Тема 7 “Ряды”

1. Исследовать ряд на сходимость, используя признак д'Аламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$$

2. Исследовать ряд на сходимость, используя радикальный признак Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

3. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Лейбница:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln n}$$

4. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Раабе:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$$

5. Разложить функцию по Тейлору в единице:

$$f(x) = \ln(16x^2)$$

6. * Дана функция $f(x) = x^2$

   a. Разложить функцию в ряд Фурье по косинусам на отрезке $x \in [-2; 0]$

   b. Построить график функции и ее разложения.

Тема 8 “Понятие об интеграле”

1. Найти неопределенный интеграл:

$$\int(2x^2 - 2x - 1 + \sin x - \cos x + \ln x + e^x)dx$$

2. Найти неопределенный интеграл:

$$\int(2x + 6xz^2 - 5x^2y - 3\ln z)dx$$

3. Вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_0^\pi 3x^2 \sin(2x)dx$$

4. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$$

Ряды

① $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}\cdot(n!)^2}{((n+1)!)^2\cdot n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot(n+1)^n\cdot(n!)^2}{n^n\cdot(n+1)^2\cdot(n!)^2} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{(n+1)\cdot n^n} = 0 \Rightarrow$ сходится

② $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

сходится

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \frac{1}{2}$

③ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln n}$

$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln n} = 0 \\ 1 > \left|\frac{1}{2+\ln 2}\right| > \left|\frac{-1}{3+\ln 3}\right| \end{cases} \Rightarrow$ сходится условно

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n+\ln n}\right|$ как и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, т.о

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$

$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{3^n \cdot 2^{n+1}}{2^n \cdot 3^{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{2}{3} - 1 \right) =$

$= -\frac{1}{3} \Rightarrow$ расходится

(5) $f(x) = \ln(16x^2)$

$f'(x) = \frac{32x}{16x^2} = \frac{2}{x}$, $f'(1) = 2$

$f''(x) = \frac{-2}{x^2}$, $f''(1) = -2$

$f'''(x) = \frac{4}{x^3}$, $f'''(1) = 4$

$f^{(4)}(x) = \frac{-12}{x^4}$, $f^{(4)}(1) = -12$

$f^{(5)}(x) = \frac{48}{x^5}$ $f^{(5)}(1) = 48$

$\ln(16x^2) = \ln 16 + \frac{2}{1!}(x-1) + \frac{-2}{2!}(x-1)^2 +$

$+ \frac{4}{3!}(x-1)^3 + \frac{-12}{4!}(x-1)^4 + \frac{48}{5!}(x-1)^5 + \ldots$

Интегралы

1) $\int (2x^2-2x-1+\sin x-\cos x+\ln x+e^x)dx$

$=\int 2x^2dx+\int -2xdx+\int -1dx+\int \sin x dx+$

$+\int -\cos x dx+\int \ln x dx+\int e^x dx=$

$=2\cdot\frac{x^3}{3}+C+(-x^2)+C+(-x)+C+(-\cos x)+C$

$+(-\sin x)+C+e^x+C+\int \ln x dx=$

$=\frac{2x^3}{3}-x^2-x-\cos x-\sin x+e^x+C+x\cdot\ln x-x$

$=\frac{2x^3}{3}-x^2-2x-\cos x-\sin x+e^x+x\cdot\ln x+C$

2) $\int (2x+6xz^2-5x^2y-3\ln z)dx=$

$=\int 2xdx+\int 6xz^2dx+\int -5x^2ydx+\int -3\ln z dx$

$=x^2+C+3x^2z^2+C+(\frac{-5x^3y}{3})+C+(-3x\ln z)+C$

$=x^2+3x^2z^2-\frac{5x^3y}{3}-3x\cdot\ln z+C$

(3) $\int_0^{\pi} 3x^2 \cdot \sin(2x)\,dx =$

$u = x^2 \qquad du = 2x\,dx$

$dV = 3\sin 2x\,dx \qquad V = -3 \cdot \frac{\cos 2x}{2}$

$= -x^2 \cdot 3\frac{\cos 2x}{2} - \int -3\frac{\cos 2x}{2} \cdot 2x\,dx =$

$= -3x^2\frac{\cos 2x}{2} + \int 3x\cos 2x\,dx =$

$u = x \qquad du = dx$

$dV = 3\cos 2x\,dx \qquad V = 3\frac{\sin 2x}{2}$

$= -3x^2\frac{\cos 2x}{2} + x \cdot 3\frac{\sin 2x}{2} - \int 3\frac{\sin 2x}{2}\,dx$

$= 3x\frac{\sin 2x}{2} - 3x^2\frac{\cos 2x}{2} + 3\frac{\cos 2x}{4} + C\Big|_0^{\pi}$

$= \left(3\pi \cdot \frac{\sin 2\pi}{2} - 3\pi^2\frac{\cos 2\pi}{2} + 3\frac{\cos 2\pi}{4}\right) -$

$- \left(3 \cdot 0 \cdot \frac{\sin 0}{2} - 3 \cdot 0 \cdot \frac{\cos 0}{2} + 3\frac{\cos 0}{4}\right) =$

$= \left(\frac{3}{4} - 3\pi^2 \cdot \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4} = -\frac{3\pi^2}{2}$

(4) $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int (x+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$

$= 2\sqrt{x+1} + C$