Ist in $\mathbb{C}$ die Gleichung

$$z^2+1=0$$

lösbar?

Ja, für $z=i$ und auch für $z=-i$ ist die Gleichung erfüllt.

$$\underbrace{(-i)^2}_{(-i)\cdot(-i)=i\cdot i=-1}+1=0$$

$$i\cdot i=-1$$

$$(-i)\cdot(-i)=-1$$

Schreibweise $\sqrt{-1}$ statt i ist problematisch, denn einerseits soll $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=-1$ gelten, und andererseits sollen auch die Rechenregeln für Wurzeln gelten, also

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{1} = 1 \; ⚡$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

„$\sqrt{-1}$" nicht verwenden als Schreibweise.

wichtige Begriffe

Definition

Sei $z := x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{C}$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$.

- $\mathrm{Re}(z) := x$ ist der Realteil von z.
- $\mathrm{Im}(z) := y$ ist der Imaginärteil von z.

$\in \mathbb{R}$

Beispiel: 1) $z = -3 + 2i$

$\mathrm{Re}(z) = -3$

$\mathrm{Im}(z) = 2 \in \mathbb{R}$

2) $z = -3i = 0 - 3i$

$\mathrm{Re}(z) = 0$

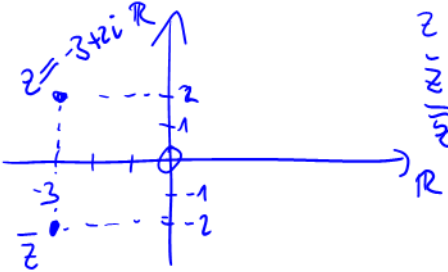
$\mathrm{Im}(z) = -3$

wichtige Begriffe

Definition

Sei $z := x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{C}$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$.

- $\mathrm{Re}(z) := x$ ist der Realteil von z.
- $\mathrm{Im}(z) := y$ ist der Imaginärteil von z.
- $\overline{z} := x - \mathrm{i}\, y$ ist die zu z konjugiert komplexe Zahl.



$z = -3 + 2i$

$\overline{z} = -3 - 2i$

$\overline{\overline{z}} = -3 + 2i = z$

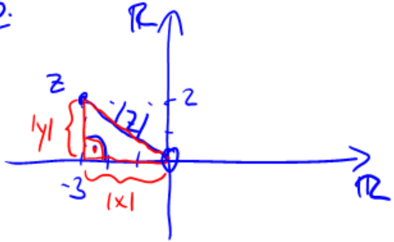
wichtige Begriffe

Definition

Sei $z := x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{C}$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$.

- $\mathrm{Re}(z) := x$ ist der Realteil von z.
- $\mathrm{Im}(z) := y$ ist der Imaginärteil von z.
- $\overline{z} := x - \mathrm{i}\, y$ ist die zu z konjugiert komplexe Zahl.
- $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ ist der Betrag von z. (Abstand zu 0.)

Bsp.:



$z = -3 + 2i$

$|z| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2}$

$= \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$

Anschauung von

$$\underset{\mathbb{C}}{\underset{\Uparrow}{z}} - \underset{\mathbb{C}}{\underset{\Uparrow}{w}}$$

$|z - w|$?

Erinnerung an $\mathbb{R}$:

$|x - y|$ gibt den Abstand zwischen x und y an, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

wichtige Begriffe

Definition

Sei $z := x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{C}$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$.

- $\mathrm{Re}(z) := x$ ist der Realteil von z.
- $\mathrm{Im}(z) := y$ ist der Imaginärteil von z.
- $\overline{z} := x - \mathrm{i}\, y$ ist die zu z konjugiert komplexe Zahl.
- $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ ist der Betrag von z.

Abstand von z zu w

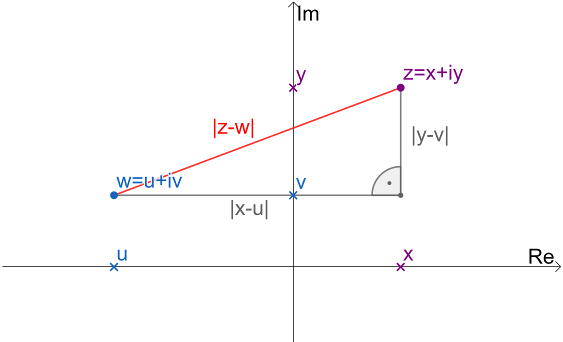
Bemerkung

Für $z = x + \mathrm{i}\, y$, $w = u + \mathrm{i}\, v$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ wird $|z - w|$ interpretiert als der Abstand von z zu w, denn

$$|z - w| = \sqrt{(\mathrm{Re}(z-w))^2 + (\mathrm{Im}(z-w))^2} = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}.$$

$$\| \quad |x + iy - (u+iv)| = |x - u + i(y-v)|$$

Skizze:



Rechenregeln

Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten:

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. Ist $z = x + \mathrm{i}\, y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so ist $|z|^2 = z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$.

$$\overset{\shortparallel}{(x+iy)(x-iy)} = x^2+y^2$$

Rechenregeln

Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten:

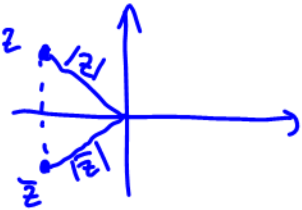
1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. Ist $z = x + \mathrm{i}\, y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so ist $|z|^2 = z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$.
4. Falls $z \neq 0$, dann ist $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Rechenregeln

Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten:

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. Ist $z = x + \mathrm{i}\, y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so ist $|z|^2 = z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$.
4. Falls $z \neq 0$, dann ist $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.
5. $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}(z - \overline{z})$
6. $|z| = |\overline{z}|$



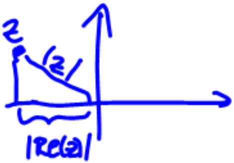
Rechenregeln

Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten:

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. Ist $z = x + \mathrm{i}\, y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so ist $|z|^2 = z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$.
4. Falls $z \neq 0$, dann ist $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.
5. $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z})$
6. $|z| = |\overline{z}|$
7. $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$

$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$

$\underbrace{|x|}_{|\mathrm{Re}(z)|} = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$



Rechenregeln

Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten:

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. Ist $z = x + \mathrm{i}\, y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so ist $|z|^2 = z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$.
4. Falls $z \neq 0$, dann ist $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.
5. $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}(z - \overline{z})$
6. $|z| = |\overline{z}|$
7. $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$
8. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|, \quad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ falls $w \neq 0$

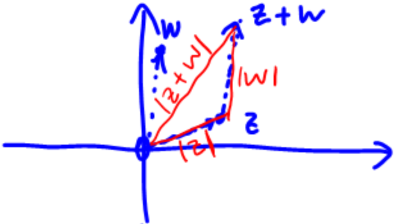
Beweisidee:
1.–8. kann man direkt nachprüfen.

Dreiecksungleichung

Satz

Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z+w| \leq |z| + |w|.$$



Beweisidee:

$$|z+w|^2 \overset{3.}{=} (z+w)\overline{(z+w)} \overset{2.}{=} (z+w)(\bar{z}+\bar{w})$$

$$\overset{\text{Distr.}}{=} z\cdot\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}$$

$$\overset{3.}{=} |z|^2 + z\bar{w} + \underbrace{\bar{z}w}_{\overset{1.}{=}\,\bar{z}\cdot\bar{\bar{w}}\,\overset{2.}{=}\,\overline{z\cdot\bar{w}}} \quad |w|^2$$

$\bar{\bar{w}} = w$

$$\overset{5.}{=} |z|^2 + 2\underbrace{\mathrm{Re}(z\bar{w})}_{\le |\mathrm{Re}(z\bar{w})| \underset{7.}{\le} |z\bar{w}| \underset{8}{=} |z|\cdot|\bar{w}| \underset{6.}{=} |z||w|} + |w|^2$$

$$\le |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2$$

$$= (|z| + |w|)^2$$

$$\Rightarrow \quad |z+w| \le |z| + |w|. \quad \square$$

Algebraische Grundlagen der Informatik

SoSe 2025

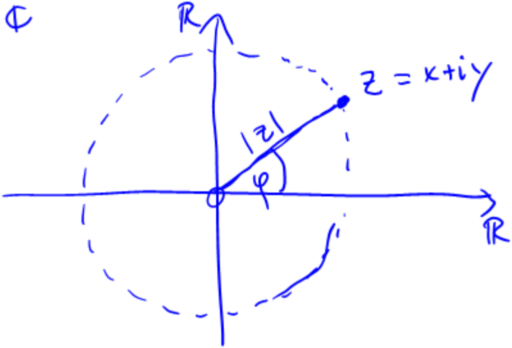
KAPITEL I: Komplexe Zahlen

2. Polardarstellung

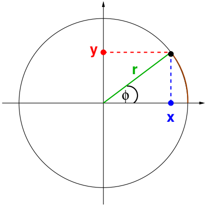
Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl

Email: agnes.radl@informatik.hs-fulda.de

Erinnerung (WiSe 2024/2025): Sinus und Kosinus

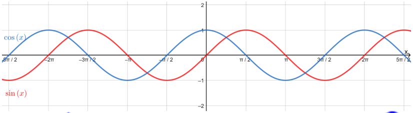


Erinnerung (WiSe 2024/2025): Sinus und Kosinus

- 

$$\varphi = \frac{\text{Länge des Kreisbogens}}{r}$$
$$\sin(\varphi) = \frac{y}{r}$$
$$\cos(\varphi) = \frac{x}{r}$$
Kreiszahl $\pi = 3,141...$
Kreisumfang $2\pi r$

- $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ und $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ sind 2π-periodisch, das heißt, für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt:
$\sin(\varphi + 2\pi) = \sin(\varphi)$ und $\cos(\varphi + 2\pi) = \cos(\varphi)$.

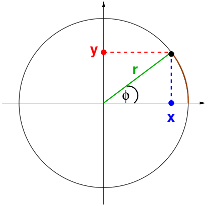


Reihendarstellung vom WiSe 2024/2025:

$$\sin(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!}$$

Erinnerung (WiSe 2024/2025): Sinus und Kosinus

- 

  $\varphi = \frac{\text{Länge des Kreisbogens}}{r}$

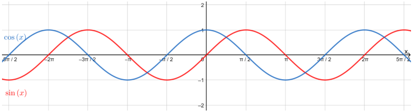
  $\sin(\varphi) = \frac{y}{r}$

  $\cos(\varphi) = \frac{x}{r}$

  Kreiszahl $\pi = 3,141...$

  Kreisumfang $2\pi r$

- $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ und $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ sind 2π-periodisch, das heißt, für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt:
  $\sin(\varphi + 2\pi) = \sin(\varphi)$ und $\cos(\varphi + 2\pi) = \cos(\varphi)$.



	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1

- $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$, $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$
- Trigonometrischer Pythagoras: $\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$.

Additionstheoreme

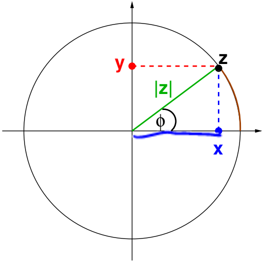
Für alle $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ gelten:

- $\sin(\varphi + \psi) = \sin(\varphi)\cos(\psi) + \cos(\varphi)\sin(\psi)$,
- $\cos(\varphi + \psi) = \cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi)$.

Trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen

Eine komplexe Zahl $0 \neq z = x + \mathrm{i}\, y, x, y \in \mathbb{R}$ lässt sich nun schreiben als

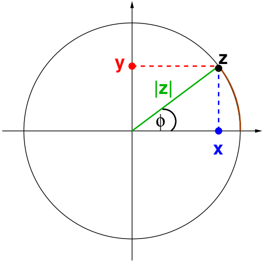
$$
\begin{aligned}
z &= x + \mathrm{i}\, y \\
&= |z| \frac{x}{|z|} + \mathrm{i}\, |z| \frac{y}{|z|} \\
&= |z| \Bigg(\underbrace{\frac{x}{|z|}}_{\cos(\varphi)} + \mathrm{i}\, \underbrace{\frac{y}{|z|}}_{\sin(\varphi)} \Bigg)
\end{aligned}
$$



Trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen

Eine komplexe Zahl $0 \neq z = x + \mathrm{i}\, y, x, y \in \mathbb{R}$ lässt sich nun schreiben als

$$\begin{aligned} z &= x + \mathrm{i}\, y \\ &= |z| \, \frac{x}{|z|} + \mathrm{i}\, |z| \, \frac{y}{|z|} \\ &= |z| \left(\frac{x}{|z|} + \mathrm{i}\, \frac{y}{|z|} \right) \\ &= |z| \, (\underbrace{\cos(\varphi) + \mathrm{i} \sin(\varphi)}_{e^{i\varphi}}) \, , \end{aligned}$$



wobei $\varphi \in \mathbb{R}$ bis auf Vielfache von 2π festgelegt ist. Oft fordert man $\varphi \in [0, 2\pi)$, um Eindeutigkeit zu erhalten.

Polardarstellung komplexer Zahlen

Definition

Für $\varphi \in \mathbb{R}$ definiere

$$e^{i\varphi} := \cos(\varphi) + i \sin(\varphi).$$

$x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

ÜA: Zeige, dass

$$\exp(i\varphi) = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

Reihendarstellungen verwenden.

Polardarstellung komplexer Zahlen

Definition

Für $\varphi \in \mathbb{R}$ definiere

$$e^{\mathrm{i}\varphi} := \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi).$$

Bemerkung

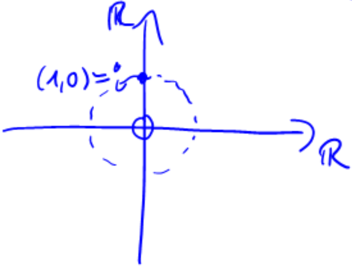
Jedes $z \in \mathbb{C}$ besitzt eine Darstellung (die so genannte „Polardarstellung") der Form

$$\boxed{z = re^{\mathrm{i}\varphi}} \quad \text{mit } r \in [0, \infty) \text{ und } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Dabei ist $r = |z|$.
Falls $z \neq 0$, dann wird φ als *ein* Argument von z bezeichnet und ist bis auf Addition von $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, eindeutig bestimmt.

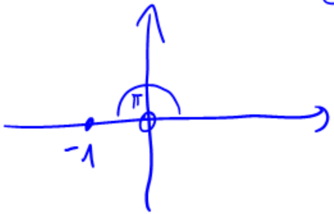
Beispiele zur Polardarstellung

- i $= 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} + i \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} = i$



Beispiele zur Polardarstellung

- $\mathrm{i} = 1 \cdot e^{\mathrm{i}\,\pi/2} \quad (= \underbrace{\cos(\pi/2)}_{=0} + \mathrm{i}\underbrace{\sin(\pi/2)}_{=1})$
- $-1 = 1 \cdot e^{i\pi} \quad (= \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + i \underbrace{\sin(\pi)}_{=0})$



Beispiele zur Polardarstellung

- $\mathrm{i} = 1 \cdot e^{\mathrm{i}\,\pi/2} \quad (= \underbrace{\cos(\pi/2)}_{=0} + \mathrm{i}\underbrace{\sin(\pi/2)}_{=1})$
- $-1 = 1 \cdot e^{\mathrm{i}\,\pi} \quad (= \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + \mathrm{i}\underbrace{\sin(\pi)}_{=0})$

Umrechnung von Polardarstellung in kartesische Form

Sei $z = \underbrace{re^{i\varphi}}\in \mathbb{C}$, wobei $r \in [0, \infty), \varphi \in \mathbb{R}$.

$= r \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$

$= r\cos(\varphi) + i \cdot r\sin(\varphi)$

Umrechnung von Polardarstellung in kartesische Form

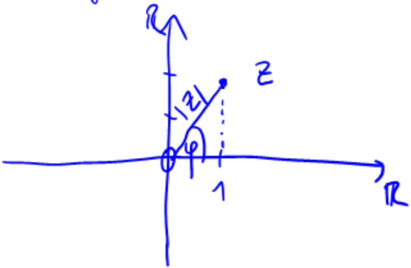
Sei $z = re^{\mathrm{i}\varphi} \in \mathbb{C}$, wobei $r \in [0, \infty), \varphi \in \mathbb{R}$.

1.) $x = r\cos(\varphi)$
2.) $y = r\sin(\varphi)$

Kartesische Form von z: $\quad z = x + y\,\mathrm{i}$.

Umrechnung von kartesischer Form in Polardarstellung

Bsp.: $z = 1 + \sqrt{3}\, i$



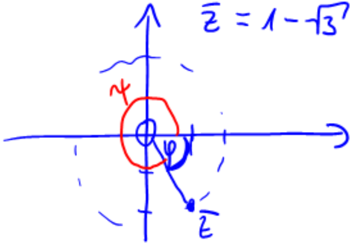
$$r = |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos(\varphi) = \frac{x}{|z|} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \arccos\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$\bar{z} = 1 - \sqrt{3}\, i$



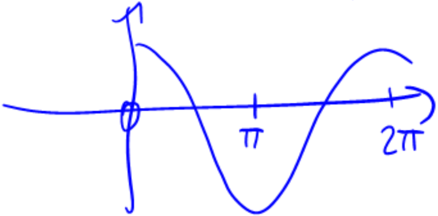
$$|\bar{z}| = \ldots = 2$$

$$\cos(\psi) = \frac{x}{|\bar{z}|} = \frac{x}{|z|} = \cos(\varphi)$$

$$\psi \overset{?}{=} \arccos\left(\frac{x}{|\bar{z}|}\right)$$

$$\psi = 2\pi - \varphi = 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{|z|}\right)$$

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$



Umrechnung: kartesische Form $\to$ Polardarstellung

Umrechnung von kartesischer Form in Polardarstellung

Sei $z = x + y\,\mathrm{i} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$.

1.) $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

2.) $\varphi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{|z|}, & \text{falls } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{|z|}, & \text{falls } y < 0 \end{cases}$

Polardarstellung von z: $\quad z = re^{\mathrm{i}\,\varphi}$