Hochschule Fulda
Fachbereich Angewandte Informatik
Prof. Dr. A. Radl

Sommersemester 2025
Algebraische Grundlagen – AI1010
Besprechung: 29.04.–30.04.2025

Übungsblatt 1

(komplexe Zahlen)

Hinweis: (Begriffe werden am Fr. 25.04.2025 eingeführt.)
Ist $z = x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{C}$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$, so ist

- $\mathrm{Re}(z) := x$ der *Realteil* von z,
- $\mathrm{Im}(z) := y$ der *Imaginärteil* von z,
- $\overline{z} := x - \mathrm{i}\, y$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl*,
- $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ der *Betrag* von z.

Aufgabe 1
Skizzieren Sie $-6+4\,\mathrm{i}$, i, $-\,\mathrm{i}$ und -1 in der Gaußschen Zahlenebene und geben Sie nachfolgende Real- bzw. Imaginärteile an:

(a) $\mathrm{Re}(-6 + 4\,\mathrm{i})$ (b) $\mathrm{Im}(-6 + 4\,\mathrm{i})$ (c) $\mathrm{Re}(\mathrm{i})$ (d) $\mathrm{Im}(\mathrm{i})$
(e) $\mathrm{Re}(-\,\mathrm{i})$ (f) $\mathrm{Im}(-\,\mathrm{i})$ (g) $\mathrm{Re}(-1)$ (h) $\mathrm{Im}(-1)$

Aufgabe 2
Seien $z_1 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ und $z_2 = -2\sqrt{3} + 2\,\mathrm{i}$. Berechnen Sie:

(a) $\overline{z_1}$ und $\overline{z_2}$ (b) $|z_1|$ und $|z_2|$ (c) $z_1 + z_2$
(d) $z_1 - z_2$ (e) $z_1 \cdot z_2$ (f) $\dfrac{z_1}{z_2}$

Geben Sie Ihre Ergebnisse aus (a), (c)–(f) jeweils in der Form $x + y\,\mathrm{i}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an.

Aufgabe 3
Formen Sie die komplexen Zahlen in die Form $x + y \cdot \mathrm{i}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ um:

(a) $(3 - 2\,\mathrm{i}) \cdot (2 + 4\,\mathrm{i})$ (b) $\dfrac{1}{i}$ (c) $\dfrac{1 + 2\,\mathrm{i}}{3 - 2\,\mathrm{i}}$

Aufgabe 4
Veranschaulichen Sie nachfolgende Mengen in der komplexen Zahlenebene:

(a) $A := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 3\}$
(b) $B := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = -1\}$
(c) $C := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < -1 \text{ und } \mathrm{Im}(z) \geq 2\}$
(d) $D := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z) = 0\}$
(e) $E := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 1 \text{ und } |z| = 2\}$

Aufgabe 5 (Wenn noch Zeit ist ...)
Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie folgende Rechenregeln:

(a) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.
(b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,
(c) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.