der Rang von A bzw. (A|b) ablesbar:

- Rang (A) := # Nicht-Nullzeilen in $\tilde{A}$
- Rang (A|b) := # Nicht-Nullzeilen in $(\tilde{A}|\tilde{b})$

Bemerkung

Es gibt für ein LGS mit n Unbekannten:

- # gebundene Variablen = Rang (A)
- # freie Variablen = n - Rang (A)

Lösungen von LGS mit n Unbekannten

Beobachtung

- LGS lösbar $\Leftrightarrow$ Rang (A) = Rang (A|b).
- Falls das LGS lösbar ist, dann gelten:
  - Rang (A) = n $\Rightarrow$ genau eine Lösung vorhanden
  - Rang (A) < n $\Rightarrow$ unendlich viele Lösungen vorhanden

---

Übungsblatt 6

Aufgabe 1

Die Verknüpfung $\odot$ auf $\mathbb{Q}$ sei definiert durch

$$x \odot y := \frac{1}{4} \cdot x \cdot y$$

$(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \odot)$ - eine kommutative Gruppe

Neutralelement - ?

Inverse zu $x \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$?

Das Neutralelement: $x \odot e = x$

$\Rightarrow x \odot e = \frac{1}{4} x e = x$

Da $x \neq 0$, dürfen wir durch x dividieren und somit erhalten $\frac{1}{4} e = 1 \Rightarrow \underline{\underline{e = 4}}$

Inverse zu $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$x \odot x^{-1} = e$

Wie wir schon kennen, ist $e = 4$

$\Rightarrow x \odot x^{-1} = 4$

$\frac{1}{4} x \cdot x^{-1} = 4$

$x^{-1} = 16 \cancel{x}$

Aufgabe 3

$y \in \{0, 1, \dots, 10\}$; $z \in \{0, 1, \dots, 9\}$

(a) 3-528-97217-y

Die Summe ~~ist~~ muss :11 sein.

$\left[\sum_{k=1}^{10} k \cdot x_k\right] = [0]$ – muss gelten.

$3 \cdot 10 + 9 \cdot 5 + \overset{2}{\cancel{4}} \cdot 8 + 8 \cdot 7 + 9 \cdot 6 + 7 \cdot 5 + \overset{2 \cdot 4}{\cancel{}} + 1 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + y$

$= 0$

$30 + 45 + 16 + 56 + 54 + 35 + 8 + 3 + 14 + y \equiv 0$ in $\mathbb{Z}_{11}$

$-3 + 1 + 5 + 1 + (-1) + 2 + 8 + 3 + 3 + y \equiv 0$

3 −2 4

$19 + y \equiv 0$

$8 + y \equiv 0$

$y = 3$

(b) 3-540-z7431-9

$30 + 45 + 32 + 0 + 6z + 35 + 16 + 9 + 2 + 9 \equiv 0 \mod 11$

$-3 + \cancel{1} - \cancel{1} + 6z + \cancel{2} + 5 - \cancel{2} + \cancel{2} - \cancel{2} \equiv 0 \mod 11$

$2 + 6z \equiv 0 \mod 11$

$6z \equiv 9 \mod 11 \Rightarrow 2z \equiv 3 \mod 11 \Rightarrow z = 7$

Aufgabe 2

[96] in $\mathbb{Z}_{296}$ bzgl. „·" invertierbar?

ggT $(96, 296) \neq 1$, also mindestens ≥ 2.

$\Rightarrow$ Nein, [96] ist nicht in $\mathbb{Z}_{296}$ invertierbar

[26] in $\mathbb{Z}_{73}$ bzgl. „·" invertierbar?

ggT (73, 26)

$$73 = 26 \cdot 2 + 21$$
$$26 = 21 \cdot 1 + 5$$
$$21 = 5 \cdot 4 + 1$$
$$5 = 5 \cdot \underbrace{1}_{\text{ggT}(73,26)} + 0$$

Da ggT(73,26) = 1 $\Rightarrow$ [26] ist in $\mathbb{Z}_{73}$ bzgl. „·" invertierbar.

$\Rightarrow \exists x^{-1}: x \cdot x^{-1} = 1$ in $\mathbb{Z}_{73}$, wobei $x = 26$

$$1 = 21 - 4 \cdot 5 = 21 - 4 \cdot (26 - 21 \cdot 1) = 21 - 4 \cdot 26 + 4 \cdot 21 =$$
$$= 5 \cdot 21 - 4 \cdot 26 = 5 \cdot 73 - 14 \cdot 26$$
$$\Rightarrow -14 \cdot 26 \equiv 1 \mod 73$$

$\Rightarrow$ Ist die Inverse von 26 = [-14] oder [59]

Aufgabe 4

$(G, *)$, $(H, \times)$ - Gruppen. Eine Abbildung $\Phi: (G, *) \to (H, \times)$ ist ein Gruppenhomomorphismus, falls $\forall\, a, b \in G$

$\Phi(a * b) = \Phi(a) \times \Phi(b)$ gilt. Ist Φ zusätzlich noch bijektiv, so ist Φ ein Gruppenisomorphismus. Welche der folgenden Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen bzw. Gruppenmorphismen?

(a) $\Phi : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_n, +)$, $z \mapsto [z]$, wobei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Beispiel: $n=2$; $a=2$, $b=3$

$\Phi(2+3)$ muss gleich $\Phi(2) + \Phi(3)$ sein

$\Phi(5) = 1$ $\Phi(2) = 0$; $\Phi(3) = 1$ $\Rightarrow$ Das gilt.

Sei $a = nk_1 + x$; $b = nk_2 + y$; $x, y < n$

Dann $\Phi(a) = \Phi(nk_1 + x) = x$

$\Phi(b) = \Phi(nk_2 + y) = y$

Somit ist $\Phi(a) + \Phi(b) = x + y$

Jetzt betrachten wir $\Phi(a+b) = \Phi(nk_1 + x + nk_2 + y) =$

$= \Phi(\underbrace{n(k_1+k_2)}_{\equiv 0 \bmod n} + x + y)$ was kann $< x+y$ sein, wenn $x+y > n$ ist

Beispiel: $n=4$, $a=2$, $b=3$

$\Phi(2+3) = \Phi(5) = \underline{\underline{1}}$

$\Phi(2) + \Phi(3) = 2+3 = \underline{\underline{5}}$

Somit gilt $\Phi(a+b) = \Phi(a) + \Phi(b)$ nicht $\forall a, b \in G$

(b) $\Phi : (\mathbb{R}, +) \to ((0, \infty), \cdot)$, $x \mapsto e^x$

$\Phi(x+y) = \Phi(x) \cdot \Phi(y)$

$\Phi(x+y) = e^{x+y}$

$\Phi(x) = e^x$

$\Phi(y) = e^y$

$\Rightarrow e^{x+y} = e^x \cdot e^y$. Es handelt sich um einem Gruppenhomomorphismus

Jetzt prüfen wir mal, ob Φ bijektiv ist.

rechtstotal ✓

linkseindeutig ✓ Das ist ein Gruppenisomorphismus

(c) $\Phi : (\mathbb{R}, +) \to (T, \cdot)$, $\varphi \to e^{i\varphi}$, wobei $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

$$\Phi(x) \cdot \Phi(y) = e^{i(x+y)} = \Phi(x+y)$$

Das ist ein Gruppenhomomorphismus & kein Gruppenisomorphismus

---

Aufgabe 5

(a) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -3 \\ -4 & 0 & 7 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right)$ (b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$

(c) Das ist kein LGS

(d) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{array}\right)$ (e) kein LGS

(f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Aufgabe 6

Antwort: A, B, E, F