Τεχνικές Βελτιστοποιήσεις

ΕΡΓΑΣΙΑ 2

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΙΣΤΑΤΙΑΔΗΣ

9175 nikoista@ece.auth.gr

Ελαχιστοποίηση με χρήση παραγώγων

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα ελαχιστοποίησης μιας δοσμένης συνάρτησης πολλών μεταβλητών $f: R^n \to R$ χωρίς περιορισμούς. Οι αλγόριθμοι που θα χρησιμοποιήσουμε βασίζονται στην ιδέα της επαναληπτικής καθόδου, βάσει της οποίας ξεκινάμε από κάποιο σημείο $x_0 \in R^n$ και παράγουμε διαδοχικά τα διανύσματα $x_1, x_2, \dots$ έτσι ώστε $f(x_k + 1) \langle f(x_k)$ με k=0,1,2,… .Οι αλγόριθμοι αναζήτησης που θα μελετήσουμε είναι:

- **Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου (Steepest Descent)**
- **Μέθοδος Newton**
- **Μέθοδος Levenberg-Marquardt**

Η αντικειμενική συνάρτηση που θα μελετήσουμε είναι η:

$$f(x, y) = x^3 e^{(-x^2 - y^4)}$$

- Να παραδώσετε όλους του κώδικες των προγραμμάτων που γράψατε (m-files) και μία αναφορά στην οποία θα καταγράψετε όλες τις παρατηρήσεις σας (σύγκλιση και σύγκριση των μεθόδων, αριθμός επαναλήψεων, γραφική παράσταση της σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς k).

- Σχολιάστε τυχόν αποκλίσεις από τις επιθυμητές τιμές λόγω εγκλωβισμού του αλγορίθμου σε κάποιο τοπικό ακρότατο (ελάχιστο ή μέγιστο). Παρατηρήστε την εξάρτηση του αποτελέσματος από την τιμή εκκίνησης του αλγορίθμου, καθώς επίσης και από την επιλογή του βήματος γk .

Θεωρητική Ανάλυση:

5.2.1

ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΛΙΣΗΣ

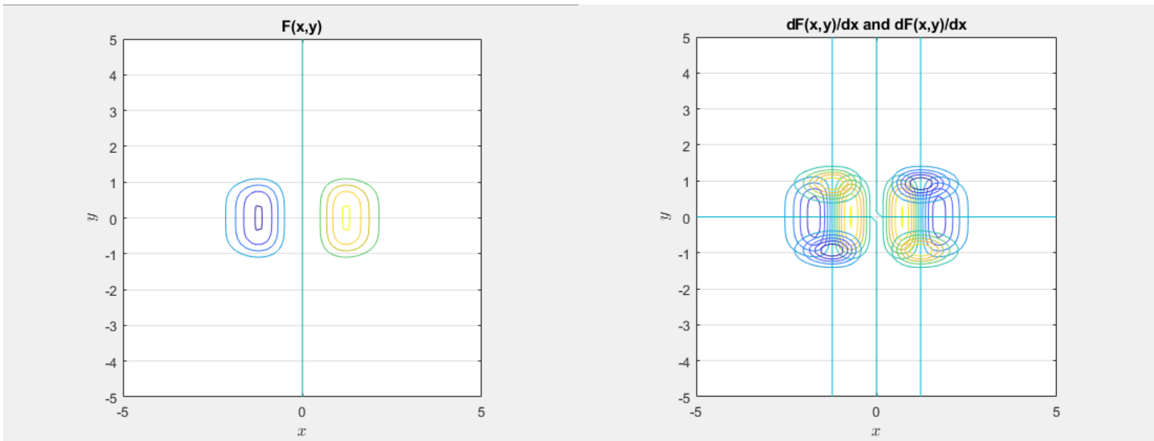
Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε ένα πρόβλημα χωρίς περιορισμούς ελαχιστοποίησης μιας τουλάχιστον δύο φορές παραγωγίσιμης συνάρτησης $f\colon R^n \to R$. Η αλγόριθμοι που θα αναπτύξουμε βασίζονται στην ιδέα της επαναληπτικής καθόδου με αναδρομική εξίσωση της μορφής xk+1=xk+γkdk , k=0,1,2,… (5.2.5) όπου ο θετικός ακέραιος k δηλώνει τον αριθμό της επανάληψης , το διάνυσμα κατεύθυνσης dk ικανοποιεί την συνθήκη $\nabla f^T(x_k)d_k$ < 0 και βήμα γκ >0 ικανοποιεί $f(x_k + \gamma_k d_k) < f(x_k)$. Με $\nabla f(x_k) \neq 0$, διαφορετικά ο αλγόριθμος τερματίζει για $\nabla f(x_k) = 0$ που στην πραγματικότητα αυτό γίνεται σε μια πολύ καλή προσέγγιση ε = 0.001 όπου $\nabla f(x_k) < \varepsilon$.

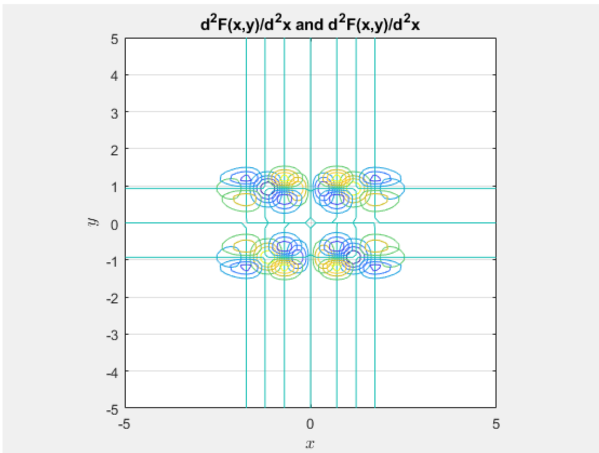
Θέμα 1

Σχεδιάστε την f για να πάρετε μια γενική εικόνα της μορφής της.

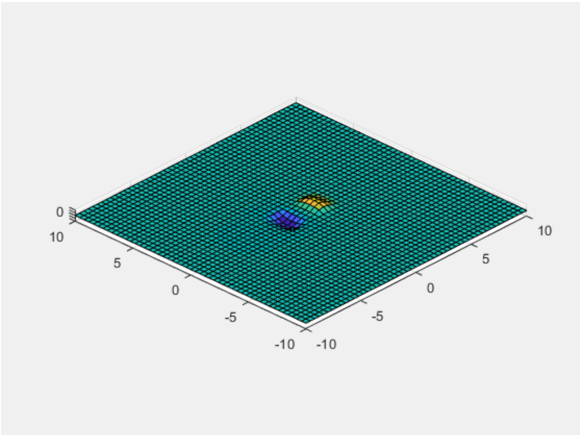
Χρησιμοποιόντας βασικά plots του Matlab έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

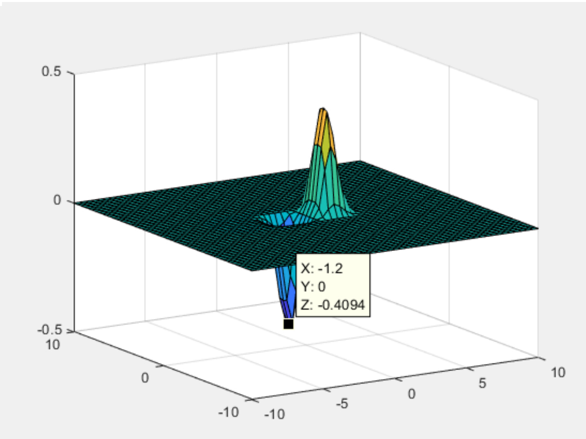
Βλέπουμε το contour της F(x,y) , F’(x,y) , F’’(x,y)

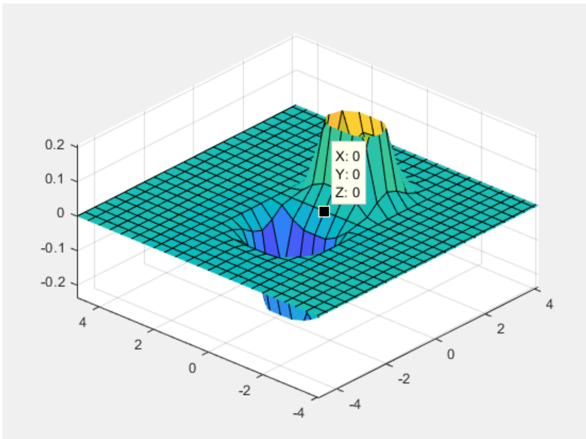


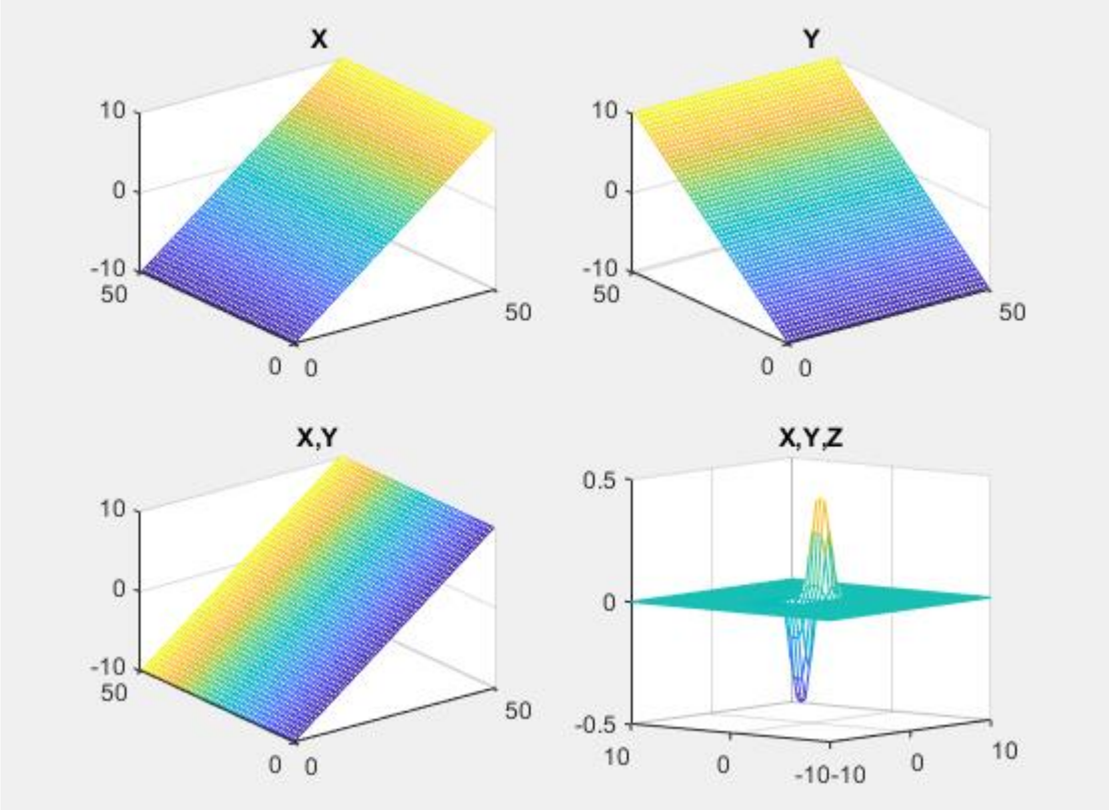


Καθώς επίσης και την 3D αναπαράσταση της συνάρτησης που θα μελετήσουμε στον χώρο. Τέλος παρατηρούμε ότι παρουσιάζει ελάχιστο στο (-1.227,0) και μέγιστο στο (+1.227,0) καθώς η συνάρτηση είναι αυστηρά κυρτή και κοίλη για τα αντίστοιχα διαστήματα που παρουσιάζει κάποιο ακρότατο με σημείο καμπής το (0,0) όπου μηδενίζεται η παράγωγο δεύτερης τάξης της F(x,y) .









Θέμα 2

Ελαχιστοποιήστε την f με χρήση της **μεθόδου Μέγιστης Καθόδου**, χρησιμοποιώντας ως αρχικά σημεία τα :i) (0,0) ii) (-1, -1) iii) (1,1) .

Το βήμα γk θα επιλεγεί: **α) σταθερό (της επιλογής σας) , β) τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την f(xk +γkdk) και γ) βάσει του κανόνα Armijo**. Σχολιάστε τις διαφορές στα αποτελέσματα, σε περίπτωση που προκαλούνται, λόγω της επιλογής του σημείου έναρξης του αλγορίθμου, καθώς επίσης και λόγω της επιλογής του βήματος γk . Οδηγούμαστε πάντα σε σωστό αποτέλεσμα; Αν όχι τι πιστεύετε ότι φταίει;

Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο της Μέγιστης Καθόδου από την **σελίδα 121** μαζί με τα κριτήρια καλής λειτουργίας στο Matlab και έχουμε τα εξής αποτελέσματα για τα παραπάνω ερωτήματα:

i) (0,0)

- α) σταθερό γk = οποιδήποτε (της επιλογής σας):

  Για οποιοδήποτε γk ο αλγόριθμος μας εγκλοβίζεται στο 0.

  Ο αλγόριθμος θα κάνει μια επανάληψη στο 0 .

- β) γk τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την f(xk +γkdk):

  Για οποιοδήποτε γk ο αλγόριθμος μας εγκλοβίζεται στο 0.

  Ο αλγόριθμος θα κάνει μια επανάληψη στο 0 .

- γ) γk βάσει του κανόνα Armijo:

  Για οποιοδήποτε γk ο αλγόριθμος μας εγκλοβίζεται στο 0.

  Ο αλγόριθμος θα κάνει μια επανάληψη στο 0 .

Βλέπουμε ότι έχουμε απόσταση (norm) = 1.2247 από το πραγματικό ελάχιστο.

ii) (1,1)

- α) σταθερό γk =0.7 (της επιλογής σας):

  Ο αλγόριθμος μας συγκλίνει στο [0.866, 1.720], f = 0.000048 που δεν είναι το ελάχιστο. Ο αλγόριθμος θα συγκλίνει στο σε κάποιο ακρότατο που δεν θα είναι το ελάχιστο μετά από ka επαναλήψεις.

- β) γk τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την f(xk +γkdk):

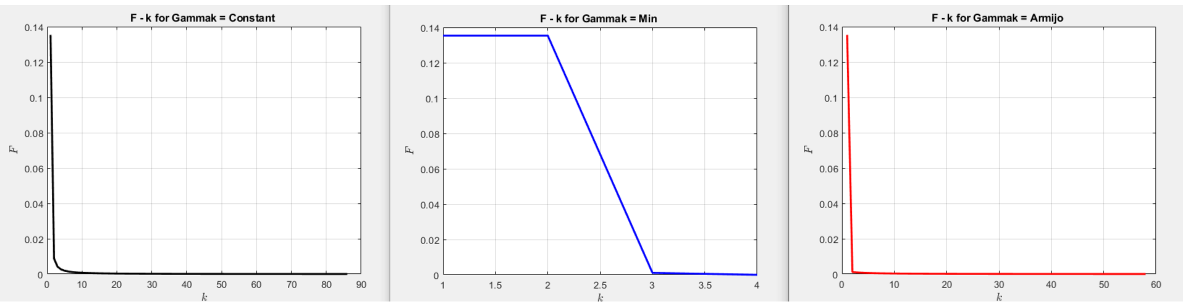
  Ο αλγόριθμος μας συγκλίνει στο [0.727, 2.097] , f = 0.00000000089 που δεν είναι το ελάχιστο. Ο αλγόριθμος θα συγκλίνει στο σε κάποιο ακρότατο που δεν θα είναι το ελάχιστο μετά από kb επαναλήψεις.

- γ) γκ βάσει του κανόνα Armijo:

  Ο αλγόριθμος μας συγκλίνει στο [0.846, 1.718] , f = 0.000048 που δεν είναι το ελάχιστο. Ο αλγόριθμος θα συγκλίνει στο σε κάποιο ακρότατο που δεν θα είναι το ελάχιστο μετά από kc επαναλήψεις.

Βλέπουμε ότι έχουμε απόσταση (norm) = 2.6916 από το πραγματικό ελάχιστο.

Τα plot της αντικειμενικής συνάρτησης με τον αριθμό επαναλήψεων.



iii) (-1,-1)

- α) σταθερό γk =0.4 (της επιλογής σας):

  Ο αλγόριθμος μας συγκλίνει στο [-1.2247, -0.0844], f = -0.4098 που είναι πολύ κοντά στο ελάχιστο .Ο αλγόριθμος θα συγκλίνει στο πραγματικό ελάχιστο μετά από ka επαναλήψεις. Όλα τα κριτήρια καλής λειτουργίας πληρούνται για αυτή την επιλογή γk.

- β) γk τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την f(xk +γkdk):

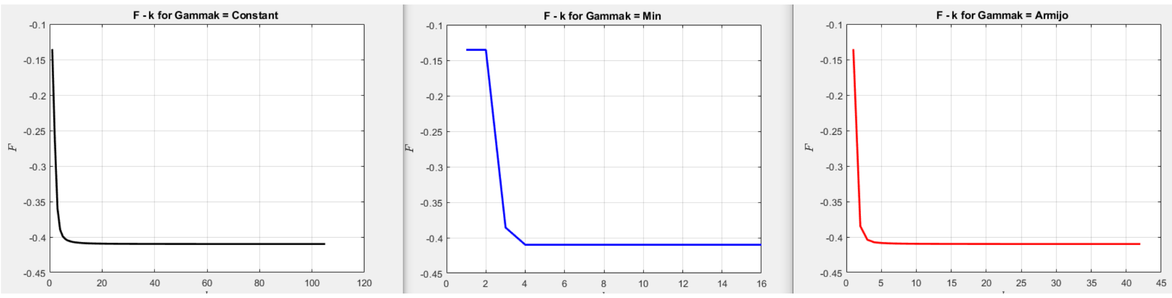
  Ο αλγόριθμος μας συγκλίνει στο [-1.2244, -0.07858] , f = -0.4099 που είναι πολύ κοντά στο ελάχιστο .Ο αλγόριθμος θα συγκλίνει στο πραγματικό ελάχιστο μετά από kb επαναλήψεις.

- γ) γκ βάσει του κανόνα Armijo:

  Ο αλγόριθμος μας συγκλίνει στο [-1.2247, -0.0840] , f = -0.4098 που είναι πολύ κοντά στο ελάχιστο .Ο αλγόριθμος θα συγκλίνει στο πραγματικό ελάχιστο μετά από kb επαναλήψεις.

Βλέπουμε ότι έχουμε απόσταση (norm) = 0.08~0 από το πραγματικό ελάχιστο.

Τα plot της αντικειμενικής συνάρτησης με τον αριθμό επαναλήψεων.



ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ ΜΕΘΟΔΟ ΜΕΓΙΣΤΗ ΚΑΘΟΔΟΥ

Για διαφορές τιμές του γκ ο αλγόριθμος μας οδηγούσε σε κάποιο ακρότατο και εγκλοβίζονταν σε αυτό ,μετά από συνεχές αναζήτηση μέσω testing βρήκα γk τέτοια ώστε να συγκλίνουν στο πραγματικό ελάχιστο. Ωστόσο για γk που ελαχιστοποιούνταν μέσο της συνάρτησης f(xk +γkdk) είχαμε πολύ καλά αποτελέσματα καθώς και για γk βάσει του κανόνα Armijo. Ταυτόχρονα κάθε αρχική συνθήκη οδηγούσε σε διαφορετικά αποτελέσματα. Συμπαιρένουμε λοιπόν ότι για αρχική συνθήκη (0,0) έχουμε εγκλοβισμό στο μηδέν , για (1,1) πηγαίνουμε σε λάθος κατεύθυνση και καταλήγουμε σε ακρότατο που δεν είναι το ελάχιστο , για (-1,-1) πηγαίνουμε σε σωστή κατεύθυνση και καταλήγουμε σε ακρότατο που είναι το ελάχιστο. Επίσης ο αριθμός εύρεσης ελαχίστου που έχει νόημα για το (-1,-1) σημείο εκκίνησης είναι για σταθερό βήμα κa=105 για βήμα που ελαχιστοποιείτε kb=16 και για βήμα σύμφωνα με τον Κανόνα του Armijo κc=42 , οπότε γρηγορότερη σύγκλιση με ικανά αποτελέσματα έχω με την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης f(xk +γkdk) .Στην πράξη η μέθοδος δεν χρησιμοποιείται κυρίως λόγω της αργής σύγκλισης και ταλαντευτικής συμπεριφοράς κοντά στο ελάχιστο.

Θέμα 3

Επαναλάβετε τα ερωτήματα του Θέματος 2 χρησιμοποιώντας την **μέθοδο Newton.**

Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο Newton από την **σελίδα 126** στο Matlab και έχουμε τα εξής αποτελέσματα για τα παραπάνω ερωτήματα:

Προϋπόθεση της μεθόδου είναι ο Hessian πίνακας της f , $\nabla^2 f(x_k)$ > 0 , θετικά ορισμένος, τότε η μέθοδος οδηγεί σε μοναδικό ολικό ελάχιστο . Στην περίπτωση μας είναι αρνητικός ο $\nabla^2 f(x_k)$ και μηδέν οπότε η μέθοδος θα μας οδηγήσει σε μέγιστο και στο μηδέν αντίστοιχα. Ο αλγόριθμος δεν κάνει διαχωρισμούς μεταξύ σημείων ελαχίστου και μεγίστου . Θα δείξουμε ότι αν είναι αρνητικός ο $\nabla^2 f(x_k)$ τότε ο αλγόριθμος οδηγεί σε κάποιο σαγματικό σημείο ή τοπικό μέγιστο καθώς τα Κριτήρια Καλής Λειτουργίας δεν ισχύουν.Επίσης για το σημείο (0,0) έχουμε τροποποίηση της εξίσωσης σύμφωνα με την Άσκηση 5.5.1 του βιβλίου όπου $\nabla^2 f(x_k)$(xk +1 – xk) = $\nabla f(x_k)$

i) (0,0)

- α) σταθερό γk = οποιοδήποτε (της επιλογής σας):

  Για οποιοδήποτε γk ο αλγόριθμος μας εγκλωβίζεται στο 0.

  Ο αλγόριθμος θα κάνει μια επανάληψη στο 0 .

- β) γk τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την f(xk +γkdk):

  Για οποιοδήποτε γk ο αλγόριθμος μας εγκλωβίζεται στο 0.

  Ο αλγόριθμος θα κάνει μια επανάληψη στο 0 .

- γ) γk βάσει του κανόνα Armijo:

  Για οποιοδήποτε γk ο αλγόριθμος μας εγκλωβίζεται στο 0.

  Ο αλγόριθμος θα κάνει μια επανάληψη στο 0 .

Βλέπουμε ότι έχουμε απόσταση (norm) = 1.2247 από το πραγματικό ελάχιστο.

ii) (1,1)

- α) σταθερό 0.1< γk και γk=0.5 (της επιλογής σας):

  Ο αλγόριθμος μας συγκλίνει στο [0.5467, 1.6736], f = 0.000047 μετά από ka επαναλήψεις , στο σημείο αυτό που είναι κάποιο ακρότατο της f.

- β) γk τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την f(xk +γkdk):

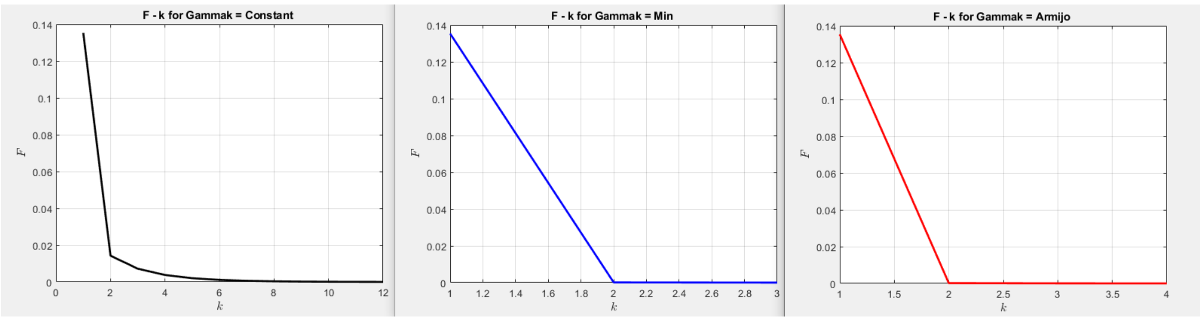
Ο αλγόριθμος μας συγκλίνει στο [0.5868 , 1.6813] , f = 0.000048 μετά από kb επαναλήψεις , στο σημείο αυτό που είναι κάποιο ακρότατο της f.

- γ) γκ βάσει του κανόνα Armijo:

Ο αλγόριθμος μας συγκλίνει στο [0.5573, 1.7253] , f = 0.000017 μετά από kc επαναλήψεις , στο σημείο αυτό που είναι κάποιο ακρότατο της f.

Βλέπουμε ότι έχουμε απόσταση (norm) = 2.4804 από το πραγματικό ελάχιστο.

Τα plot της αντικειμενικής συνάρτησης με τον αριθμό επαναλήψεων.



iii) (-1,-1)

- α) σταθερό γk =0.9(της επιλογής σας):

Ο αλγόριθμος μας συγκλίνει στο [-0.6625, -1.5625], f = -0.13533 μετά από ka επαναλήψεις , στο σημείο αυτό που είναι κάποιο ακρότατο της f.

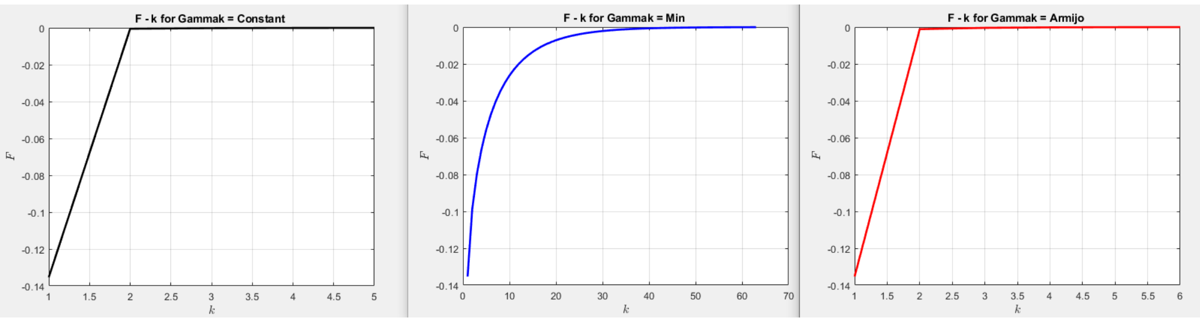
- β) γk τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την f(xk +γkdk):

Ο αλγόριθμος μας συγκλίνει στο [-0.5323, -1.6654] , f = -0.000051 μετά από kb επαναλήψεις , στο σημείο αυτό που είναι κάποιο ακρότατο της f.

- γ) γκ βάσει του κανόνα Armijo:

  Ο αλγόριθμος μας συγκλίνει στο [-0.5564, -1.7100] , f = -0.000024 μετά από kc επαναλήψεις , στο σημείο αυτό που είναι κάποιο ακρότατο της f.

Βλέπουμε ότι έχουμε απόσταση (norm) = 1.8361 από το πραγματικό ελάχιστο.



ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ ΜΕΘΟΔΟ NEWTON

Για διαφορές τιμές του γκ και για τα 3 ερωτήματα ο αλγόριθμος μας οδηγούσε σε κάποιο ακρότατο και εγκλωβίζονταν σε αυτό ,μετά από συνεχές αναζήτηση μέσω testing βρήκα γκ τέτοια ώστε να συγκλίνουν σε κάποιο ακρότατο που δεν ήταν το ελάχιστο εφόσον $\nabla^2 f(x_k) < 0$. Ταυτόχρονα κάθε αρχική συνθήκη οδηγούσε σε διαφορετικά αποτελέσματα. Συμπαιρένουμε λοιπόν ότι για αρχική συνθήκη (0,0) έχουμε εγκλωβισμό στο μηδέν , για (1,1) πηγαίνουμε σε λάθος κατεύθυνση και καταλήγουμε σε ακρότατο που δεν είναι το ελάχιστο , για (-1,-1) πηγαίνουμε σε λάθος κατεύθυνση και καταλήγουμε σε ακρότατο που δεν είναι το ελάχιστο. Η μέθοδος Newton συγκλίνει ταχύτατα στη λύση x ∗ όταν το αρχικό σημείο (x0,y0) είναι στην περιοχή του x ∗,y* όπου η προσέγγιση ισχύει.

Έχει όμως σοβαρά μειονεκτήματα έναντι των άλλων μεθόδων που την καθιστούν απαγορευτική για πρακτικές εφαρμογές. Κατ' αρχήν απαιτεί υπολογισμό του πίνακα των δευτέρων παραγώγων $\nabla^2 f(x_k)$ σε κάθε επανάληψη. Εάν ο χρήστης δεν μπορεί να παρέχει τον πίνακα G σε αναλυτική μορφή, γεγονός σύνηθες για προβλήματα μεγάλης διάστασης, τότε τα στοιχεία του θα πρέπει να προσεγγιστούν αριθμητικά. Επιπλέον για να βρεθεί το βήμα Newton απαιτείται η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος N × N σε κάθε επανάληψη. Ένα όμως από τα πιο σοβαρά μειονεκτήματα της μεθόδου είναι ότι ο πίνακας G($\nabla^2 f(x_k)$ μπορεί να μην είναι θετικά ορισμένος, ειδικά αν το αρχικό σημείο βρίσκεται μακριά από το ελάχιστο. Ως αποτέλεσμα η μέθοδος μπορεί να μας οδηγήσει σε μέγιστο ή σε σαγματικό σημείο.

Θέμα 4

Επαναλάβετε τα ερωτήματα του Θέματος 2 χρησιμοποιώντας την **μέθοδο Levenberg-Marquardt**.

Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο **Levenberg-Marquardt** από την **σελίδα 139** στο Matlab και έχουμε τα εξής αποτελέσματα για τα παραπάνω ερωτήματα:

Αν ο $\nabla^2 f(x_k)$ Hessian πίνακας της f , > 0 , δεν είναι θετικά ορισμένος $\forall x \in R^n$, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τροποποιημένο αλγόριθμο **Levenberg-Marquardt** του αλγορίθμου Newton .

i) (0,0)

- α) σταθερό γk = οποιοδήποτε (της επιλογής σας):

  Για οποιοδήποτε γk ο αλγόριθμος μας εγκλωβίζεται στο 0.

  Ο αλγόριθμος θα κάνει μια επανάληψη στο 0 .

- β) γk τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την f(xk +γkdk):

  Για οποιοδήποτε γk ο αλγόριθμος μας εγκλωβίζεται στο 0.

  Ο αλγόριθμος θα κάνει μια επανάληψη στο 0 .

- γ) γk βάσει του κανόνα Armijo:

  Για οποιοδήποτε γk ο αλγόριθμος μας εγκλωβίζεται στο 0.

  Ο αλγόριθμος θα κάνει μια επανάληψη στο 0 .

Βλέπουμε ότι έχουμε απόσταση (norm) = 1.2247 από το πραγματικό ελάχιστο.

ii) (1,1)

- α) σταθερό 0.2< γk και γk=0.3 (της επιλογής σας):

Ο αλγόριθμος μας συγκλίνει στο [1.6278, 1.7193], f = 0.000048 μετά από ka επαναλήψεις , στο σημείο αυτό που είναι κάποιο ακρότατο της f.

- β) γk τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την f(xk +γkdk):

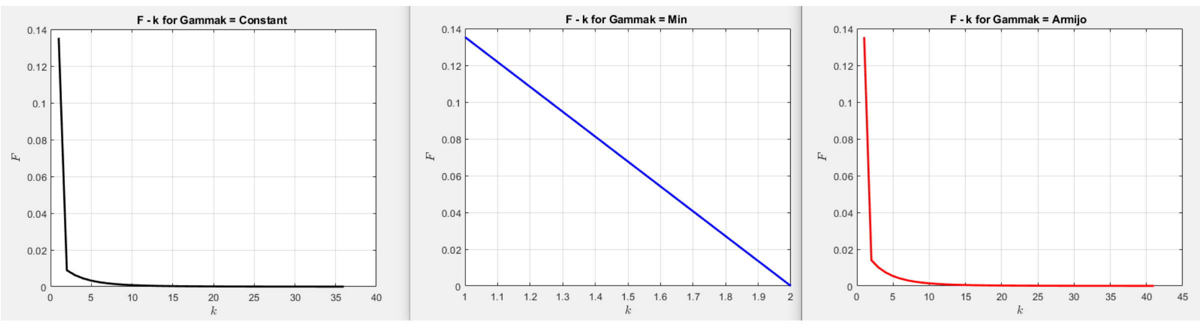
  Ο αλγόριθμος μας συγκλίνει στο [3.0668, 2.237] , f= 0.00000000000003 μετά από kb επαναλήψεις , στο σημείο αυτό που είναι κάποιο ακρότατο της f.

- γ) γκ βάσει του κανόνα Armijo:

  Ο αλγόριθμος μας συγκλίνει στο [1.5452 , 1.7247] , f = 0.000048 μετά από kc επαναλήψεις , στο σημείο αυτό που είναι κάποιο ακρότατο της f.

Βλέπουμε ότι έχουμε απόσταση (norm) = 3.2630 από το πραγματικό ελάχιστο.

Τα plot της αντικειμενικής συνάρτησης με τον αριθμό επαναλήψεων.



iii) (-1,-1)

- α) σταθερό γk =0.1(της επιλογής σας):

Ο αλγόριθμος μας συγκλίνει στο [-1.2247, 0.08435], f = -0.4098 που είναι πολύ κοντά στο ελάχιστο .Ο αλγόριθμος θα συγκλίνει στο πραγματικό ελάχιστο μετά από ka επαναλήψεις.

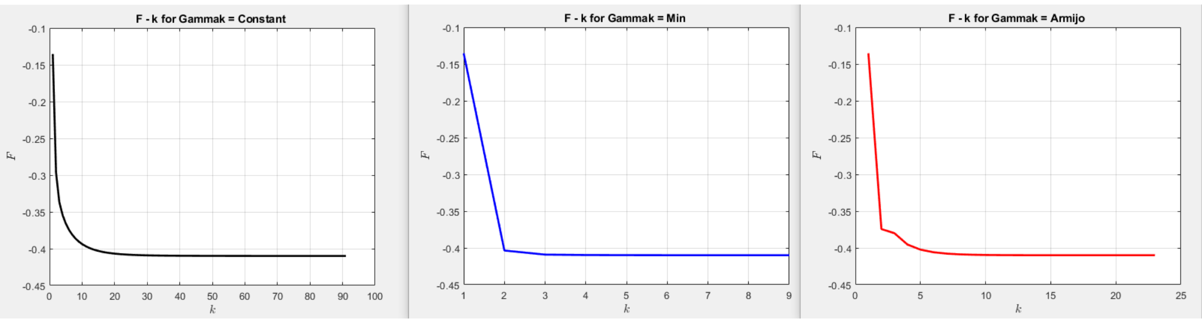
- β) γk τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την f(xk +γkdk):

Ο αλγόριθμος μας συγκλίνει στο [-1.2247, -0.07965] , f = -0.4098 που είναι πολύ κοντά στο ελάχιστο .Ο αλγόριθμος θα συγκλίνει στο πραγματικό ελάχιστο μετά από kb επαναλήψεις.

- γ) γk βάσει του κανόνα Armijo:

Ο αλγόριθμος μας συγκλίνει στο [-1.2252, 0.05742] , f = -0.4099 που είναι πολύ κοντά στο ελάχιστο .Ο αλγόριθμος θα συγκλίνει στο πραγματικό ελάχιστο μετά από kc επαναλήψεις.

Βλέπουμε ότι έχουμε απόσταση (norm) = 0.0573 από το πραγματικό ελάχιστο.



ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ ΜΕΘΟΔΟ LEVENBERG_MARQUADRT

Για διαφορές τιμές του γκ ο αλγόριθμος μας οδηγούσε σε κάποιο ακρότατο και εγκλοβίζονταν σε αυτό ,μετά από συνεχές αναζήτηση μέσω testing βρήκα γk τέτοια ώστε να συγκλίνουν στο πραγματικό ελάχιστο. Ωστόσο για γk που ελαχιστοποιούνταν μέσο της συνάρτησης f(xk +γkdk) είχαμε πολύ καλά αποτελέσματα καθώς και για γk βάσει του κανόνα Armijo. Ταυτόχρονα κάθε αρχική συνθήκη οδηγούσε σε διαφορετικά αποτελέσματα. Συμπαιρένουμε λοιπόν ότι για αρχική συνθήκη (0,0) έχουμε εγκλοβισμό στο μηδέν , για (1,1) πηγαίνουμε σε λάθος κατεύθυνση και καταλήγουμε σε ακρότατο που δεν είναι το ελάχιστο , για (-1,-1) πηγαίνουμε σε σωστή κατεύθυνση και καταλήγουμε σε ακρότατο που είναι το ελάχιστο. Επίσης ο αριθμός εύρεσης ελαχίστου που έχει νόημα για το (-1,-1) σημείο εκκίνησης είναι για σταθερό βήμα κa=91 για βήμα που ελαχιστοποιείτε kb=9 και για βήμα σύμφωνα με τον Κανόνα του Armijo κc=23 , οπότε γρηγορότερη σύγκλιση με ικανά αποτελέσματα έχω με την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης f(xk +γkdk).Παρατηρούμε ότι για μk να είναι αρκετά μεγάλο , ο παράγοντας μκΙ κυριαρχεί σε σχέση με τον $\nabla^2 f(x_k)$. Κατά συνέπεια η μέθοδος **Levenberg-Marquardt** θα λειτουργεί σχεδόν όπως η μέθοδος της μεγίστης καθόδου . Στο βιβλίο επίσης υπογραμίζει ότι αν το μκ είναι μικρό , τότε ο $\nabla^2 f(x_k)$ υπερισχύει και η μέθοδος συμπεριφέρεται σαν την μέθοδο Newton.

MATLAB:

Στο Matlab υπάρχουν 4 αρχεία για κάθε Θέμα της εργασίας που περιέχουν σχόλια για κάθε σημείο που χρειάζεται ανάλυση .Επίσης εμφανίζονται διάφορα output στην οθώνη για κάθε θέμα που συμπληρώνουν την ερευνιτική διαδικασία εύρεσης ελαχίστου των αλγορίθμων. Μερικά παραδείγματα είναι:

```
 STEEPEST DECENT METHOD Gammak  IS A CONSTANT
Gammak = 4.000000e-01

k =

   105

 STEEPEST DECENT METHOD Gammak  IS A CONSTANT

PointA =

[ -1.2247448713915890490986420373529, -0.084425342085019061677542140387231]


STATHERO =

-0.40989545440026632424057365512026

OLA TA KRITHRIA KALHS LEITOURGIAS PLHROUDE
```

```
 NEWTON METHOD Gamma IS MINIMIZED BY THE FUNCTION f(xk+g*dk)
Gammak = 1.000595e-01

k =

    63

 NEWTON METHOD Gamma IS MINIMIZED BY THE FUNCTION f(xk+g*dk)

PointB =

[ -0.53231298890699252357450177441933, -1.6654832543668289801530590921175]


MinFun =

-0.000051750021974828827355423345913337
```

```
 3         2    4
x  exp(- x   - y )

   2         2    4         4         2    4
3 x  exp(- x   - y ) - 2 x  exp(- x   - y )

     3  3         2    4
-4 x  y  exp(- x   - y )

 grad^2(f) < 0 KAI AKOLOUTHOUME TON ALGORITHMO LEVENBERG - MARQUARDT
```

```
 LEVENBERG_MARQUADRT METHOD Gamma IS SELECTED  BY THE  ARMIJO LAW fk+1< = fk + a*(b^mk)*s*dkGrad(
Gammak = 2.700000e-01

k =

    23

 LEVENBERG_MARQUADRT METHOD Gamma IS SELECTED  BY THE  ARMIJO LAW fk+1< = fk + a*(b^mk)*s*dkGrad(
Gammak = 2.700000e-01

PointC =

[ -1.2252061578105661876492149531259, 0.057421017625049947108450965060911]


Armijo =

-0.40991164819773902807904857534288


Distance =

    0.0573
```

Στο Matlab υπάρχει στην αρχή κάθε αρχείου 3 γραμμές κώδικα όπου ο χρήστης επιλέγει ποια αρχική συνθήκη (σημείο εκκίνησης) θα επιλέξει για τον υπολογισμό ελαχίστου.Default είναι στο (-1,-1).

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% EPILOGH  -1 GIA ARXIKOPOIHSH (-1,-1)
%% EPILOGH   0 GIA ARXIKOPOIHSH (0,0)
%% EPILOGH   1 GIA ARXIKOPOIHSH (1,1)
%% EPILOGH   7 GIA DIAFORETIKH ARXIKOIPOIHSH

choise=-1;
% choise=0;
% choise=1;
% choise=7;
```

ΣΥΝΟΛΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ :

Κάθε διαδικασία έχει τα θετικά και τα αρνητικά της. Είναι όμως εμφανές πως η μέθοδος **Levenberg-Marquardt** για σημείο εκκίνησης το (-1,-1) μας οδήγησε σε στο ελάχιστο της συνάρτησης F(x,y) για μικρότερες επαναλήψεις σε κάθε ερώτημα α),β),γ). Η χειρότερη μέθοδο ήταν η **Newton** καθώς δεν μπορούσε να εφαρμοστεί σωστά στην συγκεριμένη εργασία ($\nabla^2 f(x_k) < 0$) παραμόνο στο (0,0) όπου κάναμε την τροποποίηση της εξίσωσης για να μην αντιστρέψουμε τον πίνακα $\nabla^2 f(x_k) = 0$.Οπότε αν βάζαμε σειρά την καλύτερη προς την χειρότερη μέθοδο τότε θα είχαμε :

1) Μέθοδο **Levenberg-Marquardt**

2) Μέθοδο **Μέγιστης Καθόδου**

3) Μέθοδο **Newton**

Τέλος είχαμε μικρές αποκλίσεις από την επιθυμιτή τιμή ελαχίστου [-1.2247, 0.001] για σημείο εκκίνησης (-1,-1) ενώ είναι εμφανής η εξάρτηση του αποτελέσματος από την τιμή εκκίνησης (x0,y0) ((1,1) και (0,0) οδηγούμασταν σε τοπικά ακρότατα που δεν ήταν και ολικά ελάχιστα) του αλγορίθμου καθώς επίσης και από την επιλογή του βήματος γκ (για διάφορες τιμές του γk ο αλγόριθμος είτε είχε τεράστιες αποκλήσεις από το ελάχιστο είτε είχε πολύ αργή σύγκλιση).