

Расчетное задание №13

1 Задание

Функция $y = y(x)$ задана таблицей своих значений. Применяя метод наименьших квадратов, приблизить функцию многочленами 1-й и 2-й степеней. Для каждого приближения определить величину среднеквадратичной погрешности. Построить на одном чертеже точечный график функции и графики многочленов.

x	-5,2	-2,6	0	2,6	5,2
y	-1,7	-3,4	-4,7	-4,8	-8

2 Решение

1. Найдем $P_0(x) = a_0$:

$$a_0 = \frac{-1,7-3,4-4,7-4,8-8}{5} = -4,52$$

2. Приближим функцию многочленом 1-ой степени $P_1(x) = a_0 + a_1x$, $m = 1$:

Нормальная система наименьших приближений квадратов при этом имеет вид:

$$\begin{cases} s_0a_0 + s_1a_1 = b_0 \\ s_1a_0 + s_2a_1 = b_1 \end{cases}$$

Вычислим коэффициенты системы:

$$\begin{aligned} s_0 &= \sum_{i=0}^n x_i^0 = 5; \\ s_1 &= \sum_{i=0}^n x_i^1 = 0; \\ s_2 &= \sum_{i=0}^n x_i^2 = 67,6; \\ b_0 &= \sum_{i=0}^4 y_i \cdot x_i^0 = -22,6; \\ b_1 &= \sum_{i=0}^4 y_i \cdot x_i^1 = -36,4 \end{aligned}$$

Тогда система имеет вид:
$$\begin{cases} 5a_0 + 0a_1 = -22,6 \\ 0a_0 + 67,6a_1 = -36,4 \end{cases}$$

Решаем систему и получим многочлен: $P_1(x) = -4,52 - 0,54x$

$$P_1(-5, 2) = -1, 712;$$

$$P_1(-2, 6) = -3, 116;$$

$$P_1(0) = -4, 52;$$

$$P_1(2, 6) = -5, 924;$$

$$P_1(5, 2) = -7, 328$$

Найдем среднеквадратичное отклонение:

$$\sigma(P_1, f) = \sqrt{\frac{1}{5} \sum_{i=0}^4 (P(x_i) - f_i)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{5} [(-0, 012)^2 + (-0, 284)^2 + (0, 18)^2 + (-1, 124)^2 + (0, 672)^2]} = 0, 6047$$

3. Приближим функцию многочленом 2-ой степени $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $m = 2$:

Нормальная система наименьших квадратов при этом примет вид:

$$\begin{cases} s_0a_0 + s_1a_1 + s_2a_2 = b_0 \\ s_1a_0 + s_2a_1 + s_3a_2 = b_1 \\ s_2a_0 + s_3a_1 + s_4a_2 = b_2 \end{cases}$$

Вычислим недостающие коэффициенты системы:

$$s_3 = \sum_{i=0}^n x_i^3 = 0$$

$$s_4 = \sum_{i=0}^n x_i^4 = 1553, 72$$

$$b_2 = \sum_{i=0}^4 y_i \cdot x_i^2 = -317, 72$$

Тогда система имеет вид:
$$\begin{cases} 5a_0 + 0a_1 + 67, 6a_2 = -22, 6 \\ 0a_0 + 67, 6a_1 + 0a_2 = -36, 4 \\ 67, 6a_0 + 0a_1 + 1553, 72a_2 = -317, 72 \end{cases}$$

Решаем систему и получим многочлен: $P_2(x) = -4, 262818 - 0, 538462x - 0, 019022x^2$

$$P_2(-5, 2) = -1, 9772;$$

$$P_2(-2, 6) = -2, 9914;$$

$$P_2(0) = -4, 262818$$

$$P_2(2, 6) = -5, 7914;$$

$$P_2(5, 2) = -7, 5772$$

Тогда среднеквадратичное отклонение: $\sigma(P_2, f) = 0, 5651$

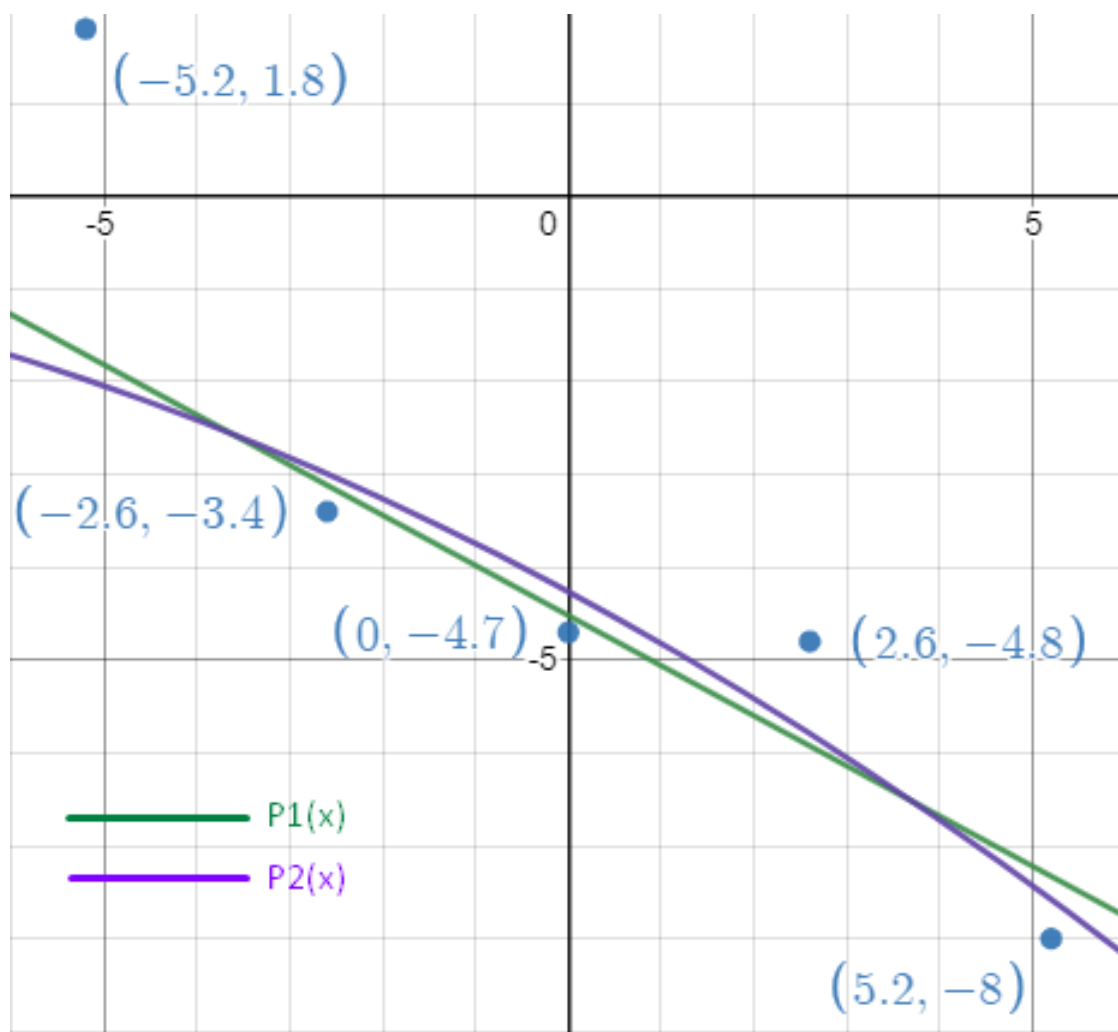


Рис. 1: График