Домашнее задание по теме «Производные функций нескольких переменных».

1. Найти область определения функции.

$$z=\sqrt{1-x^3}+\ln\left(y^2-1\right)$$

2. Найти производные 1-го порядка функции.

$$z=\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^3$$

3. Найти полный дифференциал функции в точке (1;1).

$$z=\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}$$

4. Исследовать на экстремум функцию

$$z=x^2+xy+y^2-6x-9y$$

Производные ф-й неск-х перем-х

① $z=\sqrt{1-x^3}+\ln(y^2-1)$

$\begin{cases}1-x^3\geq 0\\ y^2-1>0\end{cases}$ $\begin{cases}x\leq 1\\ y>1\end{cases}$

② $z=\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^3$

$z'_x=\left(\left(\frac{\ln x}{\ln y}+1\right)^3\right)'_x=3\cdot\frac{(\ln x+\ln y)^2}{\ln^2 y}\cdot\left(\frac{\ln x}{\ln y}+1\right)'_x=$

$=\frac{3(\ln x+\ln y)^2}{\ln^2 y}\cdot\frac{1}{x\cdot\ln y}=\frac{3(\ln x+\ln y)^2}{x\cdot\ln^3 y}$

$z'_y=3\cdot\frac{(\ln x+\ln y)^2}{\ln^2 y}\cdot\left(\frac{\ln x}{\ln y}+1\right)'_y=$

$=\frac{3(\ln x+\ln y)^2}{\ln^2 y}\cdot\left(-\ln x\cdot\ln^{-2}y\cdot\frac{1}{y}\right)=$

$=\frac{-3\cdot\ln x\cdot(\ln x+\ln y)^2}{y\cdot\ln^4 y}$

③ $z=\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}$, $(1;1)$

$$z'_x=\frac{2y-\sin\frac{x}{y}\cdot\left(\frac{1}{y}\right)}{2\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}}$$

$$z'_y=\frac{2x-\sin\frac{x}{y}\cdot\left(-x\cdot\frac{1}{y^2}\right)}{2\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}}=\frac{x\left(2+\frac{\sin\frac{x}{y}}{y^2}\right)}{2\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}}$$

$$dz=\frac{2y-\frac{\sin\frac{x}{y}}{y}}{2\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}}\,dx+\frac{x\left(2+\frac{\sin\frac{x}{y}}{y^2}\right)}{2\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}}\,dy$$

$$dz\,(1;1)=\frac{2-\sin 1}{2\sqrt{2+\cos 1}}\,dx+\frac{2+\sin 1}{2\sqrt{2+\cos 1}}\,dy$$

$$\approx 0{,}36\,dx+0{,}89\cdot dy$$

④ $z=x^2+xy+y^2-6x-9y$

$z'_x=2x+y-6$ $\quad z'_y=2y+x-9$

$z''_{xx}=2$ $\quad z''_{xy}=1$ $\quad z''_{yy}=2$

$\begin{cases}2x+y-6=0\\2y+x-9=0\end{cases}$ $\Big|$ $y=6-2x$ $\Big|$ $12-4x+x-9=0$

$x=1$
$y=4$

$\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=4-1=3>0$; $z''_{xx}=2>0\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $(1;4)$ min