НИУ МЭИ
А-13а-19
Вариант 13
Николаев Юрий

Расчетное задание №2

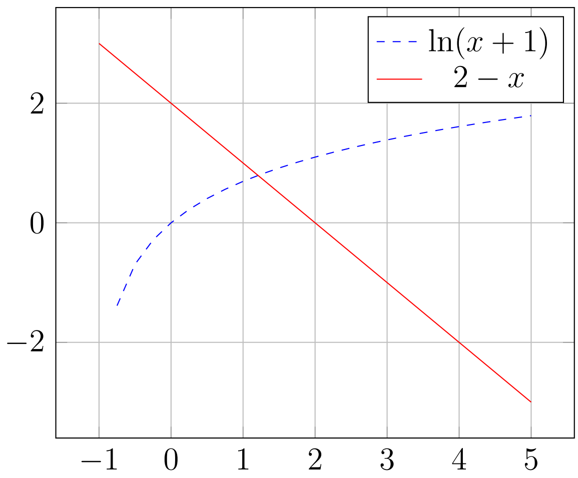
1 Задание

Локализовать корень нелинейного уравнения $f(x) = 0$ и найти его методом бисекции с точностью $\varepsilon = 0.01$.

$$f(x) = \ln(x + 1) + x - 2$$

2 Решение

1. Локализуем корень нелинейного уравнения $f(x) = 0$:



Исследуем поведение знака функции $f(x) = \ln(x+1)+x-2$ на отрезке $[0,6; 1,5]$, построив таблицу ее приближенных значений с небольшим шагом равным 0,1:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,6	-0.93	1,1	-0.16
0,7	-0.77	1,2	-0.01
0,8	-0.61	1,3	0.13
0,9	-0.46	1,4	0.28
1,0	-0.31	1,5	0.42

Из таблицы видно, что $\dot{x} \in [1,2; 1,3]$, так как на этом отрезке функция $f(x)$ меняет знак.

2. Найдем корень методом бисекции с точностью $\varepsilon = 0.01$:

   Обозначим $[a^{(0)}, b^{(0)}] = [a, b]$, где $a = 1,2$ и $b = 1,3$, а при определении очередного отрезка локализации будем сравнивать знаки функции $f(x)$ в середине текущего отрезка на одном из его концов, например на левом.

   (a) Находим середину отрезка $[a^{(0)}, b^{(0)}] : x^{(0)} = \frac{a^{(0)}+b^{(0)}}{2} = 1,25$. Длина текущего отрезка $0,1 > 2\varepsilon$, значит вычисляем $f(a^{(0)}) = -0,010 < 0$ и $f(x^{(0)}) = 0,061 > 0$. Видно, что на концах отрезка $[a^{(0)}, x^{(0)}]$ функция принимает значения разного знака; поэтому полагаем $a^{(1)} = a^{(0)}$; $b^{(1)} = x^{(0)}$.

   (b) Длина отрезка $[a^{(1)}, b^{(1)}]$ равна $0,05 > 2\varepsilon$. Вычисляем $x^{(1)} = \frac{a^{(1)}+b^{(1)}}{2} = 1,225$; $f(a^{(1)}) = -0,010 < 0$; $f(x^{(1)}) = 0,025 > 0$. Все еще на концах отрезка функция принимает знчения разного знака; поэтому полагаем $a^{(2)} = a^{(1)}$; $b^{(2)} = x^{(1)}$.

   (c) Длина отрезка $[a^{(2)}, b^{(2)}]$ равна $0,025 > 2\varepsilon$. Вычисляем $x^{(2)} = \frac{a^{(2)}+b^{(2)}}{2} = 1,2125$; $f(a^{(2)}) = -0,010 < 0$; $f(x^{(2)}) = 0.006 > 0$. Все еще на концах отрезка функция принимает знчения разного знака; поэтому полагаем $a^{(3)} = a^{(2)}$; $b^{(3)} = x^{(2)}$.

   (d) Длина отрезка $[a^{(3)}, b^{(3)}]$ равна $0,0125 < 2\varepsilon$. Выполняется критерий окончания метода бисекции, значит середина данного отрезка $x^{(3)} = \frac{a^{(3)}+b^{(3)}}{2} = 1,20626$ является приближенным значением корня $\dot{x}$ с точностью ε.

Все вычисления удобно представлять в виде таблицы (нумерацию шагов начинаем с 0):

k	$a^{(k)}$	$b^{(k)}$	$x^{(k)}$	Знак $f(a^{(k)})$	Знак $f(x^{(k)})$	$b^{(k)} - a^{(k)}$
0	1,2000	1,3000	1,2500	-	+	0,1000
1	1,2000	1,2500	1,2250	-	+	0,0500
2	1,2000	1,2250	1,2125	-	+	0,0250
3	1,2000	1,2125	**1,20626**			0,0125

Таким образом, найденное значение корня:

$$\dot{x} = 1,21 \pm 0.01$$