НИУ МЭИ
А-13а-19
Вариант 13
Николаев Юрий

Расчетное задание №11

1 Задание

Дана система уравнений $Ax = b$. Привести ее к виду, удобному для итераций, проверить выполнение достаточного условия сходимости указанных ниже методов. Выполнить три итерации по методу Якоби и три итерации по методу Зейделя. Определить, во сколько раз уменьшится норма невязки в каждом случае. Используя апостериорную оценку, вычислить погрешность приближенного решения, полученного на третьей итерации каждого метода.
УКАЗАНИЕ. Для обеспечения выполнения достаточного условия сходимости воспользоваться перестановкой строк в исходной системе уравнений.

A				b
-2	-8	-3	66	-629
67	4	0	-5	507
0	-10	86	-1	-562
0	115	9	-6	-348

2 Решение

1. Приведем матрицу к виду, удобному для итераций.

$$A = \begin{pmatrix} 67 & 4 & 0 & -5 & 507 \\ 0 & 115 & 9 & -6 & -348 \\ 0 & -10 & 86 & -1 & -562 \\ -2 & -8 & -3 & 66 & -629 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{4x_2}{67} + \frac{5x_4}{67} + \frac{507}{67} \\ x_2 = -\frac{9x_3}{115} + \frac{6x_4}{115} - \frac{348}{115} \\ x_3 = \frac{10x_2}{86} + \frac{x_4}{86} - \frac{562}{86} \\ x_4 = \frac{2x_1}{66} + \frac{8x_2}{66} + \frac{3x_3}{66} - \frac{629}{66} \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{67} & 0 & \frac{5}{67} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{115} & \frac{6}{115} \\ 0 & \frac{10}{86} & 0 & \frac{1}{86} \\ \frac{2}{66} & \frac{8}{66} & \frac{3}{66} & 0 \end{pmatrix}$$

2. Проверим выполнение достаточного условия сходимости метода Якоби и Зейделя.

   Достаточное условие сходимости метода Якоби: $\|B\|_\infty \approx 0,1969 < 1$ - выполняется.

   Достаточное условие сходимости метода Зейделя: $\|B_1\|_\infty + \|B_2\|_\infty \approx 0,1969 + 0,1343 \approx 0,3312 < 1$ - выполняется.

3. Выполним три итерации по методу Якоби.

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = -\frac{4x_2^{(n)}}{67} + \frac{5x_4^{(n)}}{67} + \frac{507}{67} \\ x_2^{(n+1)} = -\frac{9x_3^{(n)}}{115} + \frac{6x_4^{(n)}}{115} - \frac{348}{115} \\ x_3^{(n+1)} = \frac{10x_2^{(n)}}{86} + \frac{x_4^{(n)}}{86} - \frac{562}{86} \\ x_4^{(n+1)} = \frac{2x_1^{(n)}}{66} + \frac{8x_2^{(n)}}{66} + \frac{3x_3^{(n)}}{66} - \frac{629}{66} \end{cases}$$

   $x^{(0)} = (\frac{507}{67}, -\frac{348}{115}, -\frac{562}{86}, -\frac{629}{66})^T \approx (7,567; -3,026; -6,535; -9,530)^T$

   1 итерация:

   $x_1^{(1)} = \frac{348 \cdot 4}{115 \cdot 67} - \frac{629 \cdot 5}{66 \cdot 67} + \frac{507}{67} \approx 7,037$

   $x_2^{(1)} = \frac{562 \cdot 9}{86 \cdot 115} - \frac{629 \cdot 6}{66 \cdot 115} - \frac{348}{115} \approx -3,012$

   $x_3^{(1)} = -\frac{348 \cdot 10}{115 \cdot 86} - \frac{629}{66 \cdot 86} - \frac{562}{86} \approx -6,998$

   $x_4^{(1)} = \frac{507 \cdot 2}{67 \cdot 66} - \frac{348 \cdot 8}{115 \cdot 66} - \frac{562 \cdot 3}{86 \cdot 66} - \frac{629}{66} \approx -9,965$

   $x^{(1)} = (7,037; -3,012; -6,998; -9,965)^T$

   2 итерация:

   $x_1^{(2)} = \frac{1}{67} \cdot (-4 \cdot (-3,012) - 5 \cdot 9,965 + 507) \approx 7,003$

   $x_2^{(2)} = \frac{1}{115} \cdot (-9 \cdot (-6,998) - 6 \cdot 9,965 - 348) \approx -2,998$

   $x_3^{(2)} = \frac{1}{86} \cdot (10 \cdot (-3,012) - \cdot 9,965 - 562) \approx -7,001$

   $x_4^{(2)} = \frac{1}{66} \cdot (2 \cdot 7,037 - 8 \cdot 3,012 - 3 \cdot 6,998 - 629) \approx -10$

   $x^{(2)} = (7,003; -2,998; -7,001; -10)^T$

   3 итерация:

   $x_1^{(3)} = \frac{1}{67} \cdot (-4 \cdot (-2,998) - 5 \cdot 10 + 507) \approx 6,99999$

   $x_2^{(3)} = \frac{1}{115} \cdot (-9 \cdot (-7,001) - 6 \cdot 10 - 348) \approx -2,99992$

   $x_3^{(3)} = \frac{1}{86} \cdot (10 \cdot (-2,998) - \cdot 10 - 562) \approx -7$

   $x_4^{(3)} = \frac{1}{66} \cdot (2 \cdot 7,003 - 8 \cdot 2,998 - 3 \cdot 7,001 - 629) \approx -10$

   $x^{(3)} = (6,99999; -2,99992; -7; -10)^T$

$$r^{(0)} = Ax^{(0)} - b = \begin{pmatrix} 542,535 \\ -349,625 \\ -522,220 \\ -600,301 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 507 \\ -348 \\ -562 \\ -629 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35,535 \\ -1,625 \\ 39,780 \\ 28,699 \end{pmatrix}, \|r^{(0)}\| = 39,780$$

$$r^{(1)} = Ax^{(1)} - b = \begin{pmatrix} 509,256 \\ -349,572 \\ -561,743 \\ -626,674 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 507 \\ -348 \\ -562 \\ -629 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,256 \\ -1,572 \\ 0,257 \\ 2,326 \end{pmatrix}, \|r^{(1)}\| = 2,326$$

$$r^{(2)} = Ax^{(2)} - b = \begin{pmatrix} 507,209 \\ -347,779 \\ -562,106 \\ -629,019 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 507 \\ -348 \\ -562 \\ -629 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,209 \\ 0,221 \\ -0,106 \\ -0,019 \end{pmatrix}, \|r^{(2)}\| = 0,221$$

$$r^{(3)} = Ax^{(3)} - b = \begin{pmatrix} 506,99965 \\ -347,9908 \\ -562,0008 \\ -629,00062 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 507 \\ -348 \\ -562 \\ -629 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,00035 \\ 0,0092 \\ -0,0008 \\ -0,00062 \end{pmatrix}, \|r^{(3)}\| = 0,0092$$

$$\frac{\|r^{(0)}\|}{\|r^{(2)}\|} = \frac{39,780}{0,0092} \approx 4324$$

4. Выполним три итерации по методу Зейделя.

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = -\frac{4x_2^{(n)}}{67} + \frac{5x_4^{(n)}}{67} + \frac{507}{67} \\ x_2^{(n+1)} = -\frac{9x_3^{(n)}}{115} + \frac{6x_4^{(n)}}{115} - \frac{348}{115} \\ x_3^{(n+1)} = \frac{10x_2^{(n+1)}}{86} + \frac{x_4^{(n)}}{86} - \frac{562}{86} \\ x_4^{(n+1)} = \frac{2x_1^{(n+1)}}{66} + \frac{8x_2^{(n+1)}}{66} + \frac{3x_3^{(n+1)}}{66} - \frac{629}{66} \end{cases}$$

$x^{(0)} = (\frac{507}{67}, -\frac{348}{115}, \frac{10\cdot(-3,026)}{86} - \frac{562}{86}, \frac{2\cdot 7,567}{66} + \frac{8\cdot(-3,026)}{66} + \frac{3\cdot(-6,887)}{66} - \frac{629}{66})^T \approx$
$\approx (7,567; -3,026; -6,887; -9,981)^T$

1 итерация:

$x_1^{(1)} = \frac{1}{67} \cdot (-4 \cdot (-3,026) - 5 \cdot 9,981 + 507) \approx 7,003$

$x_2^{(1)} = \frac{1}{115} \cdot (-9 \cdot (-6,887) - 6 \cdot 9,981 - 348) \approx -3,008$

$x_3^{(1)} = \frac{1}{86} \cdot (10 \cdot (-3,008) - \cdot 9,981 - 562) \approx -7,001$

$x_4^{(1)} = \frac{1}{66} \cdot (2 \cdot 7,003 - 8 \cdot 3,008 - 3 \cdot 7,001 - 629) \approx -10,001$

$x^{(1)} = (7,003; -3,008; -7,001; -10,001)^T$

2 итерация:

$x_1^{(2)} = \frac{1}{67} \cdot (-4 \cdot (-3,008) - 5 \cdot 10,001 + 507) \approx 7,0004$

$x_2^{(2)} = \frac{1}{115} \cdot (-9 \cdot (-7,001) - 6 \cdot 10,001 - 348) \approx -2,99997$

$x_3^{(2)} = \frac{1}{86} \cdot (10 \cdot (-3) - \cdot 10,001 - 562) \approx -7,00001$

$x_4^{(2)} = \frac{1}{66} \cdot (2 \cdot 7 - 8 \cdot 3 - 3 \cdot 7,00001 - 629) \approx -10$

$x^{(2)} = (7,0004; -2,99997; -7,00001; -10)^T$

3 итерация:

$x_1^{(3)} = \frac{1}{67} \cdot (-4 \cdot (-2,99997) - 5 \cdot 10 + 507) \approx 6,999998$

$x_2^{(3)} = \frac{1}{115} \cdot (-9 \cdot (-7,00001) - 6 \cdot 10 - 348) \approx -2,999999$

$x_3^{(3)} = \frac{1}{86} \cdot (10 \cdot (-3) - \cdot 10 - 562) \approx -7$

$x_4^{(3)} = \frac{1}{66} \cdot (2 \cdot 7 - 8 \cdot 3 - 3 \cdot 7 - 629) \approx -10$

$x^{(3)} = (6,999998; -2,999999; -7; -10)^T$

$$r^{(0)} = Ax^{(0)} - b = \begin{pmatrix} 544,790 \\ -350,087 \\ -552,041 \\ -629,011 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 507 \\ -348 \\ -562 \\ -629 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37,790 \\ -2,087 \\ 9,959 \\ -0,011 \end{pmatrix}, \|r^{(0)}\| = 37,790$$

$$r^{(1)} = Ax^{(1)} - b = \begin{pmatrix} 507,174 \\ -348,923 \\ -562,005 \\ -629,005 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 507 \\ -348 \\ -562 \\ -629 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,174 \\ -0,923 \\ -0,005 \\ -0,005 \end{pmatrix}, \|r^{(1)}\| = 0,923$$

$$r^{(2)} = Ax^{(2)} - b = \begin{pmatrix} 507,02692 \\ -347,99664 \\ -562,00116 \\ -629,00101 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 507 \\ -348 \\ -562 \\ -629 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,02692 \\ -0,00346 \\ -0,00116 \\ -0,00101 \end{pmatrix}, \|r^{(2)}\| = 0,02692$$

$$r^{(3)} = Ax^{(3)} - b = \begin{pmatrix} 506,99987 \\ -347,99989 \\ -562,00001 \\ -629,000001 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 507 \\ -348 \\ -562 \\ -629 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,00013 \\ -0,00011 \\ -0,00001 \\ -0,000001 \end{pmatrix}, \|r^{(3)}\| = 0,00013$$

$$\frac{\|r^{(0)}\|}{\|r^{(3)}\|} = \frac{37,790}{0,00013} \approx 290692$$

5. Используя апостериорную оценку, вычислим погрешность приближенного решения, полученного на третьей итерации каждого метода.

   Метод Якоби:

$$\|x^{(2)} - x^*\| \leq \frac{\|B\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty} \cdot \|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty = \frac{0,1969}{1 - 0,1969} \cdot \left\| \begin{matrix} -0,034 \\ -0,014 \\ -0,003 \\ -0,035 \end{matrix} \right\|_\infty = 0,0086$$

   Метод Зейделя:

$$\|x^{(2)} - x^*\| \leq \frac{\|B_2\|_\infty}{1 - \|B_1\|_\infty} \cdot \|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty = \frac{0,1343}{1 - 0,1969} \cdot \left\| \begin{matrix} -0,003 \\ 0,008 \\ -0,001 \\ -0,001 \end{matrix} \right\|_\infty = 0,0013$$