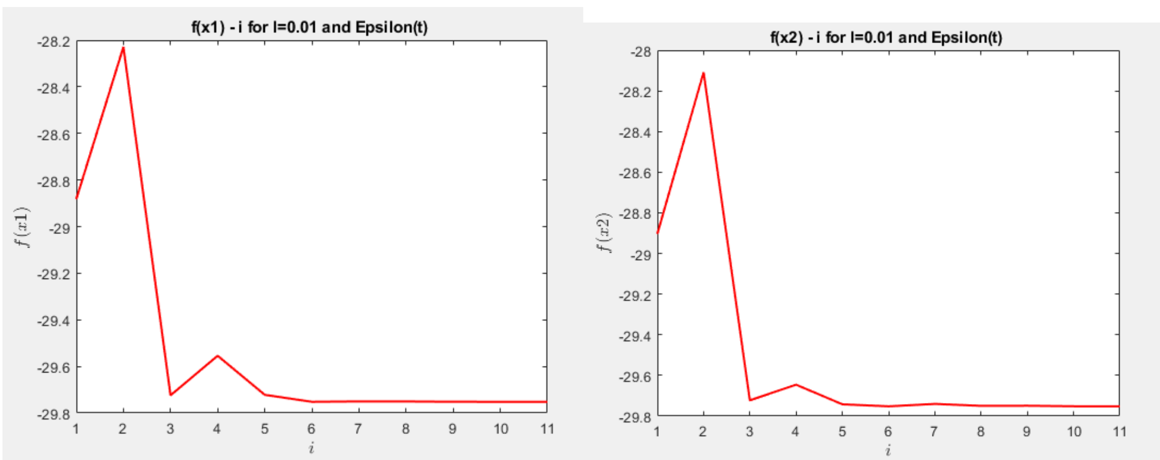
- Για f1(x):



- Για f2(x):



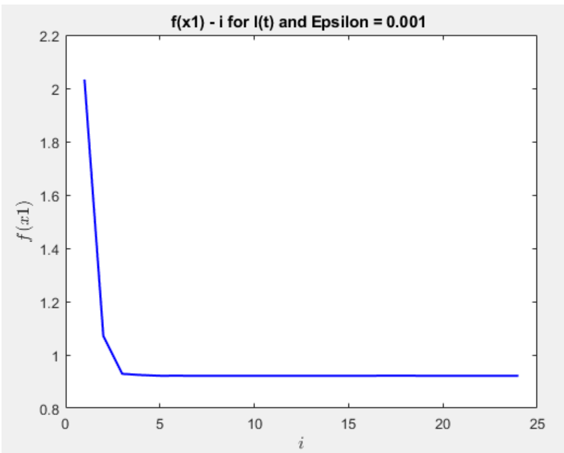
- Για f3(x):

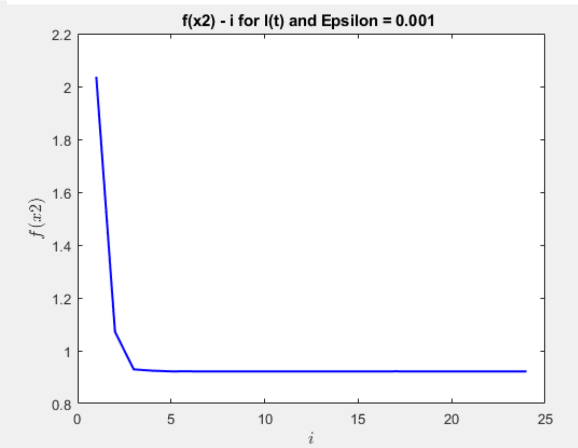


2) Κρατώντας σταθερό το ε = 0.001 μελετήστε τη μεταβολή των υπολογισμών της $f_i(x)$ καθώς μεταβάλλουμε το l. Δημιουργήστε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις από τις τιμές που προκύπτουν (για όλες τις συναρτήσεις).

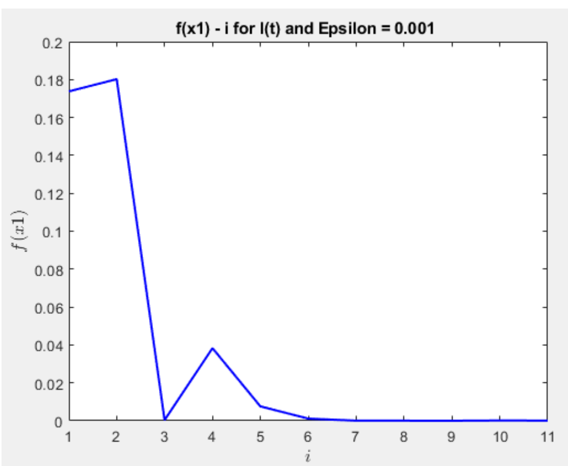
Τα plots που εμφανίζει η MATLAB για l(t) (μεταβαλόμενο) και ε=0.001 για x1 ,x2 να ανήκουν στο [2, 5] είναι:

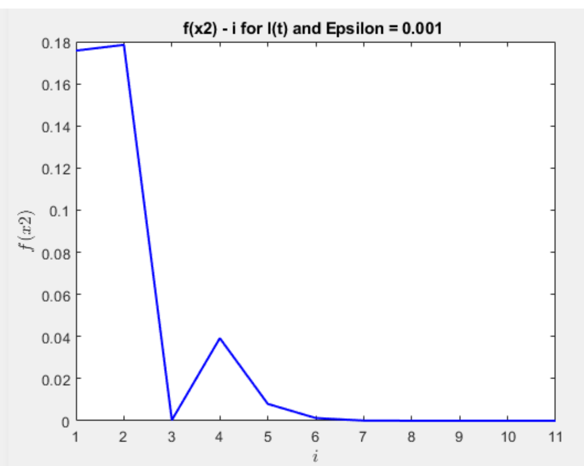
- Για f1(x):



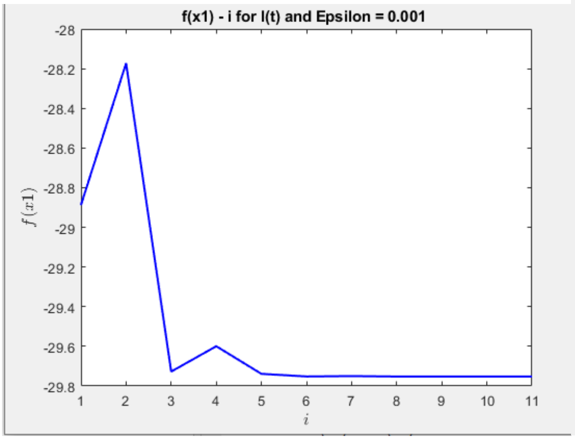


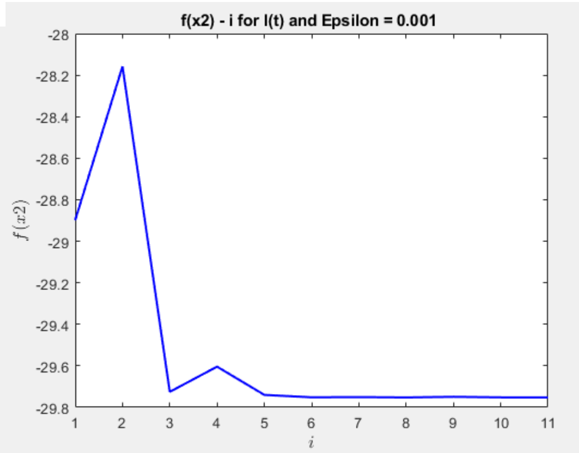
- Για f2(x):





- Για f3(x):

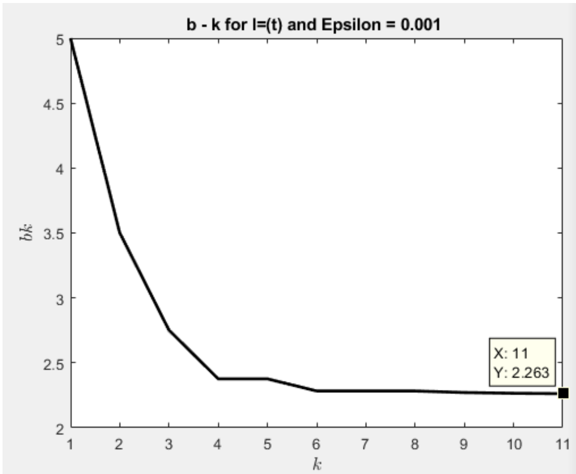


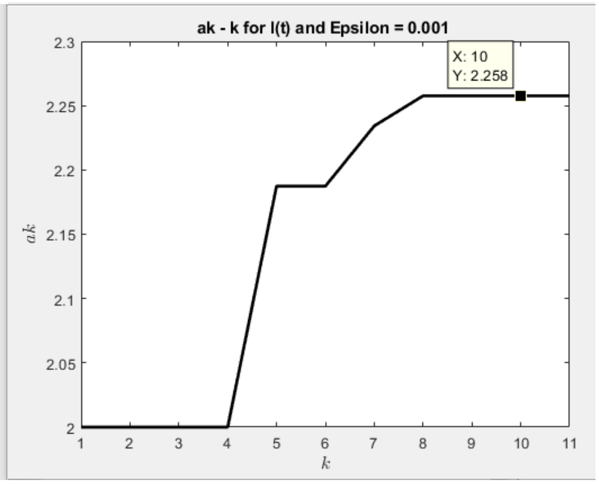


3) Επιπλέον, σε τρία διαγράμματα, ένα για κάθε συνάρτηση, σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος συναρτήσει του δείκτη βήματος k , δηλαδή (k, α_k) και , (k, b_k) για διάφορες τιμές επιλογής σας του τελικού εύρους αναζήτησης l.

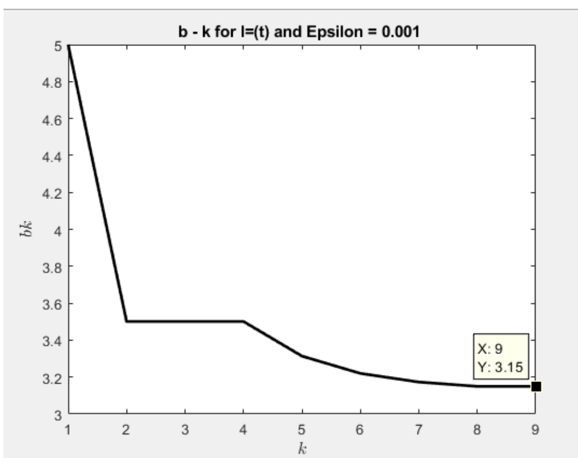
Τα plots που εμφανίζει η MATLAB για l(t) (μεταβαλόμενο) και ε=0.001 καθώς ο αριθμός επαναλλήψεων k = 12 είναι:

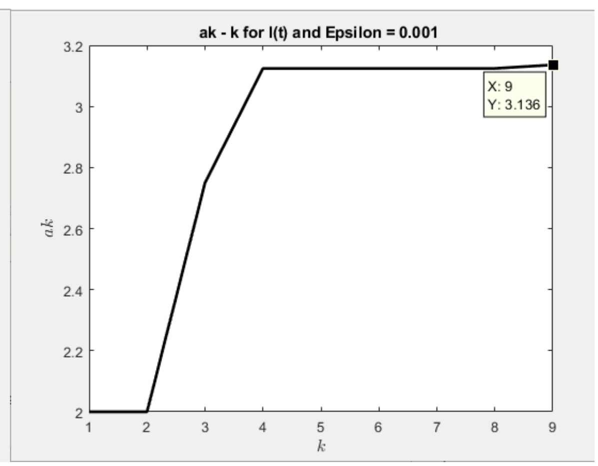
- Για f1(x):



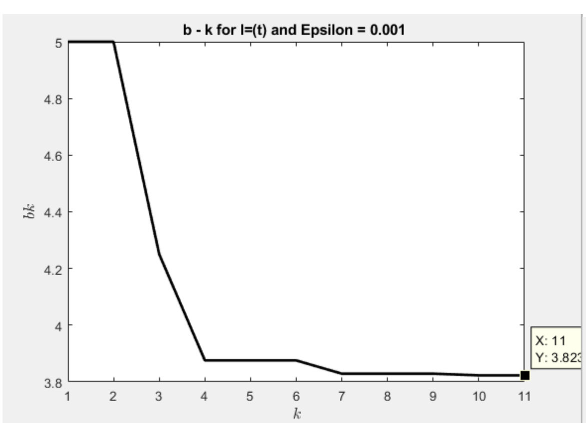


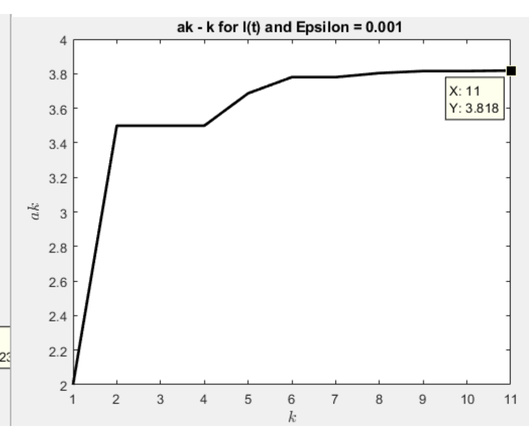
- Για f2(x):





- Για f3(x):





Για αυτό το θέμα έχω κάνει αρχείο στο matlab με όνομα

TEX_BEL_THEMA_1.m

Συμπέρασμα:

Η μέθοδο διχοτόμησης έχει r(n) = (½)^(n/2) όπου για κάθε συρρίκνωση του διαστήματος χρειάζονται δύο νέες κλήσεις της συνάρτησης,

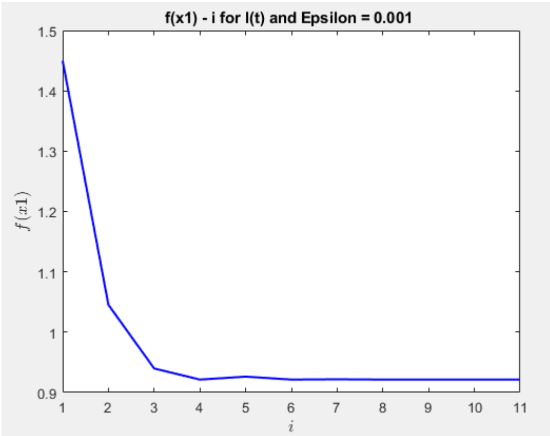
Θέμα 2:

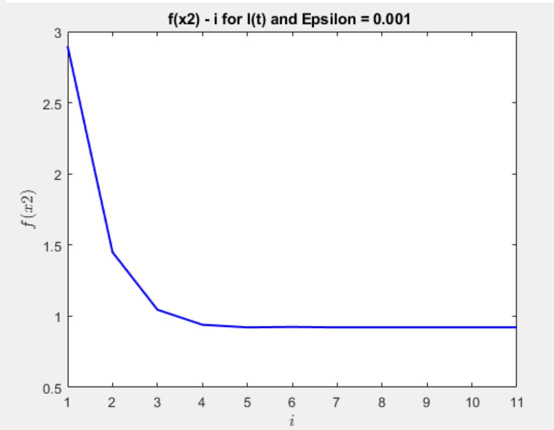
Υλοποιήστε στο Matlab τη **Μέθοδο του Χρυσού Τομέα** και εφαρμόστε τη σε όλες τις συναρτήσεις.

1) Μελετήστε τη μεταβολή των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης $f_i(x)$ καθώς μεταβάλλουμε το τελικό εύρος αναζήτησης l. Δημιουργήστε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις από τις τιμές που προκύπτουν.

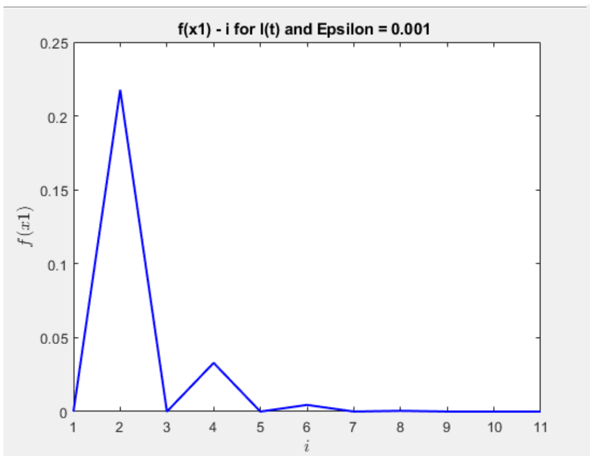
Τα plots που εμφανίζει η MATLAB για l(t) (μεταβαλόμενο) και ε=0.001 για x1 ,x2 να ανήκουν στο [2, 5] είναι:

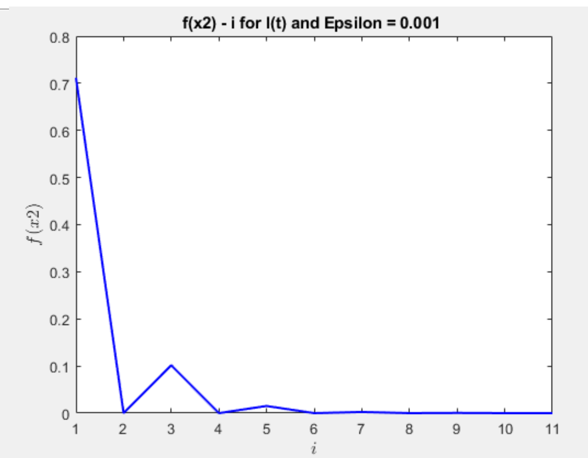
- Για f1(x):



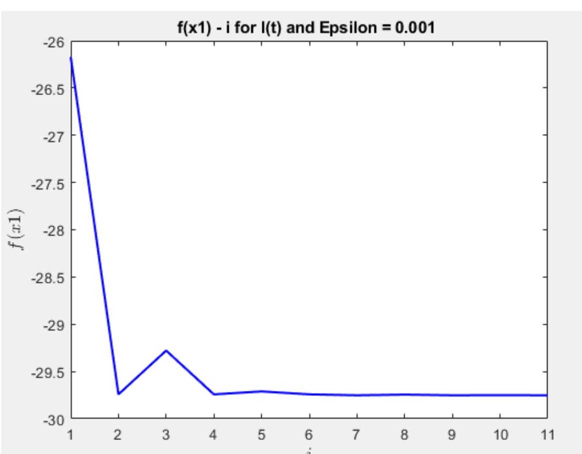


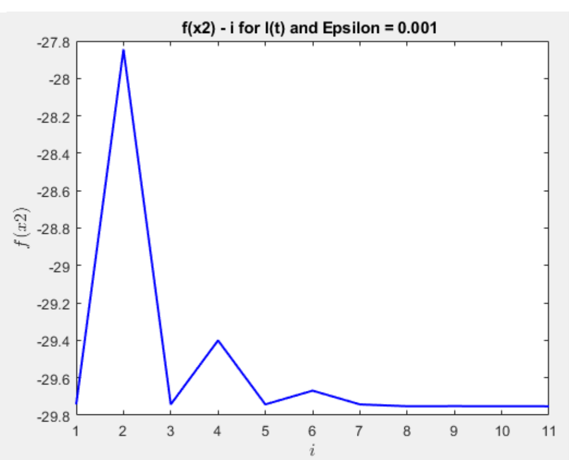
- Για f2(x):





- Για f3(x):

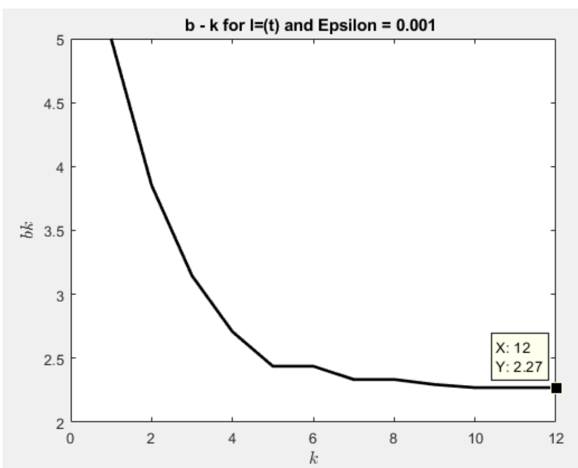


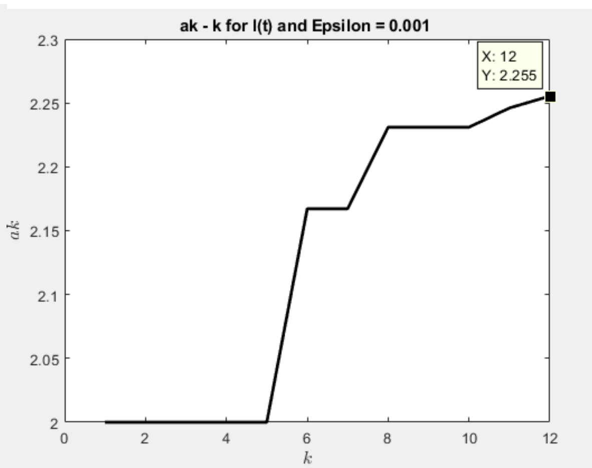


2) Σε τρία διαγράμματα, ένα για κάθε μια συνάρτηση, σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος $[a_k, b_k]$ συναρτήσει του δείκτη βήματος k , δηλαδή (k, α_k) και , (k, b_k) για διάφορες τιμές επιλογής σας του τελικού εύρους αναζήτησης l.

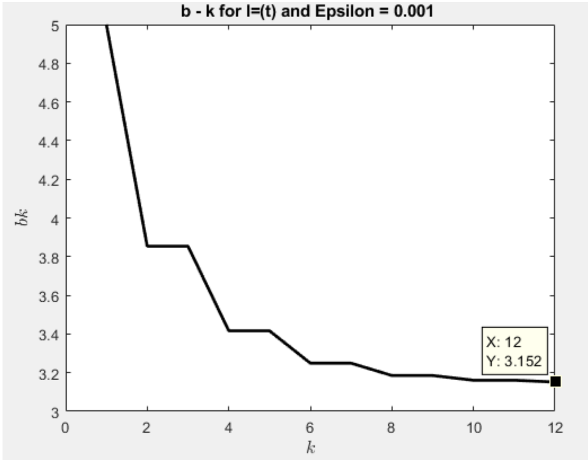
Τα plots που εμφανίζει η MATLAB για l(t) (μεταβαλόμενο) και ε=0.001 καθώς ο αριθμός επαναλλήψεων k = 12 είναι:

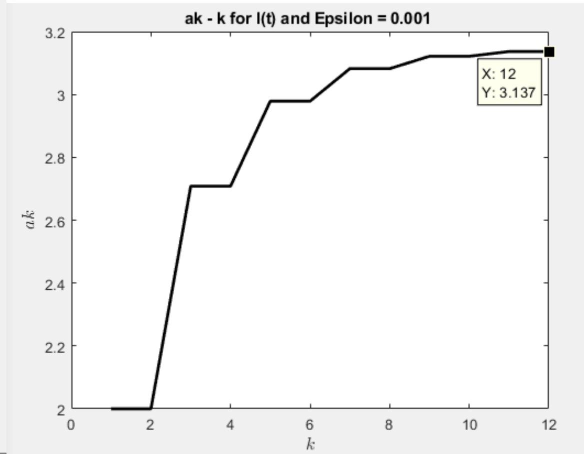
- Για f1(x):



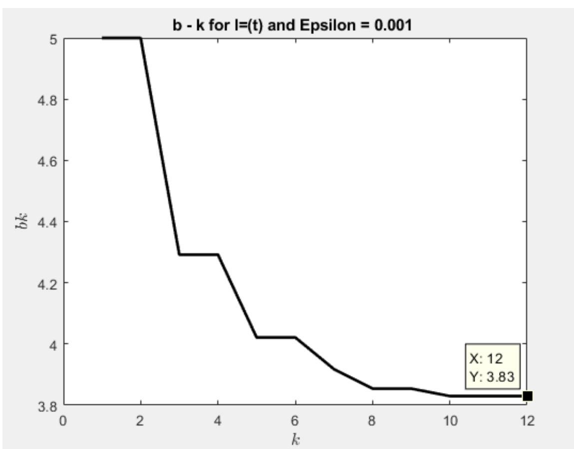


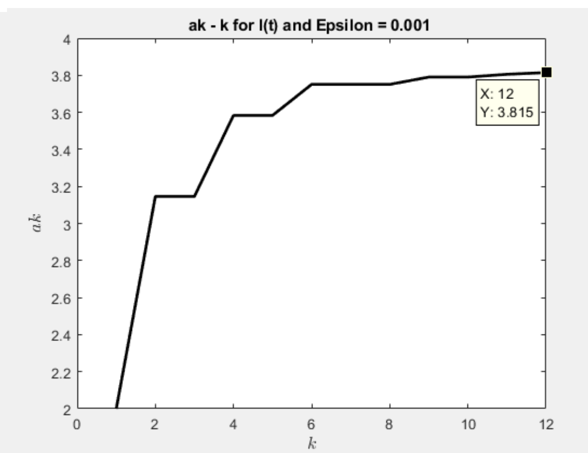
- Για f2(x):





- Για f3(x):





Για αυτό το θέμα έχω κάνει αρχείο στο matlab με όνομα

TEX_BEL_THEMA_2.m

Συμπέρασμα:

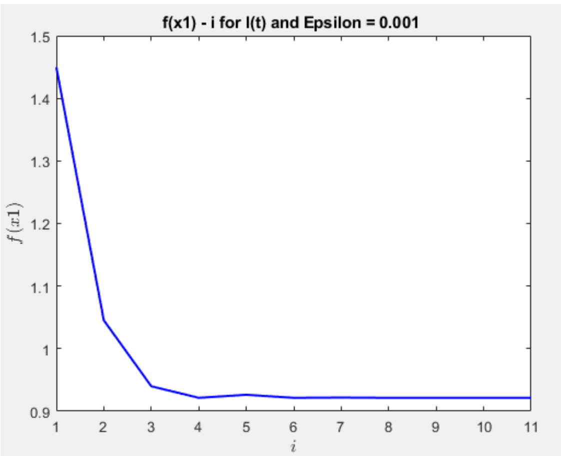
Η αναζήτηση χρυσής τομής δεν προδιαγράφει τον αριθμό των αποτιμήσεων της συνάρτησης εκ των προτέρων. Ο συντελεστής μείωσης μετά από Ν κλήσεις προκύπτει από την ως rN = b^ (N−1) , δηλαδή το μήκος του διαστήματος αβεβαιότητας μειώνεται με γεωμετρική πρόοδο.

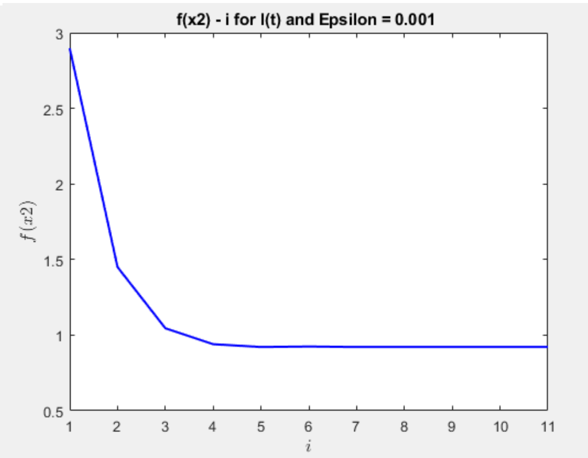
Θέμα 3:

Επαναλάβετε το Θέμα 2, χρησιμοποιώντας τη **Μέθοδο Fibonacci**. Για την υλοποίηση της συγκεκριμένης μεθόδου να καταστρώσετε δικό σας αλγόριθμο με βάση τη θεωρητική περιγραφή του βιβλίου, δηλαδή να μη χρησιμοποιηθεί η σύνοψη του αλγορίθμου σε βήματα που δίνεται στο βιβλίο.

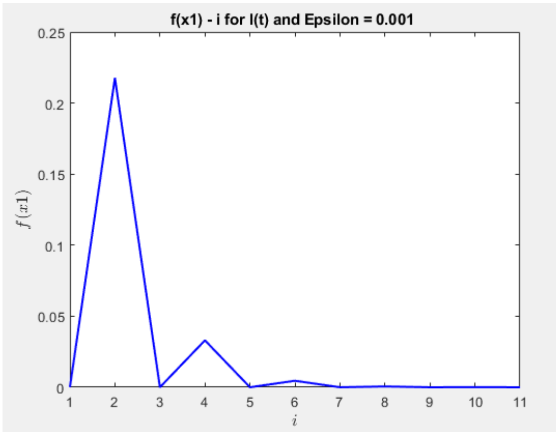
Τα plots που εμφανίζει η MATLAB για l(t) (μεταβαλόμενο) και ε=0.001 για x1 ,x2 να ανήκουν στο [2, 5] είναι:

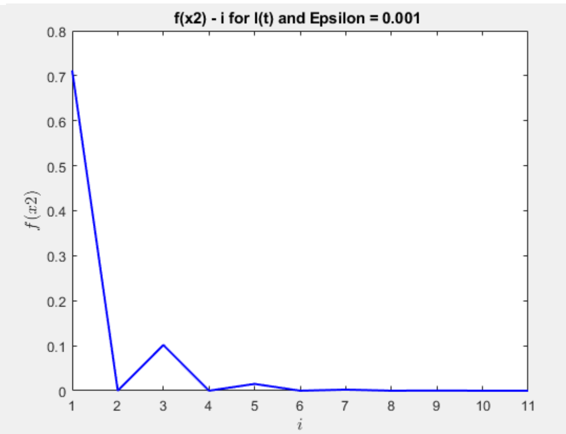
- Για f1(x):



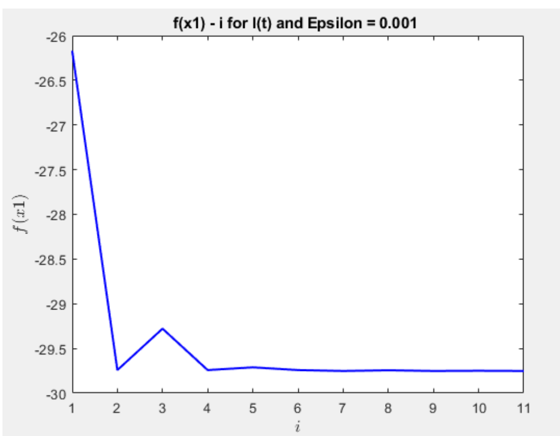


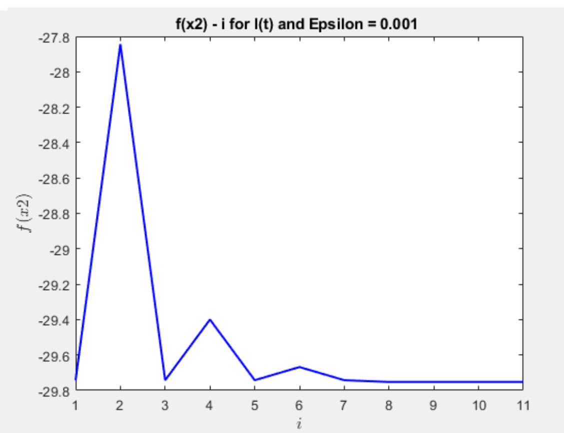
- Για f2(x):





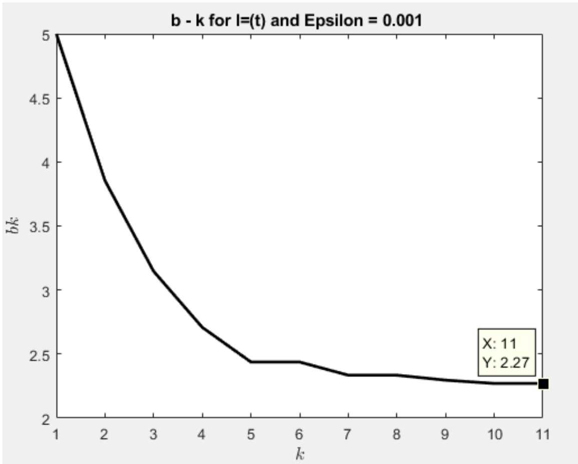
- Για f3(x):

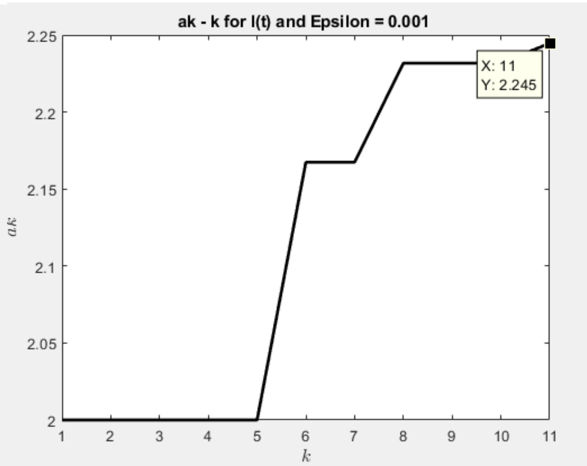




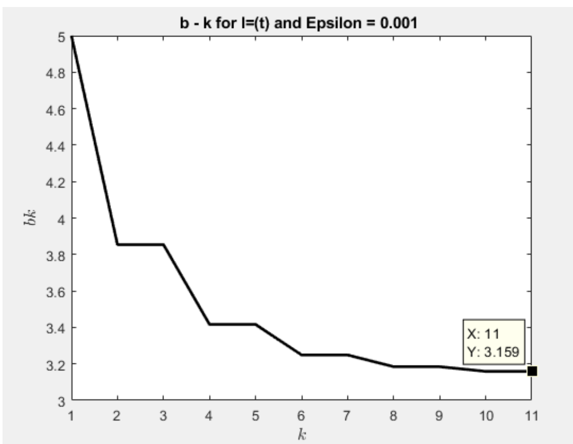
Τα plots που εμφανίζει η MATLAB για l(t) (μεταβαλόμενο) και ε=0.001 καθώς ο αριθμός επαναλλήψεων k = 11 είναι:

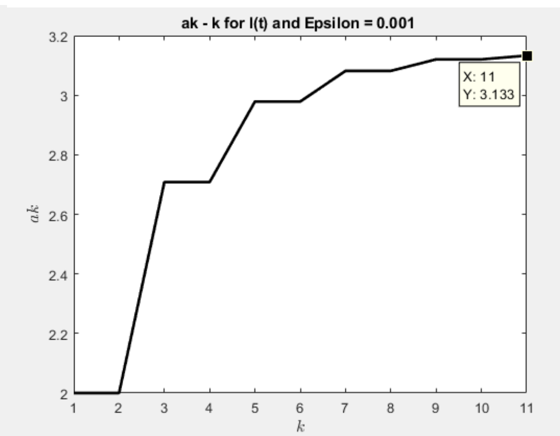
- Για f1(x):



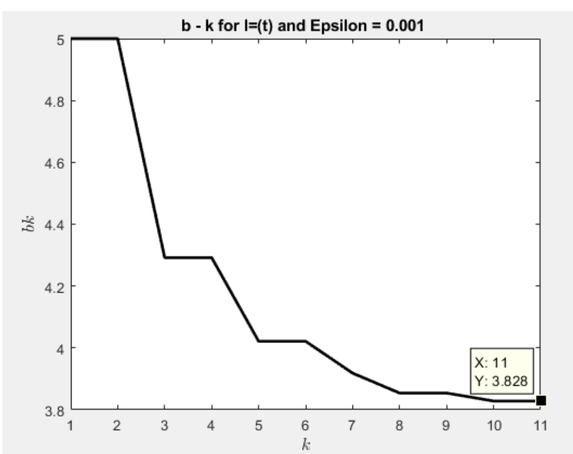


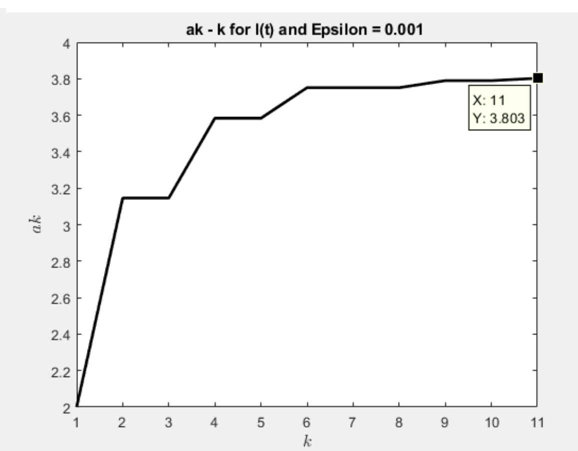
- Για f2(x):





- Για f3(x):





Για αυτό το θέμα έχω κάνει αρχείο στο matlab με όνομα

TEX_BEL_THEMA_3.m

Συμπέρασμα:

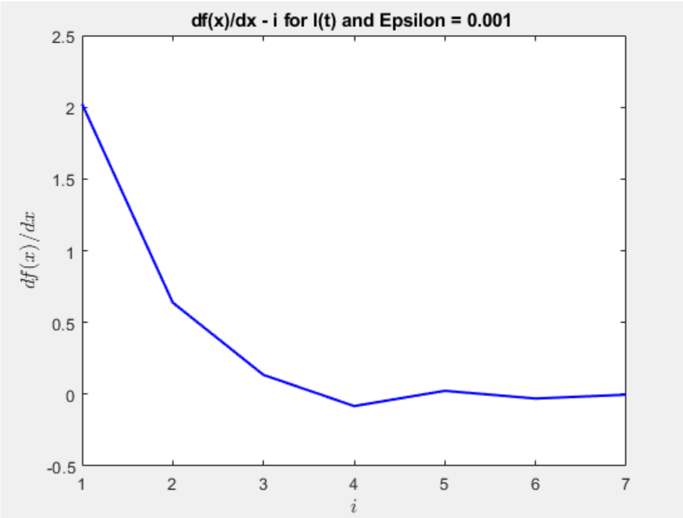
Αν ο αριθμός των κλήσεων N θεωρηθεί γνωστός εξ' αρχής η βέλτιστη στρατηγική είναι γνωστή ως αναζήτηση Fibonacci . Ο συντελεστής μείωσης $rN \approx \frac{2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{N}}$ μετά απο N* κλήσεις . Το βασικό μειονέκτημα των δύο μεθόδων που περιγράφηκαν προηγουμένως, είναι ότι για κάθε συρρίκνωση του διαστήματος χρειάζονται δύο νέες κλήσεις της συνάρτησης. Η δυνατότητα να μειωθεί το διάστημα μετά από μία μόνο νέα κλήση της συνάρτησης οδηγεί στη βέλτιστη στρατηγική. Έτσι η μέθοδο αυτή είναι πιο αποδοτική από την μέθοδο της διχοτόμησης.

Θέμα 4:

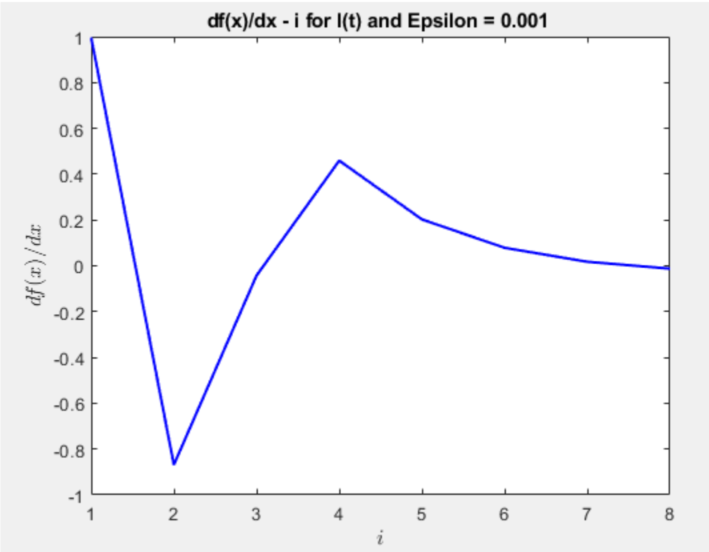
Επαναλάβετε το Θέμα 2, χρησιμοποιώντας τη **Μέθοδο της Διχοτόμου με χρήση παραγώγου**.

Τα plots που εμφανίζει η MATLAB για l(t) (μεταβαλόμενο) και ε=0.001 για x1 ,x2 να ανήκουν στο [2, 5] είναι:

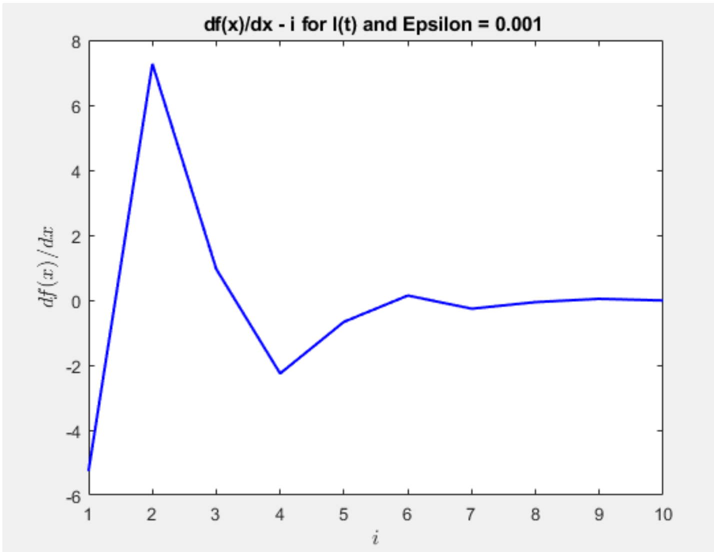
- Για f1(x):



- Για f2(x):

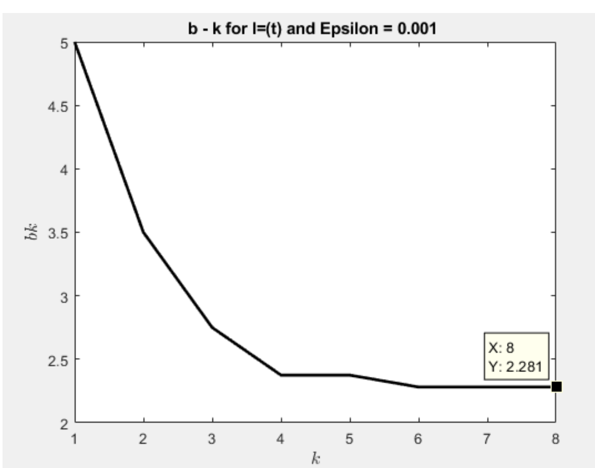


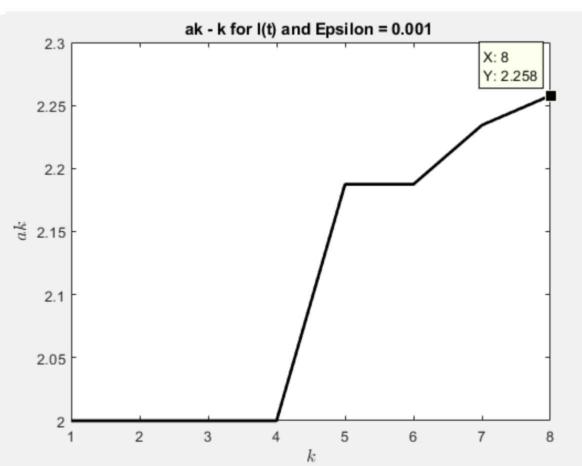
- Για f3(x):



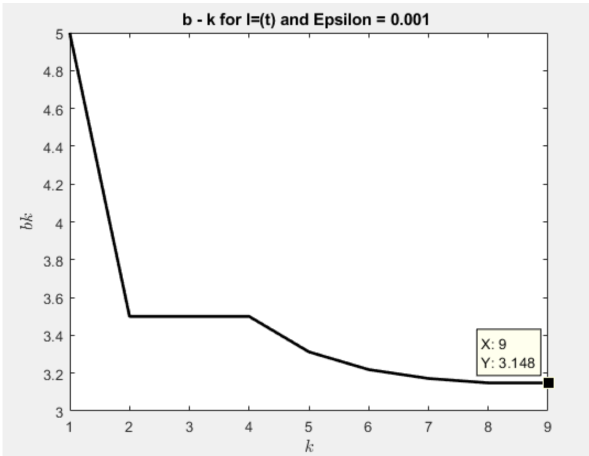
Τα plots που εμφανίζει η MATLAB για l(t) (μεταβαλόμενο) και ε=0.001 καθώς ο αριθμός επαναλλήψεων k = 8,9,11 (αλλα στην τελευταία επανάλληψη df(x) ≈0) , άρα είναι:

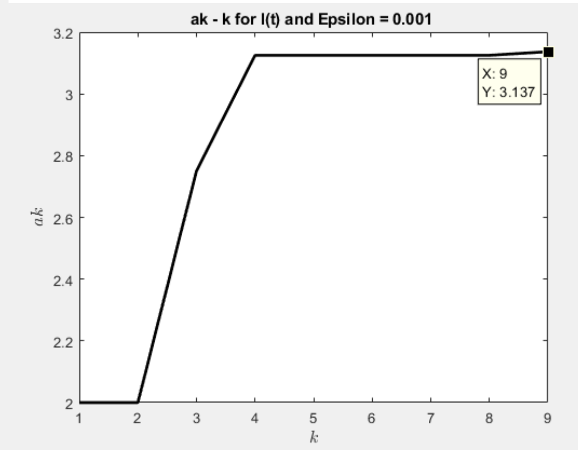
- Για f1(x):



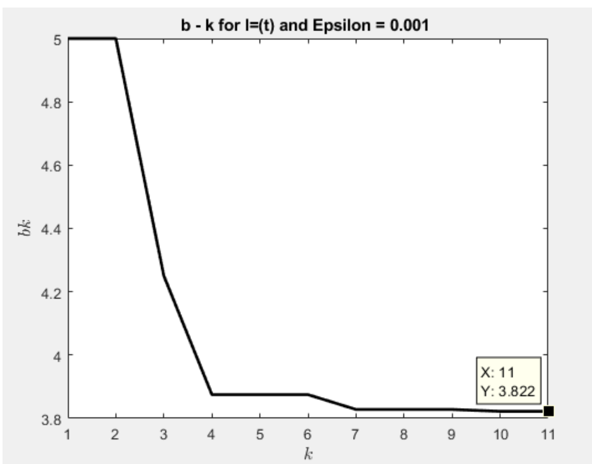


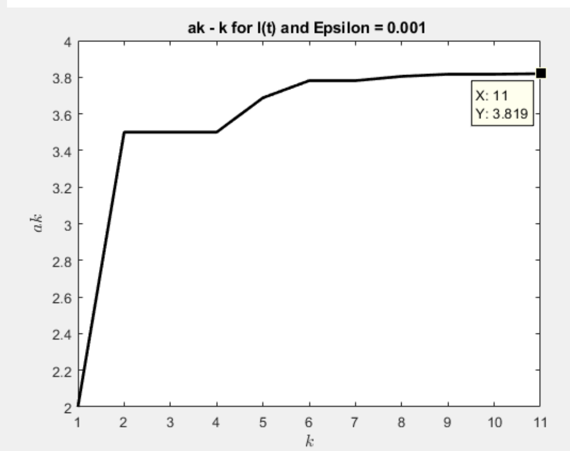
- Για f2(x):





- Για f3(x):





Συμπέρασμα:

Είναι φανερό ότι σε κάθε επανάληψη το μήκος του διαστήματος μειώνεται στο μισό, όμως η απόδοση της μεθόδου δεν μπορεί να συγκριθεί άμεσα με τις άλλες μεθόδους που αναλύσαμε αφού σε κάθε επανάληψη υπολογίζεται και η παράγωγος της συνάρτησης, οπότε το υπολογιστικό κόστος ανά επανάληψη είναι διαφορετικό.

Τέλος:

Συγκρίνοντας τις 3 μεθόδους αναζήτησης ελαχίστου χωρίς την χρήση παραγώγων ,γνωρίζοντας την συνθήκη τερματισμού:

1. Αναζήτηση Fibonacci rN = 1/FN ≈ 1.3817/1.618^N
2. Αναζήτηση χρυσής τομής rN = b ^(N−1) ≈ 1.618/1.618^N
3. Αναζήτηση διχοτόμησης rN = (1 /2)^ N ≈ 1 /1.414^N

Και έχουμε την μέθοδοαναζήτησης με χρήση παραγώγων:

1. Ανα΄ζητηση διχοτόμηση με χρήση της παραγώγου

Επίσης l > 2*ε γιατί αλλιώς η επαναληπτική διαδικασία δεν τελειώνει ποτέ!

Σε κάθε αρχείο MATLAB εμφανίζω και στοιχεία στην οθώνη όπως πχ:

```
For l(t) and Epsilon = 0.001
 Function f(x1) > f(x2) : 9 Times
For l(t) and Epsilon = 0.001
 Function f(x1) < f(x2) : 5 Times

The minimum of this function is : x* = [2.259236e+00 , 2.262993e+00]
```

για να γνωρίζει ο χρήστης μερικές παραπάνω πληροφορίες οπότε αξίζει να δωθεί μια ματία.