Übungsblatt 8

Aufgabe 1

(a)
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 &= 5 \\ -x_2 + 3\alpha x_3 &= -6 \\ (5-\alpha)x_3 &= \alpha - 1 \end{aligned}\right\} (G_1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \alpha & \alpha & 5 \\ 0 & -1 & 3\alpha & -6 \\ 0 & 0 & 5-\alpha & \alpha-1 \end{array}\right) \quad \mathrm{Det}(A) = 2\cdot(-1)\cdot(5-\alpha) = -2\cdot(5-\alpha) = -10+2\alpha$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \alpha & \alpha \\ 0 & -1 & 3\alpha \\ 0 & 0 & 5-\alpha \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & \alpha \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

Also, wenn $\begin{cases} -10+2\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 5 \text{ - genau 1 Lösung} \\ \alpha = 5 \text{ - keine Lösung} \\ \text{kein } \alpha \text{ für einendlich viele Lösungen} \end{cases}$

(b)
$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + \alpha x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3\alpha x_3 &= -1 \\ x_2 + (\alpha^2-2)x_3 &= \alpha - 1 \end{aligned}\right\} (G_2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & -1 \\ 2 & 3 & 3\alpha & -1 \\ 0 & 1 & \alpha^2-2 & \alpha-1 \end{array}\right) \quad \mathrm{Det}\, A = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3\alpha \\ 1 & \alpha^2-2 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \alpha^2-2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(\alpha^2-2) - 3\alpha - 2\alpha^2 + 4 + 2\alpha =$$

$$= 3\alpha^2 - 6 - 3\alpha - 2\alpha^2 + 4 + 2\alpha = \alpha^2 - \alpha - 2$$

$\alpha = -1$: keine Lösung

$\alpha = 2$: unendlich viele Lösungen

$\alpha \neq -1, 2$: genau eine Lösung

Aufgabe 2

(a) $\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 1 \\ -4x_1 \cancel{+} - 2x_2 &= -3 \end{aligned}\right\}$

$A|b = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -3 \end{array}\right)$. $\det A = -4+4 = 0$. In diesem Fall gibt es keine Lösung

(b) $\left\{\begin{aligned} 2x_1 - 2 &= -2x_2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 1 &= 0 \end{aligned}\right.$

$A|b \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{array}\right)$. $\det A = 6 - 8 = -2$. Es gibt eine eindeutige Lösung

(ii) $- 2\times$(i) : $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$, (i) : 2 $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$

(i) + (ii) : $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$, (ii) $\cdot (-1)$: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= -2 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}\right. \Rightarrow \boxed{L(G) = \left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}}$

(c) $\left\{\begin{aligned} -1 + x_1 &= -2x_2 \\ 2x_1 &= -4x_2 + 2 \end{aligned}\right.$

$A|b = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{array}\right)$ $\det A = 0 \Rightarrow$ keine eindeutipe Lösung.

(ii) $- 2\times$(i) $\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Rang$(A) < 2 \Rightarrow$ Es gibt unendlich viele Lösungen.

Sei $x_2 = s \Rightarrow x_1 + 2s = 1 \Rightarrow x_1 = 1 - 2s$

$\boxed{L(G) = \left\{\begin{pmatrix} 1-2s \\ s \end{pmatrix}\right\}}$

Aufgabe 3

(a) $A := \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad \det A = 3 \cdot (-3) - 9 \cdot 5 = \underline{\underline{-54}}$

(b) $B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ -2 & 7 \\ 0 & -1 \end{matrix}$ $\quad \det B = 8 + 2 = \underline{\underline{10}}$

(c) $C := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad \det C = -4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = +4\big(2 \cdot 20 - 5 - 1 \cdot (7 - 12)\big) =$

$= +4(40 - 5 + 5) = \underline{\underline{+160}}$

Aufgabe 4

(a) $\tilde{A} := \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$ Umtausch von zwei Spalten. Determinante ändert ihre Vorzeichen $\quad \det \tilde{A} = \underline{\underline{54}}$

(b) $\tilde{B} := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -2 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad (Z_2)$ 1. Zeile wurde mit $\lambda = 2$ multipliziert $\Rightarrow \det \tilde{B} = 2 \cdot \det B =$

$= \underline{\underline{20}}$

(c) $\tilde{C} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ Zeile 4 = vorherige Zeile 4 + Zeile 3

Diese Operation ändert die Determinante nicht. $\det \tilde{C} = \underline{\underline{160}}$

Aufgabe 5

(a) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & & & & \vdots \\ -1 & & & & \\ -1 & & & & \\ -1 & \cdots & & \cdots & -1 \end{pmatrix}$ z.B. $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$

$R_3 \leftarrow R_3 - R_1, \ldots,$

$R_5 \leftarrow R_5 - R_1 \Rightarrow$ Zeilen 2–5 werden alle null $\Rightarrow$ obere Dreiecksform mit Null-Zeilen

$\Rightarrow \det \underline{\underline{A = 0}}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$R_3 \leftarrow R_3 - R_1$ gibt Null-zeile in Zeile 3 $\Rightarrow \det B = 0$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad R_2 \to R_2 - \tfrac{1}{3} R_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 0 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 - \tfrac{1}{2} R_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det C = 6(-2)(-1) = \underline{\underline{12}}$$

Aufgabe 6

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \alpha x_2 = 0 \\ \alpha x_1 + (\alpha + 1) x_2 = 0 \end{cases}$$

Siehe Aufgabe 3 Übungsblatt 7.
