Ist $b_1 = \dots b_m = 0$, so heißt das LGS homogen

Die Lösungsmenge des LGS (G) ist

- $L(G) := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \begin{matrix} a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \\ \forall k \in \{1, \dots, m\} \end{matrix} \right\}$

- $(A|b) := \left( \begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix} \right)$ heißt erweiterte Koeffizientmatrix

- Oft schreibt man dann $L(A|b)$ statt $L(G)$ um die Lösungsmenge zu bezeichnen.

---

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 Prüfen ob $(G, +)$ eine Gruppe ist

(a) $G := \{3z : z \in \mathbb{Z}\}$

Bei Gruppe muss gelten,

1) assoziative Verknüpfung
2) Neutralelement
3) Jedes Element invertierbar

(a) 1) assoziativ ✓
2) Neutralelement 0 ✓
3) Jedes Element invertierbar ✓

Das ist eine Gruppe.

(b) $G := \{z \in \mathbb{Z} : z$ ist durch 2 oder durch 3 teilbar$\}$

1) assoziativ ✓

Das Ploblem besteht darin, dass "+" keine abgeschlossene Verknüpfung ist, $+ : G \times G \not\to G$

Beispiel: $2 \in G$, da $2 \vdots 2$, $3 \in G$, da $3 \vdots 3$.

Aber $2+3 = 5$ ist weder durch 2 noch durch 3 teilbar und daher $5 \notin G$. Das ist keine Gruppe.

c) $G := \{ z \in \mathbb{Z} : z$ ist durch 2 und durch 3 teilbar$\}$

anders gesagt „ist durch 6 teilbar"

1) assoziativ ✓

2) Neutralelement 0 ✓

3) Jedes Element invertierbar ✓

Das ist eine Gruppe

d) $G := \{1\}$

Alle Bedingungen sind nicht erfüllt.

Das ist keine Gruppe

---

Aufgabe 2

(a) $((0,\infty), +)$ - kein Neutralelement vorhanden

Das ist keine Gruppe.

(b) $((0,\infty), \cdot)$

1) assoziativ ✓

2) Neutralelement 1 ✓

3) Jedes Element invertierbar ~~✗~~ ✓ da $(0,\infty) \in \mathbb{R}$

~~Das ist keine Gruppe~~ Das ist eine Gruppe.

(c) $((-\infty ; 0), \cdot)$ - kein Neutralelement

Das ist keine Gruppe

(d) Sei $T = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$. $(T, \cdot)$ - Gruppe?

1) assoziativ ✓

2) Neutralelement 1 ✓

3) Jedes Element invertierbar $\bar{z} = \frac{1}{z}$ ; $|\bar{z}| = 1$ ✓

(e) Sei $\mathcal{E} = \{ z \in \mathbb{C} : z^4 = 1 \}$. $(\mathcal{E}, \cdot)$ - Gruppe?

$\mathcal{E} = \{ -i ; i, -1 ; 1 \}$

1) assoziativ ✓
2) Neutralelement 1 ✓
3) Jedes Element invertierbar ✓

Das ist eine Gruppe

Aufgabe 3

(a) Berechnen in $\mathbb{Z}_8$:

(i) $[21]+[17] = [3]+[-1] = [2]$

(ii) $[-29]+[-4] = [-33] = [3]$

(iii) $[6]\cdot[12] = [6]\cdot[3] = [18] = [0]$

(b) Berechnen in $\mathbb{Z}_{12345}$:

$[12346]\cdot[6613] = [1]\cdot[6613] = [6613]$

(c) Darf man in $\mathbb{Z}_6$ „kürzen"?

Nein, weil 6 keine Primzahl ist, deshalb existieren in $\mathbb{Z}_6$ sog. Nullteiler.

Beispiel: $[3][4] = [3][2]$, aber $[4] \neq [2]$

---

Aufgabe 4

$\mathbb{Z}_7^* = \{[1],[2],[3],[4],[5],[6]\}$ 7 ist eine Primzahl

$\mathbb{Z}_8^* = \{[1],[3],[5],[7]\}$

In $\mathbb{Z}_7^*$

| $a$ | $a^{-1}$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 5 |
| 4 | 2 |
| 5 | 3 |
| 6 | 6 |

In $\mathbb{Z}_8^*$

| $a$ | $a^{-1}$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 3 | 3 |
| 5 | 5 |
| 7 | 7 |

---

Aufgabe 5. $S_3 = \{f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\} \mid f \text{ bijektiv}\}$

a) Listen Sie alle Abbildungen $f \in S_3$ in der Form

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix}$ auf. Wie viele Elemente besitzt $S_3$?

$S_3$ besitzt $3! = 6$ Elemente in Form von

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1\text{-}3 & 2 \text{ von Rest} & \text{Rest} \end{pmatrix}$$

(b) Neutralelement: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(c) zu jedem $f \in S_3$ das Inverse bzgl. „$\circ$" an.

1. und 2. Zeile umtauschen und die erste Zeile wieder zuordnen.

(d) Zeigen Sie, dass $(S_3, \circ)$ keine kommutative Gruppe ist.

Sei $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Dann $f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, aber $g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Also, $f \circ g \neq g \circ f$ und daher ist das keine kommutative Gruppe.

---

Aufgabe 6

$G = \{a, b, c\}$.

Verknüpfungstafel ergänzen.

Antwort:

| * | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | c | a | b |
| b | a | b | c |
| c | b | c | a |

$b * b = b$

b kann ein Neutralelement sein.

Dann $a * b = a$, $c * b = b$