Исследовать функцию на условный экстремум

1. $U = 3 - 8x + 6y,$ если $x^2 + y^2 = 36$

2. $U = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15,$ если $x^2 + 16y^2 = 64$

3. Найти производную функции $U = x^2 + y^2 + z^2$ по направлению вектора $\vec{c}(-9, 8, \ -12)$ в точку $M(8; -12; 9)$.

4. Найти производную функции $U = e^{x^2+y^2+z^2}$ по направлению вектора $\vec{d} = (4, -13, -16)$ в точку $L(-16; 4; -13)$.

Ф-я неск-ких перем-х.

(1) $U = 3 - 8x + 6y$, $x^2 + y^2 = 36$

$L(\lambda, x, y) = 3 - 8x + 6y + \lambda(x^2 + y^2 - 36)$

$L'_x = 2\lambda x - 8$ $L'_y = 2\lambda y + 6$

$L'_\lambda = x^2 + y^2 - 36$

$$\begin{cases} x = \frac{4}{\lambda} \\ y = -\frac{3}{\lambda} \\ \frac{16}{\lambda^2} + \frac{9}{\lambda^2} = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{24}{5} \\ y = \frac{18}{5} \\ \lambda = -\frac{5}{6} \end{cases} \text{или} \begin{cases} x = \frac{24}{5} \\ y = -\frac{18}{5} \\ \lambda = \frac{5}{6} \end{cases}$$

$L''_{xx} = 2\lambda$ $L''_{yy} = 2\lambda$ $L''_{\lambda\lambda} = 0$

$L''_{xy} = 0$ $L''_{x\lambda} = 2x$ $L''_{y\lambda} = 2y$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = -8\lambda(x^2 + y^2)$$

$\left(-\frac{5}{6}, -\frac{24}{5}, +\frac{18}{5}\right)$ - усл. max

$\left(\frac{5}{6}, \frac{24}{5}, \frac{-18}{5}\right)$ - усл. min

(2) $U = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15,$
$x^2 + 16y^2 = 64$

$U = 2(x^2 + 16y^2) + 12xy + 15 = 12xy + 143$

$L(\lambda, x, y) = 12xy + 143 + \lambda(x^2 + 16y^2 - 64)$

$L'_x = 2\lambda x + 12y \quad L'_y = 32\lambda y + 12x$

$L'_\lambda = x^2 + 16y^2 - 64$

$$\begin{cases} 2\lambda x + 12y = 0 \\ 32\lambda y + 12x = 0 \\ x^2 + 16y^2 - 64 = 0 \end{cases}$$

$x = \frac{-6y}{\lambda}$

$\Downarrow$

$32\lambda y - \frac{72y}{\lambda} = 0$

$\downarrow$

$8y(4\lambda^2 - 9) = 0$

$\Downarrow$

$y = 0$ или $\lambda = \pm \frac{3}{2}$

неверно

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ x^2 + 16y^2 - 64 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = -\frac{3}{2} \\ x = 4y \\ 16y^2 + 16y^2 - 64 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{3}{2} \\ x = -4y \end{cases}$$

$32y^2 = 64$

$y = \pm\sqrt{2}$

$\left(-\frac{3}{2}, -4\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right), \left(-\frac{3}{2}, 4\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

$\left(\frac{3}{2}, 4\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right), \left(\frac{3}{2}, -4\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

$L''_{xx} = 2\lambda \quad L''_{yy} = 32\lambda \quad L''_{\lambda\lambda} = 0$

$L''_{xy} = 12 \quad L''_{x\lambda} = 2x \quad L''_{y\lambda} = 32y$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2x & 32y \\ 2x & 2\lambda & 12 \\ 32y & 12 & 32\lambda \end{vmatrix} = 0 - 2x \begin{vmatrix} 2x & 12 \\ 32y & 32\lambda \end{vmatrix} + 32y \begin{vmatrix} 2x & 2\lambda \\ 32y & 12 \end{vmatrix}$$

$= -2x(64\lambda x - 384y) + 32y(24x - 64\lambda y)$

$= -128\lambda x^2 + 768xy + 768xy - 2048\lambda y^2$

$= -128(\lambda x^2 - 12xy + 16\lambda y^2) = -128(64\lambda - 12xy)$

$\left(-\frac{3}{2}, -4\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ | $+$ усл max

$\left(-\frac{3}{2}, 4\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ | $+$ усл max

$\left(\frac{3}{2}, 4\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ | $-$ усл min

$\left(\frac{3}{2}, -4\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ | $-$ усл min

③ $U = x^2 + y^2 + z^2$, $\vec{c}(-9, 8, -12)$, $M(8, -12, 9)$

$|\vec{c}| = \sqrt{81 + 64 + 144} = 17$

$|\vec{c}_0| = \left(-\frac{9}{17}, \frac{8}{17}, -\frac{12}{17}\right)$

$U'_x = 2x \quad U'_y = 2y \quad U'_z = 2z$

$\operatorname{grad} U|_{(8,-12,9)} = \cancel{-\frac{9}{17}\cdot 16,\ \frac{8}{17}\cdot 24,\ \frac{12}{17}}$
$= (16, -24, 18)$

$U'_{\vec{c}}|_{(8,-12,9)} = -\frac{9}{17}\cdot 16 - \frac{8}{17}\cdot 24 - \frac{12}{17}\cdot 18 = -\frac{552}{17}$

④ $U = e^{x^2+y^2+z^2}$, $\vec{d}(4, -13, -16)$, $L(-16, 4, -13)$

$|\vec{d}| = \sqrt{16 + 169 + 256} = 21$, $\vec{d}_0 = \left(\frac{4}{21}, -\frac{13}{21}, -\frac{16}{21}\right)$

$U'_x = 2x \cdot e^{x^2+y^2+z^2} \quad U'_y = 2y \cdot e^{x^2+y^2+z^2} \quad U'_z = 2z \cdot e^{x^2+y^2+z^2}$

$\operatorname{grad} U|_{(-16,4,-13)} = (-32 \cdot e^{441}, 8 \cdot e^{441}, -26 \cdot e^{441})$

$U'_{\vec{d}}|_{(-16,4,-13)} = -\frac{128}{21} \cdot e^{441} - \frac{104}{21} \cdot e^{441} + \frac{416}{21} \cdot e^{441}$
$= \frac{184}{21} \cdot e^{441}$