

Wirbelstromverluste in Wicklungen induktiver Bauelemente

Prof. Dr. J. Biela

ETH Zürich

Neben den Leistungshalbleitern und den topologischen Überlegungen spielen im Bereich der Leistungselektronik die magnetischen Komponenten eine wichtige Rolle, wenn man die Baugrösse oder die Effizienz eines Konverters betrachtet. Die grundlegenden Zusammenhänge für Induktivitäten und Transformatoren wurden bereits in den Kapiteln 5 und 6 der Vorlesung *Leistungselektronik* behandelt. Dort wurde neben den Grundgleichungen auch die Dimensionierung der Bauelemente sowie die Abschätzung des Volumens behandelt. Dabei wurden für die Berechnung der Verluste in den Windungen nur die DC-Verluste berücksichtigt, d.h. es wurde angenommen, dass der Strom in den Leitern die gleichen Verluste erzeugt wie ein reiner DC-Strom.

Ist die Frequenz des Stromes bzw. die Frequenz der Harmonischen des Stromes im Verhältnis zum Durchmesser des Leiters jedoch relativ hoch, so treten neben den DC-Verlusten auch noch Wirbelstromverluste auf. Diese werden durch die Wirbelströme, welche durch magnetische Wechselfelder induziert werden, hervorgerufen.

Für die Wirbelströme gibt es prinzipiell zwei unterschiedliche Ursachen:

- Skin-Effekt: Der Strom im Leiter erzeugt ein magnetisches Wechselfeld in- und ausserhalb des Leiter. Das Wechselfeld im Leiter führt dazu, dass elektrische Felder im Leiter induziert werden. Aufgrund dieser elektrischen Felder fliessen Wirbelströme im Leiter, welche die Stromdichte in der Mitte des Leiters reduzieren und am Rand erhöhen.
- Proximity-Effekt: Ein Wechselstrom in einem Leiter *A* erzeugt ein magnetisches Wechselfeld in- und ausserhalb dieses Leiters. In dem magnetischen Wechselfeld ausserhalb des Leiters *A* befindet sich ein zweiter Leiter *B*. Durch das Wechselfeld wird wiederum ein elektrisches Feld induziert, welches zu einem Wirbelstrom führt. Dabei wird der effektiv fliessende Strom im Leiter *B* durch die

Wirbelströme nicht verändert, d.h. war dieser ohne das magnetische Wechselfeld z.B. stromlos $I_B = 0$, so ist der effektive Strom auch mit magnetischem Wechselfeld gleich Null. Die Wirbelströme fließen dabei z.B. im Kreis.

In den folgenden Abschnitten werden zuerst die durch den Skin- und den Proximity-Effekt induzierten Ströme anschaulich hergeleitet und dann für den stark vereinfachten 1-dimensionalen Verlauf analytisch berechnet.

1.1 Skin-Effekt

Für die deskriptive Herleitung des Skin-Effektes soll zuerst ein Rundleiter mit homogener Stromverteilung, wie in Abbildung 1.1 dargestellt, betrachtet werden. Durch den Stromfluss wird ein magnetisches Feld inner- und ausserhalb des Leiters hervorgerufen (Abbildung 1.1(b)). Die Amplitude des Feldes ist dabei ortsabhängig und kann mit dem Durchflutungssatz berechnet werden (siehe auch Kapitel 6.4.2. Leistungselektronik-Skript):

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \iint J_z d\vec{A} \quad (1.1)$$

Im betrachteten Fall soll dabei angenommen werden, dass der Integrationsweg einen Kreis um den Mittelpunkt des Leiters beschreibt. Befindet sich der Integrationsweg ausserhalb des Leiters so ist

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = 2\pi r H = \iint J_z d\vec{A} = I \quad (1.2)$$

und damit ergibt sich für das H-Feld ausserhalb des Leiters

$$H_{r>R} = \frac{I}{2\pi r}. \quad (1.3)$$

Im Leiter nimmt die Amplitude des umschlossenen Stromes proportional zur Fläche ab, womit

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = 2\pi r H = \iint J_z d\vec{A} = J_z r^2 \pi = \frac{I}{R^2} r^2 \quad (1.4)$$

folgt. Damit ergibt sich für das H-Feld innerhalb des Leiters

$$H_{r<R} = \frac{I}{2\pi R} \frac{r}{R}. \quad (1.5)$$

Dabei wird eine homogene Stromverteilung im Leiter angenommen, d.h. der Einfluss des Skin-Effektes wird vernachlässigt.

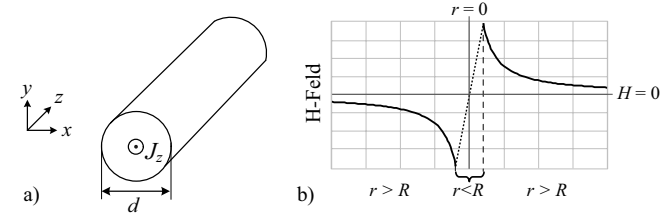


Abb. 1.1: a) Querschnitt eines in z-Richtung unendlichen Rundleiters mit homogener Stromdichte J_z . b) Amplitude des H-Feldes als Funktion des Abstandes zum Mittelpunkt des Leiters unter Annahme, dass die Stromverteilung im Leiter homogen ist (Vernachlässigung des Skin-Effektes).

Die Amplitude des H-Feldes ist dabei direkt proportional zur Amplitude des Stromes und mit einem zeitlich veränderlichen Strom folgt somit auch ein zeitlich veränderliches H-Feld.

Bemerkung: Hierbei ist zu beachten, dass mit steigender Frequenz die Wellenlänge des Stromes abnimmt. Erreicht diese Werte im Bereich der Länge des Leiters müssen Wellenphänomene, wie diese z.B. bei Antennen auftreten, berücksichtigt werden. Im Folgenden wird angenommen, dass die Wellenlänge des Stromes gross im Verhältnis zu den Abmessungen der betrachteten Leiter ist und Wellenphänomene vernachlässigt werden können.

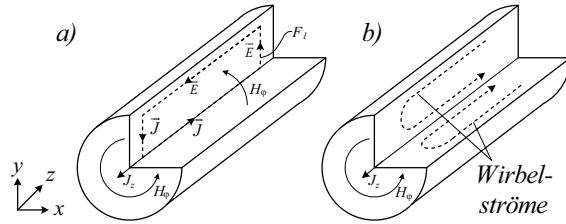


Abb. 1.2: Induktion von Wirbelströmen in einem vom Wechselstrom durchflossenen Leiter basierend auf dem Faradayschen Gesetz. b) Dabei wird die ursprüngliche Stromdichte J_z durch die Wirbelströme in der Mitte abgeschwächt und am Rand verstärkt.

Betrachtet man nun die Fläche F_1 in der yz -Ebene im Leiter (siehe Abbildung 1.2)(a), so erkennt man, dass durch diese Fläche ein zeitlich veränderliches H-Feld bzw. ein zeitlich veränderliches B-Feld fließt ($\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$). Mit dem Faradayschen Gesetz

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} d\vec{A} \quad (1.6)$$

ergibt sich für den betrachteten Fall ein induziertes elektrisches Feld \vec{E} entlang des Integrationsweges um die Fläche F_1 . Mit dem Ohmschen Gesetz $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ folgt daraus ein Stromfluss in Richtung des elektrischen Feldes. Dieser fließt in der Mitte des Leiters entgegengesetzt zur ursprünglichen Stromrichtung und am Rande des Leiters in der gleichen Richtung – siehe Abbildung 1.2(b).

Somit wird die Stromdichte in der Mitte des Leiters abgeschwächt und am Rande verstärkt. Der Gesamtstrom durch den Leiter bleibt dabei konstant. Daraus resultiert ein Stromfluss, der sich mit zunehmender Frequenz hauptsächlich im Randbereich (=Skin) des Leiters konzentriert und dessen Stromdichte im Randbereich zunimmt, da der Gesamtstromfluss erhalten bleiben muss ($\iint J d\vec{A} = I$).

In der Mitte des Leiters fließt mit steigender Frequenz immer weniger Strom. Dies ist in Abbildung 1.3(a) für vier verschiedene Frequenzen dargestellt, wobei in Abbildung 1.3(b) der Betrag der Stromdichte als Funktion des Abstandes zur Leitermitte ($x = 0$) aufgetragen ist. Dort erkennt man, dass die Stromdichte mit zunehmender Frequenz am Rand des Leiters stark zunimmt. In der Mitte des Leiters wird die Stromdichte minimal gleich 0. Negative Werte für die Stromdichte können nicht auftreten, da bei einem stromfreien Bereich in der Mitte des Leiters dieser Bereich ja auch feldfrei ist und somit kein Strom induziert werden kann.

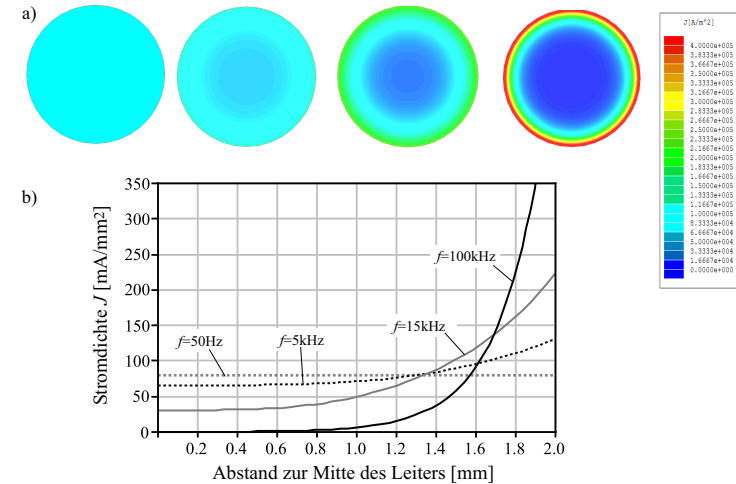


Abb. 1.3: Stromverteilung in einem Leiter mit einem Radius von 2mm, einem Strom von 1A und für die Frequenzen $f = 50\text{Hz}$, 5kHz , 15kHz bzw. 100kHz . (b) Verlauf des Betrages der Stromdichte in Abhängigkeit vom Abstand zur Leitermitte für die gleichen Frequenzen.

Betrachtet man den Verlauf des Betrages der Stromdichte, so erkennt man, dass die Stromdichte proportional zu einer e^x -Funktion vom Lei-

terrand her abnimmt. Der Abstand vom Leiterrand, bei welchem die Stromdichte auf den Wert $1/e$ des Spitzenwertes abgefallen ist, wird als Skintiefe δ bezeichnet. Diese kann anhand von

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu_0 \sigma f}} \quad (1.7)$$

berechnet werden und ist in Abbildung 1.4 für Kupfer und für Aluminium als Funktion der Frequenz dargestellt. Dabei ist σ die Leitfähigkeit des Materials aus welchem der Leiter hergestellt ist und f die Frequenz des Stromes.

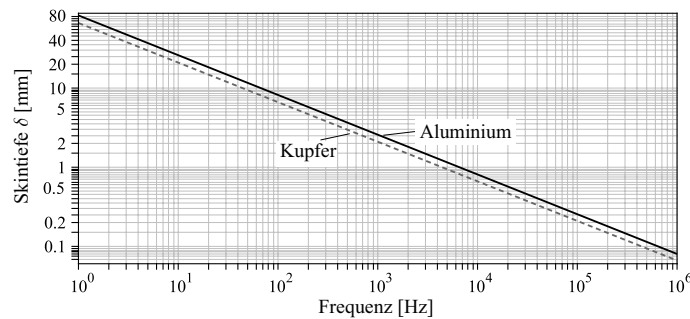


Abb. 1.4: Skintiefe in Abhängigkeit der Frequenz für Leiter aus Kupfer und Aluminium.

Anstatt eines Leiters mit abnehmender Stromamplitude, die am Rand des Leiters ihren Maximalwert besitzt, kann man sich auch näherungsweise vorstellen, dass der Strom mit einer konstanten Stromdichte in einem dünnen Streifen mit der Breite der Skintiefe am Rand des Leiters fließt (siehe Abbildung 1.5). Die Stromdichte J_{Eq} im äquivalenten Leiter ergibt sich dabei aus der Forderung, dass der Gesamtstrom im äquivalenten Leiter gleich dem Strom I_1 im ursprünglichen Leiter sein muss.

Dadurch, dass der Strom mit steigender Frequenz in immer kleineren Bereichen des Leiters fließt, nimmt der Spannungsabfall aufgrund des

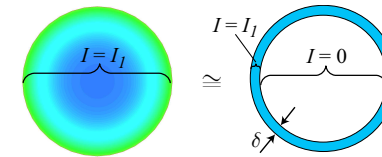


Abb. 1.5: Äquivalent Folienleiter: Links ist ein Leiter dargestellt, bei welchem die Stromamplitude aufgrund des Skin-Effekts stark inhomogen ist. Dieser besitzt den gleichen Widerstand, wie der Leiter rechts, bei welchem der Strom in einer δ -breiten Schicht am Rand mit homogener Stromdichte fließt. Der Gesamtstrom durch beide Leiter ist gleich $I = I_1$.

Stromflusses entlang des Leiters zu. Dies bedeutet, dass der ohmsche Widerstand R_{AC} des Leiters, welchen man bei höheren Frequenzen messen würde, grösser ist als der DC-Widerstand R_{DC} . Dies ist in Abbildung 1.6(a) für einen Runddraht aus Kupfer mit $R=2\text{mm}$ dargestellt. Mit dem steigenden Widerstandswerten nehmen auch die ohmschen Verluste in dem Leiter zu. In ungünstigen Fällen können diese Verluste den Wert für die DC-Verluste deutlich übersteigen. In Abbildung 1.6(b) ist das Verhältnis des AC-Widerstandes zu dem DC-Widerstand $F_R(f)$ wiederum für einen Rundleiter mit $R=2\text{mm}$ als Funktion der Frequenz dargestellt. Mit diesem können die Verluste durch den Skin-Effekt anhand von

$$P_{Skin} = F_R(f) R_{DC} I_p^2 \quad (1.8)$$

berechnet werden (I_p = Spitzenwert des Stromes).

Allgemein gibt der Graph in Abbildung 1.6(c) das Verhältnis R_{AC}/R_{DC} als Funktion des Drahtdurchmessers zur Skintiefe d/δ an.

Für obige Annahmen ist es dabei unerheblich, ob der Leiter aus massiven Kupfer oder, wie in Abbildung 1.7(a) dargestellt, aus mehreren parallel geschalteten dünnen Einzeldrähten besteht. Die beschriebene Zunahme des ohmschen Widerstandes bzw. der Verluste ist in beiden Fällen sehr ähnlich. Nur wenn die Einzeldrähte verdreht werden, d.h. dass im optimalen Fall jeder Einzeldraht jede Position innerhalb des Leiters

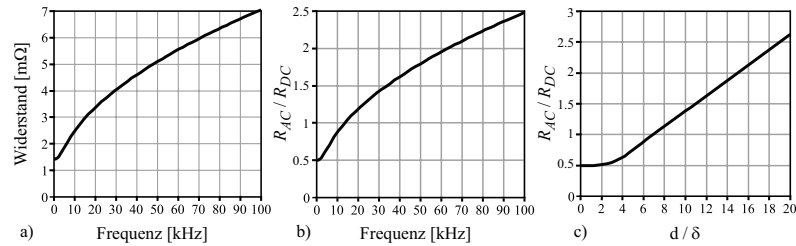


Abb. 1.6: a) Verlauf des Widerstandes eines Runddrahtes aus Kupfer mit $R=2\text{mm}$ als Funktion der Frequenz. b) Verhältnis des AC-Widerstandes zu DC-Widerstand $F_R(f)$ für den gleichen Runddraht. c) Allgemein: R_{AC}/R_{DC} als Funktion des Verhältnisses Durchmesser zu Skintiefe.

für den auf die Länge bezogenen gleichen Anteil einnimmt, führt jeder Einzeldraht näherungsweise den gleichen Strom. Innerhalb des Einzeldrahtes tritt jedoch wiederum die oben beschriebene Stromverdrängung aufgrund des Skin-Effektes auf. (*Bemerkung:* Bei dieser Betrachtung wurde der innere Proximity-Effekt für Litzenleiter ausser Acht gelassen.)

In Abbildung 1.7(b) ist die Stromverteilung bei höheren Frequenzen für einen rechteckförmigen Leiter dargestellt. Bei diesem konzentriert sich der Strom vor allem in den Ecken des Leiters. Dies gilt auch näherungsweise für den Folienleiter in Abbildung 1.7(c) sowie für den H-förmigen Leiter in (d).

Entscheidend für den HF-Widerstand eines (unverdrillten) Leiters ist also nicht die gesamte Oberfläche des Leiters, sondern nur die konkaven Flächen am äussersten Rand des Leiters. Bildlich gesprochen sind dies die Anteile der Oberfläche, welche ein Gummiband (\Leftrightarrow Feldlinien), das man um den Leiter spannt, berührt.

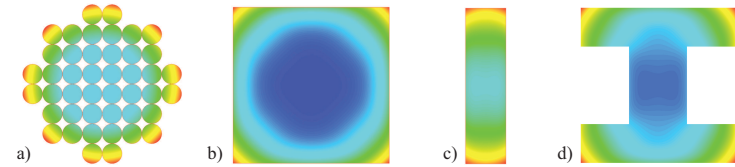


Abb. 1.7: Auswirkung des Skin-Effektes in verschiedenen Leiterformen: a) Parallel geschaltete runde Leiter, b) rechteckförmiger Leiter, c) Folienleiter und d) H-förmiger Leiter.

1.2 Proximity-Effekt

Im vorangegangenen Abschnitt wurde der Einfluss des Magnetfeldes, welches durch dem Strom im Leiter selbst hervorgerufen wurde, auf die Stromverteilung betrachtet. Nun sollen die Auswirkungen eines Magnetfeldes, das durch den Wechselstrom in einem anderen Leiter (hier: Leiter A – Abbildung 1.8) erzeugt wird, auf den Leiter B untersucht werden. Dabei wird angenommen, dass die beiden Rundleiter parallel nebeneinander liegen.

Wie bereits beim Skin-Effekt erläutert, erzeugt der Strom in Leiter A ein Magnetfeld, welches den Leiter umgibt (siehe Abbildung 1.1(b)). Befindet sich der Leiter B in der Nähe des Leiters A , so verlaufen die magnetischen Feldlinien auch durch den Leiter B . In Abbildung 1.8 ist dies beispielhaft für die Fläche F_1 dargestellt.

Aufgrund des magnetischen Wechselfeldes werden im Leiter B elektrische Felder induziert, welche sich – wie beim Skin-Effekt – mit dem Faradayschen Gesetz berechnen lassen. Die Stromrichtung ist dabei immer so, dass auf der Seite des Leiters B , die dem Leiter A zugewandt ist, der Strom entgegen der Stromrichtung in Leiter A fliesst. Auf der vom Leiter A abgewandten Seite fliesst der Strom in die gleiche Richtung wie in Leiter A . Der Gesamtstrom im Leiter B ist dabei immer gleich null, d.h. der Wirbelstrom fliesst im Kreis.

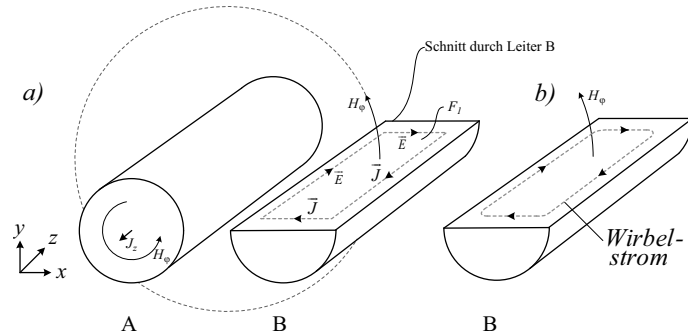


Abb. 1.8: a) Wirbelströme in Leiter B hervorgerufen durch das Magnetfeld, welches durch den Wechselstrom in Leiter A erzeugt wird. b) Resultierender Wirbelstrom (Gesamtstrom im Leiter B $I_B=0!$).

In Abbildung 1.8(b) ist der Verlauf der Stromdichte des induzierten Wirbelstromes als Funktion des Ortes dargestellt. Im Gegensatz zum Wirbelstrom, welcher durch den Skin-Effekt induziert wird, ist dieser nicht achsen- bzw. rotationssymmetrisch bezüglich des Mittelpunktes von Leiter B. Der Grund dafür ist, dass das magnetische Wechselfeld durch einen externen Strom erzeugt wird und somit im gesamten Bereich des Leiters B näherungsweise dieselbe Richtung hat (im betrachteten Fall zeigen die H-Feld Vektoren näherungsweise alle in $+y$ -Richtung).

Durch die Wirbelströme werden wiederum ohmsche Verluste hervorgerufen. Deren Auswirkung kann – wie im Fall des Skin-Effektes – durch eine scheinbare Erhöhung des ohmschen Widerstandes beschrieben werden. In Abbildung 1.10 ist der Verlauf der Funktion $G_R(f)$, welche den Verlauf der Verluste durch den Proximity-Effekt in Abhängigkeit von der Frequenz beschreibt, als Funktion der Frequenz und als Funktion des Verhältnisses Drahtdurchmesser zu Skintiefe aufgetragen. Dieses Verhältnis $G_R(f)$ muss man noch mit dem Quadrat der Amplitude des H-Feldes multiplizieren, um die ohmschen Verluste aufgrund des

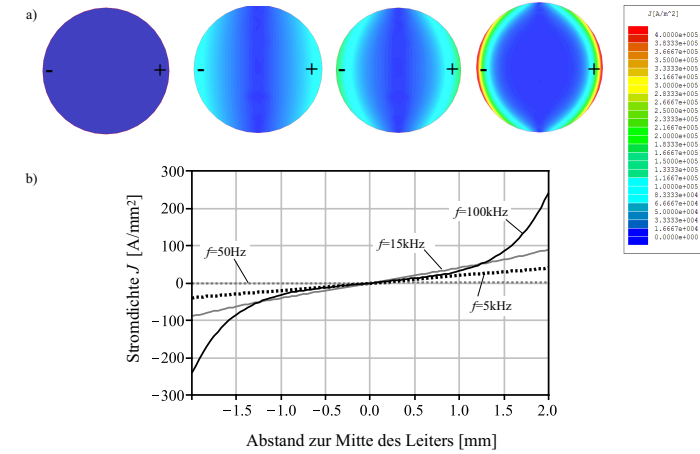


Abb. 1.9: Stromverteilung in einem Leiter mit einem Radius von 2mm, der sich in einem magnetischen Wechselfeld ($H_e \approx 35\text{A/m} \cong 5\text{mm}$ Abstand zwischen den beiden Leitern / $I \approx 1\text{A}$) mit den Frequenzen $f = 50\text{Hz}$, 5kHz , 15kHz bzw. 100kHz befindet (+ bedeutet in die Zeichenebene hinein). (b) Verlauf des Betrages der Stromdichte in Abhängigkeit vom Abstand zur Leitermitte für die gleichen Frequenzen.

Proximity-Effektes zu berechnen, d.h. es gilt:

$$P_{\text{Prox}} = G_R(f) H_e^2. \quad (1.9)$$

Diese Verluste entstehen auch in Wicklungen, welche nicht stromdurchflossen sind. Solche Wicklungen sind z.B. bei Transformatoren mit Mittelpunktanzapfung zu finden, wo jeweils nur eine sekundäre Teilwicklung pro Halperiode von Strom durchflossen wird (vgl. z.B. Abbildung 7.15b) im Skript Leistungselektronik). Ein weiteres Beispiel ist die dritte Wicklung für den Abbau der Magnetisierung beim Durchflusswandler.

Bemerkung: Die Verluste, welche in Leiter B in Wärme umgesetzt werden, werden dabei von Leiter A über die Felder auf Leiter B über-

tragen, d.h. durch den Proximity-Effekt entsteht eine Wechselwirkung zwischen den beiden Leitern. Durch die Wirbelströme in Leiter B wird das magnetische Feld von Leiter A beeinflusst, so dass der scheinbare Widerstand des Leiters A ansteigt und die Leistung, welche für den Fluss des Stromes I_1 benötigt wird, steigt an.

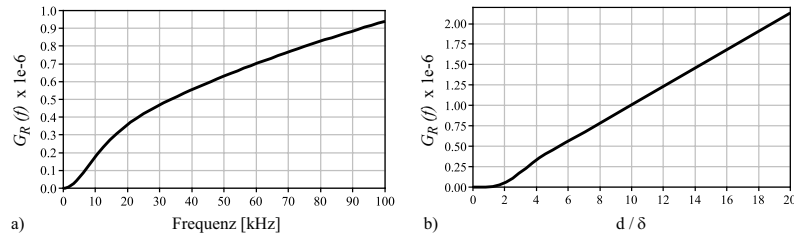


Abb. 1.10: Abhängigkeit des Proximity-Effekt Faktors $G_R(f)$ für einen Runddraht mit $R = 2\text{mm}$ als Funktion der Frequenz a) und des Verhältnisses Drahtdurchmesser zu Skintiefe d/δ . b) Dieses Verhältnis muss noch mit dem Quadrat des H-Feldes, in welchem sich der Leiter befindet, multipliziert werden, um auf die Verluste durch den Proximity Effekt zu kommen.

Betrachtet man zwei von einem Wechselstrom durchflossene, parallele Leiter, so sind grundsätzlich zwei Situationen möglich (siehe Abbildung 1.11): In den Leitern fließt der Strom in 1) entgegengesetzte Richtungen oder 2) in die gleiche Richtung. Im ersten Fall konzentriert sich aufgrund des Skin- und des Proximity-Effektes der Strom auf den beiden sich zugewandten Seiten der Leiter und im zweiten Fall auf den voneinander abgewandten Seiten. Der Strom konzentriert sich quasi dort, wo das H-Feld am stärksten ist, da dies die Konstellation mit der minimalsten gespeicherten Energie ergibt. Dies kann man in Abbildung 1.12 sehen, wo die Amplitude des H-Feldes der beiden Leiter sowie das resultierende Feld ($H_{Ges} = H_1 + H_2$) für die beiden betrachteten Fälle qualitativ aufgetragen ist. Dabei wurde vereinfachend eine homogene Stromdichte in den Leitern angenommen.

Analog zu Abbildung 1.11a) sind in Abbildung 1.13 zwei rechteckförmige Leiter mit entgegengesetzten Stromfluss dargestellt, d.h. im linken Leiter fließt der Strom aus der Zeichenebene heraus und im rechten Leiter in die Ebene hinein. Auch hier konzentriert sich der Strom vor allem auf die beiden zugewandten Flächen, so dass im betrachteten Fall der AC Widerstand erheblich höher ist als der DC Widerstand. Solche Leiteran-

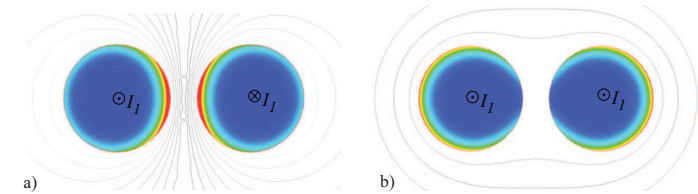


Abb. 1.11: Feldlinien und Verteilung der Stromdichte in zwei parallelen Leitern, welche einen Radius von 2mm und einen Abstand von 1mm haben. Die Frequenz der sinusförmigen Ströme ist gleich 100kHz. Bei den Plots wurden Skin- und Proximity-Effekt berücksichtigt. In a) fließen die Ströme in entgegengesetzte Richtungen in den beiden Leitern und in b) in dieselbe Richtung.

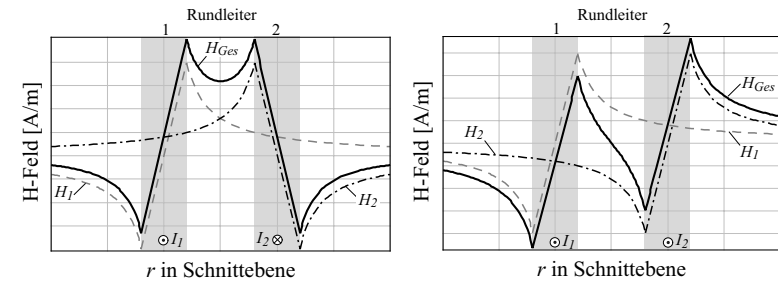


Abb. 1.12: Amplitude des H-Feldes für zwei parallele Rundleiter mit a) entgegengesetzter und b) gleicher Stromrichtung \Rightarrow siehe Abb. 1.11. *Bemerkung:* Für die Berechnung des H-Feldes im Leiter wurde eine homogene Stromdichte angenommen.

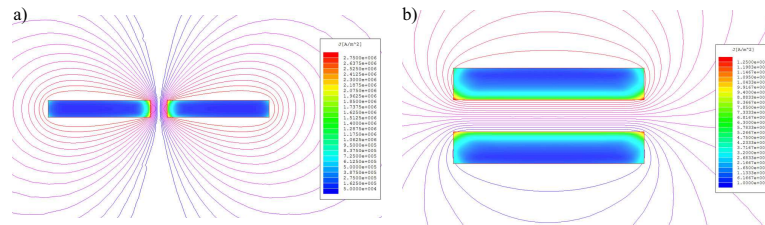


Abb. 1.13: Stromverteilung in zwei rechteckigen Leitern, welche Ströme in entgegengesetzte Richtung führen. In a) sind die beiden Stirnflächen zueinander angeordnet, was zu einem hohen AC Widerstand führt. Dieser kann mit der Anordnung in b) verringert werden. ($I = 1$, $B = 6\text{mm}$, $H = 1\text{mm}$, $f = 100\text{kHz}$, jeweils 1mm Abstand).

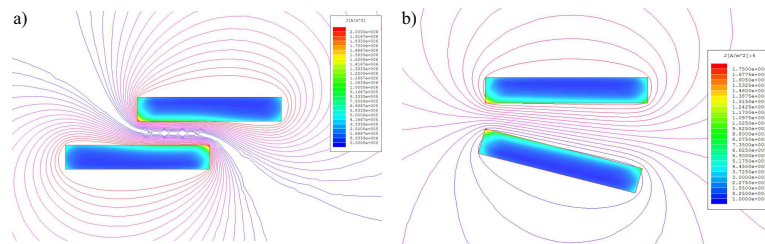


Abb. 1.14: Stromverteilung für zwei rechteckige Leiter, welche a) seitlich versetzt angeordnet sind bzw. b) zueinander verdreht sind. In beiden Fällen ist die Frequenz gleich 100kHz . Das Offset beträgt 3mm und der Verdrehungswinkel beträgt 15° . ($I = 1$, $B = 6\text{mm}$, $H = 1\text{mm}$).

ordnungen kann man z.B. auf Leiterplatten wiederfinden. Um den AC Widerstand zu verringern, muss man den Hin- und den Rückleiter wie in Abbildung 1.13b) dargestellt anordnen, d.h. zwei grosse Oberflächen der Leiter werden gegenüber angeordnet.

In Abbildung 1.14 ist die Stromverteilung für die beiden Fälle dargestellt, in welchen ein Leiter seitlich verschoben bzw. ein Leiter etwas verdreht ist. In beiden Fällen konzentriert sich der Strom dort, wo auch

das magnetische Feld am stärksten ist. Diese ungleiche Stromverteilung führt wiederum zu einer unerwünschten Erhöhung des AC Widerstandes.

1.3 Optimaler Leiterdurchmesser

In den beiden vorangegangenen Abschnitten wurden die Wirbelströme, welche durch Skin- und Proximity-Effekt induziert werden, beschrieben. In allgemeinen Leiteranordnungen bestehend aus mehreren stromführenden Leitern treten die beiden Effekte immer gleichzeitig auf. Dabei können die Verlustanteile für den Skin- und den Proximity-Effekt für den betrachteten Fall des Rundleiters aufgrund der Orthogonalität der Stromdichten einfach addiert werden [1–3]. Im Falle beliebiger Leiterformen müssen die einzelnen Stromdichten vektoriell addiert und anhand der resultierenden Stromverteilung die Verluste berechnet werden.

Die zusätzlichen Verluste aufgrund des Skin- und Proximity-Effekts sollen dabei möglichst gering gehalten werden, um die thermische Belastung der Bauelemente zu begrenzen und den Wirkungsgrad zu steigern. Aus diesem Grund stellt sich die Frage, ob es einen optimalen Durchmesser für einen Leiter gibt, mit welchem minimale Verluste resultieren. Dies soll beispielhaft für eine Leiteranordnung, wie in Abbildung 1.11 dargestellt, kurz erörtert werden.

Zum einen ergibt sich aus den Überlegungen zum Skin-Effekt, dass die Verluste im Leiter aufgrund des Stromes I_1 mit steigendem Durchmesser des Runddrahtes abnehmen ausgehend von einem dünnen Draht ($h/\delta \ll 1$). Die Fläche F_1 im Draht, in welcher Wirbelströme induziert werden können (siehe Abbildung 1.2), steigt zwar mit zunehmenden Durchmesser, aber gleichzeitig steigt auch der Querschnitt des Drahtes und damit sinkt der DC-Widerstand. Das heisst, ein steigender Durchmesser erhöht zwar prinzipiell die zusätzlichen Verluste durch den Skin-Effekt,

aber die Reduktion des DC-Verstandes überkompensiert diese Zunahme, so dass der scheinbare AC-Widerstand durch den Skin-Effekt mit steigendem Durchmesser abnimmt. Im Inneren des Leiters sind die Wirbelströme bei im Verhältnis zur Skintiefe dicken Leitern sowieso relativ klein, da der Strom ja hauptsächlich auf der Oberfläche fließt. Somit ist die Amplitude des Stromes und des daraus resultierenden H-Feldes im Inneren des Leiters relativ klein und es entstehen geringe Wirbelströme im Inneren des Leiters.

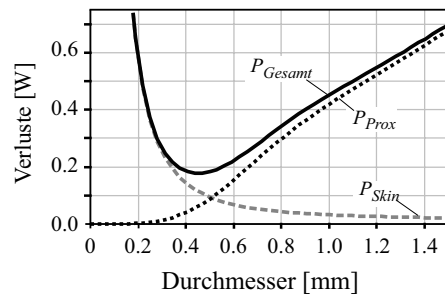


Abb. 1.15: Verluste pro Länge aufgrund des Skin- und Proximity-Effekts als Funktion des Drahtdurchmessers. Die angenommenen Frequenz beträgt 100kHz, der Strom ist 1A, und das H-Feld, welches den Proximity-Effekt verursacht, sei 1000A/m. Deutlich ist das Minimum der Gesamtverluste bei $d \approx 0.47$ mm zu erkennen.

Im Gegensatz dazu steigen die Verluste durch den Proximity-Effekt mit zunehmenden Drahtdurchmesser an, da die Fläche, in welcher Wirbelströme induziert werden, zunimmt. Die grössere Fläche führt zu einer grösseren induzierten Spannung, die wiederum zu einer grösseren Amplitude der induzierten Ströme und damit zu höheren Verlusten führt. Im Gegensatz zum Skin-Effekt hilft beim Proximity-Effekt nicht, dass mit steigendem Durchmesser der DC-Widerstand sinkt, da beim Proximity-Effekt prinzipiell nur zusätzliche Verluste entstehen und keine kompensierenden DC-Verluste betrachtet werden.

Da einerseits die Verluste durch den Skin-Effekt mit steigendem Durchmesser abnehmen, aber andererseits die Verluste durch den Proximity-Effekt mit steigendem Durchmesser zunehmen, gibt es einen optimalen Durchmesser des Leiters, welchen zu minimalen Verlusten führt. Dies ist beispielhaft in Abbildung 1.15 für einen Rundleiter dargestellt.

1.4 Litzendraht

Um die Verluste aufgrund des Skin- und des Proximity-Effektes zu reduzieren, kann man in einem ersten Schritt den Durchmesser der Leitungen so anpassen, dass die Verluste minimal werden. Dies wurde im vorangegangenen Abschnitt erläutert. Ein weiterer Freiheitsgrad ergibt sich aus der Verteilung der Windungen auf die Lagen. Dieser Aspekt wird in Abschnitt 1.5.9 betrachtet. Daneben gibt es auch noch die Möglichkeit anstatt eines massiven Leiters, mehrere dünne Adern parallel zu schalten und zu einem Leiter zu vereinen. Durch den geringeren Durchmesser der Einzeladern nehmen die Verluste in einer Einzelader aufgrund des Skin- und des Proximity-Effektes in bestimmten Frequenzbereichen deutlich ab.

Um minimale Verluste zu erhalten, dürfen die dünnen Adern dabei nicht einfach parallel nebeneinander gelegt und parallel geschaltet werden (siehe Abb. 1.7). Würde man dies tun, so erhielte man einen Aufbau wie in Abbildung 1.16 gezeigt. Dort sind zwei Leiter dargestellt: Leiter 1 besteht aus einem massiven Rundleiter, durch welchen der Strom I_1 fließt und das Magnetfeld H_φ erzeugt. Leiter 2 hingegen besteht aus zwei parallel geschalteten Einzeladern, die parallel nebeneinander liegen.

Durch die Parallelschaltung der geraden Leiter wird die Fläche F_1 aufgespannt, welche vom Magnetfeld H_φ durchsetzt wird. Dadurch wird – analog zum Proximity-Effekt – aufgrund des Induktionsgesetzes eine Spannung induziert, die einen Wirbelstrom hervorruft. Der Wirbelstrom

reduziert dabei den Strom in Ader 2A und erhöht den Strom in Ader 2B. Dies entspricht dem Verhalten eines massiven Leiters in einem externen H-Feld, wie dies in Abbildung 1.8 und Abbildung 1.7 dargestellt ist, d.h. die Stromverteilung ändert sich nicht prinzipiell, wenn man einen massiven Leitern in kleine, parallel geschaltete Einzeladern trennt und diese parallel nebeneinander verlaufen. Auch der Skin-Effekt ändert sich nicht, wie bereits in Abbildung 1.7 erläutert wurde.

Um zu verhindern, dass ein Wirbelstrom induziert wird, kann man die beiden Einzeladern verdrehen, wie dies in Abbildung 1.17a) dargestellt ist. Dabei wird in beiden Schleifen eine Spannung induziert. Aufgrund des Verdrillens des Leiters heben sich die induzierten Spannungen gegenseitig auf, so dass idealerweise kein Wirbelstrom erzeugt wird. Dies erkennt man z.B. für Ader 2A, bei welcher in der unteren Schleife eine Spannung in negativer y -Richtung und in der oberen Schleife eine Spannung in y -Richtung induziert wird, so dass die Summe gleich null ist, wenn die beiden Schleifen identisch sind. Damit sich die induzierten elektrischen Felder gegenseitig aufheben können, müssen die beiden Ein-

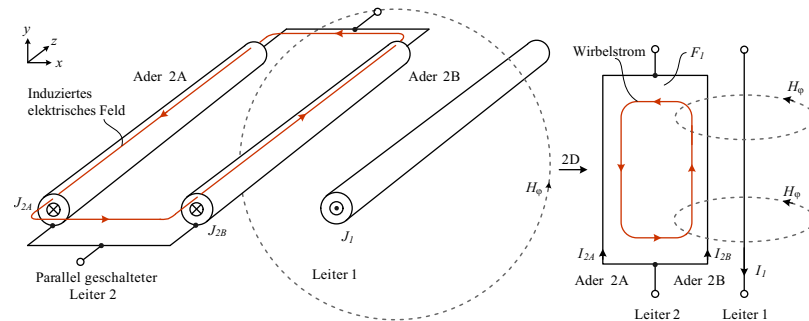


Abb. 1.16: Induktion eines Wirbelstromes in einem paar parallel geschalteter Leiter 2A und 2B aufgrund des Wechselfeldes H_φ . Ursache des Feldes ist der Strom in Leiter 1. Durch den Wirbelstrom nimmt der Strom in Leiter 2B zu und der Strom in Leiter 2A ab (Vgl. Abb. 1.11).

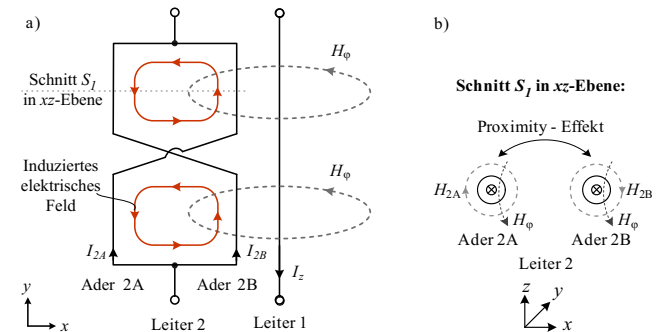


Abb. 1.17: Durch Verdrillen der parallel geschalteten Leiter wird in den beiden Schleifen eine entgegengesetzte Spannung induziert, welche sich in Summe aufhebt. (Mit H_φ wird die Änderung des Feldes bezeichnet.)

zeladern an der Schnittstelle voneinander isoliert sein. Ansonsten würde in jeder Schleife ein Wirbelstrom induziert werden. Die Isolation wird dabei häufig durch eine Lackisolation der einzelnen Adern erreicht (siehe Abb. 1.18).

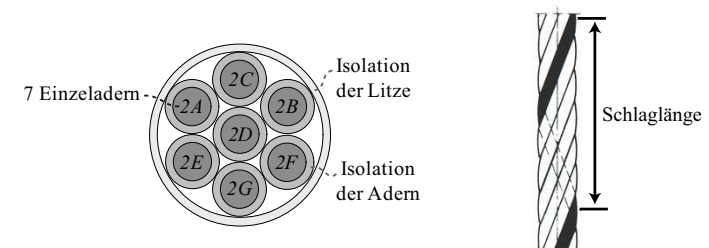


Abb. 1.18: Links: Schnitt durch eine Litze mit 7 Einzeladern, Einzelisolation und Gesamtisolation. Rechts: Definition der Schlaglänge

Weiterhin ist wichtig, dass die beiden Schleifen identisch sind, damit die induzierten elektrischen Felder identisch sind und sich gegenseitig

aufheben. In realen Leitern aus Litze gibt es dabei nicht nur zwei einfache Schleifen wie dies in Abbildung 1.17a) dargestellt ist, sondern die Einzeladern werden so verdreht, dass jede Ader jede Position innerhalb des Leiterbündels einnimmt. Im Bezug auf Abbildung 1.18 würde dies bedeuten, dass die sieben Adern $2A - 2G$ entlang des Leiters jede Position innerhalb der Litze einnehmen. Dabei wird der Abstand zwischen den Stellen wo z.B. Leiter $2A$ die gleiche Position innerhalb der Litze einnimmt als Schlag der Litze bezeichnet (siehe Abb. 1.18).

Damit die Grösse der Schlaufen, in welchen die elektrischen Felder induziert werden, näherungsweise gleich gross sind und sich die induzierten Spannungen gegenseitig aufheben, muss die Schlaglänge an das jeweilige Problem angepasst werden. Für die Litze mit den beiden Adern aus Abbildung 1.17a) bedeutet dies stark vereinfachend, dass die Schlaglänge maximal halb so gross sein darf, wie die Länge der Leiter. Um Toleranzen auszugleichen, sollte in praktischen Fällen eine deutlich kürze Schlaglänge verwendet werden, so dass jede Ader entlang des Leiters jede Position innerhalb des Leiters mehrmals einnimmt. Dies bedeutet z.B. für eine reale Litze, dass die Einzeladern nicht nur Positionen am Rand des Leiters, sondern auch in der Mitte des Leiters einnehmen. Damit kann erreicht werden, dass die Amplitude des Stromes in den einzelnen Adern gleich gross ist.

Neben dem oben beschriebenen Effekt der Spannungsinduktion in den Schlaufen, gibt es für die einzelnen Adern natürlich noch den normalen Skin- und Proximity-Effekt, wie für einen normalen Runddraht. Die Verluste durch den Skin-Effekt können dabei genauso berechnet werden wie für einen Runddraht.

Beim Proximity-Effekt muss beachtet werden, dass neben dem Feld, das andere Leiter erzeugen – z.B. H_φ in Abb. 1.17 aufgrund des Stromes in Leiter 1 – auch die einzelnen Adern magnetische Felder erzeugen. Dies ist in Abbildung 1.17b) für die beiden Adern aus Abbildung 1.17a) dargestellt. Die Felder H_{2A} und H_{2B} werden dabei durch den Strom in Ader $2A$ bzw. $2B$ hervorgerufen. Auch diese Felder erzeugen in den

anderen Adern des Leiters Verluste aufgrund des Proximity-Effektes. Da die Felder bzw. die Verluste durch den Strom im Leiter selbst erzeugt werden, wird dies der *innere Proximity-Effekt* genannt und dem Skin-Effekt zugerechnet, da dieser ja auch aufgrund des Stromes im Leiter selbst erzeugt wird. Dagegen wird der *externe Proximity-Effekt* z.B. aufgrund des Feldes H_φ in Abbildung 1.17b) durch Ströme, welche in anderen Leitern fliessen hervorgerufen.

Der innere Proximity-Effekt führt nun dazu, dass der Strom in den einzelnen Adern verstärkt auf den voneinander abgewandten Seiten der Adern fliesst (vgl. Abb. 1.11). Dadurch nehmen die Verluste im Litzendraht im Bereich höherer Frequenzen signifikant zu und die Verluste für den Litzendraht übersteigen die Verluste, welche in einem massiven Rundleiter mit dem gleichen DC-Widerstand entstehen. Dies bedeutet, dass es einen optimalen Frequenzbereich für Litzendraht gibt, in welchem die Verluste geringer sind als für einen massiven Leiter. Ausserhalb dieses Frequenzbereichs wirkt sich die Aufteilung des Leiters auf einzelnen Adern negativ auf die Verluste und die Kosten aus.

Dies ist in Abbildung 1.19a) dargestellt, wo die Skin-Effekt Verluste inklusiv inneren Proximity-Effekt für einen Litzendraht und die reinen Skin-Effekt Verluste für einen massiven Runddraht aufgetragen sind (Annahme: $H_e = 0$). Dabei hat der massive Rundleiter und der Leiter aus Litze den gleichen Widerstand für Gleichstrom, d.h. die Verluste sind identisch. Im unteren Frequenzbereich erzeugt der Litzendraht zum Teil deutlich geringere Verluste als der massive Leiter. Jedoch ab ca. 65kHz übersteigen die Verluste im Litzendraht die Werte für den massiven Leiter, da die Verluste aufgrund des inneren Proximity-Effektes signifikant zunehmen. Wichtig ist dabei, dass das H-Feld im Leiter aus Litze auch im inneren Bereich des Gesamtleiters relativ hohe Werte annimmt, da die Stromstärke in den einzelnen Adern idealerweise ja gleich ist, d.h. der Strom nicht an die Oberfläche des Gesamtleiters verdrängt wird wie beim massiven Leiter.

Nimmt man an, dass sich die beiden Leiter zusätzlich in einem ex-

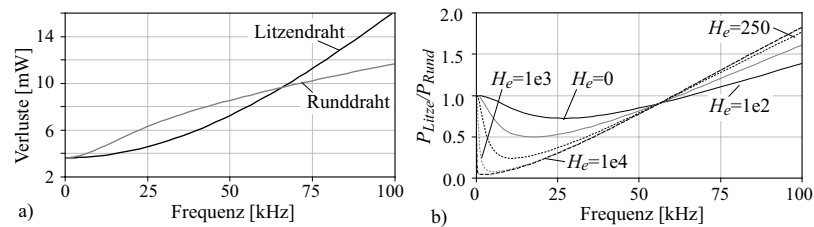


Abb. 1.19: a) Verhältnis der Verluste $P_{Litze, Skin} / P_{Rund, Skin}$, welche durch den Strom durch den Leiter ("Skin-Effekt") verursacht werden. Dabei wird ein Litzendraht mit $N_s = 25$ Einzeladern mit einer Durchmesser der Adern von $d_s = 0.5\text{mm}$ und eine Runddraht mit $d = 2.5\text{mm}$ betrachtet, d.h. der DC-Widerstand der beiden Leiter ist identisch. b) Verhältnis der gesamten Verluste P_{Litze} / P_{Rund} im gleichen Litzendraht zu den Verlusten in einem Runddraht mit $d = 2.5\text{mm}$. Dabei ist das externe H_e -Feld, welches durch andere Leiter erzeugt wird, der Parameter.

ternen magnetischen Feld $H_e \neq 0$, welches z.B. von Strömen in anderen Leitern erzeugt wird, befinden, so sieht das Verhältnis der Verluste im Litzenleiter zu denjenigen im massiven Rundleiter wie in Abbildung 1.19b) dargestellt aus. Mit zunehmenden externen Feld erzeugt dabei der Litzendraht im unteren Frequenzbereich weniger Verluste als der massive Rundleiter. Dies liegt daran, dass der externe Proximity-Effekt in den einzelnen Adern wegen des geringeren Durchmessers geringer ist als für den Rundleiter. Im Bereich höherer Frequenzen nehmen dann wieder die Verluste im Litzenleiter aufgrund des inneren Proximity-Effektes stark zu und die Gesamtverluste liegen über den Verlusten eines massiven Leiters.

Der Frequenzbereich in welchem ein Litzenleiter geringere Verluste erzeugt als ein Rundleiter mit gleichem DC-Widerstand, hängt dabei stark von dem Durchmesser bzw. der Anzahl der einzelnen Adern ab. Je dünner die Adern sind, desto weiter erstreckt sich dieser Bereich zu höheren Frequenzen. Allerdings sinkt der Kupferfüllfaktor der Litze mit

sinkendem Durchmesser der Adern aufgrund des benötigten Platzes für die Isolation der einzelnen Adern, d.h. das Volumen der Wicklung steigt an. Weiterhin nehmen die Fertigungskosten stark zu.

1.5 Analytische Berechnung

In den beiden vorangegangenen Abschnitten wurde die Entstehung von Wirbelströmen aufgrund des Skin- und des Proximity-Effektes anschaulich hergeleitet. Im Folgenden werden nun Gleichungen hergeleitet, mit welchen man die Verluste in Wicklungen von Transformatoren oder Spulen berechnen kann. Für die Berechnung müssen Differentialgleichungen basierend auf den vier Maxwellgleichungen gelöst werden. Dies ist analytisch nur für spezielle Leiterformen – z.B. Rund- oder Folienleiter – und für Strukturen möglich, für welche die Verteilung des magnetischen Feldes einfach berechnet werden kann.

Im Falle von Spulen und Transformatoren kann man dabei häufig den Feldverlauf, welcher eigentlich 3-dimensional ist, durch 1-dimensionale Näherungen ausreichend genau beschreiben. Hier liegt die Annahme zugrunde, dass erstens die Feldlinien näherungsweise jeweils in einer Ebene liegen und dass zweitens eine Komponente der magnetischen Feldstärke des ebenen Feldproblems erheblich grösser ist als die anderen Komponenten, so dass die Auswirkungen der kleineren Komponenten vernachlässigt werden können. Dieser Ansatz geht auf [4] zurück und wird in vielen weiteren Publikationen aufgegriffen bzw. vertieft z.B. [1, 5, 6].

In manchen Fällen reichen die oben beschriebenen 1D-Ansätze für die Berechnung der Windungsverluste bzgl. der Genauigkeit nicht aus. Für spezielle Probleme, wie z.B. den Verlusten aufgrund eines Luftspaltes bei Spulen, gibt es hier 2D-Ansätze, welche den Feldverlauf anhand von 2D Näherungen beschreiben [5]. Die dabei zu lösenden Differentialgleichungen sind jedoch schon relativ komplex. Allgemeinere Probleme lassen sich aus diesem Grund nur mit numerischen Verfahren, wie z.B. der Finite Elemente Methode (FEM) [7, 8] oder der Partial Element Equivalent Circuit Method (PEEC) [9, 10], berechnen, wobei die dafür benötigte Berechnungszeit erheblich sein kann. Aus diesem Grund ist es häufig vorteilhaft erste Dimensionierungen mit Hilfe von analytischen Ansätzen vorzunehmen und dann ein finales, optimiertes Design mit

Hilfe z.B. von FEM/PEEC zu überprüfen. Dafür geeignete Programme sind z.B. MAXWELL™, COMSOL™ oder ANSYS™.

Im Folgenden werden zuerst die Gleichungen zur Berechnung der Verluste in Folienleiter und anschliessend die Gleichungen für Rundleiter abgeleitet. Dazu wird zuerst allgemein die Diffusionsgleichung für leitende Medien hergeleitet, mit deren Lösung die Stromverteilung im Leiter berechnet werden kann.

Bemerkung: Bei diesen Berechnungen werden Verschiebungsströme in den Feldgleichungen aufgrund der Komplexität der geschlossenen Lösungen nicht berücksichtigt (quasi-statische Näherung). Der Einfluss der kapazitiven Ströme in den Aufbauten kann getrennt, z.B. durch eine abnehmende Amplitude des Stromes entlang des Leiters, berücksichtigt werden. Diese Vorgehensweise ist formal nicht korrekt, allerdings bestätigen die Ergebnisse, z.B. in [11, 12] die Genauigkeit und Brauchbarkeit dieser Methode, womit bei vernünftiger Anwendung der Gleichungen gute Näherungswerte der tatsächlichen Verluste zu erwarten sind.

1.5.1 Herleitung der Diffusionsgleichungen für leitende Medien

Im folgenden werden die Maxwell-Gleichungen in Differentialgleichungen zweiter Ordnung umgewandelt, welche zum Berechnen der Wirbelströme in Leitern verwendet werden (vgl. [1, 13]). Diese Differentialgleichungen werden – in Anlehnung an die Theorie der Wärmeausbreitung – als Diffusionsgleichungen bezeichnet, da diese – analog zur Diffusion von Wärme in Medien – das Eindringen des Stromes von der Leiteroberfläche ausgehend beschreibt.

Die dabei betrachteten Materialien sind homogen und linear. Die betrachteten Grössen (Strom, Spannung, Felder) haben einen sinusförmigen Verlauf. Damit vereinfacht sich die zeitliche Ableitung $\partial/\partial t$ zu einer

Multiplikation mit $j\omega$ und die Maxwell-Gleichungen können zu

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.10)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (1.11)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1.12)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = j\omega\epsilon\mu \mathbf{E} + \mu \mathbf{J} \quad (1.13)$$

mit $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ vereinfacht werden. Gleichung (1.10) beschreibt dabei die Tatsache, dass von elektrischen Ladungen Feldlinien ausgehen, d.h. Ladungen sind die Quellen der elektrischen Feldes. Analog dazu drückt Gleichung (1.12) aus, dass das magnetische Feld quellenfrei ist, da es keine magnetischen "Mono-Pole" äquivalent zu elektrischen Ladungen gibt. Mit Gleichung (1.11) wird der Effekt beschrieben, dass durch magnetische Wechselfelder Spannungen induziert werden (Faraday'sche Gesetz), und mit Gleichung (1.13) das Durchflutungsgesetz, welches die Tatsache beschreibt, dass Ströme von magnetischen Feldern umgeben sind. Dies gilt auch für Verschiebungsströme, die z.B. im Dielektrikum von Kondensatoren von einer Platte zur anderen fließen.

Um die elektrischen und magnetischen Felder in Gl.(1.11) und Gl.(1.13) zu entkoppeln, werden obige Maxwell-Gleichungen zu Differentialgleichungen umgeformt. Dazu wird die Stromdichte $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ (Ohmsches Gesetz) gesetzt und in Gleichung (1.13) substituiert.

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = (\sigma + j\omega\epsilon)\mu \mathbf{E} \quad (1.14)$$

Die Substitution von Gleichung (1.11) in (1.14) liefert die Gleichung

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -(\sigma + j\omega\epsilon)j\omega\mu \mathbf{E}, \quad (1.15)$$

welche mit Hilfe von (1.10) zu

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\operatorname{grad} \rho}{\epsilon} + (\sigma + j\omega\epsilon)j\omega\mu \mathbf{E} \quad (1.16)$$

umgeformt werden kann. Auf die gleiche Weise kann durch Einsetzen von (1.13) in (1.11) und einigen Umformungen der folgende Ausdruck für \mathbf{B} ermittelt werden.

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -(\sigma + j\omega\epsilon)j\omega\mu \mathbf{B} \quad (1.17)$$

Da $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ gilt, vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\nabla^2 \mathbf{B} = (\sigma + j\omega\epsilon)j\omega\mu \mathbf{B}. \quad (1.18)$$

Die Gleichungen (1.16) und (1.18) sind identisch bis auf den Term $\operatorname{grad} \rho / \epsilon$. Dieser beschreibt in leitenden Medien die induzierte Ladungsverteilung senkrecht zum Stromfluss, welche durch ein äusseres quasistatisches elektrisches Feld hervorgerufen wird. Ein solches elektrisches Feld wird zum Beispiel durch die Spannung zwischen den Leitern einer Spulen-/Transformatorwicklung hervorgerufen (vgl. parasitäre Windungskapazität in [14]).

Der Verschiebungsstrom wird durch den Term $-\omega^2 \epsilon \mu$ in den Gleichungen (1.16) und (1.18) beschrieben. Dieser ist in gut leitenden Medien für alle praktisch relevanten Fälle vernachlässigbar. Bei der Beschreibung von kapazitiven Strömen zwischen den Leitern einer Wicklung kann dieser jedoch eine wichtige Rolle spielen. Der verbleibende Term $j\omega\sigma\mu$ beschreibt den Stromfluss im Leiter inklusive aller Wirbelströme.

Wird nun der Verschiebungsstrom im Leiter vernachlässigt, so ergeben sich die (Diffusions-) Gleichungen

$$\nabla^2 \mathbf{E} = j\omega\sigma\mu \mathbf{E} \quad (1.19)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = j\omega\sigma\mu \mathbf{B} \quad (1.20)$$

bzw. mit $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$

$$\nabla^2 \mathbf{J} = j\omega\sigma\mu \mathbf{J} \quad (1.21)$$

als Ausgangspunkt für die Berechnung von Wirbelströmen von eindimensionalen Problemen. Diese Gleichungen werden im Folgenden dazu

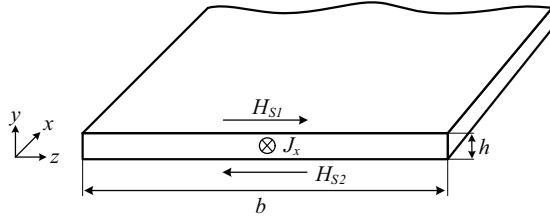


Abb. 1.20: Querschnitt eines in x -Richtung unendlichen Folienleiters mit der Stromdichte J_x in x -Richtung.

verwendet, die Wirbelströme aufgrund des Skin- und Proximity-Effektes und die daraus resultierenden Verluste für Folien- und Rundleiter zu berechnen. Dabei werden zuerst Folienleiter betrachtet, da die Gleichungen für diese einfacher sind.

1.5.2 Folienleiter

Mit Hilfe der allgemeinen Diffusionsgleichungen (1.19)-(1.21) können nun die Wirbelströme in einem Folienleiter ermittelt werden. Dabei wird zuerst die Stromverteilung berechnet, welche entsteht, wenn durch den Folienleiter in x -Richtung ein sinusförmiger Strom mit der Amplitude \hat{I} der Frequenz f fließt (Skin-Effekt siehe Abb. 1.20). Anschliessend werden die durch ein externes magnetisches Feld hervorgerufenen Wirbelströme berechnet (Proximity-Effekt).

Skin-Effekt / Innerer Wirbelstrom

Bei nicht magnetischen Leitern, von welchen hier ausgegangen wird, kann die Flussdichte \mathbf{B} durch $\mu_0 \mathbf{H}$ ersetzt werden. Damit kann Gleichung (1.20) als

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \alpha^2 \mathbf{H} \quad (1.22)$$

mit

$$\alpha = \frac{1+j}{\delta}$$

und

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \sigma \mu_0}}$$

geschrieben werden. Die Grösse δ ist wiederum die Skintiefe, wie diese bereits beim Rundleiter definiert wurde (vgl. Gl. (1.7)).

Die allgemeine Lösung der Gleichung (1.22) ist durch

$$H_z = K_1 e^{\alpha y} + K_2 e^{-\alpha y} \quad (1.23)$$

gegeben. Für einen Leiter mit der Breite b , der Höhe $h \ll b$ und einem Strom mit der Amplitude I in x -Richtung, wie in Abbildung 1.20 dargestellt ist, kann die Abhängigkeit der Grössen von der z -Koordinate ohne grossen Fehler vernachlässigt werden [13]. Weiterhin wird angenommen, dass das magnetische Feld \mathbf{H} nur eine Komponente in z -Richtung hat. Damit können die Unbekannten K_1 und K_2 der Gleichung (1.23) mit Hilfe der folgenden Randbedingung berechnet werden. Diese ergeben sich aus der Anwendung des Ampere'schen/Durchflutungsgesetzes auf den Leiter

$$H_{S1} = H_{S2} = \frac{\hat{I}}{2b}, \quad (1.24)$$

unter der Annahme, dass das magnetische Feld \mathbf{H} nur eine Komponente in z -Richtung hat ($h \ll b$).

$$K_1 = \frac{\hat{I}}{4b \sinh \frac{\alpha h}{2}} = -K_2 \quad (1.25)$$

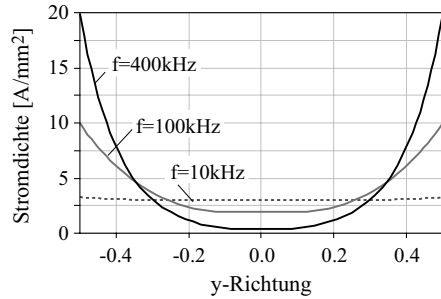


Abb. 1.21: Verlauf der Stromdichte in einem Folienleiter mit $b=50\text{mm}$, $h=1\text{mm}$ und $\hat{I}=150\text{A}$ für die Frequenzen $f=10\text{kHz}$, 100kHz und 400kHz aufgrund des Skin-Effektes.

Mit den berechneten Konstanten ergibt sich die Feldverteilung H_z zu

$$H_z = \frac{\hat{I} \sinh \alpha y}{2b \sinh \frac{\alpha h}{2}} \quad (1.26)$$

und damit die Stromverteilung ($dH_z/dy = J_x$) in x -Richtung zu

$$J_x = \frac{\alpha \hat{I} \cosh \alpha y}{2b \sinh \frac{\alpha h}{2}}. \quad (1.27)$$

Diese ist in Abbildung 1.21 für einen Folienleiter bei drei verschiedenen Frequenzen dargestellt. Dort ist deutlich zu erkennen, dass sich mit steigender Frequenz der Strom auf den Randbereich des Leiters konzentriert und das Innere des Leiters stromfrei wird.

Mit der Stromverteilung kann nun die ohmsche Verlustleistung pro Längeneinheit im Leiter mittels

$$P_S = \frac{b}{2\sigma} \int_0^h |J_x|^2 dy = \frac{\hat{I}^2}{4b\sigma\delta} \frac{\sinh \nu + \sin \nu}{\cosh \nu - \cos \nu} \quad (1.28)$$

mit

$$\nu = \frac{h}{\delta}$$

berechnet werden. Vergleicht man diese Verlustleistung mit den Verlusten im Leiter aufgrund eines DC-Stromes gleichen Effektivwertes ($I_{DC} = \hat{I}/\sqrt{2}$), so ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} P_{DC} &= \frac{\hat{I}^2}{2} R_{DC} = \frac{\hat{I}^2}{2\sigma b h} \\ P_S &= \frac{\nu}{2} \frac{\sinh \nu + \sin \nu}{\cosh \nu - \cos \nu} P_{DC} \\ &= R_{DC} F_F \hat{I}^2 \end{aligned} \quad (1.29)$$

mit

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{h}{\delta} \\ R_{DC} &= \frac{1}{\sigma b h} \\ F_F &= \frac{\nu}{4} \frac{\sinh \nu + \sin \nu}{\cosh \nu - \cos \nu} \end{aligned}$$

Der Faktor F_F bezeichnet dabei die Vergrößerung der ohmschen Verluste bei steigender Frequenz durch den Skineffekt – analog zum Faktor F_R für den Runddraht. Dabei ist F_F für DC gleich 0,5, d.h. die Verluste sind gleich den DC-Verlusten (Beachte: In Gleichung 1.29 wird der Spitzenwert des Stromes verwendet!). Mit steigender Frequenz nimmt F_F zu, da die Skintiefe δ sinkt. Der Verlauf von F_F ist in Abbildung 1.22 dargestellt.

Für Folienleiter, welche relativ dick im Vergleich zur Skintiefe sind (ca. $\nu > 6$), kann man sich – analog zum Rundleiter (siehe Abb. 1.5)

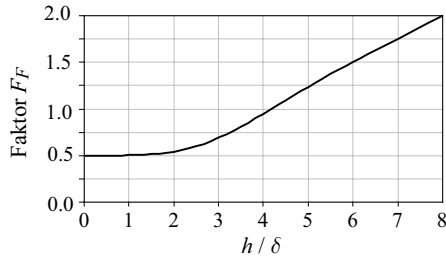


Abb. 1.22: Verlauf des Faktors F_F als Funktion des Verhältnisses h/δ für einen Leiter aus Kupfer. (In Gl. (1.29) den Spitzenwert des Stromes verwenden).

– vorstellen, dass der Strom in einem Streifen, der so breit ist wie die Skintiefe δ , mit einer homogenen Stromverteilung fließt. In beiden Fällen treten die gleichen Verluste im Leiter auf, wenn man Einflüsse eines externen Feldes ausser Acht lässt.

Proximity-Effekt / Induzierter Wirbelstrom

Befindet sich der Folienleiter in einem externen (d.h. nicht von ihm selbst erzeugten) magnetischen Wechselfeld, so werden in diesem – wie für den Runddraht beschrieben – Wirbelströme induziert. In der Wicklung eines Transformators bzw. einer Spule wird dieses externe magnetische Feld z.B. durch die anderen Leiter der Wicklung(en) erzeugt.

Im Folgenden werden die durch die induzierten Wirbelströme erzeugten Verluste in einem Folienleiter berechnet. Auf beiden Seiten des Folienleiters wirke ein externes magnetische Wechselfeld mit der Amplitude \hat{H}_S in z -Richtung. Mit dieser Randbedingung und der Gleichung (1.23) bzw. (1.26) ergibt sich folgende Feldverteilung

$$H_z = \frac{\cosh \alpha y}{\cosh \frac{\alpha h}{2}} \hat{H}_S \quad (1.30)$$

und damit die Stromverteilung ($dH_z/dy = J_x$) in x -Richtung

$$J_x = \frac{\alpha \sinh \alpha y}{\cosh \frac{\alpha h}{2}} \hat{H}_S \quad (1.31)$$

im Leiter. Der Verlauf der Stromverteilung ist in Abbildung 1.24 für einen Folienleiter in einem äusseren Magnetfeld H_z dargestellt. In der oberen Hälfte des Leiters fließt der Strom in x -Richtung und in der unteren Hälfte in $-x$ -Richtung, so dass das äussere H-Feld durch die Wirbelströme aus dem Leiter verdrängt wird.

Mit der Stromverteilung kann nun wieder die ohmsche Verlustleistung pro Längeneinheit mittels

$$\begin{aligned} P_P &= \frac{b}{2\sigma} \int_0^h |J_x|^2 dy = \frac{b}{\sigma\delta} \frac{\sinh \nu - \sin \nu}{\cosh \nu + \cos \nu} \hat{H}_S^2 \\ &= R_{DC} G_F \hat{H}_S^2 \end{aligned} \quad (1.32)$$

mit

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{h}{\delta} \\ R_{DC} &= \frac{1}{\sigma b h} \end{aligned}$$

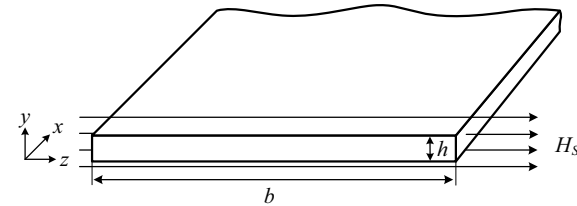


Abb. 1.23: Querschnitt eines in x -Richtung unendlichen Folienleiters mit externem H -Feld mit der Amplitude \hat{H}_S . (b ist die Breite der Folie).

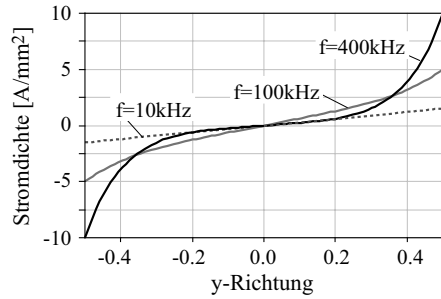


Abb. 1.24: Verlauf der Stromdichte J_x in einem Folienleiter mit $b=50\text{mm}$, $h=1\text{mm}$ und $\hat{H}_z=750\text{A/m}$ für die Frequenzen $f=10\text{kHz}$, 100kHz und 400kHz aufgrund des Proximity-Effektes.

$$G_F = b^2 \nu \frac{\sinh \nu - \sin \nu}{\cosh \nu + \cos \nu}$$

berechnet werden. Der Faktor G_F ist dabei für DC Ströme gleich null und nimmt dann – ähnlich wie der Faktor für den Skin-Effekt – mit steigenden Frequenzen zu. Der Verlauf ist in Abbildung 1.25 dargestellt.

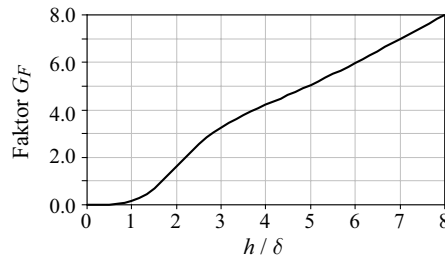


Abb. 1.25: Verlauf des Faktors G_F als Funktion des Verhältnisses h/δ für einen Leiter aus Kupfer und für den Wert $b = 1\text{m}$ (b ist die Breite der Kupferfolie, siehe Abbildung 1.23).

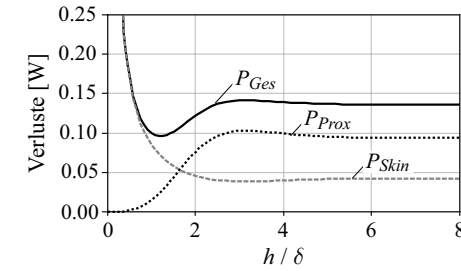


Abb. 1.26: Verluste in einem 1m langen Folienleiter für eine Breite von $b=50\text{mm}$, einen Strom von $\hat{I}=1\text{A}$, ein äusseres magnetisches Feld von $\hat{H}=150\text{A/m}$ und für eine Frequenz von $f=100\text{kHz}$ als Funktion der Dicke zur Skintiefe h/δ .

Die resultierenden Gesamtverluste für einen Folienleiter sind somit

$$P = R_{DC}(F_F \hat{I}^2 + G_F \hat{H}^2). \quad (1.33)$$

Dabei gibt es wiederum eine optimale Dicke h des Folienleiters, welche zu minimalen Verlusten führt. Dies ist z.B. in Abbildung 1.26 zu sehen, wo sowohl die Skin- und die Proximity-Effekt Verluste als auch die Gesamtverluste für einen Folienleiter dargestellt sind. Deutlich ist ein Minimum der Verluste bei $h \approx \delta$, d.h. $h \approx 0.25\text{mm}$, zu erkennen. Grössere Dicken der Folien würden zu mehr Verlusten führen und sind überdies wirtschaftlich gesehen uninteressant.

1.5.3 Verluste im Rundleiter

Nach der Herleitung der Gleichungen für Folienleiter, folgen nun die Zusammenhänge für Rundleiter, welche neben den Folienleitern häufig für Wicklungen eingesetzt. In den kommenden beiden Abschnitten werden

in Anlehnung an [1, 13] die inneren und die induzierten Wirbelstromverluste in einem Rundleiter berechnet. Dabei sei die Länge des Rundleiters im Verhältnis zu seinem Durchmesser sehr gross, so dass der Einfluss der Anschlüsse auf die Stromverteilung im Leiter vernachlässigt werden kann. Weiterhin wird angenommen, dass sich der Rückleiter im Unendlichen befindet. Damit ergibt sich ein Aufbau, welcher Zylindersymmetrie aufweist. In diesem Fall hat das Magnetfeld nur eine tangentielle und die Stromdichte nur eine axiale Komponente.

Skin-Effekt / Innerer Wirbelstrom

Unter Berücksichtigung der Zylindersymmetrie ($\frac{d}{d\varphi} = 0$) und bei Vernachlässigung des Verschiebungsstromes (quasistatische Näherung) kann die Maxwell-Gleichung (1.13) als

$$J_z = \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{H_\varphi}{r} \quad (1.34)$$

in Zylinderkoordinaten geschrieben werden. Mit der Maxwell-Gleichung $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ und dem ohmschen Gesetz $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ ergibt sich

$$\frac{\partial J_z}{\partial r} = j\omega \sigma \mu H_\varphi. \quad (1.35)$$

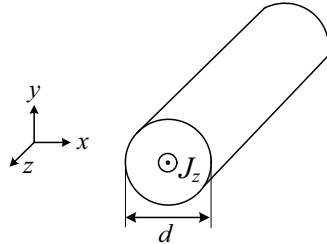


Abb. 1.27: Querschnitt eines in z -Richtung unendlichen Rundleiters mit Strom in z -Richtung. (r - φ -Ebene = x - y -Ebene)

Ersetzt man mit dieser Gleichung das H -Feld in Gleichung (1.34), so ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dr^2} J_z + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} J_z = j\omega \sigma \mu J_z \quad (1.36)$$

für die Stromdichte im Leiter. Dies ist eine Besselsche Differentialgleichung. Für einen Rundleiter ist

$$J_z = C \mathbb{J}_0(\alpha r) \quad (1.37)$$

die allgemeine Lösung für die gesamte Querschnittsfläche ($r \leq d/2$). Die Funktion $\mathbb{J}_0(\alpha r)$ ist die so genannte modifizierte Bessel-Funktion erster Art mit dem Index 0. Die Integrationskonstante C kann mit dem Zusammenhang, dass das Flächenintegral der Stromdichte über den Leiterquerschnitt A_L gleich dem Gesamtstrom I durch den Leiter ist, ermittelt werden.

$$I = \int_{A_L} J_z dA_L = 2\pi C \int_0^{d/2} r \mathbb{J}_0(\alpha r) dr \quad (1.38)$$

$$= \frac{2\pi d}{\alpha r^2} C \mathbb{J}_1(\alpha r) \quad (1.39)$$

Mit der daraus resultierenden Integrationskonstante ergibt sich die Stromdichte J_z zu

$$J_z = \frac{\alpha r I}{\pi d} \frac{\mathbb{J}_0(\alpha r)}{\mathbb{J}_1(\alpha d/2)}. \quad (1.40)$$

Setzt man diese in Gleichung (1.35) ein, ergibt sich für das H -Feld im Leiter

$$H_\varphi = \frac{I}{\pi d} \frac{\mathbb{J}_1(\alpha r)}{\mathbb{J}_1(\alpha d/2)}. \quad (1.41)$$

Aus dem Zusammenhang zwischen dem Strom I durch und dem magnetischen Feld im Leiter resultiert eine innere Induktivität des Leiters, welche zusammen mit dem ohmschen Widerstand zu einem Spannungsabfall entlang des Leiters führt. Aus diesem Spannungsabfall ergibt sich das

elektrische Feld im Leiter, welches über das ohmsche Gesetz ($\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$) lokal mit der Stromdichte J_z verknüpft ist. Aus dem ohmschen Gesetz ergibt sich die elektrische Feldstärke zu

$$E_z = \frac{\alpha r I}{\sigma \pi d} \frac{\mathbb{J}_0(\alpha r)}{\mathbb{J}_1(\alpha d/2)}. \quad (1.42)$$

Diese muss gleich dem Spannungsabfall pro Länge aufgrund des ohmschen Widerstandes R und der inneren Induktivität L_i (Widerstand / Induktivität pro Länge) sein. Daraus resultiert die Gleichung

$$(R + j\omega L_i)I = \frac{\alpha r I}{\sigma \pi d} \frac{\mathbb{J}_0(\alpha r)}{\mathbb{J}_1(\alpha d/2)}. \quad (1.43)$$

Mit dem Realteil der rechten Seite der Gleichung (1.43) können die ohmschen Verluste, inklusive der Verluste durch den Skin Effekt, berechnet werden. Der Realteil kann mit Hilfe des Zusammenhangs $J_n(xe^{j\frac{3\pi}{4}}) = K_{Ber}(n, x) + jK_{Bei}(n, x)$ ermittelt werden. Nach einigen Umrechnungen ergibt sich

$$\boxed{\begin{aligned} P_S &= \frac{4}{\sigma \pi d^2} \frac{\xi}{2} \frac{\hat{I}^2}{2} \cdot \\ &\frac{K_{Ber}(0, \xi) K'_{Bei}(0, \xi) - K_{Bei}(0, \xi) K'_{Ber}(0, \xi)}{K'_{Ber}(0, \xi)^2 + K'_{Bei}(0, \xi)^2} = \\ &= R_{DC} F_R \hat{I}^2 \end{aligned}} \quad (1.44)$$

mit

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{d}{\sqrt{2}\delta} \\ R_{DC} &= \frac{4}{\sigma \pi d^2} \\ F_R &= \frac{\xi}{4\sqrt{2}} \cdot \left[\frac{K_{Ber}(0, \xi) K_{Bei}(1, \xi) - K_{Ber}(0, \xi) K_{Ber}(1, \xi)}{K_{Ber}(1, \xi)^2 + K_{Bei}(1, \xi)^2} - \right. \end{aligned}$$

$$\left. \frac{K_{Bei}(0, \xi) K_{Ber}(1, \xi) + K_{Bei}(0, \xi) K_{Bei}(1, \xi)}{K_{Ber}(1, \xi)^2 + K_{Bei}(1, \xi)^2} \right]$$

für die Verluste durch den Skin-Effekt im Rundleiter, wobei K_{Bei} die *Bei-Kelvin* Funktion und K_{Ber} die *Ber-Kelvin* Funktion ist (manchmal auch Thompson-Funktion genannt). Der Faktor F_R beginnt dabei wiederum bei 0.5 für DC-Werte (Spitzenwert des Stromes einsetzen!) und steigt mit zunehmender Frequenz. In Abbildung 1.28 ist der Verlauf von F_R als Funktion des Verhältnisses h/δ dargestellt.

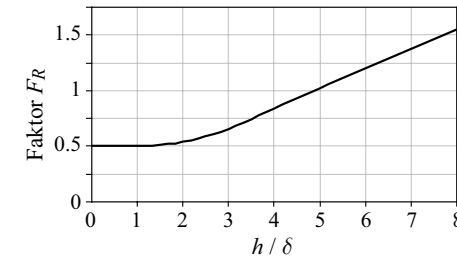


Abb. 1.28: Verlauf des Faktors F_R als Funktion des Verhältnisses h/δ für einen Leiter aus Kupfer. (In Gl. (1.44) den Spitzenwert des Stromes verwenden).

Proximity-Effekt / Induzierter Wirbelstrom

Nach den Zusammenhängen für den Skin-Effekt, werden nun die Gleichungen für den Proximity-Effekt hergeleitet. Dazu wird ein Rundleiter mit dem Durchmesser d und der Achse parallel zur z -Achse betrachtet, der sich in einem magnetischen Wechselfeld $H(r, \varphi)$ mit der Amplitude H_0 , welches parallel zur r - φ -Ebene ist (siehe Abb. 1.29) befindet. Unter diesen Bedingungen hat das magnetische Vektorfeld \mathbf{H} die Form $\mathbf{H} = H_r(r, \varphi)\vec{e}_r + H_\varphi(r, \varphi)\vec{e}_\varphi$ und das dazugehörige magnetische Vektorpotential, welches sich aus dem Zusammenhang

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (1.45)$$

herleitet, die Form $\mathbf{A}(r, \varphi) = A_z(r, \varphi)\vec{e}_z$. Das Magnetfeld induziert in dem Rundleiter Wirbelströme, die mittels der Maxwell-Gleichung (1.13) ($\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{H} + j\omega\epsilon\mathbf{E} = \text{rot rot } \mathbf{A} + j\omega\epsilon\mathbf{E}$) berechnet werden können. Diese kann unter Vernachlässigung des Verschiebungsstromes ($j\omega\epsilon\mathbf{E}$) und unter Verwendung des Vektorpotentials \mathbf{A} zu

$$J_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} \quad (1.46)$$

umgeformt werden.

Um eine partielle Differentialgleichung des magnetischen Vektorpotentials zu erhalten, muss die Stromdichte J_z in Gleichung (1.46) ersetzt werden. Dies gelingt mit der Maxwell-Gleichung (1.11) und dem ohmschen Gesetz ($\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$)

$$\mathbf{J} = -\sigma\mu j\omega\mathbf{A} \quad (1.47)$$

Daraus resultiert die partielle Differentialgleichung

$$\sigma\mu j\omega A_z = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2}. \quad (1.48)$$

Nach längerer Rechnung, welche z.B. in [13] (Seiten 91-95) erläutert

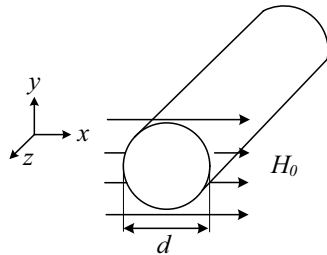


Abb. 1.29: Rundleiter im magnetischen Wechselfeld quer zum Leiter. (r - φ -Ebene = x - y -Ebene)

wird, ergibt sich die Lösung

$$A_z = \frac{2\mu_0^2 H_0 \mathbb{J}_1(j^{3/2}\xi r)}{j^{3/2}\xi \mathbb{J}_0(j^{3/2}\xi d/2)} \sin \varphi \quad (1.49)$$

für einen Leiter mit der relativen Permeabilität $\mu_r = 1$ (näherungsweise z.B. Kupfer, Aluminium) in einem Medium mit der relativen Permeabilität 1 (z.B. Luft). Aus diesem magnetischen Vektorpotential folgt mit (1.47) für die Stromdichte im Leiter

$$J_z = \frac{2\mu_0^2 H_0 j^{3/2}\xi \mathbb{J}_1(j^{3/2}\xi r)}{\mathbb{J}_0(j^{3/2}\xi d/2)} \sin \varphi. \quad (1.50)$$

Die daraus resultierenden Wirbelstromverluste pro Länge ergeben sich aus dem Doppelintegral über den Leiterquerschnitt [1, 13].

$$\begin{aligned} P_P &= \frac{1}{2\sigma} \int_0^{2\pi} \int_0^{d/2} |J_z|^2 r dr d\varphi = \\ &= -\frac{2\pi\xi}{\sigma} \hat{H}^2 \cdot \\ &\quad \frac{K_{Ber}(2, \xi)K'_{Ber}(0, \xi) + K_{Bei}(2, \xi)K'_{Bei}(0, \xi)}{K_{Ber}(0, \xi)^2 + K_{Bei}(0, \xi)^2} = \\ &= R_{DC} G_R \hat{H}^2 \end{aligned} \quad (1.51)$$

mit

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{d}{\sqrt{2}\delta} \\ R_{DC} &= \frac{4}{\sigma\pi d^2} \\ G_R &= -\frac{\xi\pi^2 d^2}{2\sqrt{2}} \cdot \left[\frac{K_{Ber}(2, \xi)K_{Ber}(1, \xi) + K_{Ber}(2, \xi)K_{Bei}(1, \xi)}{K_{Ber}(0, \xi)^2 + K_{Bei}(0, \xi)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{K_{Bei}(2, \xi)K_{Bei}(1, \xi) - K_{Bei}(2, \xi)K_{Ber}(1, \xi)}{K_{Ber}(0, \xi)^2 + K_{Bei}(0, \xi)^2} \right] \end{aligned}$$

Mit den beiden Faktoren F_R und G_R können die Gesamtverluste, resultierend aus Skin-Effekt und Proximity-Effekt, mit der Gleichung

$$P = R_{DC}(F_R \hat{I}^2 + G_R \hat{H}^2) \quad (1.52)$$

berechnet werden. Der Verlauf der einzelnen Verlustanteile als Funktion der Frequenz bzw. des Verhältnisses h/δ ist in Abschnitt 1.1 zu finden.

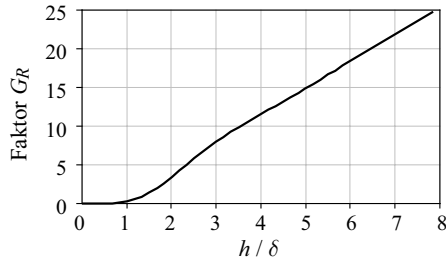


Abb. 1.30: Verlauf des Faktors G_R als Funktion des Verhältnisses h/δ für einen Leiter aus Kupfer und den Wert $d = 1\text{m}$. (In Gl. (1.44) den Spitzenwert des Stromes verwenden).

1.5.4 Orthogonalität der Verlustanteile

In den letzten Abschnitten wurden immer die Verluste für rein sinusförmige Ströme betrachtet. In vielen magnetischen Bauelementen, wie z.B. der Induktivität eines Buck-Konverters, fließen jedoch keine sinusförmigen Ströme. Diese zeitlich nicht sinusförmigen Verläufe können allerdings mit Hilfe einer Fourierzerlegung als Summe sinusförmiger Ströme dargestellt werden. Das heißt ein beliebiger periodischer Strom kann mit den komplexen Fourierkomponenten I_ν

$$I(t) = I_0 + I_1 \cos \omega t + \dots + I_\nu \cos \nu \omega t + \dots \quad (1.53)$$

bzw. durch die dazugehörige komplexen Stromdichtekomponenten J_ν

$$J(x, y, t) = J_0(x, y) + J_1(x, y) \cos \omega t + \dots + J_\nu(x, y) \cos \nu \omega t + \dots \quad (1.54)$$

beschrieben werden. In diesem Fall treten bei den verschiedenen Frequenzanteilen in den einzelnen Leitern gleichzeitig Verluste auf, welche durch den Skin- und den Proximity-Effekt hervorgerufen werden. Dabei stellt sich die Frage, ob man die Gesamtverluste als Summe der einzelnen Verlustanteile berechnen darf oder ob die Gesamtverluste nur auf Basis des eigentlichen Stromverlaufs berechnet werden können. Dies soll im Folgenden kurz erörtert werden.

Dazu werden zuerst die entstehenden Gesamtverluste pro Länge als Funktion der zeit- und ortsabhängigen Stromdichte $J(x, y, t)$ ermittelt. Dies ergibt

$$P = \frac{1}{\sigma T} \int_A \int_0^T |J(x, y, t)|^2 dt dA \quad (1.55)$$

mit

A = Querschnittsfläche des Leiters

T = Periode des Stromes.

Nun kann die Stromdichte als Summe der Fourierkomponenten (1.54) ausgedrückt werden. Da das Integral des Produktes von Fourieranteilen bei unterschiedlichen Frequenzen wegen der Orthogonalität der Funktionen ($\int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \sin lx dx = 0$ für $k \neq l$) gleich Null ist, kann die Gleichung (1.55) zu

$$P = \frac{1}{2\sigma} \sum_{i=0}^{\infty} \int_A J_i J_i^* dA \quad (1.56)$$

vereinfacht werden, d.h. anstatt über die Fourieranteile zeitlich zu integrieren, kann man auch die Summe der einzelnen Fourieranteile bilden.

Dabei ergibt sich die Fourierkomponente der Stromdichte \mathbf{J}_i aus der Summe der Stromdichten für den Skin- \mathbf{J}_S (vgl. (1.27) und (1.37)) und den Proximity-Effekt \mathbf{J}_P (vgl. (1.31) und (1.50)). Mit diesem Zusammenhang sind die Verluste durch

$$P = \frac{1}{2\sigma} \sum_{i=0}^{\infty} \int_A (\mathbf{J}_{Si} + \mathbf{J}_{Pi})(\mathbf{J}_{Si}^* + \mathbf{J}_{Pi}^*) dA \quad (1.57)$$

gegeben. Betrachtet man nun die einzelnen Stromdichten J_S und J_P für einen Folien- bzw. einen Rundleiter, so erkennt man, dass die Stromdichte durch den Skin-Effekt J_S eine gerade Symmetrie und die Stromdichte durch den Proximity-Effekt J_P eine ungerade Symmetrie aufweisen (siehe [3]). Somit sind die Integralanteile über die Fläche des Leiters für die Produktterme aus J_S und J_P gleich Null und die Gleichung für die Verluste vereinfacht sich zu

$$\boxed{P = \frac{1}{2\sigma} \sum_{i=0}^{\infty} \int_A ((\mathbf{J}_{Si}\mathbf{J}_{Si}^*) + (\mathbf{J}_{Pi}\mathbf{J}_{Pi}^*)) dA} \quad (1.58)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (P_{Si} + P_{Pi})$$

mit

P_{Si} = Verluste durch Skin-Effekt der i -ten Harmonischen

P_{Pi} = Verluste durch Proximity-Effekt der i -ten Harmonischen.

Die einzelnen Verlustanteile für Folien- und Rundleiter können dabei mit den Zusammenhängen aus den Abschnitten 1.5.2 und 1.5.3 berechnet werden.

Aus dieser Ableitung folgt für die Berechnung der Gesamtverluste erstens, dass die Verlustanteile bei den einzelnen Frequenzen addiert

werden dürfen und dass sich zweitens die Verlustanteile bei den einzelnen Frequenzen wiederum aus der Summe der Skin- und der Proximity-Effekt-Verluste ergeben. Letzteres gilt allerdings nur, wenn das Integral des Mischterms $J_{Si}J_{Pi}$ über dem Leiterquerschnitt gleich null ist, wie dies aufgrund der unterschiedlichen Symmetrien für den Rund- und den Folienleiter der Fall ist. Im Allgemeinen ergeben sich die Gesamtverluste bei den einzelnen Frequenzen aus der Summe der Stromdichten.

1.5.5 Verluste im Litzendraht

Um die Verluste durch Skin- und Proximity-Effekt bei höheren Frequenzen zu reduzieren, werden neben Folien- und Rundleitern häufig Litzendrähte eingesetzt, wie dies in Abschnitt 1.4 bereits erläutert wurde. Die Leiter bestehen dabei aus einer Vielzahl isolierter dünner Einzeladern, welche entlang des Leiters so verdreht sind, dass jeder Einzelader jede Position im Leiterquerschnitt einnimmt. Dadurch teilt sich der Gesamtstrom gleichmässiger auf die Einzeladern auf.

Besteht der Litzendraht aus N_s Einzeladern, so können die Verluste aufgrund des Skin-Effektes einfach als Summe der Skin-Effekt-Verluste der Einzeladern berechnet werden, da diese nicht von den anderen Leitern beeinflusst werden. Damit ergeben sich die Gesamtverluste durch

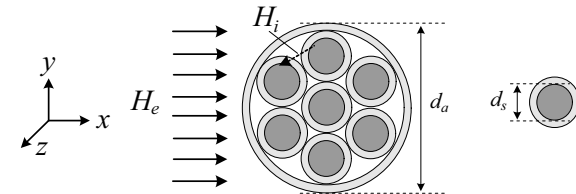


Abb. 1.31: Querschnitt durch einen Litzendraht mit externem H_e - und innerem H_i -Feld. (Innerer Strom in z-Richtung)

den Skin-Effekt zu

$$P_{S,L} = N_s R_{DC,E} F_{R,E} \frac{\hat{I}^2}{N_s^2} \quad (1.59)$$

mit

$$R_{DC,E} = \frac{4}{\sigma \pi d_s^2}.$$

Beim Litzendraht gibt es zwei Magnetfeldkomponenten, welche Proximity-Effekt-Verluste in den einzelnen Drähten erzeugen (siehe Abb. 1.31 & 1.17). Dies ist zum einen das externe Magnetfeld H_e in x -Richtung, welches durch die benachbarten Leiter erzeugt wird. Zum anderen erzeugen die Ströme in den einzelnen Adern der Litze ein magnetisches Feld H_i , welches in den benachbarten Einzeladern der Litze selbst Proximity-Effekt-Verluste erzeugt (vgl. [1, 15]).

Das innere H -Feld wird mit Hilfe der integralen Form des Durchflutungsgesetzes (1.13) und der mittleren Stromdichte im Litzenleiter berechnet. Dabei wird angenommen, dass der Strom gleichmässig über der gesamten Fläche des Leiters verteilt ist, um die Berechnungen zu vereinfachen. Je grösser die Anzahl der Einzeladern ist, desto besser ist diese Näherung erfüllt.

Unter der obigen Annahme ergibt sich die mittlere Stromdichte im Litzenleiter mit dem Füllfaktor k_L näherungsweise zu

$$J_0 = \frac{k_L 4 \hat{I}}{N_s \pi d_s^2} \quad (1.60)$$

mit

$$k_L = \frac{N_s \pi d_s^2}{\pi d_a^2}.$$

Den Aussendurchmesser des Litzenleiters d_a entnimmt man entweder dem Datenblatt der Litze oder berechnet diesen näherungsweise aus dem Durchmesser d_s und der Anzahl N_s der Einzeladern [5].

$$d_a = 135e - 6 \left(\frac{N_s}{3} \right)^{0.45} \cdot \left(\frac{d_s}{40e - 6} \right)^{0.85} \quad (1.61)$$

Somit ergibt sich die Amplitude des mittleren inneren Magnetfeldes H_i zu

$$H_i = \frac{\pi r^2 J_0}{2\pi r} = \frac{2 \hat{I} r}{\pi d_a^2}. \quad (1.62)$$

Mit dem Winkel φ zwischen der x -Achse und dem Startpunkt des Vektors \mathbf{H}_i , kann das innere magnetische Feld als

$$\mathbf{H}_i = \frac{4Ir}{2\pi d_a^2} (-\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y) \quad (1.63)$$

angegeben werden (Strom in z -Richtung). Das magnetische Gesamtfeld \mathbf{H} ergibt sich durch vektorielle Addition des inneren und des äusseren H -Feldes.

$$\mathbf{H} = (H_e - H_i \sin \varphi) \vec{e}_x + H_i \cos \varphi \vec{e}_y \quad (1.64)$$

Mit dem Gesamtfeld können die Proximity-Effekt-Verluste pro Flächeneinheit als Funktion des Winkels φ berechnet werden.

$$P_{P,Dichte}(\varphi) = \frac{4N_s R_{DC,E} G_{R,E} \mathbf{H}^2}{\pi d_a^2} \quad (1.65)$$

Nimmt man nun näherungsweise an, dass die Verluste über die gesamte Fläche des Litzenleiters verteilt sind, so ergibt sich aus der Integration der Verlustleistungsdichte über dem Leiterquerschnitt die gesamten

Proximity-Effekt-Verluste eines Litzenleiters

$$\begin{aligned}
 P_{P,L} &= \frac{4N_s R_{DC,E} G_{R,E}}{\pi d_a^2} \int_0^{r_a} \int_0^{2\pi} [H_e^2 + H_e H_i + H_i^2] d\varphi dr \\
 &= \frac{4N_s R_{DC,E} G_{R,E}}{\pi d_a^2} \int_0^{r_a} \int_0^{2\pi} \left[H_e^2 + H_e \frac{2\hat{I}r \sin \varphi}{\pi d_a^2} + \frac{4\hat{I}^2 r^2}{\pi^2 d_a^4} \right] d\varphi dr \\
 &= N_s R_{DC,E} G_{R,E} \left[H_e^2 + \frac{\hat{I}^2}{2\pi^2 d_a^2} \right]. \quad (1.66)
 \end{aligned}$$

Dabei muss in dem Faktor $G_{R,E}$ für den Proximity-Effekt der Durchmesser der Einzeladern eingesetzt werden.

Wie man in Gleichung (1.66) erkennt, können die Proximity-Effekt-Verluste aufgrund des externen magnetischen Feldes von den Verlusten durch das interne H -Feld getrennt werden. Damit ergeben sich die Verluste zu

$$\boxed{P_{P,L} = P_{P,L,ext} + P_{P,L,int}} \quad (1.67)$$

mit

$$\begin{aligned}
 P_{P,L,ext} &= N_s R_{DC,E} G_{R,E} H_e^2 \\
 P_{P,L,int} &= \frac{N_s R_{DC,E} G_{R,E} \hat{I}^2}{2\pi^2 d_a^2}.
 \end{aligned}$$

In Abbildung 1.32 sind die Verläufe der einzelnen Verlustanteile für einen Leiter aus Litze und einen massiven Leiter mit demselben DC-Widerstand dargestellt. Dort erkennt man, dass die Verluste des Litzenleiters durch den Skin-Effekt aufgrund des wesentlich kleineren Durchmessers der Einzeladern deutlich weniger stark mit der Frequenz ansteigen, als dies beim massiven Rundleiter der Fall ist.

Im Bereich höherer Frequenzen steigen hingegen die Verluste durch den externen Proximity-Effekt beim Litzenleiter stärker an, obwohl der

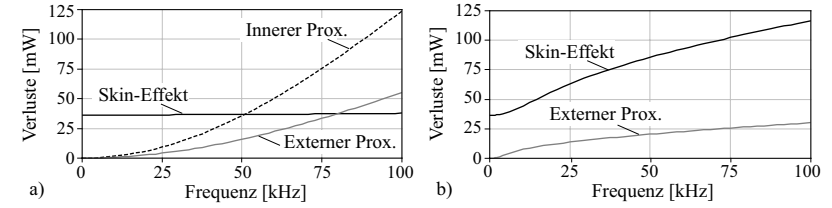


Abb. 1.32: Verlauf der Verluste durch den Skin- und den inneren sowie den externen Proximity-Effekt für a) einen Litzendraht mit $N_s = 25$ Einzeladern mit einer Durchmesser der Adern von $d_s = 0.5\text{mm}$ sowie für einen Runddraht mit $d = 2.5\text{mm}$. Die beiden Leiter haben den gleichen DC-Widerstand.

Durchmesser der Einzeladern geringer ist. Dieser ist $d_{Litze} = d_{Rund}/\sqrt{N_s}$, wenn man einen identischen DC-Widerstand voraussetzt. Jedoch muss man die Verluste in allen Einzeladern aufsummieren, um die gesamten Verluste durch den externen Proximity-Effekt zu erhalten. Dies ist auch in (1.67) ersichtlich. Dies führt dazu, dass zuerst die Verluste durch den externen Proximity-Effekt für den massiven Leiter und dann im höheren Frequenzbereich die Verluste für den Litzenleiter stärker ansteigen. Dieser Effekt und die Verluste durch den inneren Proximity-Effekt führen dazu, dass der Litzenleiter nur in einem begrenzten Frequenzbereich geringere Verluste als ein massiver Leiter aufweist.

1.5.6 Aufbau mit mehreren Lagen

In den vorangegangenen Abschnitten wurden die Verluste durch den Skin- und den Proximity-Effekt von einzelnen Folien- und Rundleitern sowie von Litzen berechnet. Da die Wicklungen von Transformatoren im allgemeinen aus mehreren Windungen bzw. Lagen bestehen, werden im folgenden die Verluste in mehrlagigen Wicklungen auf Basis obiger Überlegungen berechnet.

Die Verluste aufgrund des Skin-Effektes werden dabei nur von der Geometrie des Leiters und von dem Strom durch den Leiter selbst bestimmt. Die Lage des Leiters im Wicklungsfenster bzw. die relative Lage zu anderen Leitern sowie der geometrische Aufbau der Wicklung haben näherungsweise keinen Einfluss auf die Verluste durch den Skin-Effekt. Aus diesem Grunde kann dieser Verlustanteil einfach durch Multiplikation der Verluste (pro Länge) (1.29), (1.44) und (1.59) mit der Länge des jeweiligen Leiters berechnet werden.

Die Proximity-Effekt-Verluste resultieren aus dem magnetischen Feld, welches durch die anderen Leiter der Wicklung(en) erzeugt wird. Somit benötigt man die Verteilung der magnetischen Feldstärke im Bereich des Leiters bzw. der Wicklung, um die Verluste berechnen zu können. Eine allgemeine Berechnung der Feldverteilung für beliebige Geometrien unter Berücksichtigung der Rand-, End-, 2D-, und 3D-Effekte ist – wie einleitend bereits erwähnt – nur mit Hilfe von numerischen Methoden (z.B. FEM) möglich. Für spezielle Geometrien/Teilprobleme existieren auch (semi-)analytische Verfahren zur Feldberechnung [5,16], welche Teile oben genannter Effekte mittels aufwendiger Berechnungen berücksichtigen.

Für viele magnetischen Komponenten von leistungselektronischen Schaltungen ist es jedoch möglich das magnetische Feld im Wicklungsfenster durch 1-dimensionale Näherungen zu berechnen. Dieser Ansatz geht auf die Veröffentlichung [4] von Dowell zurück und wird im Folgenden erläutert.

Beim 1D-Ansatz nach Dowell (siehe Abb. 1.33) wird davon ausgegangen, dass das magnetische Feld H_z parallel zur Leiteroberfläche ist und nur eine Komponente in z -Richtung aufweist. Dies wird dadurch begründet, dass die relative Permeabilität des Kernes sehr viel grösser ist als die relative Permeabilität im Wicklungsfenster (idealerweise geht μ_r des Kernes gegen unendlich). Damit wirkt der magnetische Kern ober- und unterhalb wie ein “magnetischer Spiegel”, was theoretisch in einen unendlich breiten Leiter ($b_F \rightarrow \infty$) resultiert.

Weiterhin wird angenommen, dass die Breite der Folien im Idealfall gleich der Breite des Wicklungsfensters ist ($b \approx b_F$), d.h. die Folien schliessen oben und unten mit dem Wicklungsfenster bündig ab. Unter diesen Bedingungen kann das magnetische Feld mit dem Durchflutungsgesetz, z.B. für den 1. Leiter zwischen y_1 und y_2 mit

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = b_F \int_{y_1}^{y_2} J_x(y) dy \quad (1.68)$$

berechnet werden. Damit folgt für das Magnetfeld $H_{z,1}$ zwischen dem 1. und dem 2. Leiter

$$H_{z,1} = \frac{\hat{I}_1}{b_F}, \quad (1.69)$$

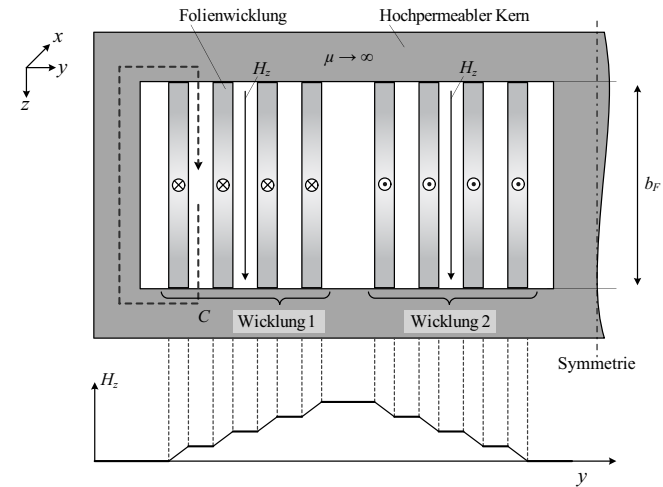


Abb. 1.33: Querschnitt durch das linke Wicklungsfenster eines Transformators mit Folienwicklung und E-Kern, sowie der dazugehörige Verlauf des magnetischen Feldes in z -Richtung.

wenn in dem Leiter 1 ein Gesamtstrom I_1 in x -Richtung fliesst. Das H-Feld zwischen den Leitern ist konstant, da keine zusätzliche Durchflutung (NI) mehr umschlossen wird. Im Bereich des zweiten Leiters steigt das H-Feld weiter an, da im zweiten Leiter der Strom in die gleiche Richtung fliesst wie in Leiter 1. Dies trifft auch auf die Leiter 3 und 4 von Wicklung 1 zu. Im Bereich der zweiten Wicklung fliesst der Strom in die entgegengesetzte Richtung, womit die Amplitude des H-Feldes dort wieder abnimmt. Zwischen den beiden Wicklungen ist das H-Feld am stärksten (vgl. Kapitel 6.4.2. Skript Leistungselektronik). Aufgrund des Durchflutungsgleichgewichts bei Transformatoren ($N_1 I_1 = N_2 I_2$) ist das H-Feld ausserhalb der Wicklungen gleich null.

Mit dem H-Feld können nun die Verluste durch den Proximity-Effekt berechnet werden. Dabei wird angenommen, dass das magnetische Feld auf beiden Seiten des Leiters gleich ist. Dies ist bei einem realen Aufbau, bei welchem Strom durch den Leiter fliesst, physikalisch nicht korrekt, kann aber als gute Näherung verwendet werden, wenn der Einfluss eines Einzeleleiters auf das gesamte Magnetfeld gering ist, d.h. das ΔH zwischen der linken und der rechten Seite des Leiters im Vergleich zur Gesamtamplitude klein ist.

In praktischen Anwendungen wird normalerweise angenommen, dass auf beiden Seiten des Leiters der Mittelwert des Magnetfeldes von der linken und der rechten Seite des Leiters anliegt ($H_{mittel} \approx 1/2[H_{links} + H_{rechts}]$). Damit ergibt sich für einen Aufbau nach Abbildung 1.33 mit N Windungen das durchschnittliche Magnetfeld H_{avg} zu

$$H_{avg} = \frac{2m-1}{2} \frac{\hat{I}}{b_F} \quad m = 1..N \quad (1.70)$$

für Windung 1 oder 2. Daraus folgen die Gesamtverluste für eine Wick-

lung mit der mittleren Windungslänge l_m

$$\begin{aligned} P &= R_{DC} (F_F \hat{I}^2 N + G_F \sum_{m=1}^N \hat{H}_{avg}^2) l_m \\ &= R_{DC} \hat{I}^2 \left(F_F + G_F \frac{4N^2 - 1}{12b_F^2} \right) N l_m \end{aligned} \quad (1.71)$$

mit

$$R_{DC} = \frac{1}{\sigma b h}.$$

Aus der Gleichung folgt, dass die Verluste aufgrund des Proximity-Effektes mit steigender Windungs- bzw. Lagenzahl wegen der steigenden Amplitude des H-Feldes dominieren. Um die Verluste in einem Transformator zu berechnen, muss man Gleichung (1.71) auf die beiden Windungen anwenden und dann die Verluste addieren.

Interleaving der Wicklungen

Bei einer grossen Anzahl an Lagen können die Proximity-Effekt-Verluste sehr gross werden und die Gesamtverluste dominieren. Um die Verluste zu reduzieren, muss die Amplitude des magnetischen Feldes verkleinert werden. Dies kann man z.B. durch Verschachteln (Interleaving) der Primär- und der Sekundärwicklung erreichen (vgl. Abb. 1.34 ohne Shunts).

Da immer eine positive Durchflutungsquelle (z.B. primär) und eine negative Quelle (z.B. sekundär) direkt aufeinander folgen, reduziert sich die Amplitude des H-Feldes und damit die Proximity-Effekt-Verluste deutlich. Allerdings erhöht sich die parasitäre Kopplungskapazität zwischen der Primär- und der Sekundärwicklung im gleichen Masse wie

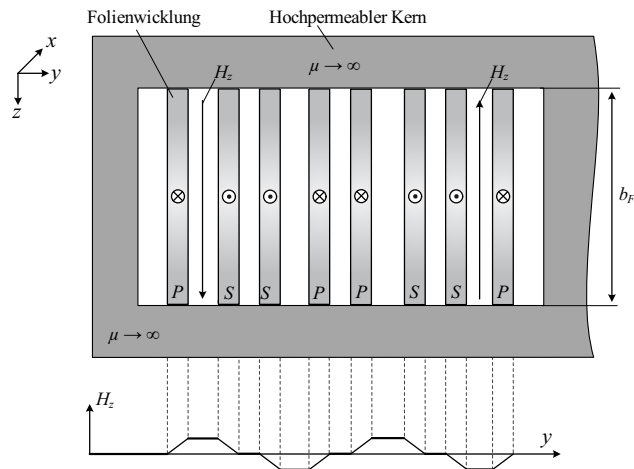


Abb. 1.34: Querschnitt durch das linke Wicklungsfenster eines Transformators mit verschachtelter Folienwicklung, sowie der dazugehörige Verlauf des magnetischen Feldes in z -Richtung. Durch die Verschachtelung sinkt die Amplitude des H -Feldes und damit die Proximity-Effekt-Verluste im Vergleich zu Abbildung 1.33 deutlich.

sich das H -Feld reduziert, da die Stirnflächen zwischen den Wicklungen zunehmen. Dadurch verschlechtert sich unter anderem das EMV-Verhalten, da hochfrequente Störströme (v.a. Gleichtakt-Ströme) leicht über die Koppelkapazität fließen können.

Schmale Folienleiter / Mehrere Folienleiter pro Lage

Bei vielen realen Aufbauten ist die Breite der Folie b_L deutlich kleiner als die Breite des Wickelfensters b_F (z.B. aufgrund eines Spulenkörpers) oder es befinden sich mehrere Folienleiter in einer Lage, wie in Abbildung 1.35 dargestellt ist. Solche Aufbauten können näherungsweise dadurch beschrieben werden, dass diese in einen Folienleiter transformiert

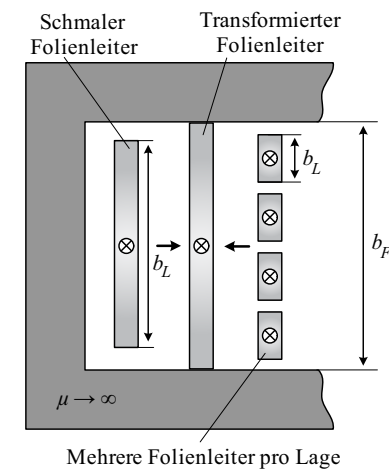


Abb. 1.35: Querschnitt durch einen Transformator mit Folienwicklung, welche aus schmalen Folien bzw. mehreren Leitern pro Lage (hier: $N_L = 4$) aufgebaut ist.

werden, welcher sich über die gesamte Breite des Wicklungsfensters erstreckt. Damit man für den transformierten Leiter näherungsweise die gleichen Verluste erhält wie für den ursprünglichen Leiter, schlägt Dowell [4] als Transformationsvorschrift vor, dass der DC-Widerstand des ursprünglichen Leiters und der des transformierten Leiters identisch sein sollen. Dies erreicht man durch Einführen des "Porosity"-Faktors η , welcher durch

$$\eta = \frac{N_L b_L}{b_F} \quad (\eta \leq 1) \quad (1.72)$$

mit

N_L = Anzahl der Leiter pro Lage

b_L = Breite der einzelnen Leiter

definiert ist. Mit dem Porosity-Faktor werden die Leitfähigkeit, die Skintiefe und die Variable ν des transformierten Leiters neu definiert

$$\sigma' = \eta\sigma \quad (1.73)$$

$$\delta' = \frac{1}{\sqrt{\pi f \sigma' \mu}} \quad (1.74)$$

$$\nu' = \frac{h}{\delta'} \quad (1.75)$$

und in den Formeln für die Skin- und Proximity-Effekt-Verluste (1.29) und (1.32) eingesetzt.

Mit steigendem Abstand der Leiter in einer Lage, d.h. fallendem Porosity-Faktor η , nimmt die Skintiefe zu, d.h. das Verhältnis zwischen AC- und DC-Widerstand sinkt im Vergleich zu einer Rechnung ohne η . Damit wird der 2D-Gestalt des H -Feldes für Aufbauten mit schmalen Folien bzw. mehreren Leitern pro Lage Rechnung getragen, welches zwischen die Leiter bzw. zwischen den Leiter und den Magnetkern eindringt und die Grösse der leitenden Oberfläche erhöht. Dies ist in Abbildung 1.36 anhand des magnetischen Feldes und der Stromdichte zu erkennen.

Mit der steigenden leitenden Oberfläche sinken die Verluste [16]. Aus diesem Grunde ist es besser, den Porosity-Faktor als (empirischen) Faktor zu betrachten, welcher 2D-Effekte modelliert. Eine theoretische und physikalische Begründung für die Transformationsvorschrift von Dowell gibt es nicht [17] (z.B. die Skintiefe ist unabhängig von der Geometrie). Die messtechnischen Ergebnisse zeigen jedoch, dass die Berechnungen mit dem Porosity-Faktor gute Ergebnisse liefern, wenn η in der Nähe von 1 ist, d.h. die Wicklung relativ dicht gepackt ist.

Die Verluste für den schmalen Folienleiter können mit der Gleichung (1.71) berechnet werden, wenn die transformierten Grössen (1.73)-(1.75) eingesetzt werden. Die Verluste von Wicklungen, welche aus mehreren Folienleitern pro Lage bestehen, können auf die gleiche Weise berechnet werden. Bei diesen muss jedoch beachtet werden, dass sich der felderzeugende Strom in Gleichung (1.70) aus der Summe der Ströme in den

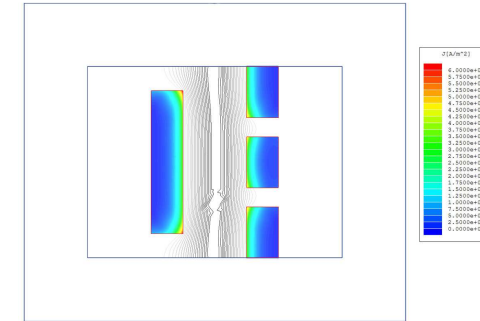


Abb. 1.36: Querschnitt durch das Fenster eines Transformator mit Folienwicklung, welche aus schmalen Folien bzw. mehreren Leitern pro Lage (hier: $N_L = 2$) aufgebaut ist. Neben der Stromdichte in den Leitern ist das H -Feld zwischen den beiden Leitern aufgetragen.

Folien einer Lage zusammensetzt, d.h. für Abbildung 1.35 gleich $N_L I$ ist.

Falls eine Lage (meistens die erste bzw. letzte Lage) nicht vollständig bewickelt ist, so wird diese getrennt betrachtet. Dabei ist zu beachten, dass der Verlauf des H -Feldes nach Abbildung 1.33 stetig ist.

Wicklungen aus Runddraht

Die oben beschriebene Transformation für mehrere Folienleiter pro Lage kann auch auf Rundleiter angewendet werden [4], wie in Abbildung 1.37 dargestellt ist. Dabei werden die Rundleiter zuerst in äquivalente quadratische Leiter mit der Kantenlänge h transformiert. Diese haben die gleiche Querschnittsfläche wie die Rundleiter, woraus folgende Transfor-

mationsvorschrift resultiert

$$h = \sqrt{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} d \quad (1.76)$$

$$\eta = \frac{N_L h}{b_F} = \frac{N_L \sqrt{\pi} d}{2b_F} \quad (\eta \leq 1) \quad (1.77)$$

mit

N_L = Anzahl der Leiter pro Lage

d = Durchmesser der Rundleiter/Litze.

Anschliessend werden die quadratischen Leiter mit Hilfe der Gleichungen (1.72)-(1.75) in einen Folienleiter transformiert, für welchen das magnetische Feld nach oben beschriebener Methode berechnet werden kann. Die Gesamtverluste für eine Wicklung aus Rundleitern werden genauso berechnet, wie die Verluste für eine Wicklung aus mehreren Folienleitern pro Ebene.

Die Transformation von Rundleitern in einen äquivalenten Folienleiter ist z.T. mit grossen Fehlern behaftet vor allem, wenn die Windungen nicht dicht gepackt sind bzw. der Faktor ν/d relativ gross ist [3]. In diesem Fall ist es besser, die oben beschriebenen Verlustgleichungen für Rundleiter zu verwenden. Das magnetische Feld zwischen den Leitern für die Berechnung der Proximity-Effekt-Verluste wird durch den gleichen Ansatz wie für Folienleiter berechnet (siehe Gl. (1.70)). Damit ergibt sich näherungsweise :

$$\boxed{\begin{aligned} P &= R_{DC,R} \left(N F_R \hat{I}^2 + N_L G_R \sum_{m=1}^{M_L} \hat{H}_{avg}^2 \right) l_m \Rightarrow \\ P &= R_{DC,R} \hat{I}^2 \left(N F_R + N_L^3 M_L G_R \frac{4M_L^2 - 1}{12b_F^2} \right) l_m \end{aligned}} \quad (1.78)$$

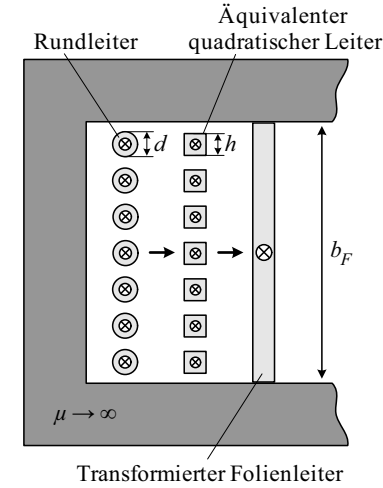


Abb. 1.37: Querschnitt durch einen Transformator mit Rundleiter, welche in einen äquivalenten Folienleiter transformiert werden.

mit

$$R_{DC,R} = \frac{4}{\sigma \pi d^2}$$

M_L = Anzahl der kompletten Lagen,

wobei sich $R_{DC,F}$ aus einem Folienleiter mit der Breite b_L ergibt. Auch hier müssen – wie bei den Folienleitern – nicht komplette Lagen getrennt betrachtet werden.

Wicklungen aus Litze

Die Berechnung der Verluste einer Wicklung aus Litze erfolgt auf die gleiche Weise wie die Berechnung der Verluste für Rundleiter im vorangegangenen Abschnitt. Es werden die Gleichungen aus Abschnitt 1.5.5

für die HF-Effekte verwendet und das magnetische Feld wird genauso berechnet wie für Folienleiter beschrieben (siehe Gl. (1.70)). Jedoch müssen bei der Litze zusätzlich die Proximity-Effekt-Verluste durch das innere H -Feld beachtet werden. Diese sind – unabhängig von der Position bzw. dem geometrischen Aufbau – gleich für alle Windungen der Litze und können wie die Skin-Effekt-Verluste behandelt werden. Somit ergibt sich für die Wicklungsverluste

$$P_{Litze} = R_{DC,E} N l_m \left(\frac{F_{R,E}}{N_s} + G_{R,E} \frac{N_s}{2\pi^2 d_a^2} \right) \hat{I}^2$$

$$+ R_{DC,E} l_m G_{R,E} N_s \sum_{m=1}^{M_L} N_L \left(\frac{2m-1}{2} \frac{N_L}{b_F} \right)^2 \hat{I}^2$$

$$P_{Litze} = R_{DC,E} l_m \left[\frac{N F_{R,E}}{N_s} + G_{R,E} \frac{N N_s}{2\pi^2 d_a^2} + \right.$$

$$\left. + G_{R,E} N_s N_L^3 \frac{M_L(4M_L^2 - 1)}{b_F^2} \right] \hat{I}^2$$

mit

$$R_{DC,E} = \frac{4}{\sigma \pi d_s^2}.$$

1.5.7 Optimale Höhe eines Folienleiters

Mit den Gleichungen aus den vorangegangenen Abschnitten können die Skin- und Proximity-Effekt-Verluste in Folienwicklungen von Transformatoren für beliebige Ströme $i(t)$ nach

$$i(t) = I_{DC} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega t - \varphi_n) \quad (1.79)$$

berechnet werden. Betrachtet man die Verluste in Abhängigkeit der Dicke der Folie, so erkennt man, dass es eine optimale Dicke gibt, für welche die Verluste minimal werden. Wie oben bereits erläutert resultiert dies daraus, dass die Skin-Effekt-Verluste mit steigender Dicke ab- und die Proximity-Effekt-Verluste zunehmen (siehe Abb. 1.38).

Diese optimale Dicke kann mit obigen Gleichungen numerisch berechnet, jedoch nicht analytisch angegeben werden. Um einen analytischen Zusammenhang zu ermitteln, haben die Autoren von [18] folgende Näherungen für die Skin- F_F (1.29) und Proximity-Effekt-Faktoren G_F (1.32) angewendet.

$$\frac{\sinh \nu + \sin \nu}{\cosh \nu - \cos \nu} \approx \frac{2}{\nu} + \frac{1}{90} \nu^3 - \frac{1}{37800} \nu^7 + O(\nu^{11}) \quad (1.80)$$

$$\frac{\sinh \nu - \sin \nu}{\cosh \nu + \cos \nu} \approx \frac{1}{6} \nu^3 - \frac{17}{2520} \nu^7 + O(\nu^{11}) \quad (1.81)$$

Werden nur die Terme bis inklusive der dritten Ordnung verwendet, so ergibt sich nach [18] für Gleichung (1.80) ein relativer Fehler von 1.2% für $\nu < 1.2$ und für Gleichung (1.81) ein relativer Fehler von 4.1%

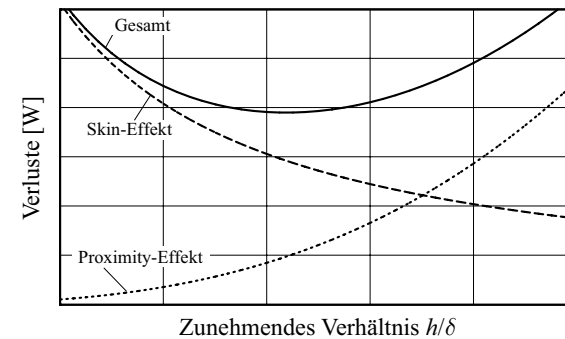


Abb. 1.38: Skin- und Proximity-Effekt-Verluste in einer Folie als Funktion der Foliendicke.

für $\nu < 1$ und 8,4% für $\nu < 1.2$. Da der Faktor ν bei der optimalen Dicke einen Wert zwischen 0.3 und 1 hat, sind die obigen Näherungen exakt genug, um einen analytischen Ausdruck für die optimale Dicke zu berechnen.

Mit den Approximationen für die Skin- und Proximity-Effekt-Faktoren ergeben sich näherungsweise die Verluste pro Längeneinheit

$$P_{app,n} = R_{DC} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu^4}{360} \right) + \left(\frac{\nu^4}{72} (4N^2 - 1) \right) \right] \hat{I}^2 \quad (1.82)$$

mit

$$\nu = \frac{h}{\delta} = h \sqrt{\pi f \sigma \mu_0}$$

$$R_{DC} = \frac{1}{\sigma b h}$$

für einen sinusförmigen Strom mit der Frequenz f , welcher in einer Wicklung fließt, die aus einem Folienleiter mit der Breite b besteht (= Breite des Wickelfensters b_F). Teilt man die approximierte Verluste durch den DC-Widerstand R_{DC} und die Amplitude des Stromes im Quadrat \hat{I}^2 , so erhält man das Verhältnis zwischen dem AC- und dem DC-Widerstand für die jeweilige Harmonische n

$$\frac{R_{AC,n}}{R_{DC}} = k_n = \frac{1}{2} + \nu_0^4 n^2 \left(\frac{N^2}{18} - \frac{1}{90} \right) \quad (1.83)$$

mit

$$\nu_0 = \text{Faktor } \nu \text{ für die Grundschiwingung}$$

Damit lassen sich die gesamten Verluste, welche durch den Strom $i(t)$ mit den Harmonischen I_n erzeugt werden, anhand von

$$P_{app} = \frac{N l_m \left(I_{DC}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} k_n I_n^2 \right)}{\sigma b h}$$

$$= \frac{N l_m \left(I_{DC}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} + n^2 \frac{h^4}{\delta_0^4} \left(\frac{N^2}{18} - \frac{1}{90} \right) \right] I_n^2 \right)}{\sigma b h} \quad (1.84)$$

$$= G_1 \frac{1}{h} + G_2 h^3$$

mit

$$\delta_0 = \text{Skintiefe bei der Grundfrequenz}$$

berechnen. In der letzten Zeile der vorangegangenen Gleichung wird die Abhängigkeit der Gesamtverluste von der Höhe der Folie verdeutlicht. Diese setzen sich aus der Summe einer Hyperbel und einer kubischen Funktion zusammen. Mit den gegebenen Koeffizienten haben die Gesamtverluste somit immer ein Minimum, welches bei der reellen positiven Nullstelle der Ableitung der Funktion liegt. Die optimale Höhe der Folie ist somit

$$h_{opt} = \delta_0 \sqrt[4]{\frac{15}{5N^2 - 1}} \left(\frac{2I_{DC}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2}{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 I_n^2} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (1.85)$$

Diese hängt neben der Frequenz von der Anzahl der Lagen (=Anzahl der Windungen N), dem DC-Strom und den Harmonischen des Stromes ab. Fließt in einer Wicklung aus Folienleiter ein rein sinusförmiger Strom, so kann die optimale Höhe der Folienleiter näherungsweise mit

$$h_{opt,sin} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \sigma \mu}} \sqrt[4]{\frac{15}{5N^2 - 1}} \quad (1.86)$$

$$\approx \frac{0.13}{\sqrt[4]{5N^2 - 1} \sqrt{f}}$$

berechnet werden. Der Verlauf der optimalen Höhe in Abhängigkeit der Lagenzahl ist in Abbildung 1.39 dargestellt. Die optimale Höhe der Folienleiter startet für einlagige Wicklungen bei ca. $1.4 \times$ der Skintiefe und nimmt dann rasch mit der Lagenzahl ab und tendiert für $N \rightarrow \infty$ gegen Null.

Bei einem sinusförmigen Strom mit DC-Anteil ergibt sich die optimale Höhe des Folienleiters aus

$$h_{opt,DC} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \sigma \mu}} \sqrt[4]{\frac{15}{5N^2 - 1}} \sqrt[4]{\frac{2I_{DC}^2 + I_1^2}{\sqrt{I_1}}}. \quad (1.87)$$

Die vorangegangenen Betrachtungen bezüglich der optimalen Höhe eines Folienleiters können analog für eine Wicklung mit mehreren Folienleitern pro Lage angestellt werden. Das daraus resultierende Verhältnis zwischen dem AC- und dem DC-Widerstand für die jeweilige Harmonische ist

$$\frac{R_{AC,n}}{R_{DC}} = k_n = \frac{1}{2} + \nu_0^4 n^2 \left(\frac{1}{360} - \frac{1}{72} N_L^2 + \frac{1}{18} N_L^2 M_L^2 \right). \quad (1.88)$$

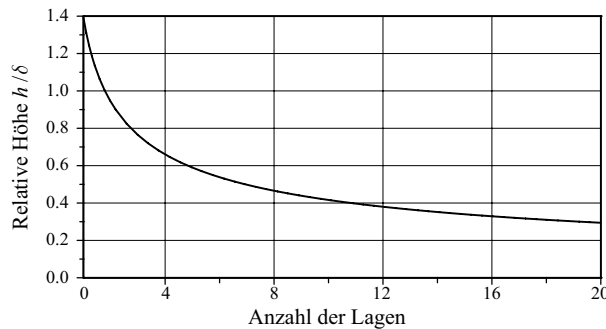


Abb. 1.39: Verlauf der optimalen relativen Höhe $\frac{h_{opt}}{\delta}$ eines Folienleiters in Abhängigkeit von der Lagenzahl N .

Damit erhält man auf dem gleichen Weg, wie oben beschrieben, die optimale Höhe der Folie zu

$$h_{opt,N_L} = \delta'_0 \sqrt[4]{\frac{15}{(5M_L^2 - 1)}} \left(\frac{2I_{DC}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2}{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 I_n^2} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (1.89)$$

mit

$$\delta'_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi f \sigma' \mu}}.$$

Dabei müssen die durch den Porosity-Faktor η transformierten Größen σ' , δ' und ν' eingesetzt werden (siehe Gl. (1.72) - (1.75)). Für $N_L = 1$ gehen die beiden Gleichungen (1.88) und (1.89) in die obigen Gleichungen (1.83) und (1.86) für einen Folienleiter pro Lage über.

1.5.8 Optimaler Litzendurchmesser

Im folgenden soll eine Wicklung betrachtet werden, welche aus einer HF-Litze besteht. Die Wicklung habe N Windungen und muss in dem zur Verfügung stehenden Wickelfenster mit der Breite b_F untergebracht werden. Dadurch ist der Aussendurchmesser d_a der Litze nach oben begrenzt ($N\pi(d_a/2)^2 < k_{CU} A_{Fenster}$). Mit der Breite b_F und dem Durchmesser d_a ist ausserdem die maximale Anzahl von Leitern pro Lage $N_L < b_F/d_a$ gegeben.

Für minimale Kupferverluste muss der zur Verfügung stehende Wickelraum bestmöglich ausgenutzt werden. Damit bleibt als einziger Freiheitsgrad bei der Wahl der Litze der Durchmesser d_s der Einzeladern, welcher durch die empirische Gleichung [5]

$$N_s = \frac{135}{40^{0.85}} \frac{d_a^{20/9}}{d_s^{17/9}} \quad (1.90)$$

mit der Anzahl der Einzeladern N_s verknüpft ist. Auch hier gibt es eine optimale Kombination aus d_s und N_s , welche zu minimalen Verlusten führt (siehe Abb. 1.40 - $f = 50 \text{ kHz}$, $b_F = 10 \text{ mm}$, $d_a = 2 \text{ mm}$, $N = 20$ und $N_L = 4$).

Die optimale Kombination der beiden Variablen ist im Wertebereich der Variablen d_a , d_s , N_s , ... für handelsübliche Litzen nicht geschlossen berechenbar. Nur für begrenzte Bereiche ist eine Näherung der optimalen Einzeladerdicke als Funktion von N_s , wie beim Folienleiter im vorangegangenen Abschnitt möglich. Allerdings können die ohmschen Verluste in dem Litzenleiter durch gebrochenrationale Gleichungen näherungsweise berechnet werden, so dass die Zusammenhänge einfach in verschiedenen Programmiersprachen implementiert werden und der Durchmesser bzw. die Anzahl der Adern für minimale Verluste optimiert werden können. Die Herleitung der gebrochenrationalen Funktionen wird im folgenden kurz hergeleitet.

Der Faktor $F_{R,E}$ zur Berechnung der Skin-Effekt-Verluste in den ein-

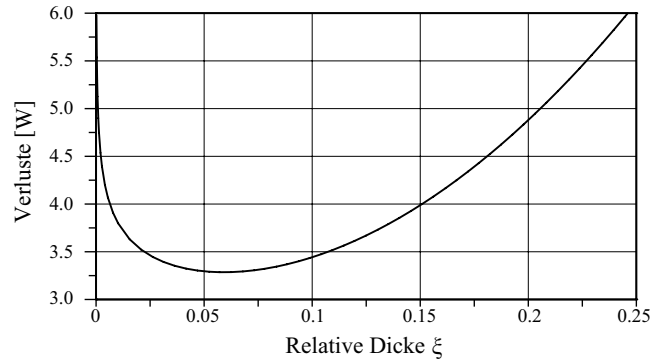


Abb. 1.40: Verlauf der Verluste einer Wicklung aus HF-Litze in Abhängigkeit der relativen Dicke $\xi = d/\sqrt{2\delta}$ einer Einzelader.

zelnen Adern kann für den relevanten Bereich ($\xi = 0..1$) durch

$$F_{R,E} \approx 1 - 1.1248\text{E}^{-3} \xi + 2.8120\text{E}^{-3} \xi^2 \quad (1.91)$$

und damit die Skin-Effekt-Verluste durch

$$P_{S,L} \approx \frac{\hat{I}^2 (1 - 1.1248\text{E}^{-3} \xi + 2.8120\text{E}^{-3} \xi^2) N l_m}{\sigma N_s \pi \xi^2 \delta^2} \quad (1.92)$$

angenähert werden. Dabei ist der relative Fehler kleiner als 0.4% im Bereich $\xi = 0..1$.

Zum Berechnen der Verluste durch den inneren und äusseren Proximity-Effekt wird der Faktor $G_{R,E}$ benötigt. Dieser kann näherungsweise mit

$$G_{R,E} \approx 0.3927 \frac{\xi^4}{\sigma} \quad (1.93)$$

berechnet werden. Der dabei entstehende Fehler ist kleiner als 3% für den Bereich von $\xi = 0..1$. Damit resultiert für die inneren

$$P_{P,int} \approx 0.1964 \frac{N_s \hat{I}^2 \xi^4 N l_m}{\sigma \pi^2 d_a^2} \quad (1.94)$$

und die äusseren Proximity-Effekt-Verluste

$$P_{P,ext} \approx \frac{N_s \xi^4 \hat{I}^2 N (-3.2725\text{E}^{-2} N_L^2 + 0.1309 N^2) l_m}{\sigma b_F^2}. \quad (1.95)$$

Mit diesen Näherungen können die Gesamtverluste durch

$$\begin{aligned} P_L \approx & \frac{[(-0.03272 N_L^2 + 0.1309 N^2) N_s^2 \delta^2 d_a^2 + 0.01989 N_s^2 \delta^2 b_F^2] \xi^6}{\sigma \xi^2 N_s \delta^2 d_a^2 b_F^2} \\ & + \frac{8.951\text{E}^{-4} d_a^2 b_F^2 \xi^2 - 3.5802\text{E}^{-4} d_a^2 b_F^2 \xi + 0.3184 d_a^2 b_F^2}{\sigma \xi^2 N_s \delta^2 d_a^2 b_F^2} N l_m \hat{I}^2 \end{aligned} \quad (1.96)$$

berechnet werden. Der relative Fehler bei der Berechnung der Gesamtverluste ist dabei kleiner als ca. 1.5% im Bereich $N_s = 10 \dots 5000$ und $\xi = 0 \dots 0.8$.

Mit sinkender Breite des Wickelfensters b_F und steigender Anzahl der Lagen übereinander nimmt die optimale relative Dicke ξ und damit der optimale Durchmesser d_s der Einzeladern ab. Gleichzeitig nimmt die Anzahl der Einzeladern N_s zu. Für einen einzelnen Rundleiter liegt die optimale relative Dicke ξ im Bereich von ca. 0.75 .. 0.9 – abhängig von der Lagenzahl und Fensterbreite.

Eine genauere Berechnung der Kelvin-Funktionen ist mittels der unendlichen Reihen nach [13]

$$K_{Ber}(n, x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+p} (1/2 x)^{n+2p} \cos(1/4 (n+2p) \pi)}{p! (n+p)!} \quad (1.97)$$

und

$$K_{Bei}(n, x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+p+1} (1/2 x)^{n+2p} \sin(1/4 (n+2p) \pi)}{p! (n+p)!} \quad (1.98)$$

möglich.

1.5.9 Optimaler Wicklungsaufbau

Beim Betrachten eines Aufbaus mit mehreren Folienleitern in einer Lage, wie z.B. in Abbildung 1.35 rechts veranschaulicht, stellt sich die Frage, ob es bezüglich der ohmschen Verluste besser ist, die Windungen einer Wicklung auf möglichst viele Lagen zu verteilen oder diese in wenigen Lagen zu konzentrieren.

In Abbildung 1.41 sind beispielhaft drei mögliche Varianten für eine Wicklung mit 6 Windungen dargestellt. Zum einen ist links eine Lage mit $N_1 = 6$ Windungen dargestellt. Diese 6 Windungen können auch

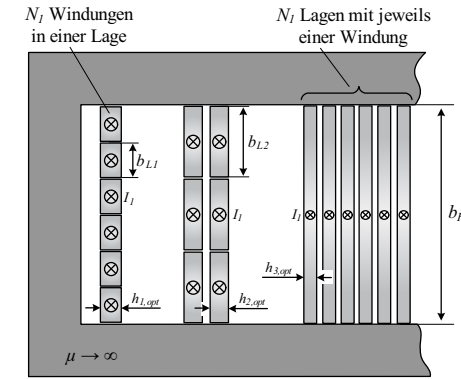


Abb. 1.41: Querschnitt durch das Fenster eines Transformator mit Folienwicklungen. Dabei ist ein Wicklung in einer Lage realisiert (links), eine auf zwei Lagen verteilt (Mitte) und eine auf möglichst viele Lagen verteilt (rechts), d.h. pro Lage nur eine Windung.

auf zwei Lagen mit jeweils 3 Windungen pro Lage oder auf 6 Lagen mit je einer Windung pro Lage verteilt werden. Für jede Variante ergibt sich dabei eine optimale Dicke der Folie, wie im vorangegangenen Abschnitt 1.5.7 erläutert. Werden alle Windungen in einer Lage realisiert, so sinken die Verluste aufgrund des Proximity-Effektes auf ein Minimum und die optimale Foliendicke $h_{L,opt}$ ist relativ gross. Allerdings ist die Breite der Folien b_{L1} klein, so dass der DC-Widerstand relativ hoch ist.

Verteilt man nun die Windungen auf mehrere Lagen, so nimmt der Proximity-Effekt zu, jedoch steigt gleichzeitig die Breite der Folie. Wird pro Lage je eine Windung realisiert, erreicht die Folienbreite ihr Maximum und ist gleich $b_{L3} = b_F$ der Fensterbreite. Dabei sinkt die optimale Foliendicke auf den kleinsten Wert. Betrachtet man die gesamten AC-Verluste für den Fall eines sinusförmigen Stromes, so erkennt man, dass der mit steigender Lagenzahl zunehmende Proximity-Effekt durch die Abnahme des DC-Widerstandes aufgrund der steigenden Folienbreite

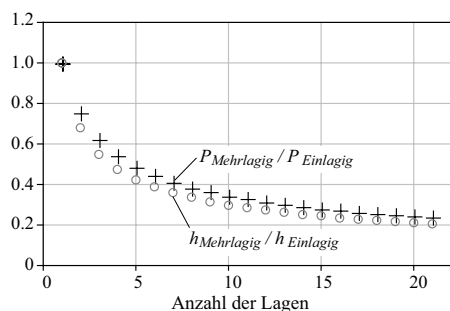


Abb. 1.42: Verhältnis der Verluste in einer Wicklung mit nur einer Windung pro Lage (Abb. 1.41 rechts) zu einer einlagigen Wicklung (Abb. 1.41 links). Weiterhin ist das Verhältnis der optimalen Lagendicken für die beiden betrachteten Fälle aufgetragen.

mehr als kompensiert wird. Dies ist in Abbildung 1.42 veranschaulicht, wo das Verhältnis der Verluste einer Wicklung mit je einer Windung pro Lage zu einer einlagigen Wicklung für verschiedene Windungszahlen aufgetragen sind. Im Falle einer Wicklung mit nur einer Windung sind die Verluste natürlich gleich groß und das Verhältnis startet somit bei 1. Mit zunehmender Windungszahl sinken die Verluste der mehrlagigen Wicklung im Verhältnis zur einlagigen Wicklung ab und das Verlust-Verhältnis erreicht z.B. für $N_1 = 10$ den Wert 0.34.

Zu beachten ist, dass mit der steigenden Lagenzahl das Volumen der Wicklung sowie die parasitäre Eigenkapazität zunimmt, womit die Resonanzfrequenz der Wicklung sinkt. Dies kann im Bereich höherer Schaltfrequenzen zu unerwünscht hohen kapazitiven Strömen führen, welche in den Schaltern zusätzliche Verluste erzeugen.

Bemerkung: Die obigen Betrachtungen basieren auf einem sinusförmigen Strom und Folienleiter. Im Falle von nicht rein sinusförmigen Strömen können sich je nach Oberwellenanteil andere Verläufe für das Verhältnis der Verluste ergeben. In vielen technisch relevanten Fällen

wird jedoch meistens ein Aufbau, bei welchem pro Windung nur eine Lage realisiert ist, die geringsten Verluste erzeugen. Wicklungen mit Litzen seien von dieser Betrachtung ausgeschlossen, da diese noch weitere Freiheitsgrade bieten und je nach Aufbau und Frequenzanteilen zu noch geringeren Verlusten führen können.

1.6 Beispiel

In Anlehnung an die Übungsaufgabe “Vergleich von Schaltungskonzepten für die Realisierung eines DC/DC Konverters mit potentialgetrennter Ausgangsspannung” sollen nun die Verluste in dem Transformator eines Vollbrückenwandlers mit sekundärseitigem Brückengleichrichter betrachtet werden (siehe Abbildung 1.43). Für den Wandler werden dabei folgende Spezifikation angenommen:

Eingangsspannung	400 V
Ausgangsspannung	48 V
Ausgangsleistung	2 kW
Schaltfrequenz	100 kHz
Max. Duty Cycle	0.8
Ausgangsinduktivität	30 μ H

Bei den folgenden Berechnungen wird der Magnetisierungsstrom zur Vereinfachung der Betrachtungen vernachlässigt.

Mit dem gewünschten maximalen Duty Cycle von $D = 0.8$ ergibt sich – bei Vernachlässigung der Konverterverluste – somit ein mittlerer Strom von

$$I_{P,AVG} = \frac{P_2}{DU_1} = 6.25 \text{ A} \quad (1.99)$$

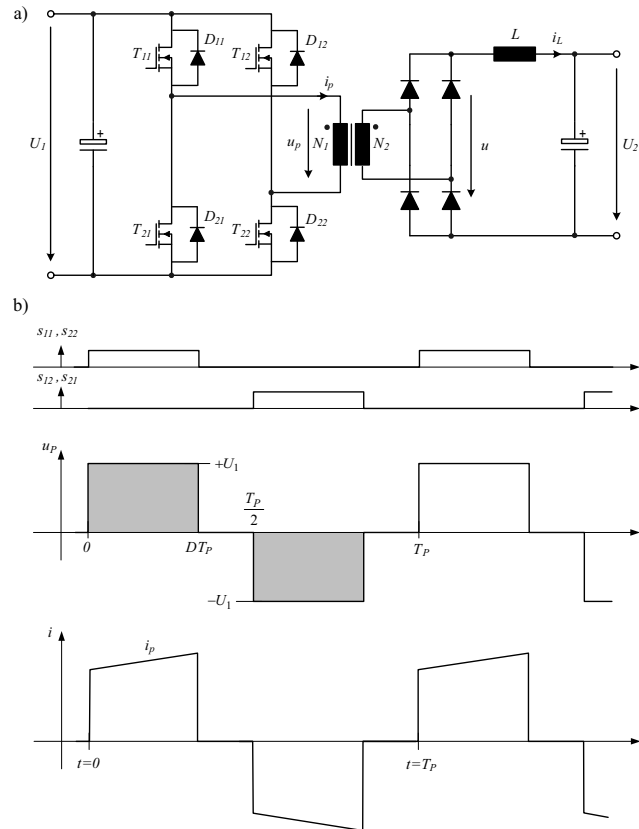


Abb. 1.43: Schaltbild des Vollbrückenwandlers mit Brückengleichrichter und die dazugehörigen Verläufe der Schaltsignale, der Primärspannung des Transformators und des Primärstromes.

und ein RMS-Strom von

$$I_{P,RMS} = \sqrt{D} I_{P,AVG} = 5.69 \text{ A} \quad (1.100)$$

in der Primärwicklung des Transformators (Mittelwert über eine Halbperiode). Mit vernachlässigtem Magnetisierungsstrom ist der sekundärseitige Strom gleich $I_{S,\nu} = N_1/N_2 I_{P,\nu}$. Nimmt man eine maximal erlaubte peak-to-peak Flussdichte von $\Delta B_{pp} = 0.3 \text{ T}$, sowie eine maximal erlaubte DC-Stromdichte von $J_{RMS} = 4 \text{ A/mm}^2$ und einen Kupferfüllfaktor von $k_W = 0.35$ an, so erhält man mit

$$A_E A_W \leq \frac{U_1 D T_P / 2}{\Delta B_{pp}} \frac{2 I_{P,RMS}}{k_W J_{RMS}} \approx 4.25 \text{ cm}^2 \quad (1.101)$$

für das benötigte Flächenprodukt des Transformator-kerns. Diese Gleichung wird in Kapitel 6.6 “Dimensionierung eines Transformators“ (ab S.214) des Skriptes zur Vorlesung Leistungselektronik hergeleitet und basiert auf einer reinen DC-Betrachtung des Transformators, d.h. HF-Einflüsse werden vernachlässigt. Mit dieser Gleichung lässt sich eine Vorauswahl an geeigneten Kernen für die betrachtete Konverterschaltung treffen. Im betrachteten Fall wird der Kern E47/20/16 von Epcos [19] mit dem Kernmaterial N87 ausgewählt. Dieser hat ein Flächenprodukt von näherungsweise 4.4 cm^2 und ist in Abbildung 1.44 dargestellt.

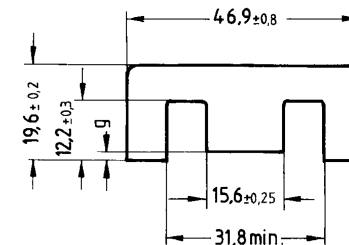


Abb. 1.44: Abmessungen des Kerns E47/20/16 von Epcos, wobei der Gap gleich Null sei ($g = 0$). Quelle: Datenblatt von der Homepage [19].

Die übrigen Daten des Kerns sind in Tabelle 1.1 gegeben.

Für die Berechnung der Wicklungsverluste müssen noch die Windungszahlen bekannt sein. Dazu wird in einem ersten Schritt das benö-

Kernfläche A_E	233 mm ²
Fensterfläche A_W	198 mm ²
Windungslänge l_m	89 mm
Fensterhöhe b_F	24.4 mm

Tabelle 1.1: Daten des E47/20/16 Kernes von Epcos.

tigte Übersetzungsverhältnis ermittelt. Da die Spannung über der Ausgangsinduktivität L im Mittel gleich null sein muss, ergibt sich

$$U_{1,AVG} = U_1 D \frac{N_2}{N_1} \stackrel{!}{=} U_2 \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1 D}{U_2} = 6.67 \quad (1.102)$$

für das Übersetzungsverhältnis. Weiterhin wurde bei der Ermittlung des benötigten Flächenproduktes eine Flussdichte von $\Delta B_{pp} = 0.3T$ angenommen. Aus dieser lässt sich eine erste Näherung für die Windungszahl ableiten. Diese ergibt sich aufgrund des Zusammenhanges

$$\Delta B_p = \frac{1}{2} \frac{U_1 D T_P / 2}{N_1 A_{Core}}, \quad (1.103)$$

welcher sich basierend auf der Spannungszeitfläche an der Primärwicklung herleiten lässt (vgl. Gl. 6.92 im Skript Leistungselektronik). Daraus folgt eine Windungszahl von $N_1 = 22.8$, womit unter Berücksichtigung des Übersetzungsverhältnisses eine Windungszahl von $N_1 = 20$ und $N_2 = 3$ gewählt wurde. Dies führt zu einer Flussdichte von $\Delta B_{pp} \approx 0.34T$.

Bei der Wahl der Windungszahl und des Kernes ist es dabei wichtig, dass man die Verteilung der Verluste beachtet. Die Verlustdichte im Kern darf gewisse Werte nicht überschreiten, da ansonst die Kerntemperatur zu hohe Werte annimmt (häufig gilt: $T_{Kern} \leq 100^\circ\text{C}$). Für das gewählte Material N87 resultiert mit $N_1 = 20$ eine Verlustdichte von 160 mW pro cm³ und für den Kern 3.3 W Verluste. Diese Verluste dürfen abhängig von der Kühlmethode nicht zu einer Überhitzung des Kernes

führen. Auch die weiter unten noch zu berechnenden Wicklungsverluste dürfen nicht zu einer Überhitzung der Wicklungen führen. Häufig führt eine balancierte Verteilung der Verluste, d.h. die Kernverluste sind in etwa so gross wie die Wicklungsverluste, zu einem effizienten Aufbau mit einer balancierten Temperaturverteilung.

Bei zu hohen Kernverlusten muss man eine kleinere Amplitude für die Flussdichte in Gleichung 1.101 annehmen, was zu einem grösseren Flächenprodukt führt.

Mit den Windungszahlen können direkt die DC-Verluste in den Wicklungen berechnet werden. Dabei wird angenommen, dass die Wicklungen aus Kupferfolie besteht, welche sich über die gesamte Höhe des Wicklungsfensters erstreckt, d.h. die Breite der Folie $b_{CU} = b_F$ und pro Lage der Folie wird eine Windung realisiert. Die Dicke der Folie ergibt sich mit der angenommenen Stromdichte näherungsweise zu $d_{pri} = 60 \mu\text{m}$ und $d_{sek} = 400 \mu\text{m}$. Damit sind die DC-Verluste durch

$$\begin{aligned} P_{W,DC} &= R_{DC,P} I_{P,RMS}^2 + R_{DC,S} I_{S,RMS}^2 = \\ &= 0.68 \text{ W} + 0.68 \text{ W} = 1.36 \text{ W} \end{aligned} \quad (1.104)$$

mit

$$\begin{aligned} R_{DC,P} &= \frac{N_1 l_m}{\sigma d_{pri} b_{CU}} \\ R_{DC,S} &= \frac{N_2 l_m}{\sigma d_{sek} b_{CU}} \end{aligned}$$

gegeben, wobei die Verluste in der Primär- und der Sekundärwicklung aufgrund der gleichen Stromdichte identisch sind. Der resultierende Kupferfüllfaktor $k_W \approx 0.30$ und die Stromdichte $J_{RMS} = 3.82 \text{ A/mm}^2$ liegen aufgrund der nach unten angepassten Windungszahl etwas unter den Werten, welche bei den Berechnungen des Flächenproduktes angenommen wurden.

Mit den Zusammenhängen aus den vorherigen Abschnitten sollen nun die AC Verluste berechnet und mit den DC Verlusten verglichen werden. Für diese Berechnung werden zuerst die Amplituden $I_{P,\xi}$ der Harmonischen der Wicklungsströme benötigt (siehe Abschnitt 1.5.4). Diese können mit der Fourieranalyse mit

$$I_{P,Re,\xi} = \frac{2}{T_p} \left[\int_0^{DT_p/2} \left(I_{P,AVG} - \frac{\Delta I_P}{2} + \frac{\Delta I_P}{DT_p/2} t \right) \cos \left(\frac{2\pi}{T_p} \nu t \right) dt + \int_{T_p/2}^{(1+D)T_p/2} \left(-I_{P,AVG} + \frac{\Delta I_P}{2} - \frac{\Delta I_P}{DT_p/2} t \right) \cos \left(\frac{2\pi}{T_p} \nu t \right) dt \right]$$

$$I_{P,Im,\xi} = \frac{2}{T_p} \left[\int_0^{DT_p/2} \left(I_{P,AVG} - \frac{\Delta I_P}{2} + \frac{\Delta I_P}{DT_p/2} t \right) \sin \left(\frac{2\pi}{T_p} \nu t \right) dt + \int_{T_p/2}^{(1+D)T_p/2} \left(-I_{P,AVG} + \frac{\Delta I_P}{2} - \frac{\Delta I_P}{DT_p/2} t \right) \sin \left(\frac{2\pi}{T_p} \nu t \right) dt \right]$$

$$\Rightarrow I_{P,\xi} = \sqrt{I_{P,Re,\nu}^2 + I_{P,Im,\nu}^2} \quad (1.105)$$

mit

$$\Delta I_P = \frac{N_2}{N_1} \frac{\left(U_1 \frac{N_2}{N_1} - U_2 \right) DT_p/2}{L}$$

berechnet werden. Damit resultieren die Harmonischen: Mit diesen ergibt sich der in Abbildung 1.45 dargestellte zeitliche Verlauf.

Damit resultieren mit $\delta = 1/\sqrt{\mu_0 \pi \sigma f_\xi}$ für die Primärwicklung die Verluste für den Skin-Effekt (hier: $\xi = 1..15$)

$$P_{P,Skin,\xi} = R_{DC,P} \frac{\nu \sinh \nu + \sin \nu}{4 \cosh \nu - \cos \nu} I_{P,\xi}^2 \quad (1.106)$$

mit

$$\nu = \frac{d_{Pri}}{\delta},$$

$I_{P,Re,1} = 2.33 \text{ A}$	$I_{P,Im,1} = 7.39 \text{ A}$	$\Rightarrow I_{P,1} = 7.75 \text{ A}$
$I_{P,Re,2} = 0.045 \text{ A}$	$I_{P,Im,2} = 0.033 \text{ A}$	$\Rightarrow I_{P,2} = 0.056 \text{ A}$
$I_{P,Re,3} = 1.31 \text{ A}$	$I_{P,Im,3} = 0.91 \text{ A}$	$\Rightarrow I_{P,3} = 1.6 \text{ A}$
$I_{P,Re,4} = 0.014 \text{ A}$	$I_{P,Im,4} = 0.043 \text{ A}$	$\Rightarrow I_{P,4} = 0.045 \text{ A}$
$I_{P,Re,5} = 0 \text{ A}$	$I_{P,Im,5} = 0.031 \text{ A}$	$\Rightarrow I_{P,5} = 0.031 \text{ A}$
$I_{P,Re,6} = 0.01 \text{ A}$	$I_{P,Im,6} = 0.029 \text{ A}$	$\Rightarrow I_{P,6} = 0.03 \text{ A}$
$I_{P,Re,7} = 0.56 \text{ A}$	$I_{P,Im,7} = 0.39 \text{ A}$	$\Rightarrow I_{P,7} = 0.68 \text{ A}$
$I_{P,Re,8} = 0.011 \text{ A}$	$I_{P,Im,8} = 0.01 \text{ A}$	$\Rightarrow I_{P,8} = 0.014 \text{ A}$
$I_{P,Re,9} = 0.27 \text{ A}$	$I_{P,Im,9} = 0.82 \text{ A}$	$\Rightarrow I_{P,9} = 0.86 \text{ A}$

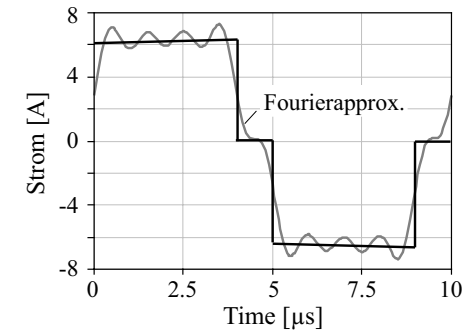


Abb. 1.45: Verlauf des Stromes in der Primärwicklung mit Zerlegung in eine Fourierreihe bis zur neunten Harmonischen.

wobei die Skintiefe für die jeweilige Frequenz berechnet werden muss. Analog dazu werden die Verluste in der Sekundärwicklung ermittelt. Die Verluste aufgrund des Proximity-Effektes sind durch

$$P_{P,Prox,\xi} = \sum_{m=1}^{N_1} \frac{b_{CU}}{\sigma \delta} \frac{\sinh \nu - \sin \nu}{\cosh \nu + \cos \nu} H_{P,AVG}^2 l_m \quad (1.107)$$

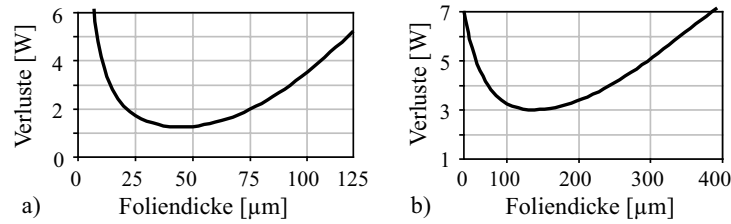


Abb. 1.46: Verlauf der Verluste in der Primärwicklung a) und der Sekundärwicklung b) als Funktion der Dicke der Folien ($N_h = 15$).

mit

$$H_{P,AVG} = \frac{1}{2b_F} I_{P,\xi} (2m - 1)$$

gegeben, wobei $H_{P,AVG}$ jeweils das mittlere Feld für die m -te Lage der Primärwicklung ist. Auch hier muss bei der Berechnung der Verluste für die jeweilige Harmonische die Skintiefe der entsprechenden Frequenz gewählt werden. Mit obigen Gleichungen ergibt sich aufgrund der Orthogonalität der Verlustanteile mit Gleichung 1.58 folgende Verteilung der Verluste:

$$\begin{aligned} P_{P,Skin} &= 0.7 \text{ W} \\ P_{P,Prox} &= 0.75 \text{ W} \\ P_{S,Skin} &= 0.8 \text{ W} \\ P_{S,Prox} &= 6.52 \text{ W} \\ \hline P_{Ges} &= 8.8 \text{ W} \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass durch den Skin- und den Proximity-Effekt die Verluste um mehr als den Faktor 6.5 gegenüber den reinen DC-Verlusten ansteigen. Dabei wurden alle Harmonische einschliesslich der 15ten betrachtet ($N_h = 15$). Würden weitere Harmonische in die Rechnung einbezogen wäre der Faktor noch grösser.

Nun stellt sich die Frage, ob die Verluste durch eine bessere Wahl der Foliendicken verringert werden können. Dazu sind in Abbildung 1.46 die Verluste als Funktion der Foliendicke aufgetragen. Dabei erkennt man, dass minimale Verluste für Werte von ca. $d_{pri} \approx 45 \mu m$ und $d_{sek} \approx 140 \mu m$ erhalten werden ($N_h = 15$). Diese optimale Dicke kann mit Gleichung (1.85) aus Abschnitt 1.5.7 berechnet werden.

Mit diesen resultiert die Verteilung der Verluste:

$$\begin{aligned} P_{P,Skin} &= 0.93 \text{ W} \\ P_{P,Prox} &= 0.32 \text{ W} \\ P_{S,Skin} &= 2.01 \text{ W} \\ P_{S,Prox} &= 1.00 \text{ W} \\ \hline P_{Ges} &= 4.26 \text{ W} \end{aligned}$$

und die DC-Verluste:

$$\begin{aligned} P_{W,DC} &= R_{DC,P} I_{P,RMS}^2 + R_{DC,S} I_{S,RMS}^2 = \\ &\approx 0.9 \text{ W} + 1.94 \text{ W} = 2.84 \text{ W}. \end{aligned}$$

Die AC-Verluste sind für den optimierten Fall nur ca. um den Faktor 1.5 grösser als die neuen DC-Verluste bzw. um den Faktor 3.1 grösser als die ursprünglichen DC-Verluste. Durch die Optimierung der Foliendicken lassen sich die Verluste auf etwas über ein Drittel im Verhältnis zu den ursprünglichen Werten senken.

Literaturverzeichnis

- [1] J. A. Ferreira, *Electromagnetic Modelling of Power Electronic Converters*. Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [2] P. Wallmeier, "Generalization of orthogonality principle to model solenoidal wound multiwinding transformers," in *Thirty-Sixth IAS Annual Meeting Industry Applications Conference Record of the 2001 IEEE*, vol. 4, 2001, pp. 2195–2202 vol.4.
- [3] J. Ferreira, "Improved analytical modeling of conductive losses in magnetic components," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 9, no. 1, pp. 127–131, 1994.
- [4] P. Dowell, "Effects of eddy current in transformer windings," in *Proceedings IEE*, vol. 113, no. 8. IEE, August 1966, pp. 1387–1394.
- [5] P. Wallmeier, "Automatisierte optimierung von induktiven bauelementen f_r stromrichteranwendugen," Ph.D. dissertation, Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik der Universität Paderborn, Shaker Verlag, ISBN: 3-8265-8777-4., 2001.
- [6] A. van den Bossche and V. C. Valchev, *Inductors and Transformers for Power Electronics*. CRC Taylor & Francis, 2005.
- [7] N. Ida and J. P. A. Bastos, *Electromagnetics and Calculation of Fields*, 2nd ed. Springer, 1997.
- [8] C. Hafner, *Numerische Optimierung - Optimierung f_r Ingenieure*. Script for Lecture: "Ausgewählte Optimierungsverfahren f_r Ingenieure", 2003.
- [9] J. Ekman, "Electromagnetic modeling using the partial element equivalent circuit method," Ph.D. dissertation, Dept. of Computer Science and Electrical Engineering, Luleå University of Technology, 2003.
- [10] A. E. Ruehli, "Inductance Calculations in a Complex Integrated Circuit Environment," *IBM Journal of Research and Development*, vol. 16(5), pp. 470–481, Sept. 1972.
- [11] L. M. Escribano, R. Prieto, J. A. Oliver, J. A. Cobos, and J. Uceda, "Analytical model for magnetic components including self-heating effects," in *IEEE 35th Annual Power Electronics Specialists Conference, PESC'04*, vol. 2, June 20–25 2004, pp. 867–872.
- [12] J. Strydom, "Electromagnetic design of integrated resonator-transformers," Ph.D. dissertation, Rand Afrikaans University, South Africa, 2001.
- [13] J. Lammeraner and M. Stafl, *Eddy Currents*. Iliffe Books, London, 1966.
- [14] J. Biela and J. W. Kolar, "Using transformer parasitics for resonant converters - a review of the calculation of the stray capacitance of transformers," in *Proceedings of the fortieth IAS Annual Meeting Industry Applications Conference*, vol. 3, 2005, pp. 1868–1875 Vol. 3.
- [15] J. A. Ferreira, "Analytical computation of ac resistance of round and rectangular litz wire windings," *IEE Proceedings B*, vol. 139, no. 1, pp. 21–25, 1992.
- [16] F. Robert, P. Mathys, and J. P. Schauwers, "A closed-form formula for 2d ohmic loss calculation in smps transformer foils," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 16, no. 3, may 2001.

- [17] F. Robert, “Eddy current losses: A theoretical discussion of dowell’s layer copper factor,” in *EPE Journal*, vol. 12, no. 3, aug 2002, pp. 9–15.
- [18] W. G. Hurley, E. Gath, and J. G. Breslin, “Optimizing the ac resistance of multilayer transformer windings with arbitrary current waveforms,” *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 15 No.2, pp. 369–376, mar 2000.
- [19] Epcos. Electronic parts and components. [Online]. Available: www.epcos.com