

Расчетное задание №17

1 Задание

Функция $y = y(x)$ задана таблицей своих значений. Построить параболический сплайн дефекта 1 для функции $y = y(x)$, если известно также дополнительное условие. На одном чертеже построить график сплайна и указать исходные точки $(x_i, y_i), i = 0, \dots, 3$.

УКАЗАНИЕ. Для упрощения вычислений записать многочлен на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ в виде $P_i(x) = a_{i,0} + a_{i,1}(x - x_{i-1}) + a_{i,2}(x - x_{i-1})(x - x_i)$.

x	0	1	2	3
y	6	-10	-29	-58

Дополнительное условие: $S''(2 - 0) = S''(2 + 0)$

2 Решение

1. Сплайн S_2 будет представлять систему систему из трех полиномов 3-й степени:

$$S_2(x) = \begin{cases} P_{1,1} = a_{1,0} + a_{1,1}x + a_{1,2}x^2, x \in [0, 1] \\ P_{1,2} = a_{2,0} + a_{2,1}x + a_{2,2}x^2, x \in [1, 2] \\ P_{1,3} = a_{3,0} + a_{3,1}x + a_{3,2}x^2, x \in [2, 3] \end{cases}$$

Сплайн удовлетворяет условиям:

$S_2(x_i) = y_i, i = 0, \dots, 3$ - условие интерполяции

$S_2(x_{i-1}) = y_{i-1}, i = 1, \dots, 3$ - условие интерполяции

$P'_{1,1}(1) = P'_{1,2}(1)$ - условие непрерывности первой производной

$P'_{1,2}(2) = P'_{1,3}(2)$ - условие непрерывности первой производной

$P''_{1,2}(2) = P''_{1,3}(2)$ - дополнительное условие

2. Получили 9 уравнений и 9 неизвестных, решим систему и найдем нужные коэффициенты:

$$\begin{cases} a_{1,0} + a_{1,1}x_0 + a_{1,2}x_0^2 = 6 \\ a_{1,0} + a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_1^2 = -10 \\ a_{2,0} + a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_1^2 = -10 \\ a_{2,0} + a_{2,1}x_2 + a_{2,2}x_2^2 = -29 \\ a_{3,0} + a_{3,1}x_2 + a_{3,2}x_2^2 = -29 \\ a_{3,0} + a_{3,1}x_3 + a_{3,2}x_3^2 = -58 \\ a_{1,1} + 2a_{1,2}x_1 = a_{2,1} + 2a_{2,2}x_1 \\ a_{2,1} + 2a_{2,2}x_2 = a_{3,1} + 2a_{3,2}x_2 \\ 2a_{2,2} = 2a_{3,2} \end{cases}$$

Подставим иксы и получим:

$$\begin{cases} a_{1,0} = 6 \\ a_{1,0} + a_{1,1} + a_{1,2} = -10 \\ a_{2,0} + a_{2,1} + a_{2,2} = -10 \\ a_{2,0} + 2a_{2,1} + 4a_{2,2} = -29 \\ a_{3,0} + 2a_{3,1} + 4a_{3,2} = -29 \\ a_{3,0} + 3a_{3,1} + 9a_{3,2} = -58 \\ a_{1,1} + 2a_{1,2} = a_{2,1} + 2a_{2,2} \\ a_{2,1} + 4a_{2,2} = a_{3,1} + 4a_{3,2} \\ 2a_{2,2} = 2a_{3,2} \end{cases}$$

Решаем СЛАУ, в результате получаем матрицу коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} a_{1,0} \\ a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ a_{2,0} \\ a_{2,1} \\ a_{2,2} \\ a_{3,0} \\ a_{3,1} \\ a_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -18 \\ 2 \\ -1 \\ -4 \\ -5 \\ -1 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

3. Запишем сплайн с коэффициентами и построим график:

$$S_2(x) = \begin{cases} P_{1,1} = 6 - 18x + 2x^2, x \in [0, 1] \\ P_{1,2} = -1 - 4x - 5x^2, x \in [1, 2] \\ P_{1,3} = -1 - 4x - 5x^2, x \in [2, 3] \end{cases}$$

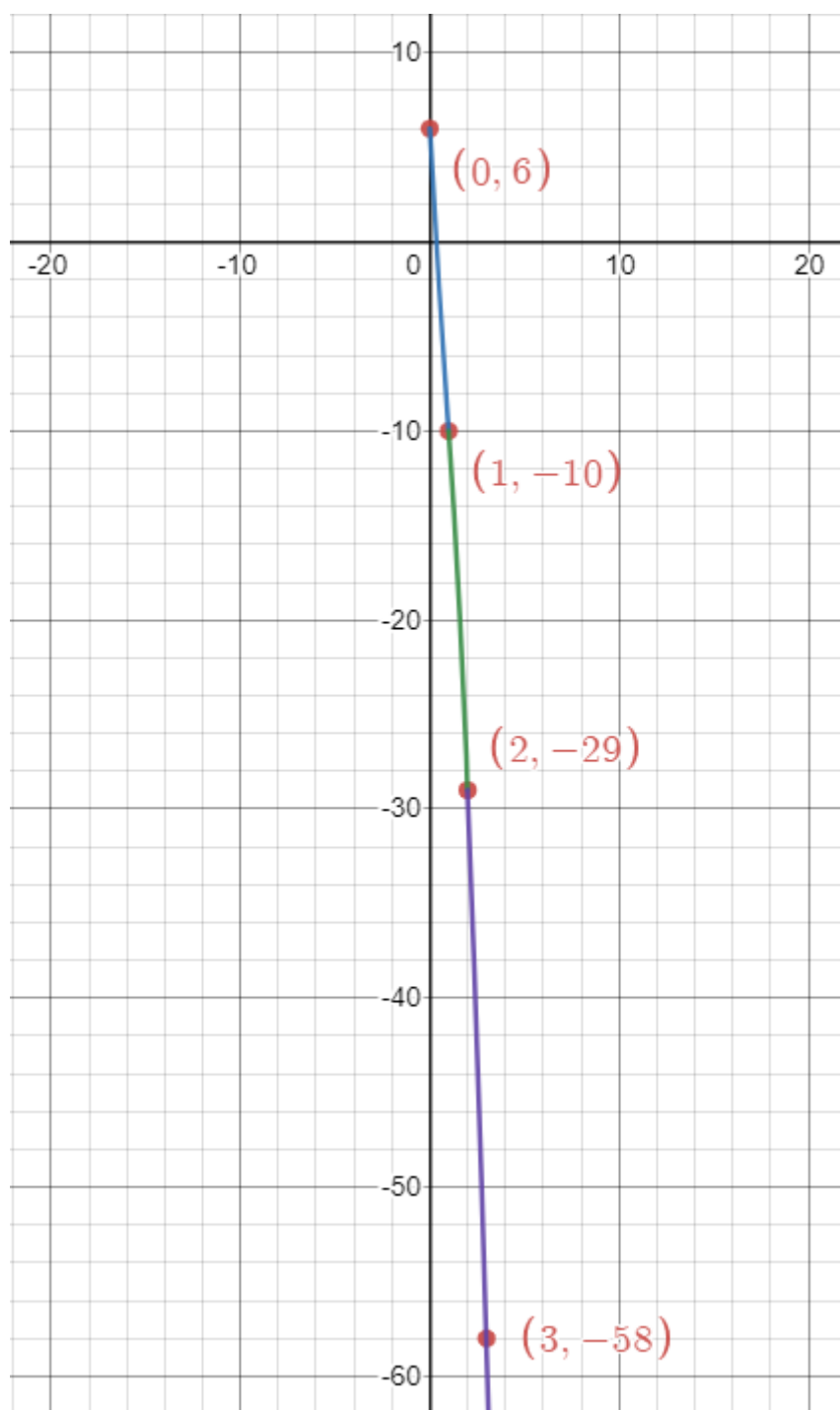


Рис. 1: Параболический сплайн