Algebraische Grundlagen der Informatik

SoSe 2025

KAPITEL I: Komplexe Zahlen

1. Grundlagen

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl

Email: agnes.radl@informatik.hs-fulda.de

Erinnerung: bisherige Zahlbereiche

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ „Menge der natürlichen Zahlen“
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$ „Menge der ganzen Zahlen“
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$ „Menge der rationalen Zahlen“
- $\mathbb{R} =$ Menge aller Dezimalzahlen „Menge der reellen Zahlen“

Erinnerung: bisherige Zahlbereiche

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ „Menge der natürlichen Zahlen“
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$ „Menge der ganzen Zahlen“
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$ „Menge der rationalen Zahlen“
- $\mathbb{R} =$ Menge aller Dezimalzahlen „Menge der reellen Zahlen“

Bemerkung

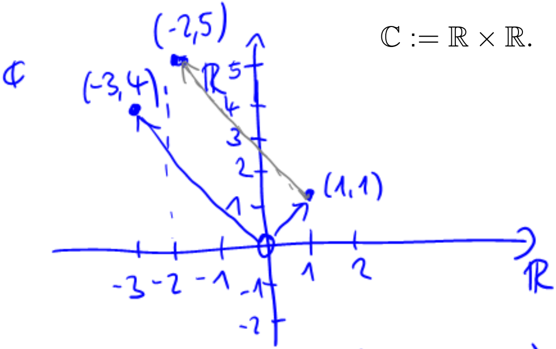
- Die Gleichung $x + 2 = 1$ ist nicht in $\mathbb{N}$ lösbar, aber in $\mathbb{Z}$.
- Die Gleichung $2x = 1$ ist nicht in $\mathbb{Z}$ lösbar, aber in $\mathbb{Q}$.
- Die Gleichung $x^2 = 2$ ist nicht in $\mathbb{Q}$ lösbar, aber in $\mathbb{R}$.
- Die Gleichung $x^2 = -1$ ist nicht in $\mathbb{R}$ lösbar.

Komplexe Zahlen

Definition

Unter der Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ versteht man die Menge

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$



Bsp. $(1,1) \in \mathbb{C}$

$(-3,4) \in \mathbb{C}$

$$(1,1) + (-3,4) = (1-3, 1+4) = (-2,5)$$

Komplexe Zahlen

Definition

Unter der Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ versteht man die Menge

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Die Addition „$+$“, Subtraktion „$-$“ und Multiplikation „$\cdot$“ zweier komplexer Zahlen (x, y) und (u, v) sind definiert durch

- $(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v)$,

„Neutralelement“ in $\mathbb{R}$ ist 0, denn
$x + 0 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

„Neutralelement“ in $\mathbb{C}$ ist $(0,0)$, denn
$(x,y) + (0,0) = (x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{C}$.

Komplexe Zahlen

Definition

Unter der Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ versteht man die Menge

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Die Addition „$+$“, Subtraktion „$-$“ und Multiplikation „$\cdot$“ zweier komplexer Zahlen (x, y) und (u, v) sind definiert durch

- $(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v)$,
- $(x, y) - (u, v) := (x - u, y - v)$,

Idee für Multiplikation:

$$(x,y)\cdot(u,v) = (x\cdot u, y\cdot v)$$

Erinnerung an $\mathbb{R}$: $a, b \in \mathbb{R}$

$$a\cdot b = 0 \Rightarrow a=0 \text{ oder } b=0$$

Gesucht:

$$\underbrace{(x,y)\cdot(u,v)}_{(xu,yv)}=(0,0),$$

aber weder $(x,y)=(0,0)$ noch $(u,v)=(0,0)$.

$$(1,0)\cdot(0,1)=(1\cdot 0,\ 0\cdot 1)=(0,0),$$

aber $(1,0)\neq(0,0)$, $(0,1)\neq(0,0)$.

Komplexe Zahlen

Definition

Unter der Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ versteht man die Menge

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Die Addition „$+$“, Subtraktion „$-$“ und Multiplikation „$\cdot$“ zweier komplexer Zahlen (x, y) und (u, v) sind definiert durch

- $(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v)$,
- $(x, y) - (u, v) := (x - u, y - v)$,
- $(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu)$.

Komplexe Zahlen

Definition

Unter der Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ versteht man die Menge

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Die Addition „$+$“, Subtraktion „$-$“ und Multiplikation „$\cdot$“ zweier komplexer Zahlen (x, y) und (u, v) sind definiert durch

- $(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v)$,
- $(x, y) - (u, v) := (x - u, y - v)$,
- $(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu)$.

In $\mathbb{R}$ Neutralelement bzgl. Multiplikation ist 1, denn $x \cdot 1 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
In $\mathbb{C}$ Neutralelement bzgl. Multiplikation ist $(1, 0)$, denn $(x, y) \cdot (1, 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x, y)$

für alle $(x,y) \in \mathbb{C}$,

Beobachtungen

- Addition, Multiplikation sind kommutativ. ($\rightarrow$ nachrechnen)
- Es gelten Assoziativ- und Distributivgesetz. ($\rightarrow$ nachrechnen)
- $(0,0)$ ist das „Neutralelement“ der Addition, denn

$$(x,y)+(0,0)=(x+0,y+0)=(x,y).$$

- $(1,0)$ ist das „Neutralelement“ der Multiplikation, denn

$$(x,y)\cdot(1,0)=(x\cdot 1-y\cdot 0,x\cdot 0+y\cdot 1)=(x,y).$$

In $\mathbb{R}$: $0 \neq z \in \mathbb{R}$

$$z \cdot \frac{1}{z} = 1$$

„Inverse" von z, also die Zahl, mit der z multipliziert werden muss, damit 1 herauskommt.

Neutralelement von $\mathbb{R}$ bzgl. Mult.

Dann $w : z = w \cdot \frac{1}{z}$, $w, z \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$.

In $\mathbb{C}$: Suche zu $(0,0) \neq (x,y) \in \mathbb{C}$ ein $(u,v) \in \mathbb{C}$, so dass $(x,y) \cdot (u,v) = (1,0)$.

Neutralelement in $\mathbb{C}$ bzgl. Mult.

Dann Division durch (x,y) ist Multiplikation mit (u,v).

Division in $\mathbb{C}$

$(x,y)\cdot(u,v) = (xu - yv, xv + yu)$

Beobachtung

Falls $(x, y) \neq (0, 0)$, dann ist

$$
\begin{aligned}
&(x, y) \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right) \\
= &\left(x\frac{x}{x^2+y^2} - y\frac{-y}{x^2+y^2}, x\frac{-y}{x^2+y^2} + y\frac{x}{x^2+y^2} \right)
\end{aligned}
$$

Division in $\mathbb{C}$

Beobachtung

Falls $(x, y) \neq (0, 0)$, dann ist

$$\begin{aligned}
&(x, y) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \\
&= \left(x \frac{x}{x^2 + y^2} - y \frac{-y}{x^2 + y^2}, x \frac{-y}{x^2 + y^2} + y \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \\
&= (1, 0).
\end{aligned}$$

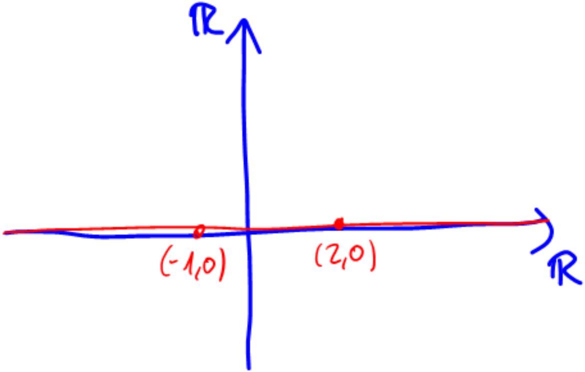
Damit definiere nun die Division:

Definition

Falls $(u, v), (x, y) \in \mathbb{C}$ und $(x, y) \neq (0, 0)$, so definiert man

$$\frac{(u, v)}{(x, y)} := (u, v) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

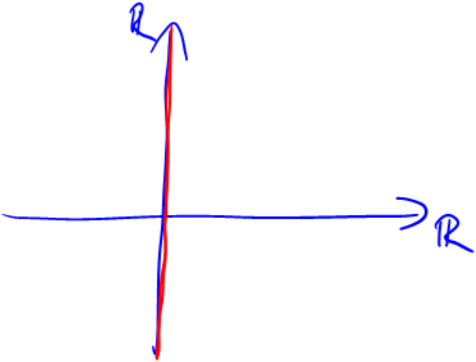
Einbettung von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



$(-1,0) + (2,0) = (1,0)$

allgemein: $(x,0) + (y,0) = (x+y, 0)$

$$(x,0) \cdot (y,0) = (x \cdot y - 0 \cdot 0,\ x \cdot 0 + 0 \cdot y) = (xy, 0)$$



$$(0,x)+(0,y)=(0,x+y)$$

$$(0,x)\cdot(0,y)=(0\cdot 0-x\cdot y,\ 0\cdot y+x\cdot 0)$$
$$=(-x\cdot y,\ 0)$$

Einbettung von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$

Beobachtung

Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

- $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$
- $(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$

Komplexe Zahlen der Form $(x, 0)$ werden also wie reelle Zahlen addiert und multipliziert.

Fazit

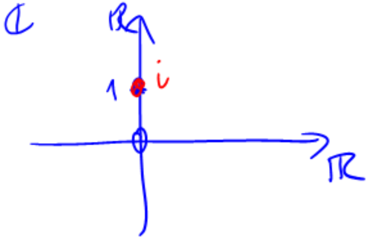
Jede reelle Zahl x kann also als komplexe Zahl $(x, 0)$ aufgefasst werden. In diesem Sinn ist

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

Andere Notation für komplexe Zahlen

Wir verwenden meistens folgende Notation:

- x statt $(x, 0)$
- i statt $(0, 1)$



Andere Notation für komplexe Zahlen

Wir verwenden meistens folgende Notation:

- x statt $(x, 0)$
- i statt $(0, 1)$

Wegen

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + \underbrace{(0, 1) \cdot (y, 0)}$$

$$= (0 \cdot y - 1 \cdot 0,\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot y)$$

$$= (0, y)$$

Andere Notation für komplexe Zahlen

Wir verwenden meistens folgende Notation:

- x statt $(x, 0)$
- i statt $(0, 1)$

Wegen

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + \mathrm{i}\, y$$

schreiben wir

- $x + \mathrm{i}\, y$ statt (x, y).

Andere Notation für komplexe Zahlen

Wir verwenden meistens folgende Notation:

- x statt $(x, 0)$
- i statt $(0, 1)$

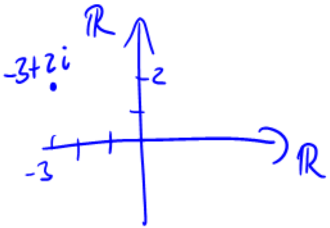
Wegen

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + \mathrm{i}\, y$$

schreiben wir

- $x + \mathrm{i}\, y$ statt (x, y).

$-3 + 2i \rightsquigarrow (-3, 2)$



Beispiele

- $\mathrm{i}^2 = (0,1)\cdot(0,1)$

$$\underset{\substack{\text{Def.}\\\text{Mult.}}}{=} (0\cdot 0 - 1\cdot 1,\ 1\cdot 0 + 0\cdot 1) = (-1,0) = -1$$

Beispiele

- $i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$
- $(1 + 2\,i)(2 + 3\,i)$

$$= \big((1,0) + (2,0)\cdot(0,1)\big)\,\big((2,0) + (3,0)\cdot(0,1)\big)$$

Distr. $\underline{=}$ . . . .

Beispiele

- $\mathrm{i}^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$
- $(1+2\,\mathrm{i})(2+3\,\mathrm{i}) \overset{\text{Distr.}}{=} 1\cdot(2+3\,\mathrm{i}) + 2\,\mathrm{i}\cdot(2+3\,\mathrm{i})$

$$= 2 + 3\,\mathrm{i} + 4\,\mathrm{i} + \underbrace{6\,\mathrm{i}^2}_{-6}$$

$$= (2,0) + (0,3) + (0,4) + (-6,0)$$

$$= (-4,7) = -4 + 7i$$

Beispiele

- $\mathrm{i}^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$
- $(1+2\,\mathrm{i})(2+3\,\mathrm{i}) \overset{\text{Distr.}}{=} 1\cdot(2+3\,\mathrm{i}) + 2\,\mathrm{i}\cdot(2+3\,\mathrm{i})$

$$= 2+3\,\mathrm{i}+4\,\mathrm{i}+6\,\mathrm{i}^2$$

$$= -4+7\,\mathrm{i}$$

- Darstellung von $\frac{1+2\,\mathrm{i}}{2-3\,\mathrm{i}}$ in der Form $x+\mathrm{i}\,y$, $x,y\in\mathbb{R}$:

$$\frac{1+2\,\mathrm{i}}{2-3\,\mathrm{i}} \cdot \underbrace{\frac{2+3i}{2+3i}}_{=1} = \frac{(1+2i)\cdot(2+3i)}{2^2-(3i)^2}$$

$$= \frac{-4+7i}{4-9\underbrace{i^2}_{-1}} = \frac{-4+7i}{4+9} = \frac{-4+7i}{13} = -\frac{4}{13}+\frac{7}{13}i$$

Beispiele

- $\mathrm{i}^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$
- $$\begin{aligned}(1+2\,\mathrm{i})(2+3\,\mathrm{i}) &\overset{\text{Distr.}}{=} 1\cdot(2+3\,\mathrm{i}) + 2\,\mathrm{i}\cdot(2+3\,\mathrm{i}) \\ &= 2+3\,\mathrm{i}+4\,\mathrm{i}+6\,\mathrm{i}^2 \\ &= -4+7\,\mathrm{i}\end{aligned}$$
- Darstellung von $\frac{1+2\,\mathrm{i}}{2-3\,\mathrm{i}}$ in der Form $x+\mathrm{i}\,y$, $x,y\in\mathbb{R}$:

$$\frac{1+2\,\mathrm{i}}{2-3\,\mathrm{i}} = \frac{1+2\,\mathrm{i}}{2-3\,\mathrm{i}}\cdot\frac{2+3\,\mathrm{i}}{2+3\,\mathrm{i}} = \frac{-4+7\,\mathrm{i}}{13} = -\frac{4}{13}+\frac{7}{13}\,\mathrm{i}\,.$$