Übungsblatt 4

Aufgabe 1 $\longrightarrow$ Siehe Übungsblatt 3

Aufgabe 2

(a) Die Relation R_1 auf $\mathbb{Z}$ sei definiert durch

$x R_1 y$, falls $y-x$ durch 2 oder durch 3 teilbar ist

reflexiv ✓

symmetrisch ✓

transitiv ✗ $\quad x = 9$; $y = 6 \Rightarrow x R_1 y$, da $y-x = -3 \vdots 3$

$z = \cancel{3}\,2$; $y R_1 z$, da $z - y = \cancel{3}\,2 - 6 \vdots 2$

Aber $x \not R_1 z$, da $z - x = 2 - 9 = -7$

und $-7 \not\vdots\, 3$; $-7 \not\vdots\, 2$

~~(b) $R_2 := \{(x,y) : f(x) = f(y)\} \subseteq [0,1] \times [0,1]$ wobei~~

~~$f [0,1] \rightarrow$~~

(b) Die Relation R_2 auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei definiert durch $x R_2 y$, falls $xy > 0$ ist

reflexiv ✓

symmetrisch ✓

transitiv ✓ $\quad$ Somit ist R_2 eine Äquivalenzrelation

Äquivalenzklassen: $(0; +\infty)$; $(-\infty; 0)$

(c) Die Relation R_3 auf $\mathbb{Z}$ sei definiert durch

$x R_3 y$, falls $x+y$ eine ungerade Zahl ist.

reflexiv ✗ $\quad x + x = 2x$ – eine gerade Zahl

keine Äquivalenzrelation

(d) Die Relation R_4 auf $\mathbb{R}$ sei definiert durch

$x R_4 y$, falls $x^2 = y^2$ gilt

reflexiv ✓

symmetrisch ✓ Äquivalenzrelation

transitiv ✓ Äquivalenzklassen: $\{\{x, -x\} : x \geq 0\}$

Aufgabe 3

(a) Äquivalenzrelation R auf $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

3 Äquivalenzklassen: $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 5\}$ und $\{6\}$

$R = \{\overbrace{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)}^{\text{reflexiv}}, (1,3), (3,4), (1,4), (3,1), (4,3), (4,1), (2,5), (5,2)\}$

(b) Äquivalenzrelation S auf $\mathbb{N}$ => einelementige Äquivalenzklassen

$\{0\}, \{1\}, \{2\}$ ...

$$S := \{(n,n) : n \in \mathbb{N}\}$$

(c) Äquivalenzrelation T auf $\mathbb{N}$ => 1 Äquivalenzklasse, $\mathbb{N}$

$$T = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

Aufgabe 4

Sind A, B, C - Mengen und $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$, dann Verkettung (Verknüpfung) der S und R:

$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C : \exists b \in B$ so dass $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in S\}$

Seien nun $A = B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $C = \{6, 7, 8, 9, 10\}$

$R := \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,1)\} \subseteq A \times B$

$S := \{(1,8), (1,9), (1,6), (2,6), (3,7), (3,10), (5,7)\} \subseteq B \times C$

$S \circ R = \{(1,6), (2,7), (2,10), (4,7), (5,8), (5,9), (5,6)\}$
$(S \circ R)^{-1} = \{(6,1), (7,2), (10,2), (7,4), (8,5), (9,5), (6,5)\}$

Aufgabe 5
(a) Was ist die reflexive Hülle der „kleiner"-Relation

$$R_< = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x < y\} \text{ auf } \mathbb{R}?$$

$R_= = \{(x,x) \cancel{\in \mathbb{R}} : x \in \mathbb{R}\}$
reflexive Hülle: $R_< \cup R_=$

(b) symmetrische Hülle der „kleiner-gleich"-Relation
$$R_\leq = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \leq y\} \text{ auf } \mathbb{R}?$$

$R_\leq \cup R_>$, wobei $R_> = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x > y\} =$

$= \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

(c) Bilden Sie ~~eine~~ die transitive ~~Relation~~ Hülle der Relation $R = \{(1,2), (1,3), (2,3), (3,4), (5,6)\}$ auf der Menge $\{1, \ldots, 6\}$?

$R \cup \{(1,4), (2,4)\}$

(d) kleinste Äquivalenzrelation auf $\{1, \ldots, 6\}$ die
$S = \{(2,1), (1,5), (3,4)\}$ enthält.

Äquivalenzklassen?

1) ~~R_r~~ S_r von S.

$S_r = S \cup \{(x,x) : x \in \{1, \ldots, 6\}\} =$
$= \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (2,1), (1,5), (3,4)\}$

2) symmetrische Hülle von S_R

$(S_R)_S = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (2,1), (1,2), (1,5), (5,1), (3,4), (4,3)\}$

3) transitive Hülle von $(S_R)_S$

$((S_R)_S)_T = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (2,1), (2,5), (1,2), (1,5), (5,2), (5,1), (3,4), (3,4)\}$

$[1] = \{1, 2, 5\}$

$[2] = \{3, 4\}$

$[3] = \{6\}$

Aufgabe 6

- antisymmetrisch
- transitiv
- assymmetrisch
- irreflexiv
- symmetrisch
- reflexiv

Vorlesung 20. Mai