שם: שיר סגו
ת.ז: 206481665

מבנים אלגבריים - תרגיל 9

2) תשובה מצורפת בקובץ קודם.

3) א. הוכחה: נדרש להראות, ש-$H \trianglelefteq G$, כלומר $\forall g\in G: gH=Hg$, כלומר $g^{-1}Hg=H$.

ראינו שבתרגול, מספיק להראות $\boxed{g^{-1}Hg \subseteq H}$.

נחשב את g^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & c & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{c} \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{c} \end{array}\right) \Rightarrow g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

(*) $a\cdot c\neq 0 \Rightarrow a\neq 0$

$$g^{-1}hg = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{dc}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$$

לכן: $g^{-1}Hg \subseteq H$ ולכן $H \trianglelefteq G$ כנדרש.

ב. $G=GL_n(F)$, $H=\{\alpha I : \alpha\in F^*\}$

$$g\cdot\alpha I = \alpha\cdot gI = \alpha g$$

$$\alpha I\cdot g = \alpha g \Leftrightarrow g\alpha I = \alpha I g$$

לכן $\boxed{gH=Hg}$

ולכן H נורמלית.

4. א. (1) כלל:

נתמקד בחבורה $G=Q/Z$

נראה שהסדר של כל איבר ב-G הוא סופי, אבל ישנם איברים בחבורה שהם גדולים כרצוננו.

לפי הגדרה:

$$Q/Z=\{q+Z \mid q\in Q\}$$

לכל $q\in Q$ קיימים $n,m\in Z$ כך ש: $q=\frac{n}{m}$

לכן בפרט מתקיים $\boxed{q+Z=\frac{n}{m}+Z}$

נב'ס ב:

$$\left(\frac{m}{n}+\mathbb{Z}\right)^n = \frac{n\cdot m}{n}+\mathbb{Z} = m+\mathbb{Z} = 0+\mathbb{Z} = \boxed{e_G}$$

ולכן לכל איבר ב-G עבור n מינימלי נקבל $o(g)\le n$ ולכן סופי

כיוון ש $n\in\mathbb{Z}$ יכול להיות גדול כרצוננו)).

א. צ"ל: בהינתן $a,b\in G$, תת החבורה הקטנה ביותר של G שמכילה את a,b היא ציקלית/סופית.

$a,b\in G$ ולכן $a=\frac{x_1}{y_1}+\mathbb{Z}$, $b=\frac{x_2}{y_2}+\mathbb{Z}$, כאשר $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{Z}$

תת החבורה המינימלית, שמכילה את a,b היא:

$$\left\{\frac{k\cdot x_1}{y_1}+t\cdot\frac{x_2}{y_2}+\mathbb{Z}\right\} : k,t\in\mathbb{Z} \subseteq \left\langle\frac{1}{y_1 y_2}+\mathbb{Z}\right\rangle$$

הסבר: k,t,x_1,x_2,y_1,y_2 כולם שלמים ולכן מדובר בחבורה הציקלית $\left\langle\frac{1}{y_1y_2}+\mathbb{Z}\right\rangle$ מכיון שכל תת חבורה של ציקלית היא ציקלית, וכמו כן, ראינו בסעיף א' שהסדר של כל איבר ב-G הוא סופי ולכן הסדר של כל תת חבורה הוא סופי (מכיון שהסדר של תת חבורה הוא הסדר של האיבר האחרון שמופיע ב-G) ולכן הוא סופי. סה"כ החבורה ציקלית וסופית.

ג. צ"ל: תת חבורה אינסופית מוכלת ממש ב-G

תשובה: $H=\left\{\frac{1}{p}+\mathbb{Z} \mid p\neq 7 \wedge p \text{ ראשוני}\right\}$

H אינסופית משום שיש אינסוף מספרים ראשוניים p כך ש $p\neq 7$, $G\neq H$ כי אין ב-H את המחלקה השמאלית $\frac{1}{7}+\mathbb{Z}$ אבל $G\supset H$ כי $\frac{1}{p}\in\mathbb{Q}$ לכל p ראשוני. $\Leftarrow \frac{1}{p}+\mathbb{Z}\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

5. הוכיחו כי $\mathbb{C}^*/T \cong \mathbb{R}^*$

כאשר $T=\{z\in\mathbb{C}^* : |z|=1\}$, $\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R} : x>0\}$ והפעולה היא כפל.

הוכחה: נקח פונקציה:

$$\varphi: \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^+$$
$$z \mapsto |z|$$

קל לראות ש-φ על כי לכל $c\in\mathbb{R}^+$ קיים $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש: $\sqrt{a^2+b^2}=c$

$\boxed{\Leftarrow a^2+b^2=c^2}$

ניקח את המקור $z\in\mathbb{C}^*$ להיות $z=a+ib$. כלומר $\mathrm{im}(\varphi)=\mathbb{R}^+$

נראה שגם הומו' $z,r\in\mathbb{C}^*$:

$$\varphi(z\cdot r)=|z\cdot r|=|z|\cdot|r|=\varphi(z)\cdot\varphi(r)$$

נחשב את $\ker(\varphi)$

$$\ker(\varphi)=\{z\in\mathbb{C}^* \mid \varphi(z)=e_{\mathbb{R}^+}\}=$$
$$\{z\in\mathbb{C}^* \mid \varphi(z)=1\}=\{z\in\mathbb{C}^* \mid |z|=1\}=T$$

לכן, לפי משפט האיזו' הראשון (נקבל):

$$\boxed{\mathbb{C}^*/\ker(\varphi)=\mathbb{C}^*/T\cong\mathrm{im}(\varphi)=\mathbb{R}^+}$$

כנדרש.

6. תהיינה $G_1,\dots,G_n$ חבורות ותהיינה $H_1,\dots,H_n$ תתי חבורות נורמליות שלהן בהתאמה::
הוכיחו כי $H_1\times H_2\times\dots\times H_n \lhd G_1\times\dots\times G_n$

תשובה:

תשובה:

$H_1\times\dots\times H_n$ תת חבורה של $G_1\times\dots\times G_n$ ולכן נשאר להראות נורמליות, נראה בעזרת סגירות להצמדות ידוע:

יהי $(h_1,\dots,h_n)\in H_1\times\dots\times H_n$, $(g_1,\dots,g_n)\in G_1\times\dots\times G_n$

אזי:

$$(g_1,\dots,g_n)(h_1,\dots,h_n)\cdot(g_1,\dots,g_n)^{-1}=(g_1h_1,\dots,g_nh_n)\cdot(g_1^{-1},\dots,g_n^{-1})$$
$$=(g_1h_1g_1^{-1},\dots,g_nh_ng_n^{-1})$$

לכל $1\le i\le n$, $H_i\lhd G_i \Rightarrow g_ih_ig_i^{-1}\in H_i \Rightarrow$

$$(g_1,\dots,g_n)\cdot(h_1,\dots,h_n)(g_1,\dots,g_n)^{-1}=(g_1h_1g_1^{-1},\dots,g_nh_ng_n^{-1})\in \boxed{H_1\times\dots\times H_n}$$

קיבלנו!

2. נוכיח:

$$G_1\times\dots\times G_n/H_1\times\dots\times H_n\cong G_1/H_1\times\dots\times G_n/H_n$$

מכיוון ש $H_i\lhd G_i$ אזי G_i/H_i חבורה לכל $1\le i\le n$

ולכן $G_1/H_1\times\dots\times G_n/H_n$ חבורה.

נגדיר כיוון זה:

$$\varphi: G_1\times\dots\times G_n\to G_1/H_1\times\dots\times G_n/H_n$$
$$(g_1,\dots,g_n)\to(g_1H_1,\dots,g_nH_n)$$

φ על כי לכל איבר שהוא ב: $G_1/H_1\times\dots\times G_n/H_n$ קיים מקור $(g_1,\dots,g_n)\in G_1\times\dots\times G_n$.

נראה הומו׳:

$$\varphi(g_1,\dots,g_n)\cdot\varphi(g_1',\dots,g_n')=(g_1H_1,\dots,g_nH_n)\cdot(g_1'H_1,\dots,g_n'H_n)=$$
$$=(g_1g_1'H_1,\dots,g_ng_n'H_n)=\varphi(g_1g_1',\dots,g_ng_n')=$$
$$=\boxed{\varphi((g_1,\dots,g_n)\cdot(g_1',\dots,g_n'))}$$

$\ker(\varphi) = \left\{ (g_1 \dots g_n) \in G_1 \times \dots \times G_n \mid \varphi(g_1 \dots g_n) = e_{G_1/H_1} \times e_{G_2/H_2} \times \dots \times e_{G_n/H_n} \right\} =$

$= \left\{ (g_1 \dots g_n) \in G_1 \times \dots \times G_n \mid (g_1H_1, \dots, g_nH_n) = (H_1 \times \dots \times H_n) \right\} =$

$= \left\{ (g_1 \dots g_n) \in G_1 \times \dots \times G_n \mid \forall i: g_i \in H_i \right\} = H_1 \times \dots \times H_n$

לכן לפי משפט = איזו נקבל:

$$G_1 \times \dots \times G_n / \ker(\varphi) = G_1 \times \dots \times G_n / H_1 \times \dots \times H_n \cong$$

$$\operatorname{im}(\varphi) = \frac{G_1}{H_1} \times \dots \times \frac{G_n}{H_n}$$

קצרל!