НИУ МЭИ
А-13а-19
Вариант 13
Николаев Юрий

Расчетное задание №14

1 Задание

Функция $y = y(x)$ задана таблицей своих значений. Применяя метод наименьших квадратов, приблизить ее функцией вида $\Phi(x) = a\varphi_0(x) + b\varphi_1(x)$. Определить величину среднеквадратичной погрешности. Построить на одном чертеже точечный график исходных данных и график функции $\Phi(x)$.

$$\varphi_0(x) = 1$$

$$\varphi_1(x) = x^2$$

x	0,9	2,2	3,9	5,3	6	6,7
y	3,562	4,368	6,442	9,018	10,6	12,378

2 Решение

1. Функция $\Phi(x)$ имеет вид: $\Phi(x) = a + bx^2$.
2. Найдем нормальную систему МНК:

$$\sigma(\Phi_m, f) = \sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(\Phi_m(x_i) - y_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(a + bx_i^2 - y_i)^2}$$

3. Будем минимизировать функцию:

$$\bar{\sigma}(a,b) = \sum_{i=0}^{n}(a + bx_i^2 - y_i)^2$$

Условие экстремума:

$$\frac{\partial\bar{\sigma}(a,b)}{\partial a} = 2\sum_{i=0}^{n}(a + bx_i^2 - y_i)\cdot 1 = 0$$

$$\frac{\partial\bar{\sigma}(a,b)}{\partial b} = 2\sum_{i=0}^{n}(a + bx_i^2 - y_i)\cdot x_i^2 = 0$$

Таким образом:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} a + \sum_{i=0}^{n} bx_i^2 = \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \sum_{i=0}^{n} ax_i^2 + \sum_{i=0}^{n} bx_i^4 = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6a + 129,84b = 46,368 \\ 129,84a + 4355,586b = 1312.5732 \end{cases}$$

Получаем коэффициенты системы: $a = 3,368982$; $b = 0,201433$.

Аппроксимирующая функция: $\Phi(x) = 3,368982 + 0,201433x^2$

$$\Phi(0,9) = 3,532143$$
$$\Phi(2,2) = 4,343918$$
$$\Phi(3,9) = 6,432778$$
$$\Phi(5,3) = 9,027235$$
$$\Phi(6) = 10,62057$$
$$\Phi(6,7) = 12,411309$$

Считаем среднеквадратичное приближение: $\sigma = 0,0230012$

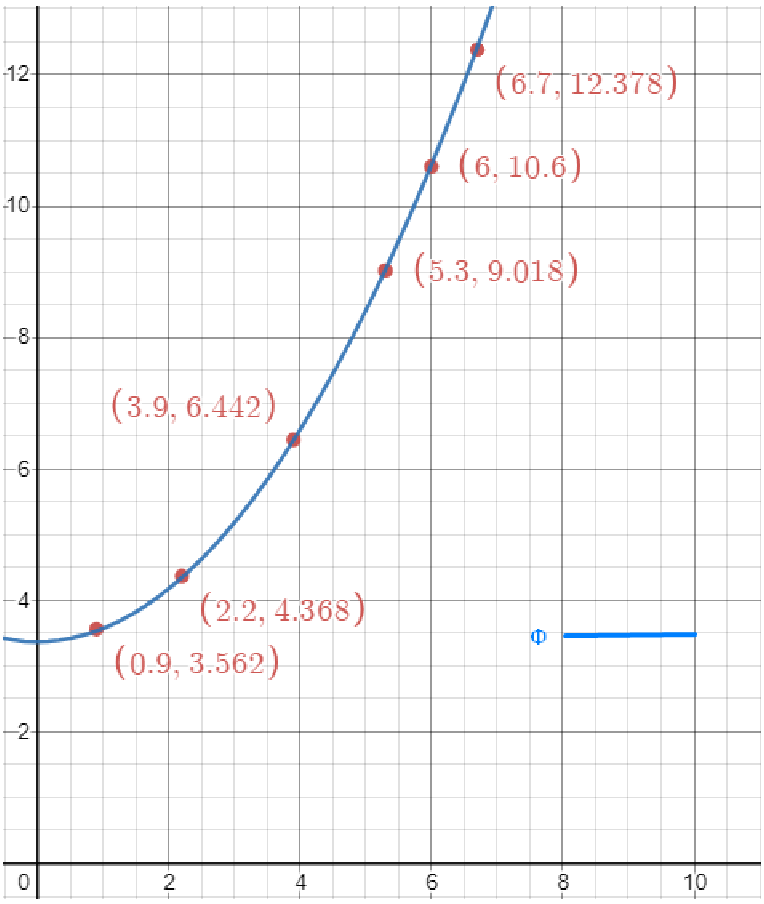

Рис. 1: График