① $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right)$

$\text{rank}A = \text{rank}\tilde{A} = 3 < n$ – бесконечное множество решений

$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 + 5x_4 = -2 \\ -2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$

$x_4 = c, \quad x_3 = \frac{3c-4}{2}$

$x_2 = \frac{3c-4}{2} + 5c + 2 = \frac{13c-4}{2} + 2 = \frac{13c}{2}$

$x_1 = 2c + \frac{3c-4}{2} - \frac{13c}{2} = \frac{-6c-4}{2} = -3c - 2$

② а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 4 \\ 0 & -7 & -1 & -17 \end{array}\right)$

$\text{rank}A = \text{rank}\tilde{A} = n = 3$

1 решение

система совместна и определена

б) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5 \end{cases}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right)$ $\operatorname{rank} A < \operatorname{rank} \tilde{A}$

$1 < 2$

система несовместна, решений нет

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2 \end{cases}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -8 & -2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -23 & -14 \end{array}\right)$ $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A} =$

$2 < n$

система совместна и неопределена (бесконечное кол-во решений)

③ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$ $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A} = 4 = n$

система совместна и определена (1 решение)

$x_4 = 1/2$, $x_3 = 4/3$, $x_2 = 3/10$

$x_1 = 83/30$

(4) $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & -6 & -12 & c-7a \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & 0 & 0 & c-7a-2b+8a \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & 0 & 0 & c+a-2b \end{array}\right)$

$\operatorname{rank} A = 2$

$\operatorname{rank} \tilde{A} = 3$ при $c+a-2b \neq 0$

Т.О. система несовместна при

$c+a-2b \neq 0$

$a \neq 2b-c \quad b \neq \frac{a+c}{2} \quad c \neq 2b-a$

⑤ Крамер

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 7 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 7 \end{array}\right)$

$\det A = 2$ $\det A_1 = 10$ $\det A_2 = 4$

$x_1 = 5$ $x_2 = 2$

б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 10 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 26 + 7 + 10 = 43$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 130 + 1 - 45 = 86$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 - 70 + 25 = -43$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 10\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 18 + 5 + 20 = 43$$

$x_1 = 2 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 1$

⑥ Найти L-м-цу LU разлож-я.

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 20 & 18 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 15 & 23 & 6 \\ 0 & 18 & 45 & 17 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 21 & 11 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

⑦ LU-разложение

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 11x_1 + 7x_2 + 5x_3 = -6 \\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 11 & 7 & 5 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1{,}5 & -11{,}5 \\ 0 & 3{,}5 & -9{,}5 \end{pmatrix} \to \cdot 1{,}5 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3/2 & -23/2 \\ 0 & 0 & 52/3 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3/2 & -23/2 \\ 0 & 0 & 52/3 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 11/2 & 1 & 0 \\ 9/2 & 7/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ 11/2 \cdot y_1 + y_2 = -6 \\ 9/2\, y_1 + 7/3\, y_2 + y_3 = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -23/2 \\ y_3 = 52/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3/2\, x_2 - 23/2\, x_3 = -\frac{23}{2} \\ 52/3\, x_3 = 52/3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

⑧ Холецкий

$$\begin{cases} 81x_1 - 45x_2 + 45x_3 = 531 \\ -45x_1 + 50x_2 - 15x_3 = -460 \\ 45x_1 - 15x_2 + 38x_3 = 193 \end{cases}$$

$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 9 \qquad l_{21} = \dfrac{a_{21}}{l_{11}} = -5$

$l_{31} = \dfrac{a_{31}}{l_{11}} = 5 \qquad l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = 5$

$l_{32} = \dfrac{1}{l_{22}}(a_{32} - l_{21} \cdot l_{31}) = \dfrac{1}{5}(-15 + 25) = 2$

$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{38 - 25 - 4} = 3$

$$L = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad L^T = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 9y_1 = 531 \\ -5y_1 + 5y_2 = -460 \\ 5y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 193 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 59 \\ y_2 = -33 \\ y_3 = -12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 59 \\ 5x_2 + 2x_3 = -33 \\ 3x_3 = -12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = -4 \end{cases}$$