Übungsblatt 7

Aufgabe 1

Wie viele Lösungen gibt es? Gebundene / freie Variablen? Lösungsmenge - ?

(a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right)$ Rang$(A) = 3$ aber Rang$(A|b) = 3$

Dieses LGS ist daher lösbar

Rang$(A) = 3 = n \Rightarrow$ genau eine Lösung vorhanden. $x_3 = 0$, $x_2 = 1$, $x_1 = 0$

(b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$ Rang$(A) = 2 \neq$ Rang$(A|b) = 3$

$\Rightarrow$ Es gibt keine Lösungen

(c) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Rang$(A) =$ Rang$(A|b) = 2 \Rightarrow$ LGS ist lösbar.

Rang$(A) = 2 = n \Rightarrow$ keine freie Variablen, alle gebundene. Nur eine Lösung. $L(A|b) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(d) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$ Rang$(A) =$ Rang$(A|b) \Rightarrow$ Dieses LGS ist lösbar. Rang$(A) < n$. ~~keine freie Variablen. Nur eine Lösung.~~

~~$L(G) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \right.$~~ x_3 - freie Variable. Unendlich viele Lösungen. Sei $x_3 = s$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2s + 4x_4 = 1 & (1) \\ x_2 + s - 2x_4 = -1 & \Rightarrow x_2 + s - 2 = -1 \Rightarrow x_2 = 1 - s \\ 3x_4 = 3 \Rightarrow x_4 = 1 \end{cases}$$

(1): $x_1 + 1 - s + 2s + 4 = 1$

$x_1 = -4 - s$ $\Rightarrow$ $\boxed{L(G) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-s \\ 1-s \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}}$

Aufgabe 2

(a) $$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}\right\} (G_1)$$

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$(ii) - \frac{1}{2}(i)$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. ZSF erreicht.

Rang(A) = Rang$(A|b)$ – LGS ist lösbar

Rang$(A) < n = 3 \Rightarrow$ unendlich viele Lösungen.

x_1 – gebundene Variable, x_2, x_3 – freie Variablen.

Sei $x_2 = s$, $x_3 = r$.

Dann, $2x_1 + 4s - 2r = 6 \quad |:2$

$\Rightarrow x_1 + 2s - r = 3$

$\Rightarrow x_1 = 3 + r - 2s$

$$\Rightarrow \boxed{L(G_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+r-2s \\ s \\ r \end{pmatrix}, s, r \in \mathbb{R} \right\}}$$

(b) $$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} (G_2)$$

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$(ii) - (i)$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$(iii) - 2\times(i)$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right)$ $(iii) - (ii)$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$

Letze Zeile ist sinhlos. Dieses LGS hat keine Lösungen.

(c) $\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 6 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 8 \end{array}\right\} (G_3)$

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & -1 & 8 \end{array}\right)$$

(ii) - (i): $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 & 8 \end{array}\right)$; (iii) - (i): $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$

(iii) + (ii): $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. ZSF erreicht. Rang(A) = Rang(A|b) = 2. LGS ist lösbar.

Rang(A) < 3 => unendlich viele Lösungen. x_1, x_2 - gebundene Variablen. x_3 - freie Variable

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \\ -2x_2 + x_3 = -2 \end{cases} \quad \text{Sei } x_3 = s$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \\ -2x_2 + s = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \\ x_2 = \frac{s+2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + s + 2 = 6 \Rightarrow x_1 = 4 - s \\ x_2 = \frac{s+2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{L(G_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-s \\ \frac{s+2}{2} \\ s \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}}$$

(d) $\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 6 \\ 2x_2 - 16x_3 = 8 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1 \end{array}\right\} (G_4)$

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 9 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -16 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \end{array}\right) \quad \text{(ii)} \leftrightarrow \text{(i)}: \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 9 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -16 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$(i)-(ii):\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&-9&6\\2&4&6&0\\0&2&-16&8\\2&5&4&1\end{array}\right);\ (ii)-(iv):\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&-9&6\\0&-1&2&-1\\0&2&-16&8\\2&5&4&1\end{array}\right)$$

$$(iv)-(i)\times2:\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&-9&6\\0&-1&2&-1\\0&2&-16&8\\0&-5&\cancel{\ }\ 22&-11\end{array}\right);\ (iii)+(ii)\times2:\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&-9&6\\0&-1&2&-1\\0&0&-12&6\\0&-5&\cancel{\ }\ 22&-11\end{array}\right)$$

$$(iv)-5\times(ii):\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&-9&6\\0&-1&2&-1\\0&0&-12&6\\0&0&\cancel{\ }\ 12&-6\end{array}\right).\ (iv)+\cancel{\ }(iii):\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&-9&6\\0&-1&2&-1\\0&0&-12&6\\0&0&0&\cancel{\ }\ 0\end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ ZSF erreicht. Rang(A) = Rang(A|b) $\Rightarrow$ LGS ist lösbar.

Rang(A) = n $\Rightarrow$ Es gibt genau eine Lösung.

$$\begin{cases}x_1+5x_2-9x_3=6\\-x_2+2x_3=-1\\-12x_3=6\Rightarrow x_3=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+5x_2+\frac{9}{2}=6\\x_2+1=1\Rightarrow x_2=0\\x_3=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{3}{2}\\x_2=0\\x_3=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\boxed{L(G_4)=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right\}}$$

Aufgabe 3

$$\left.\begin{array}{l}\alpha x_1+\alpha x_2=0\\\alpha x_1+(\alpha-1)x_2=0\end{array}\right\}(G_1);\quad\alpha\in\mathbb{R}$$

(i) keine Lösungen

$$\left(\begin{array}{cc|c}\alpha&\alpha&0\\\alpha&\alpha-1&0\end{array}\right)\ \cancel{(ii)-(i)}:\ \cancel{\left(\begin{array}{cc|c}\alpha&\alpha&0\\0&-1&0\end{array}\right)}$$

$Det(A)=\alpha(\alpha-1)-\alpha^2=-\alpha.\ \Rightarrow$

$\boxed{\begin{array}{l}\alpha\neq0:\text{ genau eine Lösung }(0,0)\\\alpha=0:\text{ unendlich viele Lösungen }(x_1,0)\\\text{kein }\alpha\text{ ohne Lösung.}\end{array}}$

Aufgabe 4

$2x_1 - 2x_2 = 0$

$2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$

$7x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad (i):2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$(ii) - 2\times(i): \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad (iii) - 7\times(i): \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$(i)+(ii): \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad (iii) - 3\times(ii): \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$(iii):3: \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right) \quad (i) + 2x(iii): \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right)$$

$$(ii) + 2\times(iii): \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right)$$

x_1, x_2, x_3 - ~~freie Va~~ gebundene Variablen

x_4 - freie Variablen

Sei $x_4 = s$

$$\boxed{\Rightarrow L(G) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}s \\ \frac{4}{3}s \\ \frac{2}{3}s \\ s \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}}$$

Aufgabe 5

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ $A|b = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$ $\qquad \left(1 \ -2 \ \middle| \ 0 \right)$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ $\qquad \left(0 \ \ 0 \ \middle| \ 0 \right)$

Aufgabe 6

Schneiden sich die Geraden?

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto -3t+1$, $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto -2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{array}\right) \quad (ii) + 3 \times (i) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

$$(ii) : -3 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{(i)+(ii)}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

$\boxed{\Rightarrow \text{Schnittpunkt } (1, -2)}$

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto -2t$, $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto 2(1-t)-2$

$-2t_1 + 2t_2 = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad (ii) : 2 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad (ii) + (i)$$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ t_2 - freie Variable. Es gibt unendlich viele Lösungen

Sei $t_2 = s$, dann ~~$t_1 - t_2$~~ $t_1 - s = 0 \Rightarrow t_1 = s$

Gerade fallen zusammen

(c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto 4t+1$, $g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto (t-1) \cdot 4 + 3$

Schnittbed. $t_1 - t_2 = 0$, $4t_1 + 1 - (4t_2 - 1) = 0 \Rightarrow t_1 - t_2 = 0$, $4t_1 - 4t_2 + 2 = 0$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & -2 \end{array}\right)$ $(ii) - 4 \times (i) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$. Widerspruch. Keine Schnittpunkte