Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Физико-механический институт

Кафедра «Прикладная математика»

Отчёт
по лабораторной работе №1
по дисциплине
«Интервальный анализ»

Выполнил:
Чайковский Николай
группа:
5030102/00201

Проверил:
к.ф.-м.н., доцент
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2023 г.

Содержание

1 Постановка задачи **2**

2 Теория **2**

3 Реализация **3**

3.1 Описание алгоритма 3

4 Результат **3**

4.1 Первый случай матрицы радиусов 3

4.2 Второй случай матрицы радиусов 3

5 Вывод **3**

1 Постановка задачи

Пусть дана вещественная матрица (1)

$$\mathrm{mid}A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{1}$$

и неотрицательное число

$$\Delta \in \left[0, \min\{a_{ij},\ i,j = \overline{1,2}\}\right] \tag{2}$$

Рассмотрим две матрицы радиусов:

$$\mathrm{rad}A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \mathrm{rad}A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Построим интервальную матрицу следующего вида

$$A = \begin{pmatrix} [a_{11} - \Delta \cdot \mathrm{rad}A_i^{(1,1)},\ a_{11} + \Delta \cdot \mathrm{rad}A_i^{(1,1)}] & [a_{12} - \Delta \cdot \mathrm{rad}A_i^{(1,2)},\ a_{12} + \Delta \cdot \mathrm{rad}A_i^{(1,2)}] \\ [a_{21} - \Delta \cdot \mathrm{rad}A_i^{(2,1)},\ a_{21} + \Delta \cdot \mathrm{rad}A_i^{(2,1)}] & [a_{22} - \Delta \cdot \mathrm{rad}A_i^{(2,2)},\ a_{22} + \Delta \cdot \mathrm{rad}A_i^{(2,2)}] \end{pmatrix} \tag{4}$$

$i = \overline{1,2}$.
Необходимо найти $\min\{\Delta | 0 \in \det A\}$.
В целях конкретизации и возможности проверки решения будем использовать следующую матрицу

$$\mathrm{mid}A = \begin{pmatrix} 1.05 & 1 \\ 0.95 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

2 Теория

Укажем основные арифметические операции для интервалов:

$$[a,b] + [c,d] = [a+c, b+d] \tag{6}$$

$$[a,b] - [c,d] = [a-d, b-c] \tag{7}$$

$$[a,b] \cdot [c,d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)] \tag{8}$$

$$\frac{[a,b]}{[c,d]} = \left[\min\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right), \max\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right)\right] \tag{9}$$

$$\mathrm{mid}[a,b] = \frac{1}{2}(a+b) \tag{10}$$

$$\mathrm{wid}[a,b] = (b-a) \tag{11}$$

$$\mathrm{rad}[a,b] = \frac{1}{2}(b-a) \tag{12}$$

Пусть $\mathrm{mid}A = \{a_{ij}\}_{i,j\in}$ – точечная вещественная матрица середин, $\mathrm{rad}A = \{r_{ij}\}_{i,j\in}$ – точечная вещественная матрица радиусов. Операцией midrad назовем следующую функцию:

$$\mathrm{midrad}(\mathrm{mid}A,\ \mathrm{rad}A) = \{[\mathrm{mid}A_{ij} - \mathrm{rad}A_{ij}],\ [\mathrm{mid}A_{ij} + \mathrm{rad}A_{ij}]\}_{i,j\in} \tag{13}$$

Результатом операции является интервальная матрица.

3 Реализация

Для решения данной задачи была написана программа на языке Python. Дополнительно был реализован класс Interval, описывающий интервальную арифметику для удобства написания кода.

3.1 Описание алгоритма

1. Проверим вхождение нуля в интервал $\det A$ при максимально допустимом значении.
2. Если $0 \notin \det A$, то данная задача не имеет решения. Иначе переходим к шагу 3.
3. Если $\det A$ является симметричным интервалом, то минимальное значение Δ равно 0, так как $0 = \mathrm{mid}[a, b]$.
4. Рассмотрим весь допустимый интервал возможных значений Δ. Методом половинного деления будем сужать его до тех пор, пока не достигнем точности $\epsilon = 10^{-14}$.

4 Результат

4.1 Первый случай матрицы радиусов

Действуя согласно описанному алгоритму, мы получаем начальное приближение $\Delta = 0.95$. Далее применяем операцию midrad к матрицам mid$A$ и radA_1, получаем интервальную матрицу:

$$A_1 = \begin{pmatrix} [0.1, 2] & [0.05, 1.95] \\ [0, 1.9] & [0.05, 1.95] \end{pmatrix} \tag{14}$$

Проверим вхождение нуля в $\det A_1$:

$$\det A_1 = [-3.7, 3.9] \tag{15}$$

Отсюда видно, что $0 \in \det A_1$, а также mid$A_1 \neq 0$, значит, переходим к пункту 4 описанного алгоритма. В результате получаем $\min \Delta \approx 0.025$. В таком случае $\det A_1 = [2.220 \cdot 10^{-16},\ 0.2]$. Левый конец $\det A_1$ с точностью до машинного эпсилон равен нулю.

4.2 Второй случай матрицы радиусов

Применим операцию midrad теперь к матрицам mid$A$ и radA_2 и получим

$$A_2 = \begin{pmatrix} [0.1, 2] & 1 \\ [0, 1.9] & 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Проверим вхождение нуля в $\det A_2$:

$$\det A_2 = [-1.8, 2] \tag{17}$$

Вновь видим, что $0 \in \det A_2$, а также mid$A_2 \neq 0$, значит, переходим к пункту 4 алгоритма.
В результате получаем $\min \Delta \approx 0.05$. В таком случае $\det A_2 = [1.110 \cdot 10^{-16},\ 0.2]$. Левый конец $\det A_2$ с точностью до машинного эпсилон равен нулю.

5 Вывод

В ходе работы мы выяснили, что матрица A_1 становится неособенной, когда её радиус достигает значения $\Delta_1 = 0.025$. Для матрицы A_2 таково значение $\Delta_2 = 0.05$. Заметим, что $\Delta_1 < \Delta_2$. Такой результат мы получаем, потому что матрица A_2 имеет меньше интервальных элементов.