Übungsblatt 3

Aufgabe 1

(a) $3e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 6e^{\left(\frac{\pi i}{3}+\frac{5\pi i}{6}\right)} = \underline{\underline{6e^{\frac{7\pi i}{6}}}}$

(b) $e^{i\pi} \cdot e^{3\pi i} = e^{4\pi i} = \underline{\underline{1}}$

(c) $2e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot 4e^{-i\frac{\pi}{3}} = 8e^{\left(\frac{\pi i}{3}-\frac{\pi i}{3}\right)} = 8e^0 = \underline{\underline{8}}$

Aufgabe 2

(a) $z^4 = 16$. Im Allgemein gilt:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, \dots n-1$$

also in unserem Fall

$$z_k = \sqrt[4]{16} \cdot e^{i\left(\frac{0}{4}+\frac{2\pi \cdot k}{4}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

da $16 = (16;0) = \underbrace{16}_{r} \cdot e^{i \cdot \underbrace{0}_{\varphi}}$

dann erhalten wir

$$z_0 = \sqrt[4]{16} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0\right)} = 2 \cdot e^0 = \underline{\underline{2}}$$

$$z_1 = \sqrt[4]{16} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)} = \underline{\underline{2e^{i\frac{\pi}{2}}}} = 2\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + i\,2\sin\frac{\pi}{2} =$$

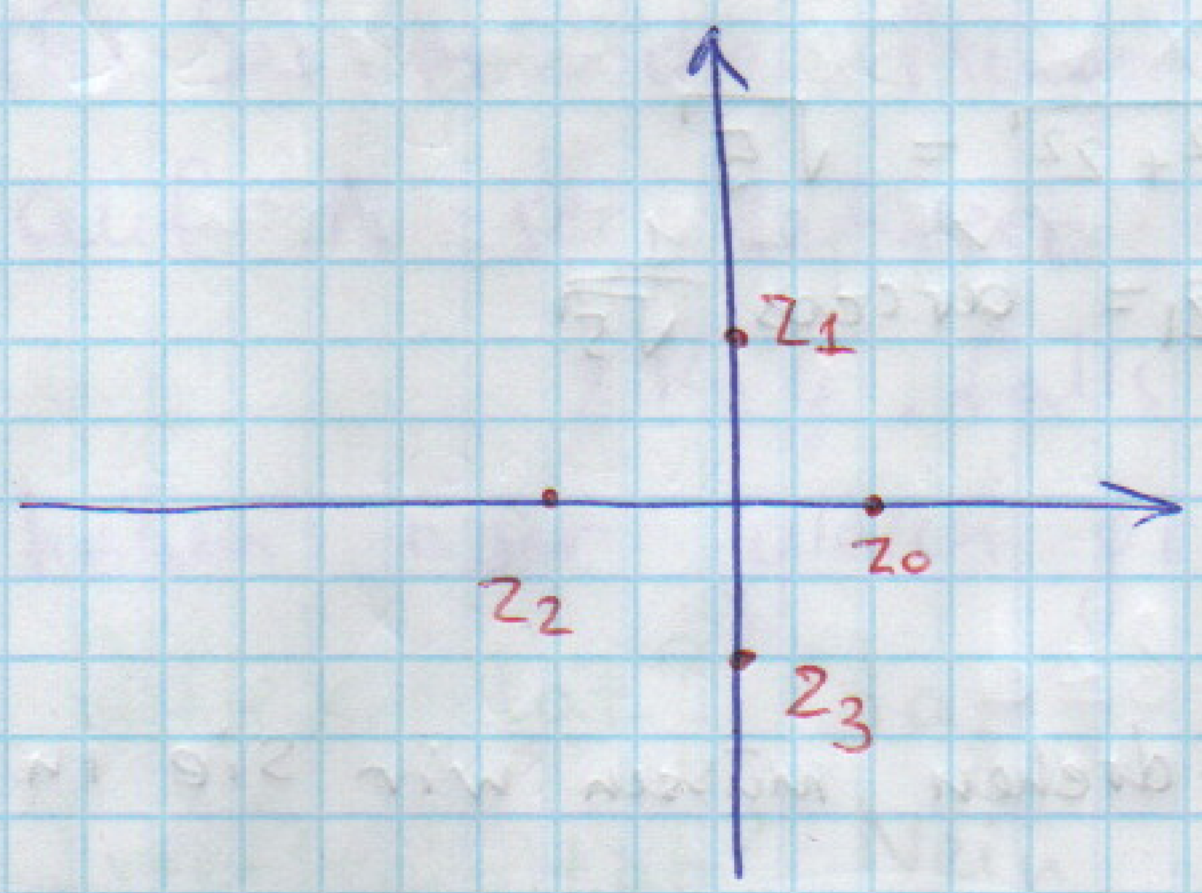
$$= \underline{\underline{2i}}$$

$$z_2 = \sqrt[4]{16} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2\right)} = \underline{\underline{2e^{i\pi}}} = 2\overbrace{\cos\pi}^{-1} + i \cdot 2 \cdot \underbrace{\sin\pi}_{0} =$$

$$= \underline{\underline{-2}}$$

$$z_3 = \sqrt[4]{16} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}\cdot 3\right)} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = 2\overbrace{\cos\frac{3\pi}{2}}^{0} + i \cdot 2\underbrace{\sin\frac{3\pi}{2}}_{-1} =$$

$$= \underline{\underline{-2i}}$$



(b) $z^3 = -i$

$-i = (0; -1) = 0 + (-1)\cdot i$

$z_k = \sqrt[n]{r}\cdot e^{i(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n})}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$

~~In unserem Fall ist~~ $\cancel{r=0}$ $\cancel{\begin{cases} r\cos\varphi = 0 \Rightarrow \\ r\sin\varphi = -1 \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{2} \end{cases}}$

$i = 0 + (-1)\cdot i$

da $y<0 \Rightarrow \begin{cases} r = |i| = \sqrt{0^2+(-1)^2} = \underline{1} \\ \varphi = 2\pi - \arccos\frac{x}{|z|} = 2\pi - \arccos 0 = \\ \quad = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \underline{\frac{3\pi}{2}} \end{cases}$

$\Rightarrow \underline{-i = 1\cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}}$

$\Rightarrow z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n})}$, $k = 0, 1, 2.$

$z_0 = \sqrt[3]{1}\, e^{i(\frac{\pi}{2}+)} = 1 e^{i\frac{\pi}{2}} = \underline{e^{i\frac{\pi}{2}}}$

$z_1 = \sqrt[3]{1}\cdot e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3})} = 1\cdot e^{i(\frac{3\pi}{6}+\frac{4\pi}{6})} = \underline{e^{i\frac{7\pi}{6}}}$

$z_2 = 1\cdot e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3})} = e^{i(\frac{3\pi}{6}+\frac{8\pi}{6})} = \underline{e^{i\frac{11\pi}{6}}}$

Aufgabe 3

(a) $\varphi \in [0; 2\pi)$. Multiplikation von z mit $e^{i\varphi}$ bzw. $e^{-i\varphi}$

Sei $z = r\cdot e^{i\gamma}$.

Dann $z\cdot e^{i\varphi} = re^{i\gamma}\cdot e^{i\varphi} = re^{i(\gamma+\varphi)}$, bzw. $re^{i(\gamma-\varphi)}$

also z dreht sich um φ Grad rechts bzw. links

(b) $z = 1+2i = (1,2)$

$y \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} r = |z| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5} \\ \varphi = \arccos \frac{x}{|z|} = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$

$\Rightarrow z = \sqrt{5} \cdot e^{i \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}}$

Um diese Zahl um $\frac{\pi}{2}$ umzudrehen müssen wir sie in ihrer Polardarstellung mit $e^{i\frac{\pi}{2}}$ multiplizieren

$\Rightarrow z_{um} = \sqrt{5} \cdot e^{i \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{5} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\varphi = \sqrt{5} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

$= \sqrt{5} \cdot \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} \cos\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} \cdot \sin(\arccos$

Siehe Lösungen

Aufgabe 4

(a) Sei M die Menge aller Menschen. Die Relation R_1 auf M sei definiert durch

$x R_1 y$, falls x und y am selben Tag Geburtstag haben

Reflexivität? Ja, $x R_1 x \quad \forall x \in M$

Irreflexivität? Nein.

Symmetrie? Ja.

Assymetrie? Nein

Transivität? Ja.

Antisymmetrie? Nein.

Äquivalenzrelation

(b) Sei M die Menge aller Menschen. Die Relation R_2 auf M sei definiert durch

$x R_2 y$, falls x und y am selben Tag Geburtstag haben oder gleich groß sind.

Reflexivität? Ja.

Irreflexivität? Nein.

Symmetrie? Ja.

Asymmetrie? Nein

Antisymmetrie? Nein

Transitivität? Nein. Beispiel: $x = \{22$ Jahre alt, 190cm groß$\}$

$y = \{22$ Jahren alt, 180 cm$\}$. Dann $x R_2 y$.

$z = \{21$ Jahre alt, 180 cm$\}$. Dann $y R_2 z$.

Aber $x \not\sim_{R_2} z$.

(c) Die Relation R_3 auf $\mathbb{N}^*$ sei definiert durch

$R_3 := \{(m,n) : m$ teilt n ohne Rest$\}$

Reflexivität? Ja. partielle Ordnungsrelation

Irreflexivität? Nein

Symmetrie? Nein

Asymmetrie? Nein

Antisymmetrie? Ja.

Transitivität? Ja.

$x \sim_{R_3} y$ heißt $y \vdots x \Rightarrow y = k_1 x$

$y \sim_{R_3} z$ heißt $z \vdots y \Rightarrow z = k_2 y = k_1 k_2 x$

$\Rightarrow z \vdots x$

$\Rightarrow x \sim_{R_3} z$ gilt.

(d) Die Relation R_4 auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sei definiert durch $(a,b)\ R_4\ (c,d)$, falls einer der folgenden ~~Fällen~~ Fällen eintritt:

- Fall 1: $a<c$
- Fall 2: $a=c$ und $b \leq d$

Reflexivität? Ja,

Irreflexivität? Nein

Symmetrie? Nein

Asymmetrie? Nein

Transitivität? Ja.

$\lightning$

$(a,b)\ R_4\ (c,d)$ und $a<c$ und $b>d$

$(c,d)\ R_4\ (e,f)$ und $c=e$ und $d \leq f$

~~also wenn~~ passt.

Antisymmetrie? Ja. totale Ordnungsrelation

Aufgabe 5

(a) reflexiv ist, aber weder symmetrisch noch transitiv

R auf ~~$\mathbb{R}$~~ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$x R y$, falls $\frac{x}{y}$ eine ganze Zahl ist

Reflexivität? Ja, $xRx = 1$ - gerade Zahl

Symmetrie? Nein, $4R2$, aber $2 \not R 4$.

Transitiv? Nein

(b) symmetrisch ist, aber weder reflexiv noch transitiv

$R = \{(1,2), (2,1)\}$

(c) transitiv ist, aber weder reflexiv noch symmetrisch

$R = \{(1,2), (2,3), (1,3)\}$

d) reflexiv, transitiv und symmetrisch ist

$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3), (1,3), (2,1), (3,2), (3,1)\}$

Aufgabe 6 Äquivalenzrelationen? Äquivalenzklassen

(a) $R_1 := \{(1,1), (2,2), (2,4), (4,4)\} \subseteq \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\}$

Äquivalenzrelation = $\begin{cases} \text{reflexiv} \\ \text{symmetrisch} \\ \text{transitiv} \end{cases}$

R_1 ist nicht reflexiv $\Rightarrow$ keine Äquivalenzrelation

(b) $R_2 := \{(x,y) : f(x) = f(y)\} \subseteq [0,1] \times [0,1]$, wobei

$f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

R_2 ist reflexiv ✓,

symmetrisch ✓

transitiv ✓ . Also es handelt sich um eine Äquivalenzrelation

Äquivalenzklassen : $[0,1] \cap \mathbb{Q}$; $[0,1] \cap (\mathbb{R}/\mathbb{Q})$

(c) $x R_3 y$, falls $x+y$ eine gerade Zahl ist. Auf $\mathbb{Z}$

reflexiv ✓

symmetrisch ✓

transitiv ✓

Äquivalenzrelation.

Äquivalenzklassen. $\{2x : x \in \mathbb{Z}\}$ und $\{2x+1 : x \in \mathbb{Z}\}$