



Πανεπιστήμιο Πατρών

Τμήμα Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών

Τομέας Εφαρμοσμένης Μηχανικής, Τεχνολογίας Υλικών και Εμβιομηχανικής

Εργαστήριο Τεχνολογίας και Αντοχής Υλικών

**Διερεύνηση και αριθμητική ανάλυση του λυγισμού
και της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς μεταλλικών
ενισχυμένων κελυφών**

Νικόλαος Ρηγάτος

1054457

Υπό την επίβλεψη του Καθηγητή Γεώργιου Λαμπέα

Διπλωματική εργασία υποβληθείσα στο Τμήμα Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών του
Πανεπιστημίου Πατρών

ΠΑΤΡΑ, 07/2022

Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών
Νικόλαος Ρηγάτος

© 2022 – Με την επιφύλαξη παντός δικαιώματος

Τμήμα Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών
Τομέας Εφαρμοσμένης Μηχανικής, Τεχνολογίας, Υλικών και Εμβιομηχανικής ii



Πανεπιστήμιο Πατρών

Τμήμα Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών

Τομέας Εφαρμοσμένης Μηχανικής, Τεχνολογίας Υλικών και Εμβιομηχανικής

Εργαστήριο Τεχνολογίας και Αντοχής Υλικών

Η παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάστηκε

από τον

Νικόλαο Ρηγάτο

1054457

την 13/07/2022

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας δεν υποδηλού την αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.
Κατά τη συγγραφή τηρήθηκαν οι αρχές της ακαδημαικής δεοντολογίας.

Περίληψη

Διερεύνηση και αριθμητική ανάλυση του λυγισμού και της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς μεταλλικών ενισχυμένων κελυφών

Νικόλαος Ρηγάτος

Η άτρακτος των συμβατικών αεροσκαφών αποτελείται από κελύφη, τα οποία ενισχύονται στη διαμήκη και εγκάρσια διεύθυνση με λεπτότοιχες δομές. Τα ενισχυμένα κελύφη της ατράκτου, ανάλογα τη θέση τους σε αυτή, μπορούν να φέρουν θλιπτικά, διατμητικά και καμπτικά φορτία, καθώς και εγκάρσια πίεση λόγω της εσωτερικής πίεσης που εφαρμόζεται στην καμπίνα. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα ενισχυμένα κελύφη που φέρουν σύνθετη φόρτιση θλίψης και διάτμησης, καθώς τότε είναι πιθανό να παρουσιαστεί το φαινόμενο του λυγισμού. Ο λυγισμός μπορεί να είναι καταστροφικός για τη δομή, αναλόγως με το αν αυτή μπορεί να φέρει φορτία στη μεταλυγισμική περιοχή, δηλαδή στην περιοχή μετά την εμφάνιση των πρώτων φαινομένων λυγισμού. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και τον παραμετρικό κώδικα ANSYS APDL, η παρούσα εργασία διερευνά την αριθμητική ανάλυση του λυγισμού και της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς αεροναυπηγικών δομών, όπως είναι οι επίπεδες πλάκες, οι επίπεδες ενισχυμένες πλάκες, τα κελύφη και τα ενισχυμένα κελύφη. Η αριθμητική ανάλυση περιλαμβάνει την επιλογή του τύπου στοιχείου, του μεγέθους του πλέγματος, των αρχικών ατελειών, και των βημάτων της μη-γραμμικής ανάλυσης, καθώς η διερεύνηση του φαινομένου του λυγισμού είναι ευαίσθητη σε όλες αυτές τις παραμέτρους. Αναπτύσσονται αριθμητικά μοντέλα, τα οποία επιβεβαιώνονται/επικυρώνονται με αντίστοιχα πειράματα/αριθμητικά μοντέλα της βιβλιογραφίας, έτσι ώστε να προβλέπεται η συνολική συμπεριφορά των δομών αυτών στο λυγισμό. Η συνολική συμπεριφορά του λυγισμού στις ενισχυμένες δομές περιλαμβάνει την πρόβλεψη του τοπικού λυγισμού στο έλασμα και στα ενισχυτικά στοιχεία, του ολικού λυγισμού, την τελική αστοχία της κατασκευής, καθώς και το επίπεδο του φορτίου στο οποίο συμβαίνουν αυτά. Στόχος των αριθμητικών μοντέλων είναι η παραμετροποίηση όλων των γεωμετρικών χαρακτηριστικών, των ιδιοτήτων του υλικού και των οριακών συνθηκών, έτσι ώστε να μπορούν να προσαρμοστούν εύκολα για κάθε ανάγκη. Επιπλέον, διερευνάται η συμπεριφορά ισότροπων και ορθότροπων ενισχυμένων κελυφών σε

σύνθετη φόρτιση θλίψης/διάτμησης για την εξαγωγή καμπυλών αλληλεπίδρασης φορτίου και τη σύγκριση τους. Αποδεικνύεται πως τα αριθμητικά μοντέλα μπορούν να προβλέψουν το φαινόμενο του λυγισμού με ικανοποιητική ακρίβεια, χωρίς την εισαγωγή πολύπλοκων, χρονοβόρων μη-γραμμικών στοιχείων στην ανάλυση, πετυχαίνοντας όλους τους σκοπούς παραμετροποίησης. Τέλος, αποδεικνύεται πως τα ενισχυμένα κελύφη τα οποία αποτελούνται από ορθότροπα υλικά, είναι πιο ευαίσθητα στο λυγισμό λόγω διατμητικών φορτίσεων από τα αντίστοιχα ισότροπα ενισχυμένα κελύφη.

Λέξεις κλειδιά

[Ενισχυμένο κέλυφος ατράκτου, Παραμετρική αριθμητική ανάλυση, Σύνθετος λυγισμός θλίψης/διάτμησης, Καμπύλες αλληλεπίδρασης φορτίων, Μη-γραμμική αριθμητική ανάλυση λυγισμού]

Abstract

Investigation and numerical modelling of buckling and post-buckling behaviour of metallic stiffened aircraft panels

Nikolaos Rigatos

The fuselage of conventional modern aircraft consists of a thin shell that is stiffened in the longitudinal and vertical directions with thin-walled structures. Depending on the position of the stiffened panel on the fuselage, the panel could be subject to compression, shear and bending loading, as well as lateral internal pressure due to the pressurized cabin. The stiffened panels that are subject to combined compression and shear are of particular interest, since buckling phenomena may occur. Buckling may be destructive for a structure, depending on its ability to carry additional loads in the post-buckling region, that is the region after the first buckling phenomena occur on the structure. Using the finite element method and the parametrical code ANSYS APDL, this diploma thesis investigates the numerical modelling of buckling and post-buckling behaviour of aeronautical structures, which can be flat plates, stiffened flat plates, shells and stiffened shells. Numerical modelling investigation includes the selection of element type, mesh size, initial imperfections and number of substeps/iterations for the non-linear analysis. Numerical model codes are employed and verified/validated with comparison to experiments or numerical models found in bibliography, with the purpose of predicting the total buckling behaviour of these structures. The total buckling behaviour includes the prediction of local buckling of the skin and stiffeners, global buckling of the structure, failure of the structure, as well as the corresponding loads at which these buckling phenomena occur. Among the purposes of the numerical modeling procedure is the parametrization of all the geometrical characteristics, material properties and boundary conditions, so that the models can be adjusted as needed. In addition, the buckling behaviour of isotropic and orthotropic stiffened shells subjected to combined compression/shear loads is investigated for the purpose of extracting the load interaction curves and comparing them. The diploma thesis demonstrates that the numerical models can predict the buckling behaviour of aeronautical structures with satisfying accuracy, without the introduction of complicated,

tedious non-linear phenomena in the analysis, completing all the parametrization goals. Last, it is shown that orthotropic stiffened shells are more sensitive to buckling due to shear loading, compared to the corresponding isotropic stiffened shells.

Keywords

[Stiffened fuselage panel, Parametrical numerical analysis, Combined buckling under compression/shear, Load interaction curves, Non-linear buckling analysis]

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 6.1: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά επίπεδης πλάκας: Αξονική θλίψη	70
Πίνακας 6.2: Ιδιότητες υλικού επίπεδης πλάκας: Αξονική θλίψη	70
Πίνακας 6.3: Έλεγχος σύγκλισης πλέγματος επίπεδης πλάκας: Αξονική θλίψη	70
Πίνακας 6.4: Σύγκριση αποτελεσμάτων ιδιομορφικού λυγισμού με τη θεωρητική τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού: Αξονική θλίψη	73
Πίνακας 6.5: Μηχανικές ιδιότητες κράματος αλουμινίου 2024-T351	74
Πίνακας 6.6: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά μοντέλων κελύφους: Αξονική θλίψη	80
Πίνακας 6.7: Ιδιότητες υλικού μοντέλων κελύφους: Αξονική θλίψη	80
Πίνακας 6.8: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά κελύφους και ενισχύσεων	84
Πίνακας 6.9: Μηχανικές ιδιότητες υλικού CFRP ενισχυμένου κελύφους	85
Πίνακας 6.10: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά επίπεδης πλάκας: Εντός επιπέδου διάτμηση	91
Πίνακας 6.11: Ιδιότητες υλικού επίπεδης πλάκας: Εντός επιπέδου διάτμηση	91
Πίνακας 6.12: Σύγκριση αποτελεσμάτων ιδιομορφικού λυγισμού με τη θεωρητική τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού: Εντός επιπέδου διάτμηση	92
Πίνακας 6.13: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά επίπεδης ενισχυμένης πλάκας: Εντός επιπέδου διάτμηση	94
Πίνακας 6.14: Ιδιότητες υλικού αλουμινίου: Εντός επιπέδου διάτμηση	95
Πίνακας 6.15: Γεωμετρία κελύφους: Εντός επιπέδου διάτμηση	99
Πίνακας 6.16: Σύγκριση αποτελεσμάτων ιδιομορφικού λυγισμού με τη θεωρητική τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού: Εντός επιπέδου διάτμηση	99
Πίνακας 6.17: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά ενισχυμένου κελύφους: Εντός επιπέδου διάτμηση	102

Πίνακας 6.18: Μηχανικές ιδιότητες αλουμινίου: Συνδυασμένη καταπόνηση σε θλίψη και διάτμηση	105
Πίνακας 6.19: Κρίσιμα φορτία λυγισμού θλίψης και διάτμησης για το μοντέλο της συνδυασμένης φόρτισης	106
Πίνακας 7.1: : Γεωμετρία ισότροπου ενισχυμένου κελύφους σε σύνθετη φόρτιση.....	109
Πίνακας 7.2: Ιδιότητες υλικού ισότροπου ενισχυμένου κελύφους σε σύνθετη φόρτιση	109
Πίνακας 7.3: Οριακές συνθήκες αριθμητικών μοντέλων σύνθετης φόρτισης.....	110
Πίνακας 7.4: Κρίσιμα φορτία λυγισμού σε θλίψη και διάτμηση του ισότροπου ενισχυμένου κελύφους.....	112
Πίνακας 7.5: Κρίσιμα φορτία λυγισμού σε θλίψη και διάτμηση του ορθότροπου ενισχυμένου κελύφους	114

Κατάλογος Εικόνων

Εικόνα 1.1: Δομή ενισχυμένου κελύφους ατράκτου	2
Εικόνα 1.2: Τοπικός λυγισμός του κάτω μέρους της ατράκτου ενός Boeing 757.....	3
Εικόνα 2.1: Λυγισμός αμφιέριστης δοκού.....	8
Εικόνα 2.2: Χαρακτηρισμός της στατικής ισορροπίας.....	9
Εικόνα 2.3: Λυγισμός τέλειας επίπεδης πλάκας α) Παραμορφωμένη κατάσταση στο κρίσιμο σημείο λυγισμού β) Διακλάδωση της ισορροπίας	11
Εικόνα 2.4: Επίδραση αρχικών ατελειών στο λυγισμό	12
Εικόνα 2.5: Ολικός και τοπικός λυγισμός (προσαρμοσμένο από [13]).....	13
Εικόνα 2.6: Τρόποι αποτυχίας ενισχυμένης δομής σε λυγισμό [14]	14
Εικόνα 2.7: Πειραματική διάταξη D-BOX [3]	20
Εικόνα 2.8: Πειραματική διάταξη DLR [20]	21
Εικόνα 2.9: Πειραματική διάταξη της Aircraft Strength Research Institute of China [26]	22
Εικόνα 2.10: Σύγκριση πειραματικών και θεωρητικών καμπυλών αλληλεπίδρασης [26].....	23
Εικόνα 3.1: Γεωμετρία γενικού κελύφους.....	32
Εικόνα 3.2: Καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων	33
Εικόνα 3.3: Τομή κελύφους [65]	34
Εικόνα 3.4: Απειροστό στοιχείο κελύφους και συνισταμένες τάσεων στο στοιχείο [69]	38
Εικόνα 4.1: Σύνθετη φόρτιση θλίψης/διάτμησης κελύφους [79]	49
Εικόνα 4.2: Σύγκριση πειραματικών αποτελεσμάτων σύνθετης φόρτισης κελύφους με την Εξίσωση 4.20	50
Εικόνα 5.1: Υπολογισμός τάσεων Von Mises σε δομή πτέρυγας μέσω της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων [89]	53
Εικόνα 5.2: Διαδικασία κατασκευής αριθμητικού μοντέλου για ανάλυση λυγισμού	55

Εικόνα 5.3: Παράδειγμα σύγκλισης πλέγματος.....	56
Εικόνα 5.4: Δύο επαναλήψεις της μεθόδου Newton-Raphson για ένα μοντέλο ενός βαθμού ελευθερίας.....	61
Εικόνα 5.5: Αυξητική μέθοδος Newton-Raphson	62
Εικόνα 5.6: Μέθοδος Μήκους Τόξου [93]	65
Εικόνα 6.1: Παράμετρος λυγισμού κ για απλή αμφιέριστη πλάκα [104].....	69
Εικόνα 6.2: Έλεγχος σύγκλισης πλέγματος επίπεδης πλάκας: Περίπτωση αξονικής θλίψης .71	71
Εικόνα 6.3: Οριακές συνθήκες επίπεδης πλάκας: Αξονική θλίψη	72
Εικόνα 6.4: Πρώτη ιδιομορφή γραμμικής ανάλυσης λυγισμού επίπεδης πλάκας υπό αξονική θλίψη – σύγκριση με αποτελέσματα της βιβλιογραφίας (Qi [105])	72
Εικόνα 6.5: Καμπύλη δύναμης - μετατόπισης για την επίπεδη πλάκα: Αξονική θλίψη	73
Εικόνα 6.6: Γεωμετρία επίπεδης ενισχυμένης πλάκας [63].....	74
Εικόνα 6.7: Οριακές συνθήκες ενισχυμένης πλάκας: Αξονική θλίψη.....	76
Εικόνα 6.8: Πρώτη ιδιομορφή ενισχυμένης πλάκας: Αξονική θλίψη	76
Εικόνα 6.9: Καμπύλη δύναμης - μετατόπισης για την ενισχυμένη επίπεδη πλάκα υπό αξονική θλίψη	77
Εικόνα 6.10: Εκτός επιπέδου μετατόπιση της ενισχυμένης πλάκας στα 200kN	78
Εικόνα 6.11: Τελική εκτός επιπέδου μετατόπιση της ενισχυμένης πλάκας	78
Εικόνα 6.12: Γεωμετρία κελύφους	79
Εικόνα 6.13: Τέσσερεις πρώτες ιδιομορφές του Μοντέλου 3 κελύφους υπό αξονική θλίψη .81	81
Εικόνα 6.14: Μοντέλο 1: Καμπύλη τάσης - παραμόρφωσης κελύφους.....	82
Εικόνα 6.15: Μοντέλο 2: Καμπύλη τάσης - παραμόρφωσης κελύφους.....	82
Εικόνα 6.16: Μοντέλο 3: Καμπύλη τάσης - παραμόρφωσης κελύφους.....	83
Εικόνα 6.17: Σύγκριση μετατοπίσεων Μοντέλου 3 (μέγεθος αρχικής ατέλειας $a_0 = 0.2$)	83
Εικόνα 6.18: Ενισχυμένο κέλυφος υπό αξονική θλίψη [21].....	85

Εικόνα 6.19: Οριακές συνθήκες ενισχυμένου κελύφους υπό αξονική θλίψη	87
Εικόνα 6.20: Πρώτη ιδιομορφή ενισχυμένου κελύφους υπό αξονική θλίψη	87
Εικόνα 6.21: Καμπύλη δύναμης - μετατόπισης ενισχυμένου κελύφους υπό αξονική θλίψη..	88
Εικόνα 6.22: Σύγκριση ανάπτυξης ιδιομορφών στο ενισχυμένο κέλυφος	89
Εικόνα 6.23: Οριακές συνθήκες επίπεδης πλάκας: Εντός επιπέδου διάτμηση.....	91
Εικόνα 6.24: Πρώτη ιδιομορφή επίπεδης πλάκας υπό διατμητικά φορτία.....	92
Εικόνα 6.25: Καμπύλη δύναμης - μετατόπισης για την επίπεδη πλάκα: Εντός επιπέδου διάτμηση	93
Εικόνα 6.26: Εκτός επιπέδου μετατόπιση επίπεδης πλάκας στη μεταλυγισμική περιοχή: Εντός επιπέδου διάτμηση	93
Εικόνα 6.27: Γεωμετρία επίπεδης ενισχυμένης πλάκας: Εντός επιπέδου διάτμηση	94
Εικόνα 6.28: Φόρτιση επίπεδης ενισχυμένης πλάκας: Εντός επιπέδου διάτμηση [25].....	95
Εικόνα 6.29: Οριακές συνθήκες επίπεδης ενισχυμένης πλάκας: Εντός επιπέδου διάτμηση... <td>96</td>	96
Εικόνα 6.30: Καμπύλη δύναμης - μετατόπισης: Εντός επιπέδου διάτμηση.....	97
Εικόνα 6.31: Σύγκριση εκτός επιπέδου μετατόπισης κεντρικού skin bay: Εντός επιπέδου διάτμηση	97
Εικόνα 6.32: Εκτός επιπέδου μετατόπιση αριθμητικού μοντέλου επίπεδης ενισχυμένης πλάκας: Εντός επιπέδου διάτμηση.....	98
Εικόνα 6.33: Καμπύλες σχεδιασμού NASA.....	99
Εικόνα 6.34: Πρώτη ιδιομορφική γραμμικού ιδιομορφικού λυγισμού κελύφους: Εντός επιπέδου διάτμηση	100
Εικόνα 6.35: Καμπύλη τάσης - παραμόρφωσης κελύφους: Εντός επιπέδου διάτμηση	101
Εικόνα 6.36: Ανάπτυξη κυματομορφών στο κέλυφος: Εντός επιπέδου διάτμηση.....	101
Εικόνα 6.37: Οριακές συνθήκες ενισχυμένου κελύφους: Εντός επιπέδου διάτμηση.....	103
Εικόνα 6.38: Καμπύλη δύναμης - μετατόπισης ενισχυμένου κελύφους: Εντός επιπέδου διάτμηση	104

Εικόνα 6.39: Εκτός επιπέδου μετατόπιση ενισχυμένου κελύφους: Εντός επιπέδου διάτμηση	104
Εικόνα 6.40: Σύγκριση εκτός επιπέδου μετατόπισης ενισχυμένου κελύφους με τη βιβλιογραφία: Εντός επιπέδου διάτμηση	104
Εικόνα 6.41: Οριακές συνθήκες επίπεδης πλάκας: Συνδυασμένη καταπόνηση σε θλίψη και διάτμηση	105
Εικόνα 6.42: Σύγκριση αποτελεσμάτων νόμου συνδυασμένης καταπόνησης	106
Εικόνα 6.43: Παραμορφωμένη επίπεδη πλάκα για διάφορους λόγους τάσεων	107
Εικόνα 7.1: Οριακές συνθήκες αριθμητικών μοντέλων σύνθετης φόρτισης.....	110
Εικόνα 7.2: Διακριτοποιημένη γεωμετρία ισότροπου ενισχυμένου κελύφους.....	111
Εικόνα 7.3: Σύγκριση καμπύλης αλληλεπίδρασης φορτίων με Εξίσωση (4.20): Ισότροπο ενισχυμένο κέλυφος	112
Εικόνα 7.4: Υπολογισμένη καμπύλη αλληλεπίδρασης φορτίων: Ισότροπο ενισχυμένο κέλυφος	113
Εικόνα 7.5: Εκτός επιπέδου μετατόπιση για διάφορους λόγους τάσεων Rθ: Ισότροπο ενισχυμένο κέλυφος	113
Εικόνα 7.6: Υπολογισμένη καμπύλη αλληλεπίδρασης φορτίων: Ορθότροπο ενισχυμένο κέλυφος	115
Εικόνα 7.7: Εκτός επιπέδου μετατόπιση για διάφορους λόγους τάσεων Rθ: Ορθότροπο ενισχυμένο κέλυφος	115
Εικόνα 7.8: Σύγκριση καμπυλών αλληλεπίδρασης φορτίου	116

Περιεχόμενα

Περίληψη	v
Abstract	vii
Κατάλογος Πινάκων	ix
Κατάλογος Εικόνων	xii
Περιεχόμενα	xv
Ευχαριστίες	xviii
1 Εισαγωγή	1
1.1 Αναγκαιότητα της εργασίας και διατύπωση του τεχνολογικού προβλήματος	1
1.2 Στόχοι	4
1.3 Περίγραμμα διπλωματικής εργασίας	5
2 Θεωρία λυγισμού και βιβλιογραφική ανασκόπηση	7
2.1 Εισαγωγή	7
2.2 Βασικές έννοιες λυγισμού	7
2.2.1 Η έννοια της γεωμετρικής ευστάθειας	8
2.2.2 Λυγισμός διακλάδωσης και επίδραση αρχικών ατελειών	10
2.2.3 Λυγισμός ενισχυμένων δομών	12
2.3 Βιβλιογραφική ανασκόπηση	14
2.3.1 Αναλυτικές (ή ημιαναλυτικές) μέθοδοι	15
2.3.2 Αριθμητικές μέθοδοι	17
2.3.3 Πειραματικές μέθοδοι	19
3 Θεωρία κελυφών	24
3.1 Εισαγωγή	24

3.2	Τα κελύφη ως δομικά στοιχεία κατασκευών	24
3.3	Ανασκόπηση θεωριών κελυφών	25
3.3.1	Πιθανές εντατικές καταστάσεις κελυφών.....	27
3.3.2	Ιστορική ανάδρομη στην ανάπτυξη των θεωριών κελυφών.....	28
3.4	Γεωμετρία γενικών κελυφών	31
3.5	Καταστατικές εξισώσεις ισότροπων κελυφών.....	35
3.6	Συνισταμένες τάσεων κελυφών.....	37
3.7	Μη-γραμμική θεωρία κελυφών DMV	40
4	Λυγισμός και μεταλυγισμική συμπεριφορά ισότροπων κελυφών.....	44
4.1	Εισαγωγή.....	44
4.2	Ενεργειακές μέθοδοι	44
4.2.1	Ενεργειακή μέθοδος Rayleigh-Ritz	45
4.2.2	Ενεργειακή μέθοδος Galerkin.....	45
4.3	Γραμμικές εξισώσεις ευστάθειας κελυφών σύμφωνα με τις προσεγγίσεις DMV	47
4.4	Σύνθετη θλιπτική-διατμητική φόρτιση κελύφους.....	49
5	Αριθμητική ανάλυση	52
5.1	Εισαγωγή.....	52
5.2	Μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων.....	52
5.3	ANSYS Mechanical APDL.....	54
5.3.1	Έλεγχος σύγκλισης πλέγματος	55
5.3.2	Γραμμική ιδιομορφική ανάλυση λυγισμού	56
5.3.3	Εισαγωγή γεωμετρικών ατελειών	57
5.4	Μη-γραμμικές μέθοδοι.....	58
5.4.1	Μέθοδος Newton-Raphson	59
5.4.2	Μέθοδος Μήκους Τόξου	63

6	Ανάπτυξη και επιβεβαίωση αριθμητικών μοντέλων	67
6.1	Εισαγωγή	67
6.2	Περίπτωση φόρτισης αξονικής θλίψης	68
6.2.1	Επίπεδη πλάκα	68
6.2.2	Επίπεδη ενισχυμένη πλάκα	74
6.2.3	Κέλυφος	79
6.2.4	Ενισχυμένο κέλυφος	84
6.3	Περίπτωση φόρτισης εντός επιπέδου διάτμησης	90
6.3.1	Επίπεδη πλάκα	90
6.3.2	Επίπεδη ενισχυμένη πλάκα	93
6.3.3	Κέλυφος	98
6.3.4	Ενισχυμένο κέλυφος	101
6.4	Περίπτωση συνδυασμένης φόρτισης.....	105
6.4.1	Επίπεδη πλάκα υπό συνδυασμένη θλιπτική και διατμητική φόρτιση.....	105
7	Αριθμητικά μοντέλα ενισχυμένων κελυφών σε σύνθετη φόρτιση	108
7.1	Εισαγωγή	108
7.2	Ισότροπο ενισχυμένο κέλυφος	111
7.3	Ορθότροπο ενισχυμένο κέλυφος.....	114
7.4	Σύγκριση αποτελεσμάτων σύνθετης φόρτισης μεταξύ του ισότροπου και ορθότροπου ενισχυμένου κελύφους.....	116
8	Συμπεράσματα και μελλοντική έρευνα	117
8.1	Αριθμητικά μοντέλα.....	117
8.2	Φόρτιση ενισχυμένων κελυφών σε σύνθετη φόρτιση θλίψης και διάτμησης.....	120
8.3	Μελλοντική έρευνα	120
	Βιβλιογραφία	122

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στον επιβλέποντα Καθηγητή Γεώργιο Λαμπέα για την παροχή του θέματος της διπλωματικής μου εργασίας, την καθοδήγηση του και τη στήριξη που μου παρείχε κατά τη συγγραφή της.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω την υπόλοιπη τριμελής επιτροπή, τον Αν. Καθηγητή Κωνσταντίνο Τσερπέ και Αν. Καθηγητή Χαράλαμπο Αποστολόπουλο για το χρόνο που αφιέρωσαν στη διπλωματική μου εργασία.

Επιπρόσθετα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Μεταδιδάκτορα Κωνσταντίνο Φωτόπουλο για τη διαρκή στήριξη του στην εκμάθηση και κατανόηση του λογισμικού ANSYS APDL, καθώς και για το χρόνο που αφιέρωσε στη διόρθωση της διπλωματικής μου εργασίας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου Γιώργο, Κωνσταντίνο και Παναγιώτη που μου παρέχουν τη στήριξη και κίνητρο να βελτιώνομαι όσο το δυνατόν περισσότερο.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου που παρά τις δυσκολίες της εποχής, καταβάλλουν μεγάλη προσπάθεια ώστε να πραγματοποιήσω τις επιθυμητές μου σπουδές και πιστεύουν σε εμένα πάντοτε.

1 Εισαγωγή

1.1 Αναγκαιότητα της εργασίας και διατύπωση του τεχνολογικού προβλήματος

Η άτρακτος των πολιτικών αεροσκαφών αποτελεί μέρος της κύριας δομής τους και χρησιμοποιείται για τη μεταφορά του πληρώματος, των επιβατών και του ωφέλιμου φορτίου. Παράλληλα, αποτελεί τη στήριξη άλλων σημαντικών δομών, όπως του πιλοτηρίου, των πτερύγων και του ουραίου τμήματος. Έτσι, οι κύριες δυνάμεις που ασκούνται σε αυτή, αναπτύσσονται γύρω από την κυτιοειδή δομή της πτέρυγας (wing-box), στις συνδέσεις της ατράκτου με την πτέρυγα και το ουραίο τμήμα, στο σύστημα προσγείωσης και στο χώρο του ωφέλιμου φορτίου. Κατά τη διάρκεια της πτήσης η άτρακτος πρέπει να είναι ικανή να φέρει τα καμπτικά φορτία που προκαλούνται λόγω του βάρους και της άντωσης που παράγεται στην πτέρυγα και στο ουραίο τμήμα, καθώς και τα στρεπτικά φορτία που δημιουργούνται με τη χρήση των επιφανειών ελέγχου [1]. Επιπλέον, στα αεροσκάφη με συμπιεζόμενη καμπίνα ασκείται εσωτερική πίεση, η οποία έχει ως αποτέλεσμα την επιβολή εσωτερικών εφελκυστικών τάσεων (axial/hoop stresses) στην άτρακτο. Επομένως, στο κάτω μέρος της ατράκτου ασκούνται κυρίως αξονικά θλιπτικά φορτία, στο πάνω μέρος της αξονικά εφελκυστικά φορτία και στα πλαϊνά μέρη συνδυασμός διατμητικών και αξονικών φορτίων.

Ο πλέον διαδεδομένος τρόπος κατασκευής της δομής της ατράκτου για την παραλαβή των προαναφερόμενων φορτίων είναι τα κυλινδρικής μορφής μεταλλικά ενισχυμένα κελύφη, λόγω των υψηλών λόγων αντοχής και δυσκαμψίας προς βάρος που παρουσιάζουν. Τα ενισχυμένα κελύφη της ατράκτου αποτελούνται από τρία δομικά στοιχεία, όπως φαίνεται στην **Εικόνα 1.1**: Τη λεπτή επικάλυψη (skin), τις διαμήκεις ενισχυτικές δοκούς (longerons και stringers) και τα εγκάρσια ενισχυτικά πλαίσια (frames ή rings). Ο ρόλος των ενισχυτικών δοκών και πλαισίων είναι η παραλαβή των φορτίων της ατράκτου και η διατήρηση του σχήματος της. Συγκεκριμένα, η λεπτή επικάλυψη παραλαμβάνει κυρίως τα διατμητικά φορτία, οι διαμήκεις ενισχυτικοί δοκοί τα καμπτικά φορτία (δηλαδή τα αξονικά εφελκυστικά ή θλιπτικά φορτία) και τα εγκάρσια ενισχυτικά πλαίσια χρησιμοποιούνται κυρίως για τη διατήρηση του σχήματος της ατράκτου και για τη βελτίωση της ευστάθειας της κατασκευής σε αξονικά θλιπτικά φορτία

[2]. Βέβαια, μπορεί να υπάρξει μεταφορά διατμητικών και αξονικών φορτίων από τη λεπτή επικάλυψη στις εγκάρσιες ενισχυτικές δοκούς, λόγω της εσωτερικής πίεσης.



Εικόνα 1.1: Δομή ενισχυμένου κελυφους ατράκτου

Τα μέλη της δομής της ατράκτου που παραλαμβάνουν τα αξονικά θλιπτικά φορτία, τα διατμητικά φορτία και το συνδυασμό αυτών χρειάζονται ιδιαίτερη προσοχή, καθώς ενδέχεται να παρουσιάσουν μια μορφή δομικής αστάθειας που ονομάζεται λυγισμός. Συχνά, η μέγιστη επιτρεπόμενη τάση στα μέλη αυτά καθορίζεται από την κρίσιμη τάση λυγισμού, η οποία ορίζεται ως η τάση στην οποία η κατασκευή παρουσιάζει ξαφνικά μεγάλες μετατοπίσεις στην εκτός επιπέδου διεύθυνση. Ο λυγισμός ενισχυμένων κελυφών είναι ένα σύνθετο, μη-γραμμικό πρόβλημα και για την πλήρη λύση του απαιτούνται αριθμητικές μέθοδοι που είναι ικανές να υπολογίσουν όχι μόνο τον ολικό λυγισμό (global buckling), αλλά και τον τοπικό λυγισμό που μπορεί να επέλθει στο λεπτό έλασμα ανάμεσα στα ενισχυτικά μέλη, καθώς και στα ενισχυτικά μέλη (local buckling). Επιπλέον, το πρόβλημα του λυγισμού εξαρτάται σημαντικά, ιδίως στα κελύφη, από τις ατέλειες που παρουσιάζει η κατασκευή (γεωμετρικές ή ατέλειες του υλικού). Σημειώνεται πως ο τοπικός λυγισμός των ενισχυτικών δοκών θεωρείται καταστροφικός, καθώς δεν μπορούν να φέρουν πλέον τα προδιαγραφόμενα φορτία, ενώ ο τοπικός λυγισμός του λεπτού ελάσματος μπορεί να είναι επιτρεπτός, αν η μεταλυγισμική του συμπεριφορά είναι τέτοια ώστε να μπορούν να παραληφθούν τα φορτία.

Ο σχεδιασμός της ατράκτου σε συνδυασμένα φορτία επιβεβαιώνεται συνήθως με πειραματικές μεθόδους που πραγματοποιούνται σε ολόκληρη την άτρακτο. Λόγω του ότι η διαδικασία αυτή είναι δαπανηρή και χρονοβόρα, η αεροναυπηγική βιομηχανία στρέφεται στην αρχική επιβεβαίωση του σχεδιασμού της ατράκτου σε χαμηλότερο επίπεδο, δηλαδή σε επίπεδο πάνελ ατράκτου [3]. Η δυσκολία που παρουσιάζει όμως αυτός ο τρόπος επιβεβαίωσης είναι το πώς θα εισαχθούν τα φορτία στο πάνελ, κυρίως η εφαρμογή της εσωτερικής πίεσης.



Εικόνα 1.2: Τοπικός λυγισμός του κάτω μέρους της ατράκτου ενός Boeing 757

Η ανάπτυξη της επιστήμης των υπολογιστών και ειδικότερα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, έδωσε νέα εργαλεία στους μηχανικούς για την επίλυση προβλημάτων, όταν οι αναλυτικές μέθοδοι δεν επαρκούν. Ιδίως για τον υπολογισμό του λυγισμού και της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς μιας κατασκευής, η χρήση λογισμικού πεπερασμένων στοιχείων είναι απαραίτητη, όταν δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν ανάλογα πραγματικά πειράματα. Πολύ σημαντικό είναι ότι μέσω των λογισμικών αυτών, μπορούν να εισαχθούν γεωμετρικές ατέλειες και ατέλειες υλικών. Επομένως, το κίνητρο για την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι αφενός η διερεύνηση των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών του προβλήματος του λυγισμού και αφετέρου η εφαρμογή της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων για τη δημιουργία και επιβεβαίωση/επικύρωση παραμετρικών αριθμητικών μοντέλων. Τα αριθμητικά μοντέλα μπορούν να προβλέπουν με ακρίβεια τη συμπεριφορά αεροναυπηγικών κατασκευών σε λυγισμό, σε απλές και σύνθετες φορτίσεις. Στο πλαίσιο της παρούσας μελέτης, οι επιβεβαιώσεις των αριθμητικών μοντέλων δεν περιορίζονται σε γραμμικά ελαστικά υλικά μόνο, αλλά περιλαμβάνουν και μοντέλα πλαστικότητας, καθώς και ορθότροπα σύνθετα υλικά.

1.2 Στόχοι

Στην παρούσα διπλωματική εργασία κύριος στόχος είναι η διερεύνηση του λυγισμού και της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς αεροναυπηγικών δομών με χρήση αριθμητικών μεθόδων για την ανάπτυξη μοντέλων πεπερασμένων στοιχείων. Οι περιπτώσεις φορτίσεων που θα εξεταστούν είναι η αξονική θλίψη, η εντός επιπέδου διάτμηση και ο συνδυασμός τους. Οι αεροναυπηγικές δομές που εξετάζονται στην εργασία περιλαμβάνουν όλα τα επίπεδα ενός ενισχυμένου κελύφους, τα οποία είναι:

1. Επίπεδη πλάκα
2. Επίπεδη ενισχυμένη πλάκα
3. Κέλυφος
4. Ενισχυμένο κέλυφος

Ο κύριος τρόπος με τον οποίο θα επιτευχθεί αυτή η μελέτη είναι η χρήση του κώδικα πεπερασμένων στοιχείων ANSYS APDL. Το ANSYS APDL δίνει τη δυνατότητα γραμμικής λύσης (eigenvalue buckling) του προβλήματος του λυγισμού, αλλά και της μη-γραμμικής λύσης του (nonlinear buckling), χρησιμοποιώντας λύτες όπως η μέθοδος Newton-Raphson και η μέθοδος μήκους τόξου (arc-length method). Ο λόγος για τον οποίο επιλέγεται το ANSYS APDL είναι για τις αυξημένες δυνατότητες που παρουσιάζει στην παραμετροποίηση των χαρακτηριστικών του προβλήματος, το οποίο είναι μεταξύ των κύριων στόχων της διπλωματικής εργασίας. Μέσω του κώδικα APDL, είναι δυνατό να παραμετροποιηθούν όλα τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της κατασκευής, όλες οι ιδιότητες του υλικού, καθώς και όλες οι οριακές συνθήκες/φορτίσεις που επιβάλλονται στην κατασκευή. Πέρα από τη δημιουργία των αριθμητικών μοντέλων, ιδιαίτερα σημαντική είναι και η επιβεβαίωση/επικύρωση τους, ώστε τα αποτελέσματα τους να είναι έγκυρα. Η επιβεβαίωση πραγματοποιείται με σύγκριση των αποτελεσμάτων των αριθμητικών μοντέλων με αντίστοιχα αποτελέσματα από πειράματα της σχετικής βιβλιογραφίας, ενώ η επικύρωση πραγματοποιείται με σύγκριση με αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα. Έτσι, κατασκευάζεται μια «βιβλιοθήκη» έγκυρων παραμετρικών αριθμητικών μοντέλων, για όλα τα επίπεδα του ενισχυμένου κελύφους που αναφέρθηκαν παραπάνω, τα οποία θα μπορούν να προσαρμόζονται με ευκολία στις ανάγκες του κάθε προβλήματος και να προβλέπουν με ακρίβεια τη συμπεριφορά μίας δομής που υπόκειται λυγισμό.

Οι κύριοι στόχοι της εργασίας είναι:

- Κατανόηση του προβλήματος της ενστάθειας στα ενισχυμένα κελύφη
- Παρουσίαση των σημαντικότερων θεωριών κελυφών και των βασικών εξισώσεων που διέπουν τα κελύφη
- Παρουσίαση των αναλυτικών (ή ημι-αναλυτικών) εξισώσεων για τον υπολογισμό του ελαστικού φορτίου λυγισμού κελυφών σε σύνθετη φόρτιση θλίψης/διάτμησης
- Κατασκευή παραμετρικών αριθμητικών μοντέλων και επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων τους με βάση πειράματα/αριθμητικά μοντέλα που βρίσκονται στη βιβλιογραφία
- Μελέτη της συμπεριφοράς ενισχυμένων ισότροπων και ορθότροπων κελυφών σε σύνθετη φόρτιση θλίψης/διάτμησης και εξαγωγή των καμπύλων αλληλεπίδρασης φορτίων

1.3 Περίγραμμα διπλωματικής εργασίας

Η παρούσα μελέτη είναι χωρισμένη σε τρία τμήματα: Τη βιβλιογραφική ανασκόπηση του προβλήματος του λυγισμού ενισχυμένων κελυφών (**Κεφάλαιο 2**), το βασικό θεωρητικό υπόβαθρο του λυγισμού κελυφών (**Κεφάλαια 3 και 4**) και την αριθμητική ανάλυση (**Κεφάλαια 5 έως 7**). Η διπλωματική εργασία περιέχει συνολικά οχτώ κεφάλαια.

Το **Κεφάλαιο 2** περιλαμβάνει τις βασικές έννοιες του λυγισμού και τη βιβλιογραφική ανασκόπηση του προβλήματος του λυγισμού ενισχυμένων κελυφών υπό σύνθετη φόρτιση θλίψης/διάτμησης. Η ανασκόπηση στοχεύει στην κατανόηση των μεθόδων που χρησιμοποιούνται για τη μελέτη της συμπεριφοράς ενισχυμένων αεροναυπηγικών κατασκευών σε λυγισμό. Συγκεκριμένα, η βιβλιογραφία ταξινομείται με βάση τη μέθοδο που χρησιμοποιείται, η οποία μπορεί να είναι αναλυτική (ή ημι-αναλυτική), αριθμητική ή πειραματική.

Στο **Κεφάλαιο 3** παρουσιάζεται η θεωρία κελυφών, η οποία περιλαμβάνει σύντομη ανασκόπηση των σημαντικότερων θεωριών, καθώς και το μαθηματικό υπόβαθρο της μηγραμμικής θεωρίας κελυφών Donnel-Musthari-Vlasov (DMV). Οι θεωρίες αυτές είναι σημαντικές, καθώς τα περισσότερα δομικά μέρη ενός ενισχυμένου κελύφους, μπορούν να θεωρηθούν ξεχωριστά ως κελύφη, καθώς όλα τα μέρη της είναι λεπτότοιχα.

Στο **Κεφάλαιο 4** παρουσιάζεται η θεωρία του λυγισμού και της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς κελυφών. Αυτή συμπεριλαμβάνει της μαθηματικές εξισώσεις της ευστάθειας κελυφών, την παρουσίαση ενεργειακών μεθόδων που χρησιμοποιούνται για τη λύση αυτών, καθώς και μια σύντομη παρουσίαση των αναλυτικών/ημι-αναλυτικών εξισώσεων που βρίσκονται στη βιβλιογραφία για τη λύση του προβλήματος.

Στο **Κεφάλαιο 5** περιγράφονται συνοπτικά οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται στην αριθμητική ανάλυση, με βάση τον κώδικα πεπερασμένων στοιχείων ANSYS. Αρχικά, πραγματοποιείται μια σύντομη περιγραφή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Έπειτα περιγράφεται ο τρόπος ανάπτυξης του προβλήματος του λυγισμού στο περιβάλλον του ANSYS και τα απαραίτητα βήματα που πραγματοποιούνται κάθε φορά, όπως ο έλεγχος σύγκλισης πλέγματος και η εισαγωγή γεωμετρικών ατελειών. Τέλος, περιγράφεται συνοπτικά το μαθηματικό υπόβαθρο των λυτών του ANSYS για τη γραμμική ανάλυση ιδιοτιμών και ιδιομορφών, καθώς και τη μη-γραμμική ανάλυση (μέθοδος Newton-Raphson και μέθοδος Μήκους Τόξου).

Στο **Κεφάλαιο 6** αναπτύσσονται όλα τα μοντέλα στα επίπεδα ενισχυμένου κελύφους που αναφέρθηκαν παραπάνω. Σε κάθε επίπεδο, πραγματοποιείται περιγραφή της γεωμετρίας, του υλικού και των οριακών συνθηκών. Στο τέλος, συγκρίνονται τα αποτελέσματα της καμπύλης φορτίου-μετατόπισης και των αναπτυσσόμενων κυματομορφών με αυτά της βιβλιογραφίας, ώστε να αποδειχτεί η επιβεβαίωση/επικύρωση των αριθμητικών μοντέλων.

Στο **Κεφάλαιο 7** αναπτύσσονται δύο αριθμητικά μοντέλα ενισχυμένων κελυφών. Το ένα αποτελείται από κράμα αλουμινίου, ενώ το άλλο από πολύστρωτο υλικό με ίνες υάλου. Σκοπός είναι η μελέτη σε σύνθετη φόρτιση θλίψης/διάτμησης, έτσι ώστε να διερευνηθεί η συμπεριφορά τους μέσω των καμπυλών αλληλεπίδρασης φορτίων και να συγκριθούν οι καμπύλες.

Στο **Κεφάλαιο 8** σημειώνονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη διπλωματική εργασία και προτείνονται αντικείμενα μελλοντικής έρευνας, τα οποία μπορούν να πραγματοποιηθούν για την περαιτέρω ανάπτυξη της εργασίας.

2 Θεωρία λυγισμού και βιβλιογραφική ανασκόπηση

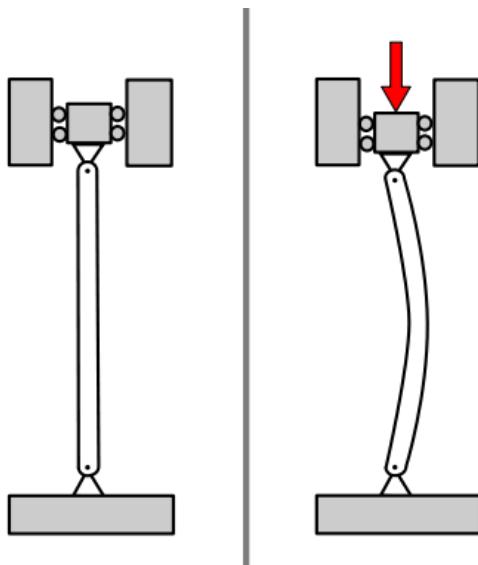
2.1 Εισαγωγή

Η σημαντικότητα του προβλήματος του λυγισμού και της πρόβλεψης της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς των ενισχυμένων κελυφών συνοδεύεται από εκτενή έρευνα. Στο παρόν κεφάλαιο πραγματοποιείται σύντομη παρουσίαση των βασικών θεωρητικών εννοιών των προβλημάτων ευστάθειας και του λυγισμού ενισχυμένων κελυφών. Συγκεκριμένα, περιγράφεται το πρόβλημα της γεωμετρικής ευστάθειας των κατασκευών, ο λυγισμός διακλάδωσης, η επίδραση των ατελειών, καθώς και ο τρόπος λυγισμού των ενισχυμένων δομών. Επιπλέον, πραγματοποιείται εκτενής βιβλιογραφική ανασκόπηση του θέματος του λυγισμού ενισχυμένων κελυφών. Η κατηγοριοποίηση της έρευνας πάνω στο συγκεκριμένο θέμα γίνεται λαμβάνοντας υπόψη τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται για τη λύση του, οι οποίες μπορεί να είναι αναλυτικές, αριθμητικές ή πειραματικές. Ιδιαίτερη σημασία για την παρούσα διπλωματική εργασία έχουν οι μέθοδοι των πεπερασμένων στοιχείων -καθώς θα χρησιμοποιηθούν για την ανάπτυξη των μοντέλων της μελέτης- και οι πειραματικές μέθοδοι, -για την επιβεβαίωση των αριθμητικών μοντέλων και την επιλογή οριακών συνθηκών για την ανάλυση των ενισχυμένων κελυφών στο **Κεφάλαιο 7**. Συγκεκριμένα, θα πραγματοποιηθεί εκτενής έρευνα στη βιβλιογραφία η οποία αφορά την καταπόνηση ενισχυμένων κελυφών υπό σύνθετη φόρτιση αξονικής θλίψης και εντός-επιπέδου διάτμησης.

2.2 Βασικές έννοιες λυγισμού

Οι φέρουσες κατασκευές μπορούν να αστοχήσουν με δύο διαφορετικούς τρόπους. Ο πρώτος τρόπος σχετίζεται με την αστοχία του υλικού της κατασκευής, όταν δηλαδή οι τάσεις στην κατασκευή ξεπερνούν τις επιτρεπτές τιμές και παρουσιάζεται πλαστική διαρροή, εμφάνιση ρωγμών κλπ.. Στο δεύτερο τρόπο, παρόλο που οι τάσεις είναι εντός των ανεκτών ορίων που ορίζει το υλικό, η κατασκευή αδυνατεί να διατηρήσει τη διαμόρφωση της υπό τις εξωτερικές διαταραχές. Ο δεύτερος τρόπος, δηλαδή, σχετίζεται με την ευστάθεια της κατασκευής [4]. Στην περίπτωση που η απώλεια ευστάθειας επέρχεται λόγω της θλιπτικής (ή και εντός

επιπέδου διατμητικής σε κάποιες περιπτώσεις) φόρτισης, χαρακτηρίζεται ως γεωμετρική αστάθεια ή λυγισμός. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα λυγισμού, είναι αυτό του λυγισμού μιας αμφιέριστης δοκού, η οποία υπό την επίδραση θλιπτικών φορτίων αστοχεί σε φορτία πολύ μικρότερα της αντοχής του υλικού (**Εικόνα 2.1**).



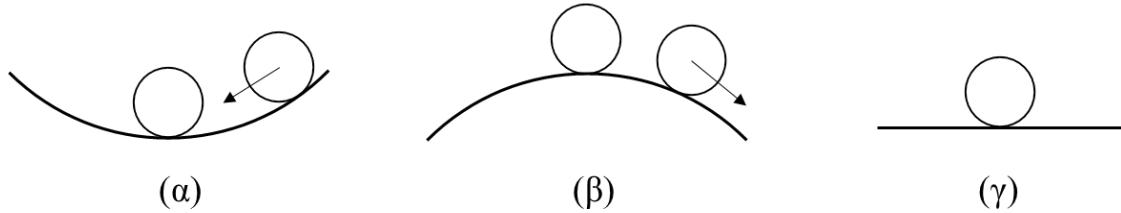
Εικόνα 2.1: Λυγισμός αμφιέριστης δοκού

Ο λυγισμός επιφέρει απότομες παραμορφώσεις και μεγάλες μετατοπίσεις στην κατασκευή, το οποίο στις περισσότερες περιπτώσεις σημαίνει πως η κατασκευή αδυνατεί πλέον να φέρει επιπλέον φορτία.

2.2.1 Η έννοια της γεωμετρικής ευστάθειας

Καθώς τα φορτία εφαρμόζονται ψευδοστατικά, η ελαστική δομή παραμορφώνεται και η στατική ισορροπία διατηρείται. Αν εφαρμοστούν «μικρές» εξωτερικές διαταραχές, και η κατασκευή αντιδράει εκτελώντας ταλαντώσεις γύρω από την παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας, τότε η ισορροπία χαρακτηρίζεται ευσταθής. Σε αντίθετη περίπτωση, η ευστάθεια χαρακτηρίζεται ασταθής αν η δομή τείνει να διατηρήσει τη διαταραγμένη θέση ή τείνει να αποκλίνει από την παραμορφωμένη θέση ισορροπίας [5]. Συχνά, όταν η διαταραγμένη θέση διατηρείται, η κατάσταση ισορροπίας μπορεί να χαρακτηριστεί και ουδέτερη. Οποιαδήποτε από τις δύο περιπτώσεις και αν συμβεί, η τιμή της εξωτερικής διαταραχής που προκαλεί την αστάθεια ονομάζεται κρίσιμη.

Η ευστάθεια (ή αστάθεια) μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω μια μπάλας βάρους W , η οποία διατηρείται σε ισορροπία σε επίπεδα διαφορετικής γεωμετρίας, όπως φαίνεται στην **Εικόνα 2.2**.



Εικόνα 2.2: Χαρακτηρισμός της στατικής ισορροπίας

Στην **Εικόνα 2.2α**, αν το σύστημα διαταραχθεί μέσω απειροστών μετατοπίσεων, θα ταλαντωθεί γύρω από τη θέση του έως ότου να επιστρέψει στη θέση ισορροπίας του. Μια τέτοια θέση ισορροπίας ονομάζεται ευσταθής. Στην **Εικόνα 2.2β**, αν το σύστημα διαταραχθεί μέσω απειροστών μετατοπίσεων, θα μετακινηθεί από τη θέση ισορροπίας του και έτσι η κατάσταση ισορροπίας ονομάζεται ασταθής. Στην **Εικόνα 2.2γ**, οποιαδήποτε μετατόπιση προκληθεί στο σύστημα, θα έχει ως συνέπεια το σύστημα να παραμείνει στη μετατοπισμένη κατάσταση και έτσι χαρακτηρίζεται η κατάσταση ισορροπίας ουδέτερη.

Ο χαρακτηρισμός της ευστάθειας μιας δομής μπορεί να πραγματοποιηθεί μελετώντας τη δυναμική ενέργεια της P . Γενικά, η δυναμική ενέργειας ενός συστήματος αποτελείται από το άθροισμα της ελαστικής ενέργειας U και του έργου των δυνάμεων W και δίνεται από τη σχέση [6]:

$$P = U + W \quad (2.1)$$

Ο χαρακτηρισμός της ευστάθειας του συστήματος βασίζεται στην αξιολόγηση του πρόσημου της δεύτερης παραγώγου της δυναμικής του ενέργειας σε μια οποιαδήποτε θέση (**Εξισώσεις (2.2)**) [7].

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} > 0 \rightarrow \text{Ευσταθής κατάσταση ισορροπίας} \quad (2.2\alpha)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0 \rightarrow \text{Ουδέτερη κατάσταση ισορροπίας} \quad (2.2\beta)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} < 0 \rightarrow \text{Ασταθής κατάσταση ισορροπίας} \quad (2.2\gamma)$$

Σημειώνεται περαιτέρω, πως η συνθήκη ευσταθούς κατάστασης ισορροπίας υποδηλώνει πως η δυναμική ενέργεια του συστήματος στη θέση αυτή βρίσκεται σε ελάχιστο (αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας) [8].

Οι ενεργειακές μέθοδοι Galerkin και Rayleigh χρησιμοποιούνται συχνά για την εξαγωγή αναλυτικών/ημι-αναλυτικών σχέσεων για το κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιούν την αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας για την εύρεση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Οι μέθοδοι αυτοί περιγράφονται αναλυτικότερα στο **Κεφάλαιο 4**.

2.2.2 Λυγισμός διακλάδωσης και επίδραση αρχικών ατελειών

Στην παρούσα υποενότητα γίνεται επεξήγηση των βασικών χαρακτηριστικών του λυγισμού με βάση το λυγισμό μιας επίπεδης πλάκας. Συγκεκριμένα, εξηγείται η έννοια του φορτίου διακλάδωσης και οι επιδράσεις των ατελειών.

Έστω μία επίπεδη πλάκα, διαστάσεων $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{t}$. Για το λυγισμό επίπεδων πλακών, το ελαστικό κρίσιμο φορτίο λυγισμού σε θλιπτικά αξονικά φορτία μπορεί να υπολογιστεί από την **Εξίσωση (2.3)** [9].

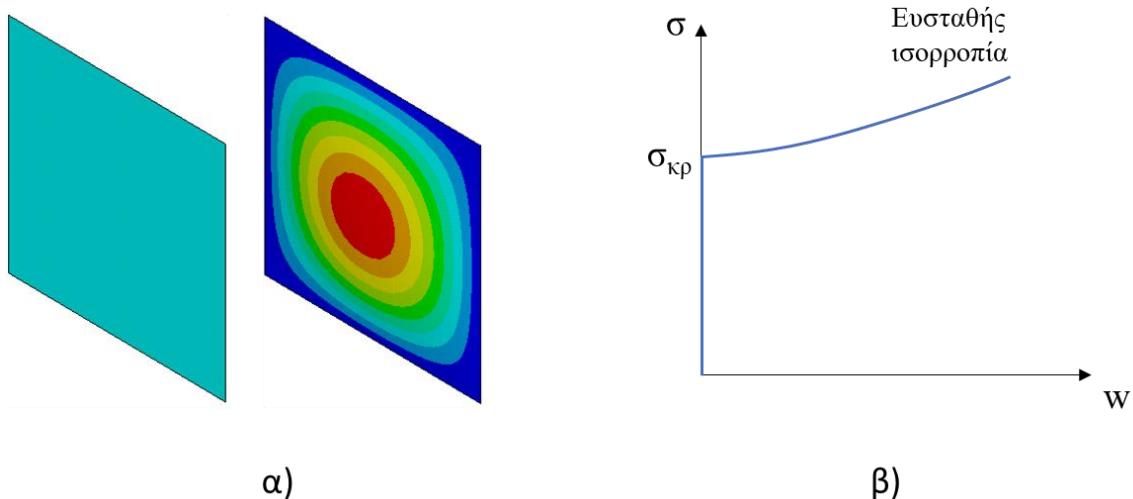
$$\sigma_{\kappa\rho} = \kappa \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 = \kappa \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad (2.3)$$

όπου κ η παράμετρος λυγισμού. Η παράμετρος λυγισμού είναι συνάρτηση του λόγου των πλευρών a/b και των οριακών συνθηκών του προβλήματος. Επομένως, συμπεραίνεται πως η κρίσιμη τιμή στην οποία επέρχεται ο λυγισμός εξαρτάται κυρίως από:

- Το πλάτος της πλάκας
- Τη καμπτική δυσκαμψία της πλάκας
- Τις οριακές συνθήκες που επιβάλλονται στην πλάκα

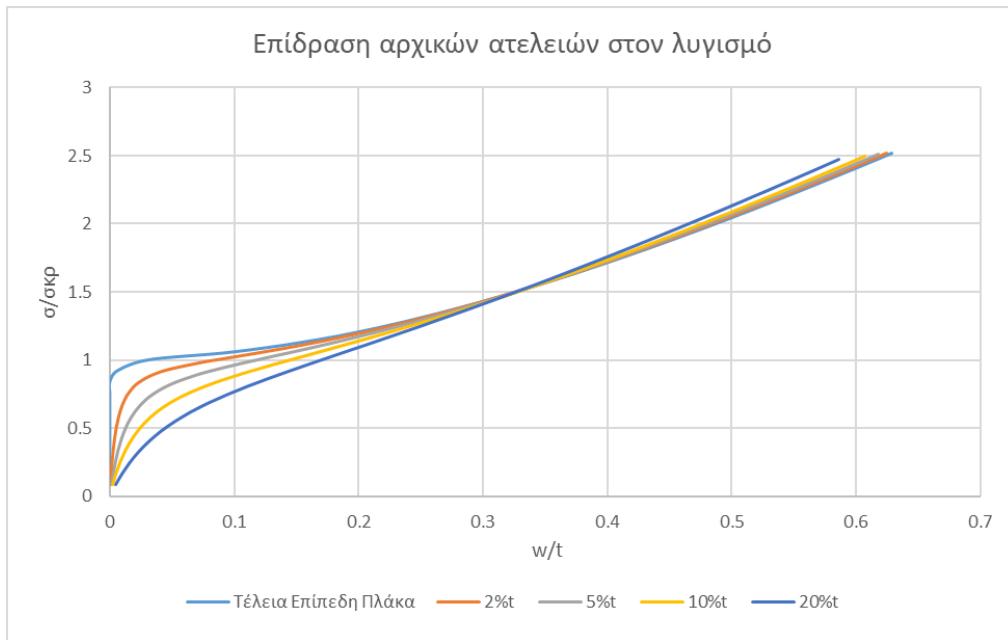
Όμοια, από τις ίδιες παραμέτρους εξαρτάται και ο λυγισμός ενισχυμένων δομών. Στην **Εικόνα 2.3** παρουσιάζεται μια τέλεια (χωρίς ατέλειες) επίπεδη πλάκα πριν το λυγισμό και η ιδιομορφή που σχηματίζεται στην πλάκα, μόλις η τιμή της τάσης φτάσει την κρίσιμη τιμή $\sigma_{\kappa\rho}$. Η ισορροπία της επίπεδης πλάκας μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω του διαγράμματος εκτός επιπέδου μετατόπισης w και αξονικής τάσης σ . Παρατηρείται πως έως την τιμή $\sigma_{\kappa\rho}$ δεν παρουσιάζεται εκτός επιπέδου μετατόπιση, ενώ πέρα του σημείο λυγισμού, υπάρχει έντονη αύξηση της μετατόπισης w . Παρατηρείται δηλαδή μια διακλάδωση της ισορροπίας στο σημείο

αυτό. Για αυτόν το λόγο, η κρίσιμη τάση λυγισμού ονομάζεται και τάση διακλάδωσης (bifurcation load). Τονίζεται πως αν η κλίση της καμπύλης μετά το κρίσιμο φορτίο λυγισμού ήταν αρνητική, θα σήμαινε αρνητική δυσκαμψία – αστάθεια, επομένως η πλάκα δεν θα μπορούσε να φέρει να μεταλυγισμικά φορτία.



Εικόνα 2.3: Λυγισμός τέλειας επίπεδης πλάκας α) Παραμορφωμένη κατάσταση στο κρίσιμο σημείο λυγισμού β) Διακλάδωση της ισορροπίας

Ωστόσο, αν στην επίπεδη πλάκα υπάρχουν αρχικές ατέλειες, η συμπεριφορά λυγισμού είναι διαφορετική από αυτήν της διακλάδωσης, καθώς παρατηρούνται εκτός επιπέδου μετατοπίσεις πριν από το κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Χρησιμοποιώντας το επιβεβαιωμένο αριθμητικό μοντέλο για επίπεδη πλάκα του **Κεφαλαίου 6**, στην **Εικόνα 2.4** απεικονίζεται η επίδραση των αρχικών ατελειών στο διάγραμμα τάσης-μετατόπισης. Παρατηρείται πως πλέον δεν εμφανίζεται σημείο διακλάδωσης, ενώ η αύξηση των ατελειών μειώνει την κρίσιμη τιμή λυγισμού της επίπεδης πλάκας. Επομένως, όταν μελετάται το φαινόμενο του λυγισμού είναι σημαντικός ο καθορισμός των αρχικών ατελειών. Σημειώνεται, ωστόσο, πως η μεταλυγισμική συμπεριφορά των πλακών είναι όμοια για όλα τα μεγέθη της αρχικής ατέλειας. Όμοια επίδραση στη συμπεριφορά της δομής παρουσιάζει και η εκκεντρότητα των φορτίων, καθώς και η πλαστικότητα του υλικού.

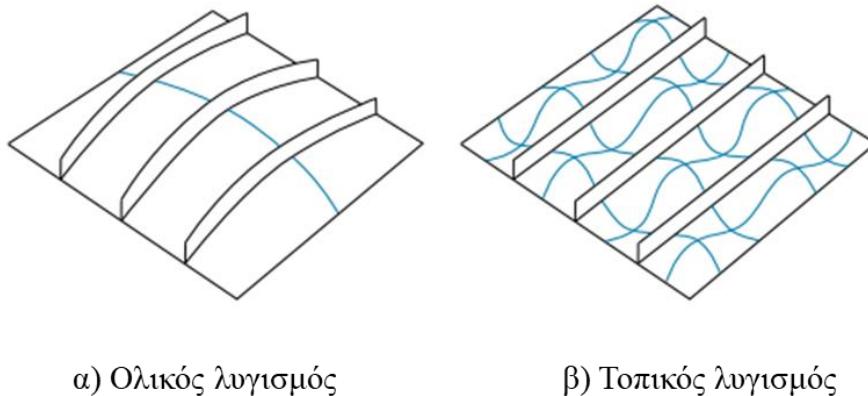


Εικόνα 2.4: Επίδραση αρχικών ατελειών στο λυγισμό

2.2.3 Λυγισμός ενισχυμένων δομών

Τα κρίσιμα φορτία λυγισμού και οι αντίστοιχες ιδιομορφές που σχηματίζονται σε μια κατασκευή ή δομικό στοιχείο εξαρτώνται από διάφορους παράγοντες, όπως η γεωμετρία, το υλικό και οι οριακές συνθήκες. Στις ενισχυμένες δομές, ο τρόπος με τον οποίο επέρχεται ο λυγισμός στην κατασκευή, εξαρτάται από τη δυσκαμψία των ενισχυτικών δομών. Συγκεκριμένα, στις δομές αυτές μπορούν να δημιουργηθούν φαινόμενα πρωτεύοντος λυγισμού, δευτερεύοντος λυγισμού και συνδυασμός των δύο προηγούμενων [10]. Το φαινόμενο του πρωτεύοντος λυγισμού χαρακτηρίζεται από το λυγισμό του ελάσματος και των ενισχυτικών δομών. Τα φαινόμενα του δευτερεύοντος λυγισμού είναι τοπικά και λαμβάνουν χώρα στο έλασμα ανάμεσα σε δύο γειτονικά ενισχυτικά στοιχεία (τοπικός λυγισμός), ανάμεσα στο έλασμα και στις ηλώσεις (ενδοπειρικός λυγισμός), καθώς και τοπικά, σε σημεία των ενισχυτικών δομών. Ο τοπικός λυγισμός είναι το πρώτο φαινόμενο λυγισμού που συνήθως συναντάται στις ενισχυμένες δομές. Τα επόμενα φαινόμενα που συμβαίνουν, τα οποία μπορεί να είναι ο ενδοπειρικός λυγισμός, η τοπική αστοχία των ενισχυτικών δομών (crippling), η καμπτική αστοχία και η στρεπτική αστοχία χαρακτηρίζονται ως μεταλυγισμικά φαινόμενα λυγισμού [11]. Στις αεροναυπηγικές κατασκευές, οι ενισχυτικές δομές (όπως για παράδειγμα τα ενισχυμένα κελύφη των ατράκτων) σχεδιάζονται έτσι ώστε να συμβαίνουν τοπικά φαινόμενα λυγισμού στο έλασμα, αφού η κατασκευή συνεχίζει να φέρει φορτία στη

μεταλυγισμική περιοχή [12]. Η δυσκαμψία της κατασκευής μειώνεται, όμως το φορτίο μπορεί ακόμα να αυξηθεί. Η διαφορά μεταξύ του ολικού λυγισμού και του τοπικού λυγισμού απεικονίζεται στην **Εικόνα 2.5**.



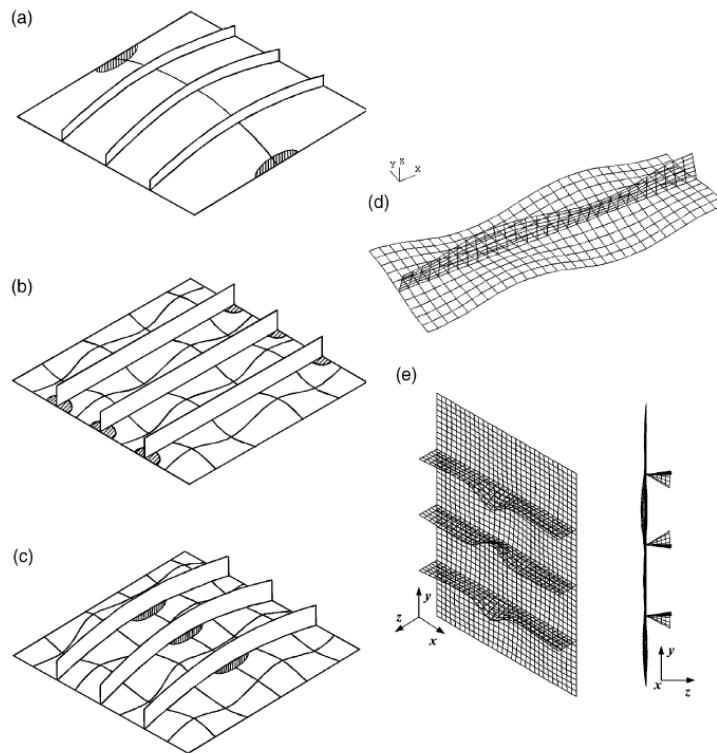
Εικόνα 2.5: Ολικός και τοπικός λυγισμός (προσαρμοσμένο από [13])

Ωστόσο, μπορεί να επέλθει ολική αστοχία, είτε λόγω κατάρρευσης ολόκληρης της δομής, είτε λόγω τοπικών φαινομένων. Οι βασικοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να επέλθει ολική αστοχία μιας ενισχυμένης δομής, μπορεί να κατηγοριοποιηθεί στις εξής έξι ομάδες [14].

- **Τρόπος 1:** Ολική αστοχία έπειτα από ολικό λυγισμό του ελάσματος και των ενισχυτικών δομών ως ένα (βλέπε **Εικόνα 2.6a**).
- **Τρόπος 2:** Ολική αστοχία που προκαλείται από το έλασμα λόγω της πλαστικής διαρροής στις γωνίες μεταξύ του ελάσματος και των ενισχυτικών στοιχείων (βλέπε **Εικόνα 2.6b**).
- **Τρόπος 3:** Ολική αστοχία που προκαλείται από το έλασμα λόγω της πλαστικής διαρροής του συνδυασμού ελάσματος-ενισχυτικών στοιχείων στο μεσοδιάστημα τους (βλέπε **Εικόνα 2.6c**).
- **Τρόπος 4:** Ολική αστοχία που προκαλείται από τον τοπικό λυγισμό του κορμού των ενισχυτικού στοιχείου (βλέπε **Εικόνα 2.6d**).
- **Τρόπος 5:** Ολική αστοχία που προκαλείται από το στρεπτοκαμπτικό λυγισμό του ενισχυτικού στοιχείου (βλέπε **Εικόνα 2.6e**).

Οι τρόποι αστοχίας 2-5 συμβαίνουν όταν η δυσκαμψία των ενισχυτικών στοιχείων είναι σχετικά μεγάλη, έτσι ώστε να παραμένουν ευθύγραμμοι έως ότου να επέλθουν τοπικά φαινόμενα λυγισμού στο έλασμα. Κυρίαρχος παράγοντας για τον καθορισμό της

συμπεριφοράς των ενισχυμένων δομών σε αυτούς τους τρόπους αποτυχίας είναι η γεωμετρία και το σχήμα των ενισχυτικών δομών. Για παράδειγμα, αν ο λόγος του ύψους προς πάχους των ενισχυτικών δομών είναι μεγάλος, παρατηρούνται κυρίως οι τρόποι αστοχίας 4 και 5.



Εικόνα 2.6: Τρόποι αποτυχίας ενισχυμένης δομής σε λυγισμό [14]

2.3 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Στην παρούσα ενότητα πραγματοποιείται βιβλιογραφική ανασκόπηση επί του θέματος του λυγισμού και της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς ενισχυμένων κελυφών σε συνδυασμό αξονικής θλίψης και εντός επιπέδου διάτμησης. Η βιβλιογραφική ανασκόπηση είναι σημαντική για τη μελέτη της προϋπάρχουσας έρευνας και την κατανόηση των μεθόδων για την ανάλυση του προβλήματος. Συγκεκριμένα, έχει πραγματοποιηθεί εκτενής έρευνα στην ευστάθεια των ενισχυμένων κελυφών, κυρίως σε απλές φορτίσεις και δευτερευόντως σε σύνθετες φορτίσεις. Οι τρεις διαφορετικές μέθοδοι με τις οποίες προσεγγίζεται το πρόβλημα της ευστάθειας ενισχυμένων δομών είναι αναλυτικές (ή ημιαναλυτικές), αριθμητικές (πεπερασμένων στοιχείων) και πειραματικές. Περισσότερη έμφαση δίνεται στις μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων και στις πειραματικές μεθόδους, εφόσον τα συμπεράσματα που προκύπτουν από αυτές είναι σημαντικά για την ανάπτυξη των αριθμητικών μοντέλων που

παρουσιάζονται στα **Κεφάλαια 6 και 7**. Επιπλέον, λόγω του ότι οι επίπεδες πλάκες μπορούν να θεωρηθούν ειδική κατηγορία κελυφών, συμπεριλαμβάνονται και αναφορές για ενισχυμένες πλάκες.

2.3.1 Αναλυτικές (ή ημιαναλυτικές) μέθοδοι

Η ανάπτυξη αναλυτικών μεθόδων για τον υπολογισμό του λυγισμού ενισχυμένων δομών είναι πολύπλοκη, και οι έρευνες εστιάζουν κυρίως στην εύρεση του φορτίου στο οποίο επέρχεται ο τοπικός λυγισμός. Παρατηρείται επιπλέον πως η πλειονότητα των δημοσιεύσεων μελετά ενισχυμένα κελύφη που αποτελούνται από σύνθετα υλικά, υποδηλώνοντας την τάση της αεροναυπηγικής βιομηχανίας προς τη χρήση τέτοιων υλικών. Ως ημι-αναλυτικοί ορίζονται οι μέθοδοι ανάλυσης οι οποίοι συνδυάζουν αναλυτικές με αριθμητικές μεθόδους. Παρακάτω αναφέρονται οι σημαντικότερες μέθοδοι που έχουν αναπτυχθεί.

Οι Arnold και Parekh [15] χρησιμοποίησαν μια θεωρητική/αναλυτική μέθοδο για την πρόβλεψη του λυγισμού, της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς και της τελικής αστοχίας σύνθετων πολύστρωτων ενισχυμένων πλακών και κελυφών με μικρή καμπυλότητα. Τα ενισχυτικά στοιχεία θεωρούνται πως είναι τοποθετημένα στις άκρες του ενισχυμένου κελύφους. Το πρώτο κρίσιμο φορτίο λυγισμού υπολογίζεται με βάση τη γραμμική ελαστικότητα, ενώ η μεταλυγισμική συμπεριφορά λαμβάνει υπόψη τις μη-γραμμικότητες του υλικού. Τα αποτελέσματα τους συγκρίνονται με πειραματικά δεδομένα και τα κυριότερα συμπεράσματα της έρευνας τους είναι πως η αύξηση της καμπυλότητας (δηλαδή η μείωση της ακτίνας) αυξάνει την κρίσιμη τάση λυγισμού και μειώνεται η μεταλυγισμική δυσκαμψία του ενισχυμένου κελύφους.

Οι Jaunky, Knight και Ambur [16] χρησιμοποίησαν μια βελτιωμένη προσέγγιση smeared stiffener, συνυπολογίζοντας την επίδραση του ελάσματος και των ενισχυτικών στοιχείων για το λυγισμό σύνθετων ενισχυμένων πλακών σε σχήμα πλέγματος (grid-stiffened composite panels). Κατά την προσέγγιση smeared stiffener, το ενισχυμένο πάνελ μετατρέπεται μαθηματικά σε ένα επίπεδο πάνελ ομοιόμορφου πάχους χωρίς ενισχύσεις με ισοδύναμες ορθοτροπικές δυσκαμψίες. Έπειτα χρησιμοποιείται η ενεργειακή μέθοδος Rayleigh-Ritz για την εξαγωγή των κρίσιμων φορτίων λυγισμού. Τονίζεται βέβαια, πως η προσέγγιση smeared stiffener εφαρμόζεται γενικά σε ενισχυμένα πάνελ στα οποία το φορτίο στο οποίο παρατηρούνται φαινόμενα τοπικού λυγισμού είναι ίσο ή μεγαλύτερο από αυτό του ολικού

λυγισμού. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με αριθμητικά μοντέλα και συμβατικές προσεγγίσεις και παρατηρείται συμφωνία μεταξύ των δύο. Η σύγκλιση των αποτελεσμάτων αυτών παρατηρείται και για ενισχυμένες πλάκες με μόνο διαμήκεις ενισχύσεις, αλλά και με ενισχύσεις στις δύο διευθύνσεις.

Ο Byklum [17] χρησιμοποίησε ημι-αναλυτική μέθοδο για τον υπολογισμό της τελικής αστοχίας αλουμινένιων και χαλύβδινων ενισχυμένων πλακών σε σύνθετη εντός-επιπέδου φόρτιση. Κατασκευάστηκαν δύο ξεχωριστά μοντέλα για τον τοπικό λυγισμό ενισχυμένων πλακών· ένα για ενισχύσεις με ανοιχτό προφύλ και ένα για κλειστό. Για τον ολικό λυγισμό, η ενισχυμένη πλάκα θεωρήθηκε ως επίπεδη πλάκα με γενική ανισότροπη δυσκαμψία. Οι τελικές σχέσεις ισορροπίας βρίσκονται με αναλυτικές σχέσεις, ενώ η λύση τους πραγματοποιείται με επαναληπτική αριθμητική μέθοδο. Οι υπολογισμοί συγκρίνονται με αποτελέσματα από αντίστοιχα αριθμητικά μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων που βασίζονται σε στοιχεία κελύφους (shell elements) και υπάρχει απόλυτη συμφωνία για την ελαστική περιοχή. Ωστόσο, η εκτίμηση της τελικής αστοχίας χρησιμοποιώντας ως κριτήριο τη διαρροή του υλικού είναι συντηρητική.

Οι Vescovini και Bisagni [18] ανέπτυξαν μια ημι-αναλυτική διατύπωση για τον υπολογισμό του λυγισμού σύνθετων ενισχυμένων επίπεδων και κυρτών κελυφών. Ο σκοπός τους είναι η κατασκευή μοντέλου για τη βελτιστοποίηση της γεωμετρίας, του ελάσματος, των ενισχυτικών στοιχείων, των υλικών, καθώς και του σχήματος των ενισχυτικών στοιχείων. Η διαφορά με άλλες δημοσιεύσεις είναι πως λαμβάνεται υπόψη και ο λυγισμός των ενισχυτικών στοιχείων. Η εκτός επιπέδου μετατόπιση αντιπροσωπεύεται με τριγωνομετρικές συναρτήσεις μορφής, ενώ οι εξισώσεις εξάγονται από την εφαρμογή της αρχής ελάχιστης δυναμικής ενέργειας και της μεθόδου Rayleigh – Ritz. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με αυτά από ένα αντίστοιχο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων που βασίζεται σε στοιχεία κελύφους και η απόκλιση μεταξύ των δύο είναι μικρότερη του 6%, ενώ η προτεινόμενη μέθοδος είναι 100-500 φορές πιο γρήγορη υπολογιστικά.

Οι Weber και Middendorf [19] διερεύνησαν τον τοπικό λυγισμό σε σύνθετα ενισχυμένα κελύφη, όπου οι ενισχύσεις έχουν σχήμα πλέγματος. Τα διαφορετικά σχήματα που εξετάστηκαν είναι ορθογώνια, ισοσκελή τριγωνικά, ρομβικά και τρι-εξαγωνικά. Αρχικά χρησιμοποιούνται οι μη-γραμμικές σχέσεις παραμορφώσεων – μετατοπίσεων με τις παραδοχές Kirchhoff-Love με μηδενική εγκάρσια διάτμηση. Έπειτα χρησιμοποιείται το ενεργειακό

κριτήριο Trefftz για τη λύση της εξίσωσης $\delta P = 0$. Η αλληλεπίδραση μεταξύ δύο γειτονικών περιοχών ελάσματος ενσωματώνεται μαθηματικά θεωρώντας ελαστικές οριακές συνθήκες σε καθεμία από τις περιοχές. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν για τον τοπικό λυγισμό συμφωνούν με αυτά αντίστοιχων μοντέλων πεπερασμένων στοιχείων της βιβλιογραφίας, ενώ αποκλίσεις παρουσιάζονται μόνο στα τρι-εξαγωνικά πλέγματα.

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την ανασκόπηση των αναλυτικών ή ημι-αναλυτικών μεθόδων είναι:

- Είναι ευρεία η χρήση προσεγγιστικών ενεργειακών και αριθμητικών μεθόδων για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων.
- Οι μέθοδοι αυτοί μπορούν να υπολογίσουν με ικανοποιητική ακρίβεια τα κρίσιμα φορτία λυγισμού και τις ιδιομορφές. Ωστόσο, οι περισσότερες από αυτές περιορίζονται σε απλές γεωμετρίες των ενισχυτικών δοκών και δεν λαμβάνουν υπόψη τις αρχικές ατέλειες. Σημειώνεται πως οι ενισχυμένες δομές, εκτός του κελυφους και των ενισχυτικών στοιχείων, έχουν και κλιπ διάτμησης/εφελκυσμού, ήλους και εγκοπές, τα οποία δεν μπορούν να ενσωματωθούν εύκολα στην ανάλυση. Επομένως, χρησιμοποιούνται κυρίως για προκαταρκτικό σχεδιασμό των ενισχυμένων δομών.
- Η αεροναυπηγική βιομηχανία τείνει προς την έρευνα ενισχυμένων κελυφών αποτελούμενα από σύνθετα υλικά.

Συνεπώς, για τον ακριβέστερο υπολογισμό του φαινομένου του λυγισμού σε πολύπλοκες δομές χρησιμοποιούνται αριθμητικές και πειραματικές μέθοδοι.

2.3.2 Αριθμητικές μέθοδοι

Παρακάτω αναφέρονται οι δημοσιεύσεις με τα σημαντικότερα αποτελέσματα για την ανάλυση ενισχυμένων κελυφών σε απλή και σύνθετη φόρτιση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Σε όλες τις περιπτώσεις, διεξάγονται πειράματα και έπειτα αναπτύσσονται αριθμητικά μοντέλα, ώστε να επιβεβαιωθούν τα αποτελέσματα τους. Τα συμπεράσματα είναι χρήσιμα για τη μετέπειτα ανάπτυξη των αριθμητικών μοντέλων στα **Κεφάλαια 6 και 7**.

Η πειραματική διάταξη του DLR (βλ. **Υποενότητα 2.3.3**) έχει χρησιμεύσει για την επιβεβαίωση των αριθμητικών μοντέλων που παρουσιάζονται στις δημοσιεύσεις [20], [21] και [22]. Σε όλες τις περιπτώσεις, τα αποτελέσματα των αριθμητικών μοντέλων έχουν ελάχιστη

απόκλιση με αυτών των πειραματικών. Σε όλα τα αριθμητικά μοντέλα χρησιμοποιείται contact analysis με εισαγωγή τεχνητής απόσβεσης για να μοντελοποιηθεί η σύνδεση των ενισχυτικών στοιχείων με το κέλυφος, καθώς και για τη μοντελοποίηση των οριακών συνθηκών. Τονίζεται πως η μεγαλύτερη δυσκολία στην επιβεβαίωση των αριθμητικών μοντέλων βρίσκεται στην προσομοίωση της τριβής που εισάγεται από τη διάταξη εφαρμογής διατμητικών φορτίων.

Οι Μο και λοιποί [23] διεξήγαγαν πειραματική και αριθμητική ανάλυση σε σύνθετα ενισχυμένα κελύφη υπό θλιπτική φόρτιση. Τα ενισχυτικά στοιχεία αποτελούνταν από πέντε διαμήκη στοιχεία σχήματος καπέλου. Η ανάλυση πραγματοποιήθηκε σε τέσσερα διαφορετικά ενισχυμένα κελύφη, τα οποία παρουσίαζαν διαφορά στην ακτίνα, το πάχος του ελάσματος και την απόσταση μεταξύ των ενισχυτικών δοκών. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως η απόσταση μεταξύ των ενισχυτικών στοιχείων επηρεάζει τη συμπεριφορά των ενισχυμένων κελυφών στο λυγισμό, καθώς η μικρότερη απόσταση ανάμεσα σε αυτά, αυξάνει το κρίσιμο σημείο λυγισμού. Επίσης, τα πάνελ με μικρότερη ακτίνα (άρα και μεγαλύτερη καμπυλότητα) παρουσίαζαν μεγαλύτερη δυσκαμψία, μεγαλύτερα κρίσιμα φορτία λυγισμού, καθώς και πιο ευσταθή συμπεριφορά. Τα αριθμητικά μοντέλα είχαν πανομοιότυπα αποτελέσματα με αυτά του πειράματος. Πραγματοποιήθηκαν αναλύσεις με και χωρίς αρχικές ατέλειες και αποδείχθηκε ότι η μη εισαγωγή αρχικών ατελειών καταλήγει σε μεγαλύτερα φορτία αστοχίας από αυτά του πειράματος. Απεναντίας, η εισαγωγή των πρώτων δέκα γραμμικών ιδιομορφών ως αρχική ατέλεια, επηρεάζει τη συμπεριφορά του αριθμητικού μοντέλου και πλέον συμφωνούν τα αποτελέσματα με αυτά του πειράματος.

Οι Murphy και λοιποί [24] [25] διερεύνησαν την υλοποίηση αριθμητικών μοντέλων για την ακριβή πρόβλεψη του λυγισμού και της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς αλουμινένιων ενισχυμένων πάνελ ατράκτου αεροσκαφών. Τα αριθμητικά μοντέλα επιβεβαιώθηκαν με πειράματα που διεξήχθησαν από τους ίδιους. Παρά το γεγονός ότι δεν μελέτησαν τη σύνθετη φόρτιση θλίψης/διάτησης, τα συμπεράσματα τους σχετικά με τις παραμέτρους που επηρεάζουν την ακρίβεια των μοντέλων είναι σημαντικά. Όσον αφορά τη θλιπτική φόρτιση, υποδεικνύεται η χρήση τουλάχιστον τεσσάρων στοιχείων ανά μισή κυματομορφή, με χρήση τετραγωνικών στοιχείων κελύφους. Για τη διατμητική φόρτιση, απαιτούνται περισσότερα στοιχεία στο έλασμα της κατασκευής σε σχέση με αυτή της θλίψης, καθώς οι κυματομορφές που σχηματίζονται είναι μικρότερες. Όσον αφορά τη μοντελοποίηση της επαφής μεταξύ των ενισχυτικών στοιχείων και του ελάσματος, εξάγεται το συμπέρασμα πως για την ακριβή

πρόβλεψη του λυγισμού, το ενισχυμένο πάνελ δεν μπορεί να κατασκευαστεί ως ακέραιη κατασκευή. Για αυτόν το λόγο, είναι απαραίτητη η χρήση gap, spring ή beam στοιχείων για τη μοντελοποίηση της επαφής και των ήλων. Οι διαφορές παρατηρούνται κυρίως στην μεταλυγισμική περιοχή. Ωστόσο, ο υπολογιστικός χρόνος αυξάνεται κατά περίπου 40%. Επιπλέον, οι αρχικές ατέλειες μπορούν να επηρεάσουν σημαντικά τη μεταλυγισμική περιοχή και την πρόβλεψη του φορτίου αστοχίας. Επίσης, λόγω του γεγονότος ότι στη διατμητική φόρτιση ένα μέρος της κατασκευής καταπονείται σε θλίψη και ένα άλλο σε εφελκυσμό, είναι απαραίτητη η ενσωμάτωση πλαστικών μοντέλων του υλικού και στις δύο καταπονήσεις. Τέλος, για τη σύγκλιση των μοντέλων χρησιμοποιείται η μέθοδος Newton-Raphson με τεχνητή απόσβεση.

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την ανασκόπηση των αριθμητικών μεθόδων είναι:

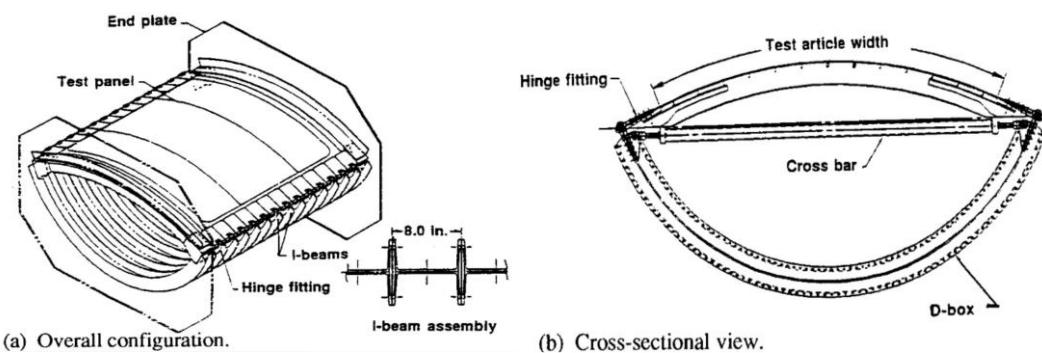
- Στα αριθμητικά μοντέλα που αναπτύσσονται στο **Κεφάλαιο 6** και **7** αναμένονται αποκλίσεις, κυρίως στη μεταλυγισμική περιοχή. Οι αποκλίσεις οφείλονται στο γεγονός πως η σύνδεση ελάσματος – ενισχυτικών στοιχείων μοντελοποιείται ως ακέραια κατασκευή. Επιπλέον, οι άγνωστες ατέλειες της κατασκευής μπορούν να επιδράσουν στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων.
- Η χρήση μοντέλων επαφής για τη μοντελοποίηση της σύνδεσης ελάσματος-ενισχυτικών στοιχείων συνδυάζεται στις περισσότερες περιπτώσεις με χρήση τεχνητής απόσβεσης.

2.3.3 Πειραματικές μέθοδοι

Για τη μελέτη του λυγισμού και της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς ενισχυμένων κελυφών έχουν αναπτυχθεί διάφορες πειραματικές μέθοδοι. Ιδίως στην αεροναυπηγική βιομηχανία, η χρήση πειραματικών μεθόδων για την επιβεβαίωση της συμπεριφοράς διάφορων σημαντικών δομών είναι απαραίτητη. Επιπλέον, χρησιμοποιούνται για την επιβεβαίωση των αναλυτικών και αριθμητικών μοντέλων που αναπτύσσονται. Επομένως, στην παρούσα υποενότητα θα πραγματοποιηθεί καταγραφή των σημαντικότερων πειραματικών μεθόδων για τη μελέτη του λυγισμού ενισχυμένων κελυφών σε συνδυασμένη θλίψη και διάτμηση. Η κατανόηση των οριακών συνθηκών έχει μεγάλη χρησιμότητα για την επιβολή τους στα αριθμητικά μοντέλα που αναπτύσσονται στο **Κεφάλαιο 6** και **7**.

Πειραματική διάταξη NASA D-BOX

Η NASA έχει αναπτύξει την πειραματική διάταξη D-Box (D-Box test fixture) για τη μελέτη της συμπεριφοράς ενισχυμένων κελυφών σε συνδυασμένα μηχανικά φορτία (θλίψη-διάτμηση) και εγκάρσια πίεση [3]. Επιπλέον, αναπτύσσονται αριθμητικά μοντέλα και επιβεβαιώνονται χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των πειραμάτων. Η διάταξη D-Box φαίνεται στην **Εικόνα 2.7**. Η διάταξη έχει κατασκευαστεί έτσι ώστε η εντατική κατάσταση στο ενισχυμένο κέλυφος να είναι όμοια με αυτή στο αντίστοιχο κυλινδρικό κέλυφος, καθώς έτσι προσομοιώνεται ακριβέστερα η συμπεριφορά του. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω δοκών σχήματος I, οι οποίες τοποθετούνται ανάμεσα στις συνδέσεις των άκρων του πάνελ, όπως φαίνεται στην **Εικόνα 2.7**. Οι δοκοί αυτοί περιορίζουν τις ανεπιθύμητες παραμορφώσεις. Σημαντικό είναι το γεγονός πως η διάταξη έχει χαμηλή δυσκαμψία και έτσι η συνολική συμπεριφορά του πάνελ δεν επηρεάζεται από αυτή.

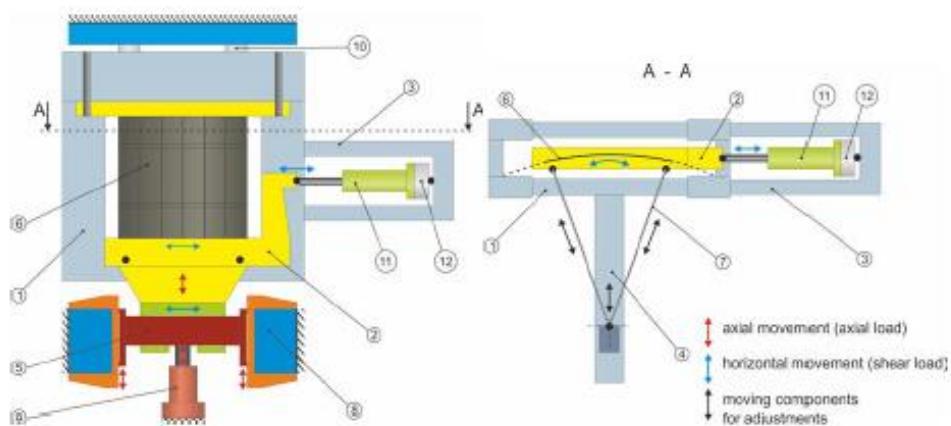


Εικόνα 2.7: Πειραματική διάταξη D-BOX [3]

Πειραματική διάταξη DLR

Η DLR [20] έχει αναπτύξει πειραματική διάταξη για τη μελέτη της συμπεριφοράς ενισχυμένων ισότροπων/σύνθετων κελυφών σε θλίψη, διάτμηση και το συνδυασμό τους και απεικονίζεται στην **Εικόνα 2.8**. Οι φορτίσεις της θλίψης και διάτμησης επιβάλλονται ανεξάρτητα η μία από την άλλη, μέσω δύο ενεργοποιητών. Τα δύο άκρα του κελύφους εγκιβωτίζονται σε μήκος 120mm για την ομοιόμορφη μεταφορά των φορτίων. Το ένα άκρο περιορίζεται σε όλους τους βαθμούς ελευθερίας, ενώ στο άλλο εισάγεται η θλίψη αξονικά και η διάτμηση περιφερειακά (μέσω του οριζόντιου ενεργοποιητή). Ωστόσο, τα δύο ευθύγραμμα άκρα του ενισχυμένου κελύφους αφήνονται ελεύθερα. Η συνθήκη αυτή μειώνει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων

συγκριτικά με τις πραγματικές συνθήκες φόρτισης σε ένα ενισχυμένο πάνελ αεροσκάφους. Όμως, τα πειράματα χρησιμοποιούνται για τη μετέπειτα επιβεβαίωση αριθμητικών μοντέλων και επομένως η χρήση οριακών συνθηκών στα ευθύγραμμα άκρα θα εισήγαγε αδιευκρίνιστη τριβή, η οποία θα δυσκολευει την επιβεβαίωση τους. Επιπλέον, η εισαγωγή διατμητικών φορτίων στα ευθύγραμμα άκρα θα αύξανε την πολυπλοκότητα και το κόστος της κατασκευής, καθώς αυτά θα ενίσχυαν την αξονική δυσκαμψία της κατασκευής και θα έπρεπε να ακολουθηθεί η κυκλική κίνηση του κελύφους.



Εικόνα 2.8: Πειραματική διάταξη DLR [20]

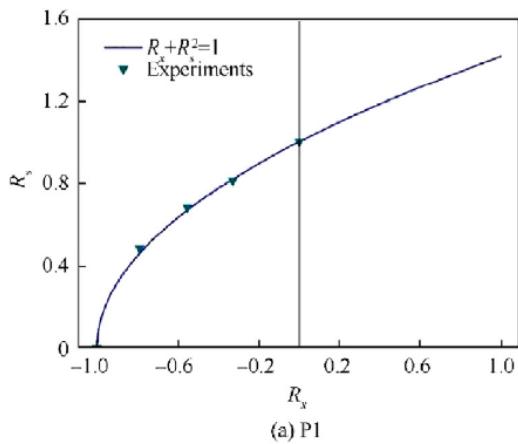
Πειραματική διάταξη της Aircraft Strength Research Institute of China

Οι Wang και λοιποί [26] εξήγαγαν σημαντικά συμπεράσματα για τις καμπύλες αλληλεπίδρασης ορθότροπων ενισχυμένων επίπεδων πλακών σε σύνθετη θλιπτική/διατμητική φόρτιση. Η πειραματική διάταξη που χρησιμοποιούν είναι όμοια με αυτή της DLR, με τη διαφορά πως οι εγκάρσιες πλευρές περιορίζονται ως προς την εκτός επιπέδου μετατόπιση. Η πειραματική διάταξη φαίνεται στην Εικόνα 2.9.

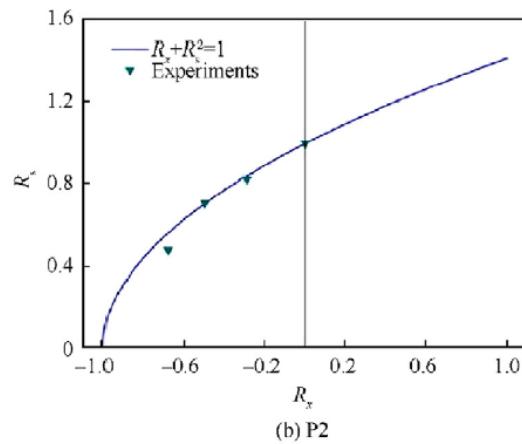


Εικόνα 2.9: Πειραματική διάταξη της Aircraft Strength Research Institute of China [26]

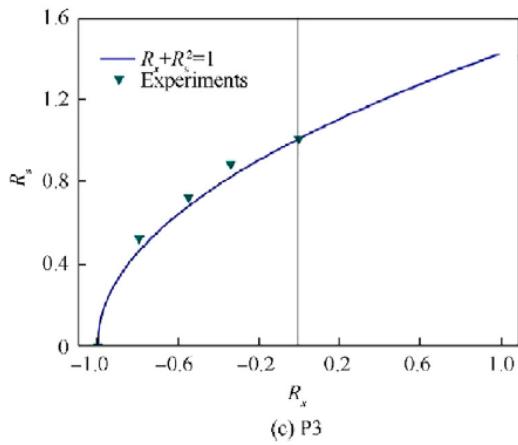
Πραγματοποιήθηκε η κατασκευή τεσσάρων διαφορετικών πάνελ, τα οποία διαφέρουν ως προς τον αριθμό των στρώσεων του ελάσματος και την απόσταση μεταξύ των διαμηκών ενισχυτικών στοιχείων. Σκοπός των πειραμάτων ήταν η σύγκριση των εξαγόμενων καμπυλών αλληλεπίδρασης με τη θεωρητική καμπύλη $R_s^2 + R_c = 1$, όπου R_s και R_c ο λόγος της εφαρμοζόμενης τάσης προς την κρίσιμη τάση λυγισμού για τη διάτμηση και θλίψη αντίστοιχα. Οι δύο καμπύλες συμφωνούν με μεγάλη ακρίβεια για τον τοπικό λυγισμό των ενισχυμένων πάνελ. Οι συγκρίσεις απεικονίζονται στην **Εικόνα 2.10**. Ανάλογη σύγκριση θα πραγματοποιηθεί στο **Κεφάλαιο 7** για ενισχυμένα κελύφη.



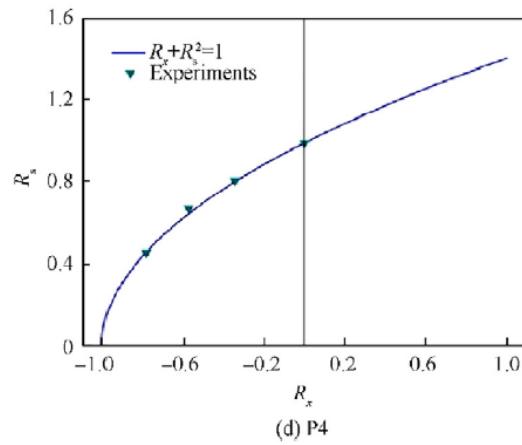
(a) P1



(b) P2



(c) P3



(d) P4

Εικόνα 2.10: Σύγκριση πειραματικών και θεωρητικών καμπυλών αλληλεπίδρασης [26]

3 Θεωρία κελυφών

3.1 Εισαγωγή

Τα κελύφη έχουν καθοριστικό ρόλο στην κατασκευή των επιμέρους δομικών στοιχείων των σύγχρονων αεροσκαφών, κυρίως στη δομή της ατράκτου και της πτέρυγας. Τα δομικά στοιχεία των αεροσκαφών χαρακτηρίζονται ως λεπτότοιχα, πράγμα που σημαίνει πως το πάχος των δομών αυτών είναι σημαντικά μικρότερο από τις άλλες διαστάσεις τους. Έτσι, η πλειονότητα των δομών αυτών μπορεί να αναλυθεί ως μια λεπτότοιχη πλάκα ή κέλυφος. Η σημασία των κελυφών στην αεροναυπηγική βιομηχανία (και όχι μόνο) έχει επιφέρει εκτενή ερευνητική προσπάθεια για την ανάπτυξη εξισώσεων που περιγράφουν τη συμπεριφορά τους. Από τα τέλη του 19^ο αιώνα, έχει δημοσιευτεί πληθώρα θεωριών κελυφών που στοχεύουν στον υπολογισμό της συμπεριφοράς των κελυφών και της εντατικής τους κατάστασης, μέσα από μια σειρά παραδοχών, οι οποίες στηρίζονται συχνά στις διαδεδομένες παραδοχές Kirchhoff-Love που συναντώνται στις λεπτότοιχες πλάκες. Στο παρόν κεφάλαιο τονίζεται η σημασία των κελυφών και πραγματοποιείται βιβλιογραφική ανασκόπηση για τις διάφορες θεωρίες κελυφών. Επιπλέον, παρουσιάζονται οι εξισώσεις ισορροπίας γενικευμένων κελυφών σύμφωνα με τη θεωρία των Donnel – Mushtari – Donnel, λόγω της απλότητας τους και της ευρείας χρήσης τους.

3.2 Τα κελύφη ως δομικά στοιχεία κατασκευών

Τα κελύφη ως δομικά στοιχεία στις κατασκευές διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στη μηχανική και χρησιμοποιούνται κυρίως από αεροναυπηγούς, μηχανολόγους, ναυπηγούς, πολιτικούς και αρχιτέκτονες μηχανικούς. Επιπλέον, δομές κελυφών συναντώνται στη φύση και στο πεδίο της εμβιομηχανικής σε διάφορες μορφές, όπως οι οφθαλμοί, το κρανίο, τα αυγά, τα φύλλα κλπ. [27]. Όσον αφορά την αεροναυπηγική, τα κελύφη έχουν πρωταγωνιστικό ρόλο στις κατασκευές, καθώς χρησιμοποιούνται ενισχυμένα κελύφη για την κατασκευή της ατράκτου και των πτερύγων των αεροσκαφών, καθώς και για την εξωτερική επιφάνεια των πυραύλων και βλημάτων. Η ευρεία χρήση τους στη μηχανική δικαιολογείται από τα ακόλουθα πλεονεκτήματα [28].

- Αποτελεσματικότητα στη μεταφορά των επιβαλλόμενων φορτίων
- Υψηλός λόγος αντοχής προς βάρος
- Υψηλή δυσκαμψία

Εντούτοις, τα κελύφη παρουσιάζουν προβλήματα ευστάθειας λόγω της γεωμετρίας τους, η οποία χαρακτηρίζεται από μικρό πάχος έναντι των άλλων διαστάσεων. Επομένως, είναι απαραίτητο να ληφθεί υπόψη ο λυγισμός στο σχεδιασμό δομών κελύφους για τον υπολογισμό της συνολικής συμπεριφοράς της κατασκευής.

3.3 Ανασκόπηση θεωριών κελυφών

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα πραγματοποιηθεί σύντομη βιβλιογραφική ανασκόπηση στην ανάπτυξη των θεωριών κελυφών. Σύμφωνα με την NASA [29] οι θεωρίες κελυφών μπορούν να ταξινομηθούν σύμφωνα με τις θεμελιώδεις θεωρίες ελαστικότητας τις οποίες προσεγγίζουν:

1. Θεωρία γραμμικής (κλασσικής) ελαστικότητας
2. Μη-γραμμική ελαστικότητα
3. Ανελαστικότητα

Οι θεωρίες κελυφών που βασίζονται στη γραμμική ελαστικότητα υπολογίζουν ικανοποιητικά τις τάσεις και παραμορφώσεις για κελύφη που υπόκεινται σε μικρές γραμμικές μετατοπίσεις. Επιπλέον, είναι χρήσιμες και για τη λύση κάποιων προβλημάτων ευστάθειας των κελυφών. Οι θεωρίες κελυφών που βασίζονται στη μη-γραμμική ελαστικότητα είναι χρήσιμες όταν η κατασκευή υπόκειται σε πεπερασμένες, μεγάλες μετατοπίσεις. Οι θεωρίες αυτές απαιτούνται για τη λύση κελυφών με μικρή καμπυλότητα (shallow shells), για προβλήματα ευστάθειας και λυγισμού, καθώς και για εξαιρετικά ελαστικές μεμβράνες. Τα κελύφη που ανήκουν στο εύρος της ανελαστικότητας είναι εκτός του ενδιαφέροντος της παρούσας διπλωματικής και δεν θα διερευνηθούν περαιτέρω.

Επιπρόσθετα, οι θεωρίες κελυφών μπορούν να ταξινομηθούν με βάση τις υποθέσεις που χρησιμοποιούν. Οι υποθέσεις σχετίζονται με την εισαγωγή όρων μεγαλύτερης τάξης, έτσι ώστε να περιλαμβάνονται στην εντατική κατάσταση του κελύφους οι καμπτικές τάσεις, καθώς και οι διατμητικές. Συγκεκριμένα, οι πιο σημαντικές υποθέσεις είναι:

- Προσέγγιση πρώτης τάξης θεωρίας κελυφών
- Προσέγγιση δεύτερης τάξης θεωρίας κελυφών

- Θεωρία κελυφών διατμητικής παραμόρφωσης
- Θεωρία κελυφών μεμβράνης (ή και μηδενικής τάξης)

Ο κύριος σκοπός των θεωριών κελυφών είναι η αναγωγή των εξισώσεων ελαστικότητας από τρεις σε δύο διαστάσεις – οι παραμορφώσεις του κελύφους ορίζονται από τις παραμορφώσεις και την αλλαγή της καμπυλότητας στη μέση επιφάνεια του [30]. Η προσέγγιση πρώτης και δεύτερης τάξης της θεωρίας κελυφών ονομάζονται διαφορετικά παραδοχές Kirchhoff – Love και έχουν ιδιαίτερη σημασία για τη θεωρία κελυφών, καθώς η πλειονότητα τους στηρίζεται σε αυτές ή χρησιμοποιεί τροποποιήσεις των παραδοχών τους. Οι παραδοχές αυτές αναπτύχθηκαν από τον Love [31] για την απλοποίηση των σχέσεων παραμορφώσεων-μετατοπίσεων και κατά συνέπεια των σχέσεων τάσεων-παραμορφώσεων, ενώ ο Kirchhoff εισήγαγε προσεγγίσεις που αφορούσαν τις καμπτικές τάσεις. Οι παραδοχές της πρώτης τάξης θεωρίας κελυφών είναι οι εξής [32]:

1. *To πάχος του κελύφους είναι αμελητέο σε σύγκριση με την ελάχιστη ακτίνα καμπυλότητας της μέσης επιφάνειας του.* Επομένως, οι όροι Z/r_x και Z/r_y είναι αμελητέοι σε σύγκριση με τη μονάδα, οδηγώντας στην εξίσωση των εκτός επιπέδου διατμητικών δυνάμεων και των καμπτικών ροπών. Δηλαδή, $Q_{xy} = Q_{yx}$ και $M_{xy} = M_{yx}$.
2. *Oι παραμορφώσεις και μετατοπίσεις που προκύπτουν στο κέλυφος είναι μικρές.* Από αυτήν την παραδοχή συνεπάγεται πως το γινόμενο των παραμορφώσεων και μετατοπίσεων είναι αμελητέο, διασφαλίζοντας τη γραμμικότητα των εξισώσεων.
3. *Ένα ευθύγραμμο τμήμα αρχικά κάθετο στο μη-παραμορφωμένο μέσο επίπεδο παραμένει ευθύγραμμο και κάθετο στο παραμορφωμένο μέσο επίπεδο.* Η παραδοχή αυτή είναι ανάλογη των υποθέσεων Navier για δοκούς, η οποία οδηγεί στη θεωρία δοκών Bernoulli-Euler και συνεπάγεται πως οι διατμητικές παραμορφώσεις, καθώς και οι εκτός επιπέδου διατμητικές δυνάμεις είναι μηδενικές.
4. *Η συνιστώσα της τάσης που ενεργεί κάθετα στη μέση επιφάνεια του κελύφους είναι αμελητέα.*

Οι παραδοχές αυτές είναι συμβατές με τις τη θεωρία της γραμμικής ελαστικότητας. Η προσέγγιση δεύτερης τάξης αφαιρεί την τέταρτη παραδοχή της πρώτης προσέγγισης, καθώς θεωρείται πλέον πως η κάθετη συνιστώσα της τάσης που προκαλείται από τις καμπτικές ροπές, και κατά συνέπεια οι αντίστοιχες μετατοπίσεις, δεν είναι πλέον αμελητέες.

Παρατηρείται πως οι προσεγγίσεις της πρώτης και της δεύτερης τάξης της θεωρίας κελυφών δεν περιλαμβάνει διατμητικές παραμορφώσεις, λόγω της τρίτης παραδοχής. Τροποποιώντας τη τρίτη παραδοχή, έτσι ώστε το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος αρχικά κάθετο στο μη-παραμορφωμένο μέσο επίπεδο να παραμένει κάθετο στο παραμορφωμένο μέσο επίπεδο, αλλά να μην είναι αμετάβλητο, εισάγονται οι επιδράσεις της διατμητικής παραμόρφωσης.

Η θεωρία κελυφών μεμβράνης (ή μηδενικής τάξης) αγνοεί τους όρους που εισάγονται από τις καμπτικές ροπές και επομένως η εντατική κατάσταση του κελύφους χαρακτηρίζεται μόνο από τις εντός-επιπέδου παραμορφώσεις [33].

3.3.1 Πιθανές εντατικές καταστάσεις κελυφών

Οι θεωρίες κελυφών μπορούν επιπλέον να ταξινομηθούν ανάλογα την εντατική κατάσταση την οποία επιδιώκουν να προσεγγίσουν. Οι πιθανές εντατικές καταστάσεις που μπορούν να υπάρξουν στα κελύφη, εξαρτάται από τη τάξη μεγέθους των καμπτικών τάσεων και τάσεων μεμβράνης. Στη γενικότερη περίπτωση, οι δύο προαναφερόμενες τάσεις έχουν την ίδια τάξη μεγέθους, όμως υπάρχουν τυπικές διακριτές περιπτώσεις στις οποίες:

1. Αν οι καμπτικές τάσεις είναι αμελητέες σε σύγκριση με τις τάσεις μεμβράνης, τότε η εντατική κατάσταση ονομάζεται μεμβράνης (ή απουσίας καμπτικών ροπών) [33]. Η θεωρία μεμβράνης μπορεί να προσεγγίσει με ικανοποιητική ακρίβεια την εντατική κατάσταση, ιδίως στις περιπτώσεις όπου το κέλυφος είναι κοντό και έχει μικρό πάχος, καθώς οι καμπτικές και στρεπτικές ροπές είναι αμελητέες [34]. Για παράδειγμα, ένα κενό σφαιρικό κέλυφος στο οποίο εφαρμόζεται ομοιόμορφη εσωτερική και/ή εξωτερική πίεση παρουσιάζει εντατική κατάσταση μεμβράνης.
2. Αν οι τάσεις μεμβράνης είναι αμελητέες σε σύγκριση με τις καμπτικές τάσεις, τότε η εντατική κατάσταση ονομάζεται καθαρά καμπτική.
3. Αν οι καμπτικές τάσεις και τάσεις μεμβράνης είναι της ίδιας τάξης, τότε η εντατική κατάσταση ονομάζεται μικτή. Διαφορετικά, ονομάζεται και «επίδραση πλευράς» ή edge effect διότι η συγκεκριμένη εντατική κατάσταση παρουσιάζεται συχνά πλησίον των πλευρών του κελύφους και των ενισχυτικών δομών. [28].

Βέβαια, η δεύτερη εντατική κατάσταση είναι επικίνδυνη για τα κελύφη και αποφεύγεται, καθώς το μικρό πάχος τους συνεπάγεται μικρή καμπτική δυσκαμψία, και επομένως

οποιαδήποτε καμπτική ροπή μπορεί να προκαλέσει σημαντικές καμπτικές τάσεις και μετατοπίσεις. Μερικοί τρόποι για να αποφευχθεί η προαναφερθείσα κατάσταση, είναι η εισαγωγή ενισχυτικών δομών και η επιλογή του κατάλληλου σχήματος κελυφους.

3.3.2 Ιστορική ανάδρομη στην ανάπτυξη των θεωριών κελυφών

Η σύντομη παρακάτω ιστορική αναδρομή περιλαμβάνει περιεχόμενο από αντίστοιχες βιβλιογραφικές ανασκοπήσεις επί του θέματος και περιλαμβάνει το έργα των Amabili & Alijani [35], Amabili [36], Samuelson & Eggwertz [37], Taha & Abbas [38] και Ventsel & Krauthammer [28]. Μεταξύ των θεωριών που αναφέρονται στην παραπάνω βιβλιογραφία, θα επιλεχθούν οι πιο σημαντικές και σχετικές με το πρόβλημα των αεροναυπηγικών κελυφών για αναφορά.

Γραμμικές θεωρίες κελυφών

Ο Love [31] ήταν ο πρώτος που πρότεινε αποτελεσματικές προσεγγίσεις για την απλοποίηση της γραμμικής θεωρίας κελυφών, χρησιμοποιώντας τις προαναφερόμενες προσεγγίσεις πρώτης τάξης. Μετέπειτα, ο Kirchhoff εισήγαγε προσεγγίσεις που αφορούσαν την έννοια του λεπτού κελύφους και τις μικρές μετατοπίσεις, οι οποίες είχαν χρησιμοποιηθεί στη θεωρία πλακών. Οι προσεγγίσεις αυτές ωστόσο, είναι ασαφείς όσον αφορά τον καθορισμό των «μικρών» όρων, καθώς σε ορισμένες περιπτώσεις υπήρχε παράλειψη κάποιων όρων και όχι κάποιων άλλων, παρόλο που ήταν της ίδιας τάξης.

Ο E. Reissner [39] πρότεινε γραμμική θεωρία κελυφών βασισμένη στη γραμμικότητα, κατά την οποία τροποποίησε κάποια μειονεκτήματα των παραδοχών πρώτης τάξης και Kirchhoff-Love. Βάση αυτών, κατάφερε να εξάγει τις σχέσεις παραμορφώσεων-μετατοπίσεων, τις εξισώσεις ισορροπίας καθώς και τις συνισταμένες τάσεις, αγνοώντας τους όρους της τάξης z/R .

Ο Sanders [40], χρησιμοποιώντας τις αρχικές προσεγγίσεις των Kirchhoff-Love και την ενεργειακή μέθοδο της αρχής των δυνατών έργων, δημιούργησε μια απλοποιημένη θεωρία κελυφών πρώτης τάξης. Το σημαντικό βήμα στη θεωρία αυτή, είναι πως λύθηκαν τα προβλήματα που αναφέρθηκαν σχετικά με τις προσεγγίσεις Kirchhoff-Love στην παράλειψη των «μικρών» όρων.

Ο Koiter [41] χρησιμοποιώντας τις παραδοχές του E. Reissner, κατάφερε να ξεπεράσει την ασυνέπεια που υπήρχε στους στρεπτικούς όρους. Η θεωρία αυτή είναι αρκετά σημαντική για την ανάλυση του λυγισμού κελυφών, καθώς ερεύνησε την ευαισθησία των κελυφών στις αρχικές παραμορφώσεις και χρησιμοποιήθηκε για την περαιτέρω ανάπτυξη της θεωρίας του λυγισμού των κελυφών.

Οι Lur'ye [42], Flügge [43] και Byrne [44] ανέπτυξαν ανεξάρτητα τη δεύτερης-τάξης προσέγγιση της θεωρίας των κελυφών. Οι γενικές σχέσεις και εξισώσεις της θεωρίας αυτής είναι βασισμένες στην άμεση εφαρμογή των παραδοχών Kirchhoff-Love σε συνδυασμό με τη θεώρηση μικρών μετατοπίσεων στις αντίστοιχες εξισώσεις της θεωρίας ελαστικότητας. Κατά τη δεύτερης τάξης προσέγγιση, γίνεται αυστηρότερη η παράλειψη των όρων Z/R , αφήνοντας τους στις εξισώσεις παραμόρφωσης-μετατόπισης και στις συνισταμένες τάσεις. Λόγω της δυσκολίας στην εφαρμογή τους, η εφαρμογή των σχέσεων αυτών έχει περιοριστεί στα κυκλικά κυλινδρικά κελύφη.

Ο Novozhilov [45] ανέπτυξε παρόμοια θεωρία κελυφών με τους Lur'ye, Flügge και Byrne, χρησιμοποιώντας τις παραδοχές Kirchhoff-Love και την ενέργεια παραμόρφωσης. Το σημαντικότερο αποτέλεσμα της ανάλυσης αυτής είναι η απόδειξη πως το σφάλμα που υπεισέρχεται χρησιμοποιώντας τις παραδοχές Kirchhoff-Love είναι της τάξης t/R σε σύγκριση με τη μονάδα.

Μη-γραμμικές θεωρίες κελυφών

Οι παραπόνω θεωρίες βασίζονται στη θεώρηση μικρών μετατοπίσεων και στη κλασική γραμμική θεωρία της ελαστικότητας. Η παράλειψη των όρων μεγαλύτερης τάξης στις παραμορφώσεις και τις εξισώσεις ισορροπίας έχει ως αποτέλεσμα τον καθορισμό μίας μοναδικής λύσης, δηλαδή μίας μοναδικής θέσης ισορροπίας, για καθορισμένα φορτία και οριακές συνθήκες. Στην πραγματικότητα όμως, η λύση των προβλημάτων κελυφών δεν είναι πάντα μοναδική και μπορεί να υπάρχουν διάφορες θέσεις ισορροπίας που να ικανοποιούν τις εξισώσεις κελυφών. Επομένως, οι θεωρίες που λαμβάνουν υπόψη τις πεπερασμένες ή μεγάλες μετατοπίσεις αναφέρονται ως γεωμετρικά μη-γραμμικές θεωρίες των κελυφών. Τέλος, ένα κέλυφος μπορεί να είναι φυσικά μη-γραμμικό, λόγω των χαρακτηριστικών του υλικού του.

Ο Sanders [46] ανέπτυξε μια μη-γραμμική θεωρία κελυφών σε μορφή τανυστών, αξιοποιώντας τις παραδοχές Kirchhoff-Love. Η ίδια θεωρία αναπτύχθηκε ανεξάρτητα και από τον Koiter

[47], οδηγώντας στη δημιουργία της μη-γραμμικής θεωρίας Sanders-Koiter, η οποία ήταν κατάλληλη για πεπερασμένες μετατοπίσεις με μικρές παραμορφώσεις και σχετικά μικρές περιστροφές. Επομένως, στη θεωρία αυτή, οι εντός επιπέδου μετατοπίσεις δεν είναι αμελητέες και οι μη-γραμμικοί όροι που εξαρτώνται από τις εντός επιπέδου και εγκάρσιες μετατοπίσεις στις σχέσεις παραμορφώσεων-μετατοπίσεων δεν αγνοούνται. Όμως, η αλλαγή της καμπυλότητας και στρέψης της μέσης επιφάνειας θεωρείται πως είναι γραμμική.

Οι Novozhilov [48] και Flügge-Lur'ye-Byrne [49] ανέπτυξαν όπως και στην αντίστοιχη γραμμική θεωρία κελυφών, όμοιες μη-γραμμικές θεωρίες, οι οποίες διαφέρουν στους όρους της αλλαγής της καμπυλότητας και στρέψης. Η διαφορά με τις γραμμικές θεωρίες τους είναι πως η υπόθεση του λεπτού κελύφους εισέρχεται αργότερα, ενώ οι μη-γραμμικοί όροι στις εντός και εκτός επιπέδου μετατοπίσεις διατηρούνται στις σχέσεις παραμορφώσεων-μετατοπίσεων.

Ο Vlasov [50] ανέπτυξε εξισώσεις οι οποίες περιλαμβάνουν γεωμετρική μη-γραμμικότητα και ήταν πολύ σημαντικές για την ανάπτυξη της θεωρίας κελυφών με μικρή καμπυλότητα τύπου Von Karman. Τα έργα των Mushtari & Galimov [51] και Simmonds & Danielson [52] θεωρούνται συνέχεια του πεδίου των μη-γραμμικών θεωριών κελυφών.

Οι παραπάνω μη-γραμμικές θεωρίες αγνοούν την εγκάρσια διατμητική παραμόρφωση και τις αλλαγές της καμπυλότητας και στρέψης και επομένως δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση μη λεπτών ή πολυστρωματικών ανισότροπων κελυφών. Η μη-γραμμική πρώτης τάξης θεωρία διατμητικής παραμόρφωσης προτάθηκε αρχικά από τους Reddy και Chandrashekara [53] και βασίζεται στους μη-γραμμικούς όρους της θεωρίας Sanders-Koiter. Οι μετατοπίσεις του κελύφους περιγράφονται από τρεις μετατοπίσεις και δύο περιστροφές.

Ειδικές θεωρίες

Οι θεωρίες που αναφέρθηκαν παραπάνω είχαν ως σκοπό τη δημιουργία μιας γενικής θεωρίας για τα κελύφη, ώστε να καλύπτεται μεγάλο εύρος της γεωμετρίας και φόρτισης τους. Πέρα από αυτές τις θεωρίες όμως, έχουν αναπτυχθεί και θεωρίες οι οποίες ισχύουν για ειδικές περιπτώσεις. Οι παραδοχές τους συνήθως αφορούν το εύρος των παραμορφώσεων του κελύφους, τη γεωμετρία του λεπτού κελύφους, την εντατική κατάσταση που αναπτύσσεται, καθώς και συγκεκριμένες φορτίσεις. Οι πρώτης-τάξης παραδοχές είναι η βάση για την ανάπτυξη των θεωριών αυτών.

Ο Beltrami [54] και Lecornu [55] ανέπτυξαν τις βασικές εξισώσεις κελυφών της μεμβρανικής θεωρίας. Έκτοτε, έχει υπάρξει ραγδαία πρόοδος στην ανάπτυξη της θεωρίας μεμβράνης, με τον Reissner να αναπτύσσει θεωρία κελυφών μεμβράνης για τη μη-συμμετρική φόρτιση τους. Μετέπειτα, ο Sokolovskii [56] μετέτρεψε τις εξισώσεις της θεωρίας μεμβράνης σε κανονική μορφή, καταφέρνοντας έτσι οι ιδιότητες των κελυφών μεμβράνης να είναι πιο ευδιάκριτες. Τέλος, ο Pucher [57], χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση τάσεων Airy, κατάφερε να ενισχύσει τη θεωρία μεμβράνης ως προς την ακρίβεια των αποτελεσμάτων της. Η τελευταία θεωρία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για κελύφη αυθαίρετης γεωμετρίας.

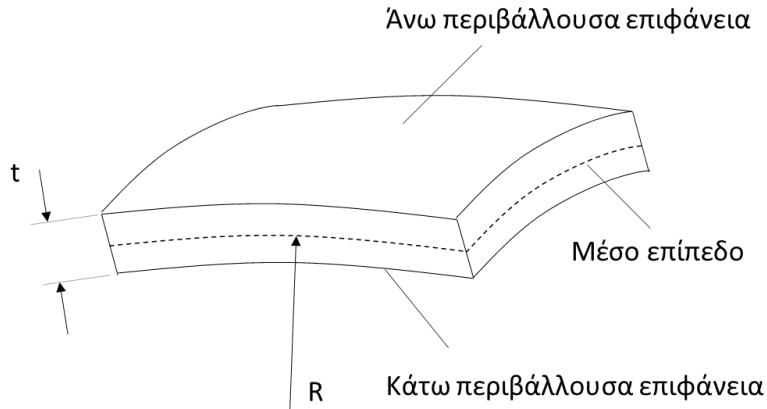
Η θεωρία των κελυφών με μικρή καμπυλότητα (shallow shells) αναπτύχθηκε ανεξάρτητα από τον Donnel [58], Vlasov [50] και Mushtari [59] για την ανάπτυξη μιας απλοποιημένης γενικής θεωρίας κελυφών. Πέρα από τις απλοποιήσεις πρώτης-τάξης, χρησιμοποιήθηκαν και απλοποιήσεις που αφορούσαν τις σχέσεις παραμορφώσεων-μετατοπίσεων, των εξισώσεων ισορροπίας, καθώς και των καταστατικών εξισώσεων. Η θεωρία αυτή αποδείχθηκε ικανοποιητικά ακριβής για κελύφη με μικρή καμπυλότητα, ενώ υπό προϋποθέσεις μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για γενικά κελύφη. Έπειτα, ο Marguerre [60] ανέπτυξε τις βασικές εξισώσεις για πλάκες με μικρή αρχική καμπυλότητα, ή αλλιώς ρηγών κελυφών.

Όσον αφορά τα κελύφη εκ περιστροφής, ο Reissner [61] παρουσίασε εξισώσεις για την κάμψη των κελυφών αυτής της γεωμετρίας, με σημαντικότερο το έργο του πάνω στην αξισυμμετρική κάμψη σφαιρικών κελυφών. Μετέπειτα, ο Meissner [62] κατάφερε να απλοποιήσει τα αποτελέσματα του Reissner για κελύφη εκ περιστροφής αυθαίρετου σχήματος και μεταβλητού πάχους. Τέλος, ο Hoff [63] και Flügge [64] ανέπτυξε γενικές λύσεις για αυθαίρετη και ασύμμετρη φόρτιση κωνικών κελυφών αντίστοιχα.

3.4 Γεωμετρία γενικών κελυφών

Ο όρος κέλυφος χρησιμοποιείται για να περιγράψει ένα τρισδιάστατο σώμα που οριοθετείται από δύο επιφανειακές καμπύλες. Η απόσταση μεταξύ των δύο επιφανειών είναι ασήμαντη συγκριτικά με τις υπόλοιπες διαστάσεις του σώματος και ονομάζεται πάχος του κελύφους. Το κέλυφος έχει πεπερασμένη ακτίνα καμπυλότητας, το οποίο καθιστά την αρχική γεωμετρία του μη επίπεδη. Σκοπός των περισσότερων αναλύσεων κελυφών είναι η απλοποίηση του τρισδιάστατου προβλήματος της ισορροπίας τους σε δισδιάστατο πρόβλημα. Αυτό επιτυγχάνεται με τον ορισμό ενός γεωμετρικού επιπέδου, το οποίο ονομάζεται μέσο επίπεδο

του κελύφους, πάνω στο οποίο πραγματοποιείται η ανάλυση των εξισώσεων ισορροπίας. Το μέσο επίπεδο ουσιαστικά είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τις δύο επιφάνειες που ορίζουν το κέλυφος. Η γεωμετρία ενός πρότυπου κελύφους φαίνεται στην **Εικόνα 3.1**.



Εικόνα 3.1: Γεωμετρία γενικού κελύφους

Τα κελύφη δηλαδή, παρουσιάζουν όλα τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των πλακών συν την καμπυλότητα. Η καμπυλότητα συνεισφέρει στην αποτελεσματικότητα των κελυφών να παραλαμβάνουν εξωτερικά φορτία έναντι των άλλων κατασκευών, όμως η ευαισθησία τους στις αρχικές ατέλειες καθιστούν τα κελύφη ευάλωτα σε φορτίσεις που επιφέρουν το λυγισμό.

Παρακάτω πραγματοποιείται εισαγωγή στα βασικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά των γενικών κελυφών, τα οποία χρησιμοποιούνται εκτενώς στις μη-γραμμικές θεωρίες. Η υπόδειξη των ακόλουθων γεωμετρικών ιδιοτήτων γίνεται από τους Langhaar [65], Novozhilov [66] και Gould [67] και βασίζεται στη θεωρία καμπυλών και επιφανειών της διαφορικής γεωμετρίας. Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά βασίζονται σε καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων, όπου οι συντεταγμένες x , y ακολουθούν τις γραμμές καμπυλότητας του μέσου επιπέδου του κελύφους όπως φαίνεται και στην **Εικόνα 3.2**. Πιο συγκεκριμένα, η μέση επιφάνεια του κελύφους ορίζεται από τις ορθογώνιες συντεταγμένες (X , Y , Z), οι οποίες ορίζονται από τις εξισώσεις:

$$X = X(x, y) \quad (3.1\alpha)$$

$$Y = Y(x, y) \quad (3.1\beta)$$

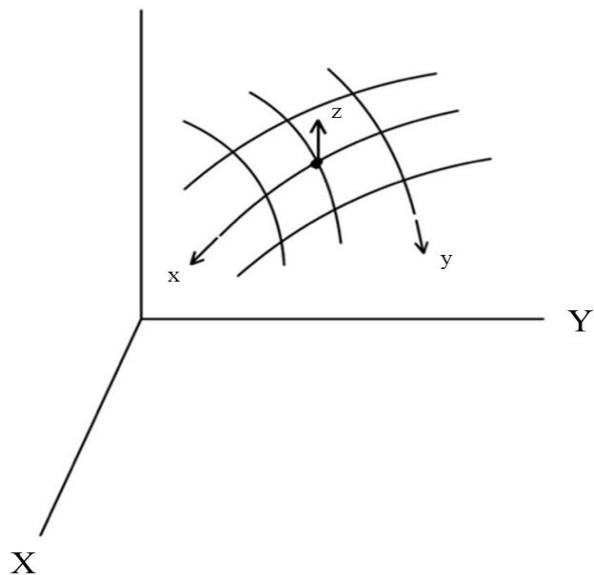
$$Z = Z(x, y) \quad (3.1\gamma)$$

όπου X, Y, Z είναι ορισμένες, συνεχείς και μονότιμες συναρτήσεις των δύο μεταβλητών επιφανειακών συντεταγμένων x, y . Έστω i, j, k τα μοναδιαία διανύσματα των X, Y και Z αξόνων, τότε παραμετρική αναπαράσταση της επιφάνειας του κελύφους μπορεί να δοθεί επίσης σε διανυσματική μορφή σύμφωνα με τις **Εξισώσεις (3.2)**.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y) \quad (3.2\alpha)$$

$$\mathbf{r} = X(x, y)\mathbf{i} + Y(x, y)\mathbf{j} + Z(x, y)\mathbf{k} \quad (3.2\beta)$$

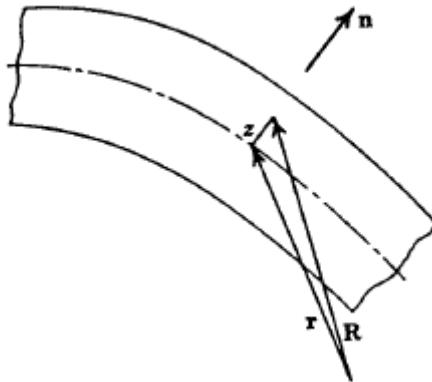
Αν οι επιφανειακές συντεταγμένες είναι αμοιβαία κάθετες μεταξύ τους, δηλαδή αν οι γωνίες μεταξύ των εφαπτόμενων στις γραμμές των x και y συντεταγμένων σχηματίζουν γωνία 90° , τότε το καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων ονομάζεται ορθογώνιο. Λόγω της φύσης της γεωμετρίας των προβλημάτων που θα συναντηθούν στην παρούσα διπλωματική εργασία, τα οποία περιγράφονται από κελύφη μονής καμπυλότητας (singly-curved shells), θα παρουσιαστεί η θεωρία αποκλειστικά για τα ορθογώνια καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων.



Εικόνα 3.2: Καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων

Η κάθετη απόσταση από τη μέση επιφάνεια συμβολίζεται με $\pm z$, όπου η θετική φορά του κάθετου διανύσματος \mathbf{n} καθορίζει το πρόσημο της απόστασης (θετικό, αν η απόσταση είναι στη φορά του διανύσματος \mathbf{n} και αρνητικό σε αντίθετη περίπτωση). Οι επιφάνειες που

περικλείουν το κέλυφος μπορούν να αναπαρασταθούν με τη χρήση των κάθετων συντεταγμένων $z = \pm \frac{h}{2}$, όπου h το πάχος του κελύφους.



Εικόνα 3.3: Τομή κελύφους [65]

Οι παράγωγοι του διανύσματος θέσης r ως προς τις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες x, y δίνεται από τις σχέσεις:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \mathbf{r}_{,x} \quad \text{και} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{r}_{,y}, \quad (3.3)$$

ενώ για το ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων ισχύει

$$\mathbf{r}_{,x} \cdot \mathbf{r}_{,y} = 0, \quad (3.4)$$

εφόσον οι παράγωγοι της **Εξίσωσης (3.3)** συμπίπτουν με τις κάθετες στις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες x, y για κάθε σημείο $A(x, y)$.

Στην **Εικόνα 3.3** αναπαρίσταται η τομή ενός κελύφους. Το διάνυσμα θέσης ενός σημείου της μέσης επιφάνειας είναι \mathbf{r} , ενώ το διάνυσμα θέσης του αντίστοιχου σημείου σε απόσταση z από τη μέση επιφάνεια είναι \mathbf{R} . Η σχέση που συνδέει τα δύο αυτά διανύσματα είναι:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{n}z \quad (3.5)$$

Παραγωγίζοντας την **Εξίσωση (3.5)** ως προς x και y προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\mathbf{R}_{,x} = \mathbf{r}_{,x} + \mathbf{n}_{,x}z \quad \text{και} \quad \mathbf{R}_{,y} = \mathbf{r}_{,y} + \mathbf{n}_{,y}z \quad (3.6)$$

Εφόσον οι συντεταγμένες γραμμές είναι γραμμές της κύριας καμπυλότητας, δηλαδή ισχύει η **Εξίσωση (3.4)**, μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα Rodrigues το οποίο εκφράζεται μέσω των παρακάτω σχέσεων:

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} = \mathbf{n}_{,x} = \frac{1}{r_1} \mathbf{r}_{,x} \text{ και } \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} = \mathbf{n}_{,y} = \frac{1}{r_2} \mathbf{r}_{,y} \quad (3.7)$$

Επομένως, οι **Εξισώσεις (3.6)** μετατρέπονται με τη βοήθεια των **Εξισώσεων (3.7)**:

$$\mathbf{R}_{,x} = \left(1 + \frac{z}{r_1}\right) \mathbf{r}_{,x}, \quad \mathbf{R}_{,y} = \left(1 + \frac{z}{r_2}\right) \mathbf{r}_{,y}, \quad \mathbf{R}_{,z} = \mathbf{n} \quad (3.8)$$

Για τα ορθογώνια συστήματα συντεταγμένων, των οποίων οι άξονες είναι αμοιβαία κάθετοι μεταξύ τους, ισχύει η **Εξίσωση (3.9)** για την απόσταση μεταξύ της μέσης επιφάνειας και ενός σημείου στο χώρο [68]

$$d_s^2 = d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = (\mathbf{R}_{,x} dx + \mathbf{R}_{,y} dy + \mathbf{R}_{,z} dz)^2 = a^2 dx^2 + b^2 dy^2 + \gamma^2 dz^2 \quad (3.9)$$

όπου α, β, γ οι συντελεστές Lamé οι οποίοι δίνονται από τις εξισώσεις

$$\alpha = A \left(1 + \frac{z}{r_1}\right), \quad \beta = B \left(1 + \frac{z}{r_2}\right), \quad \gamma = 1 \quad (3.10)$$

και A, B είναι ίσα με

$$A = \mathbf{r}_{,x} \cdot \mathbf{r}_{,x} = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2} \quad (3.11\alpha)$$

$$B = \mathbf{r}_{,y} \cdot \mathbf{r}_{,y} = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2} \quad (3.11\beta)$$

Η απόσταση ds μεταξύ σημείων που βρίσκονται πάνω στη μέση επιφάνεια περιγράφεται από την **Εξίσωση (3.9)**, για $z = 0$. Επομένως

$$ds^2 = A^2 dx^2 + B^2 dy^2 \quad (3.12)$$

Οι **Εξισώσεις (3.8), (3.9), (3.12)** αποτελούν τις βασικές γεωμετρικές σχέσεις στη θεωρία των κελυφών. Ιδιαίτερα, η **Εξίσωση (3.12)** και οι συντελεστές Lamé είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για τη διατύπωση της μη-γραμμικής θεωρίας κελυφών Donnel–Musthari–Vlasov (DMV) που παρουσιάζεται παρακάτω.

3.5 Καταστατικές εξισώσεις ισότροπων κελυφών

Στην πλειονότητα των θεωριών κελυφών χρησιμοποιούνται οι προαναφερόμενες υποθέσεις Kirchhoff-Love, μέσω των οποίων απλοποιείται το τρισδιάστατο πρόβλημα των κελυφών σε

δισδιάστατο. Επομένως, οι κυρίαρχες τάσεις του κελύφους παρουσιάζονται στο δισδιάστατο επίπεδο του μέσου επιπέδου και συνεπώς η θεωρία κελυφών χρησιμοποιεί την παραδοχή επίπεδης κατάστασης για ένα ισότροπο υλικό.

Οι σχέσεις παραμορφώσεων – μετατοπίσεων που περιλαμβάνουν και τους όρους ανωτέρας τάξης (μη γραμμικοί όροι) είναι:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3.13\alpha)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3.13\beta)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.13\gamma)$$

Οι σχέσεις παραμορφώσεων-τάσεων σύμφωνα με τον νόμο του Hooke για επίπεδη εντατική κατάσταση είναι:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \quad (3.14\alpha)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \quad (3.14\beta)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (3.14\gamma)$$

Λύνοντας τις **Εξισώσεις (3.14)** ως προς τις τάσεις:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad (3.15\alpha)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \quad (3.15\beta)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad (3.15\gamma)$$

Σύμφωνα με τον Ugural [69], οι παραμορφώσεις των κελυφών δίνονται από τις επιμέρους εντός επιπέδου παραμορφώσεις του μέσου επιπέδου του κελύφους και των παραμορφώσεων λόγω της αλλαγής της καμπυλότητας της μέσης επιφάνειας, σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x,0} - z\chi_x \quad (3.16\alpha)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{y,0} - z\chi_y \quad (3.16\beta)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy,0} - 2z\gamma_{xy} \quad (3.16\gamma)$$

όπου $\varepsilon_{x,0}$, $\varepsilon_{y,0}$, $\varepsilon_{xy,0}$ οι εντός επιπέδου παραμορφώσεις της μέσης επιφάνειας του κελύφους και χ_x , χ_y , χ_{xy} οι αλλαγές της καμπυλότητας της μέσης επιφάνειας (πιο αναλυτικά, η χ_{xy} αναπαριστά τη στρέβλωση της μέσης επιφάνειας). Αντικαθιστώντας τις **Εξισώσεις (3.16)** στους αντίστοιχους όρους των **Εξισώσεων (3.14)**, ανάγονται οι σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων των κελυφών.

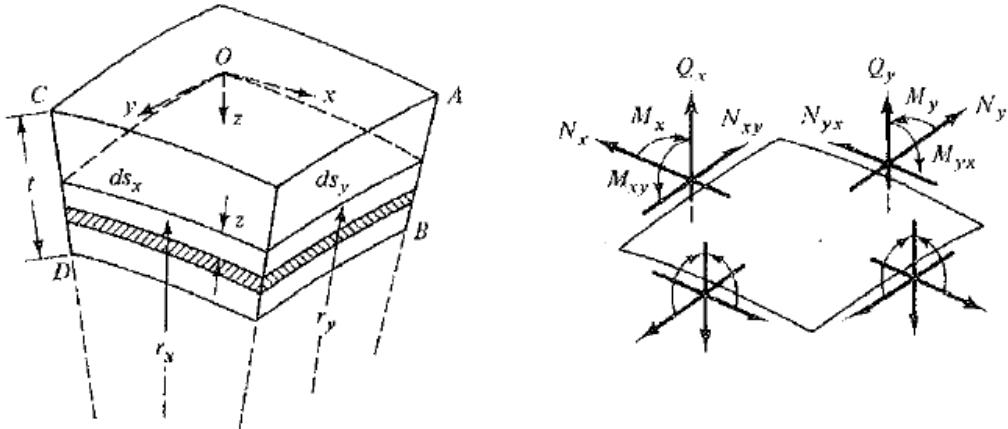
$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_{x,0} + \nu \varepsilon_{y,0} - z(\chi_x + \nu \chi_y) \right) \quad (3.17\alpha)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_{y,0} + \nu \varepsilon_{x,0} - z(\chi_y + \nu \chi_x) \right) \quad (3.17\beta)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} (\gamma_{xy,0} - 2z\gamma_{xy}) \quad (3.18\gamma)$$

3.6 Συνισταμένες τάσεων κελυφών

Για την αναγωγή των συνισταμένων τάσεων, δηλαδή των συνισταμένων δυνάμεων και ροπών που αντιπροσωπεύουν την εσωτερική εντατική κατάσταση του κελύφους, θεωρείται ένα απειροελάχιστο στοιχείο, σύμφωνα με την **Εικόνα 3.4**. Το στοιχείο ορίζεται από δύο επίπεδα, κάθετα στη μέση επιφάνεια του κελύφους. Η αρχή των αξόνων του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων βρίσκεται στη γωνία του στοιχείου, όπως απεικονίζεται, με τους άξονες x , y να είναι κάθετοι στις γραμμές της κύριας καμπυλότητας, ενώ ο άξονας z είναι κάθετος στη μέση επιφάνεια.



Εικόνα 3.4: Απειροστό στοιχείο κελύφους και συνισταμένες τάσεων στο στοιχείο [69]

Λόγω της καμπυλότητας του κελύφους, τα μήκη τόξου ενός στοιχείου το οποίο βρίσκεται σε απόσταση z από τη μέση επιφάνεια δίνονται από τις σχέσεις:

$$\frac{ds_x(r_x - z)}{r_x} = \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) ds_x \text{ και } \frac{ds_y(r_y - z)}{r_y} = \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) ds_y \quad (3.19)$$

όπου r_x, r_y οι ακτίνες των κύριων καμπυλοτήτων στα επίπεδα xz και yz αντίστοιχα.

Η καμπυλότητα ενός στοιχείου δίνεται από τη σχέση

$$\kappa = \frac{1}{r} \quad (3.20)$$

Οι τάσεις που ενεργούν στα επίπεδα του στοιχείου είναι $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$ και τ_{xz} . Έστω N_x η συνιστώσα δύναμη που ενεργεί κάθετα στο επίπεδο yz ανά μονάδα μήκους. Μέσω του μήκους τόξου ds_y υπολογίζεται το ολοκλήρωμα της συνιστώσας τάσης N_x μεταξύ της κάτω και άνω περιβάλλουσας επιφάνειας.

$$N_x ds_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) ds_y dz \text{ ή } N_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x (1 - z\kappa_y) dz \quad (3.21\alpha)$$

Οι εκφράσεις για τις απομένουσες συνιστώσες τάσεων ανά μονάδα μήκους ανάγονται με όμοια διαδικασία. Το σύνολο των εξισώσεων παρουσιάζονται παρακάτω.

$$N_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x (1 - z\kappa_y) dz \quad (3.21\alpha)$$

$$N_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y (1 - z\kappa_x) dz \quad (3.21\beta)$$

$$N_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} (1 - z\kappa_y) dz \quad (3.21\gamma)$$

$$N_{yx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yx} (1 - z\kappa_y) dz \quad (3.21\delta)$$

$$Q_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xz} (1 - z\kappa_y) dz \quad (3.21\varepsilon)$$

$$Q_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} (1 - z\kappa_x) dz \quad (3.21\sigma\tau)$$

$$M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x (1 - z\kappa_y) dz \quad (3.21\zeta)$$

$$M_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y (1 - z\kappa_x) dz \quad (3.21\eta)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} (1 - z\kappa_y) dz \quad (3.21\theta)$$

$$M_{yx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yx} (1 - z\kappa_x) dz \quad (3.21\iota)$$

Στη γενικότερη περίπτωση, οι διατμητικές δυνάμεις N_{xy} και N_{yx} , καθώς και οι στρεπτικές ροπές M_{xy} και M_{yx} δεν είναι ίσες. Για να είναι ίσες οι προαναφερόμενες διατμητικές δυνάμεις και στρεπτικές ροπές, θα πρέπει το κέλυφος να βρίσκεται στις παρακάτω περιπτώσεις:

- Οι ακτίνες της κύριας καμπυλότητας r_x και r_y να είναι ίσες

- Για λεπτότοιχα κελύφη, όπου το πάχος t είναι αμελητέο σε σύγκριση με τις ακτίνες της κύριας καμπυλότητας, οι όροι z/r_x και z/r_y μπορούν να αγνοηθούν σε σύγκριση με τη μονάδα. Με αυτόν τον τρόπο, οι συνιστώσες τάσεων ανάγονται στις ίδιες εκφράσεις που εφαρμόζονται στις λεπτότοιχες πλάκες

Εισάγοντας τις **Εξισώσεις (3.17)** στις (**Εξισώσεις 3.21**) και αγνοώντας τους όρους z/r_x και z/r_y , υπολογίζονται οι συνισταμένες τάσεων ως εξής:

$$N_x = K(\varepsilon_{x,0} + \nu \varepsilon_{y,0}) \quad (3.22\alpha)$$

$$N_y = K(\varepsilon_{y,0} + \nu \varepsilon_{x,0}) \quad (3.22\beta)$$

$$N_{xy} = N_{yx} = \frac{K(1-\nu)}{2} \gamma_{xy,0} \quad (3.22\gamma)$$

$$M_x = -D(\chi_x + \nu \chi_y) \quad (3.22\delta)$$

$$M_y = -D(\chi_y + \nu \chi_x) \quad (3.22\epsilon)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = -D(1-\nu)\chi_{xy} \quad (3.22\sigma)$$

Όπου

$$K = \frac{Et}{1-\nu^2} \quad \text{και} \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.23)$$

η εντός επιπέδου δυσκαμψία (δυσκαμψία μεμβράνης) και η καμπτική δυσκαμψία αντίστοιχα.

3.7 Μη-γραμμική θεωρία κελυφών DMV

Η μη-γραμμική θεωρία Donnel-Mushtari-Vlasov (DMV) αναπτύχθηκε ανεξάρτητα για μια ειδική κατηγορία κελυφών – τα κελύφη με μικρή καμπυλότητα ή διαφορετικά, κυρτές πλάκες. Ωστόσο, οι εξισώσεις DMV έχουν ικανοποιητική ακρίβεια και για κελύφη με μεγαλύτερες καμπυλότητες, αρκεί η εντατική κατάσταση τους να χαρακτηρίζεται από ραγδαία μεταβαλλόμενες συνιστώσες τάσεων στις συντεταγμένες της μέσης επιφάνειας [28]. Σκοπός τους ήταν η ανάπτυξη μιας απλοποιημένης θεωρίας κελυφών γενικής μορφής. Η χρήση των εξισώσεων που προκύπτουν από τη μη-γραμμική θεωρία DMV είναι διαδεδομένες λόγω της απλότητας τους και της ευρείας εφαρμογής τους σε διάφορες περιπτώσεις κελυφών.

Η θεωρία DMV χρησιμοποιεί τις θεμελιώδεις παραδοχές Kirchhoff – Love, οι οποίες έχουν ήδη αναφερθεί. Επιπλέον, εισάγεται η προσέγγιση πως στην περίπτωση που οι καμπτικές τάσεις είναι της ίδιας τάξης (ή και μικρότερης) με τις τάσεις μεμβράνης, τότε μπορούν να αγνοηθούν οι εφαπτόμενες μετατοπίσεις $K_{\alpha\beta}$ (όπου $K_{\alpha\beta}$ ο καμπτικός τανυστής, σύμφωνα με την ανάπτυξη της θεωρίας γενικών κελυφών με τη χρήση αλγεβρικού τανυστικού λογισμού) [70].

Η θεωρία DMV παρουσιάζεται με βάση το περιεχόμενο του βιβλίου των Brush και Almroth [71], το οποίο παρουσιάζει τη θεωρία στις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες που αναπτύχθηκαν παραπάνω, σε αντίθεση με τη θεωρία που παρουσιάζεται από τον Sanders [72] χρησιμοποιώντας αλγεβρικό τανυστικό λογισμό.

Προτού γραφούν οι κινηματικές σχέσεις και πραγματοποιηθεί περιγραφή της εντατικής κατάστασης των κελυφών, θα παρουσιαστούν μερικά από τα χαρακτηριστικά των κελυφών με μικρή καμπυλότητα. Τα κελύφη αυτά κατέχουν μεγάλη χαρακτηριστική ακτίνα ή διαφορετικά μικρή καμπυλότητα [73]. Επομένως, το κέλυφος έχει σχετικά μικρή ανύψωση συγκριτικά με τις διαστάσεις του μήκους και πλάτους. Σύμφωνα με τον Ventsel [28], ένα κέλυφος έχει μικρή καμπυλότητα, αν για οποιοδήποτε σημείο της μέσης επιφάνειας ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 \ll 1 \text{ και } \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) \ll 1 \quad (3.24)$$

όπου Z η ορθογώνια συντεταγμένη που ορίστηκε προηγουμένως. Σύμφωνα με τον Vlasov, ένα κέλυφος μπορεί να θεωρηθεί πως έχει μικρή καμπυλότητα, αν ο λόγος της ανύψωσης ως προς τη μικρότερη πλευρά του κελύφους είναι μικρότερο από 20% [74].

Οι κινηματικές σχέσεις που ενσωματώνονται στη θεωρία DMV γράφονται ως εξής:

$$\varepsilon_{x,0} = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} v + \frac{w}{R_x} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (3.25\alpha)$$

$$\varepsilon_{y,0} = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} u + \frac{w}{R_y} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (3.25\beta)$$

$$\gamma_{xy,0} = \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial y} u - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial B}{\partial x} v + \frac{\partial A}{\partial y} u \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.25\gamma)$$

$$\chi_x = -\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{A^3} \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.25\delta)$$

$$\chi_y = -\frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{B^3} \frac{\partial B}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{AB^2} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.25\varepsilon)$$

$$\chi_{xy} = -\frac{1}{AB} \frac{\partial w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{AB^2} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.25\sigma)$$

Εισάγοντας τις **Εξισώσεις (3.25)** στις **Εξισώσεις (3.22)** προκύπτουν οι συνιστώσες δυνάμεις σύμφωνα με τη θεωρία DMV.

$$N_x = K \left[\frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} v + \frac{w}{R_x} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + v \left(\frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} u + \frac{w}{R_y} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right] \quad (3.26a)$$

$$N_y = K \left[\frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} u + \frac{w}{R_y} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + v \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} v + \frac{w}{R_x} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right] \quad (3.26\beta)$$

$$N_{xy} = N_{yx} = K \frac{1-\nu}{2} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial y} u - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial B}{\partial x} v + \frac{\partial A}{\partial y} u \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (3.26\gamma)$$

$$M_x = D \left[-\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{A^3} \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \nu \left(-\frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{B^3} \frac{\partial B}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{AB^2} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \quad (3.26\delta)$$

$$M_y = D \left[-\frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{B^3} \frac{\partial B}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{AB^2} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \nu \left(-\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{A^3} \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \quad (3.26\epsilon)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = D(1-\nu) \left[-\frac{1}{AB} \frac{\partial w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{AB^2} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (3.26\sigma)$$

Οι μη-γραμμικές εξισώσεις ισορροπίας που προκύπτουν μέσω του λογισμού των μεταβολών (Εξισώσεις Euler) δίνονται από τις σχέσεις:

$$\frac{\partial}{\partial x} (BN_x) + \frac{\partial}{\partial y} (AN_{xy}) - \frac{\partial B}{\partial x} N_y + \frac{\partial A}{\partial y} N_{xy} = -AB p_x \quad (3.27\alpha)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(AN_y) + \frac{\partial}{\partial x}(BN_{xy}) - \frac{\partial A}{\partial y}N_x + \frac{\partial B}{\partial x}N_{xy} = -ABp_y \quad (3.27\beta)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}(BM_x)\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial y}M_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial y}(AM_y)\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial x}M_y\right) \\ & + 2\left[\frac{\partial M_{xy}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial y}M_{xy}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial x}M_{xy}\right)\right] - AB\left(\frac{N_x}{R_x} + \frac{N_y}{R_y}\right) \\ & - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{B}{A}N_x\frac{\partial w}{\partial x} - N_{xy}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{A}{B}N_y\frac{\partial w}{\partial y} - AN_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] \\ & = -ABp_z \end{aligned} \quad (3.27\gamma)$$

Η αντικατάσταση των συνιστάμενων δυνάμεων και ροπών στις **Εξισώσεις (3.27)** οδηγεί στις διαφορικές εξισώσεις της μη-γραμμικής θεωρίας DMV συναρτήσει της εκτός επιπέδου μετατόπισης w . Οι αντίστοιχες γραμμικές εξισώσεις ισορροπίας μπορούν να προκύψουν αγνοώντας τους όρους μεγαλύτερης τάξης στις παραπάνω εξισώσεις, με εξαίρεση αυτούς των **Εξισώσεων (3.25δ), (3.25ε), (3.25στ)**, όπου περιλαμβάνονται οι περιστροφές.

Ειδικές περιπτώσεις των **Εξισώσεων (3.27)** μπορούν να προκύψουν για συγκεκριμένες τιμές των A , B , R_x και R_y . Για παράδειγμα, οι εξισώσεις Von Kármán για επίπεδες πλάκες προκύπτουν για $A=B=1$ και $\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_y} = 0$. Οι εξισώσεις κυκλικών κυλινδρικών κελυφών προκύπτουν για $A=1$, $B=R_y=c$ και $\frac{1}{R_x} = 0$.

4 Λυγισμός και μεταλυγισμική συμπεριφορά ισότροπων κελυφών

4.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο περιγράφονται οι τρόποι υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου λυγισμού ισότροπων κελυφών. Αρχικά, περιγράφονται οι ενεργειακές μέθοδοι Rayleigh-Ritz και Galerkin, οι οποίες χρησιμοποιούνται για την προσεγγιστική λύση των αναλυτικών εξισώσεων. Έπειτα, γράφονται οι γραμμικές εξισώσεις ευστάθειας για κελύφη με μικρή καμπυλότητα, οι οποίες προκύπτουν από τις εξισώσεις που παρουσιάστηκαν στο **Κεφάλαιο 3**. Τέλος, παρουσιάζονται οι σημαντικότερες διαθέσιμες αναλυτικές σχέσεις για τον υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου κελυφών σε σύνθετη φόρτιση θλίψης και διάτμησης.

4.2 Ενεργειακές μέθοδοι

Στη μηχανική των στερεών, το πρόβλημα είναι ο προσδιορισμός των μετατοπίσεων u , v και w που ικανοποιούν τις εξισώσεις ισορροπίας, ώστε μέσω αυτών να υπολογιστούν οι παραμορφώσεις και εν συνεχείᾳ οι τάσεις. Ο προσδιορισμός των μετατοπίσεων επιτυγχάνεται από την επίλυση διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης. Η λύση του συνόλου των εξισώσεων που περιγράφουν το πρόβλημα ονομάζεται ακριβής λύση [75]. Οι ακριβείς λύσεις είναι εύκολο να υπολογιστούν για προβλήματα με σχετικά απλή γεωμετρία και απλές οριακές συνθήκες φόρτισης. Στην περίπτωση πολυπλοκότερων προβλημάτων, όπως το συγκεκριμένο του λυγισμού κελυφών υπό σύνθετη φόρτιση, η λύση τους είναι αδύνατο να είναι ακριβής. Επομένως, χρησιμοποιούνται προσεγγιστικές μέθοδοι επίλυσης, όπου εφαρμόζονται τεχνικές δυναμικής ενέργειας ή μεταβολών για μετατροπή των διαφορικών εξισώσεων στην αδύνατη μορφή τους.

Οι σημαντικότερες ενεργειακές μέθοδοι για την επίλυση προβλημάτων ευστάθειας είναι οι μέθοδοι Rayleigh-Ritz και Galerkin.

4.2.1 Ενεργειακή μέθοδος Rayleigh-Ritz

Για ένα ελαστικό σύστημα με k βαθμούς ελευθερίας, η δυναμική ενέργεια του συστήματος Π αποτελείται από το άθροισμα της ελαστικής ενέργειας U και του έργου των δυνάμεων W [6], δηλαδή

$$\Pi(x_i) = U(x_i) + W(x_i) \quad (4.1)$$

όπου x_i οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος.

Σύμφωνα με την αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας για τα συστήματα διατήρησης, από όλα τα πεδία επιτρεπτών κινητικών μετατοπίσεων, αυτά τα οποία αντιστοιχούν σε ισορροπία παρουσιάζουν ακρότατα ολικής δυναμικής ενέργειας. Εάν το ακρότατο είναι ελάχιστο, η κατάσταση ισορροπίας είναι σταθερή.

Στην ενεργειακή μέθοδο Rayleigh-Ritz, η συνεχής μετατόπιση ενός σώματος προσεγγίζεται από απειροστές σειρές, όπου κάθε όρος της σειράς είναι μια συνάρτηση g των συντεταγμένων του σημείου και έχει άγνωστο μέγεθος A_{mn} . Οι συναρτήσεις πρέπει να είναι επιτρεπτές, δηλαδή οι συνθήκες γεωμετρικού συμβιβαστού και οι αναγκαίες οριακές συνθήκες να πληρούνται [76]. Για παράδειγμα, η εκτός επιπέδου μετατόπιση w προσεγγίζεται από τη σχέση:

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n A_{mn} g_m(x) g_n(y) \quad (4.2)$$

Η αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας, επομένως, μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_{mn}} = 0 \quad (4.3)$$

Το πρόβλημα πλέον βρίσκεται στον υπολογισμό των άγνωστων A_{mn} , παρά στην εύρεση της συνεχούς συνάρτησης $w(x, y)$.

4.2.2 Ενεργειακή μέθοδος Galerkin

Η μέθοδος Galerkin περιλαμβάνει την άμεση χρήση των διαφορικών εξισώσεων και δεν απαιτεί τον ορισμό συνάρτησης, όπως στη μέθοδο Rayleigh-Ritz [75]. Έστω η γραμμική εξίσωση

$$Lu = f \quad (4.4)$$

όπου οι οριακές συνθήκες του προβλήματος είναι ομογενής. Είναι απαραίτητο η ακριβής λύση να ικανοποιεί την **Εξίσωση (4.3)** για κάθε x . Έστω τώρα μια προσεγγιστική συνάρτηση \tilde{u} . Το σφάλμα $\varepsilon(x)$, το οποίο ονομάζεται υπόλοιπο είναι ίσο με:

$$\varepsilon(x) = L\tilde{u} - P \quad (4.5)$$

Οι προσεγγιστικές μέθοδοι θέτουν το υπόλοιπο σχετικά με μια σταθμική συνάρτηση W_i ίσο με το μηδέν:

$$\int_V W_i (L\tilde{u} - P) dV = 0, \quad i = 1, n \quad (4.6)$$

Η προσεγγιστική μετατόπιση \tilde{u} δίνεται από τη σχέση

$$\tilde{u} = \sum_1^n Q_i G_i, \quad (4.7)$$

όπου G_i οι συναρτήσεις βάσεως, οι οποίες είναι συνήθως πολυώνυμα των συντεταγμένων x, y, z . Επιλέγονται οι σταθμικές συναρτήσεις να είναι γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων βάσεων G_i . Θεωρείται μια αυθαίρετη συνάρτηση φ :

$$W_i = \varphi = \sum_1^n \varphi_i G_i, \quad (4.8)$$

όπου οι συντελεστές φ_i είναι αυθαίρετοι, εκτός της απαίτησης ότι η φ ικανοποιεί ομογενείς συνοριακές συνθήκες. Επομένως, η **Εξίσωση (4.6)** γράφεται:

$$\int_V \varphi (L\tilde{u} - P) dV = 0, \quad i = 1, n \quad (4.9)$$

Η λύση των εξισώσεων οι οποίες προκύπτουν για τους Q_i δίνει την προσεγγιστική λύση \tilde{u} .

Αποδεικνύεται πως οι μέθοδοι Rayleigh-Ritz και Galerkin εξάγουν τα ίδια αποτελέσματα για προβλήματα στο πεδίο της ελαστικότητας. Ωστόσο, η μέθοδος Galerkin παρουσιάζει πλεονεκτήματα στα προβλήματα γραμμικής ελαστικότητας, καθώς οι συντελεστές Q_i υπολογίζονται άμεσα, σε αντίθεση με τη μέθοδο Rayleigh-Ritz όπου υπολογίζεται η συνάρτηση της μετατόπισης πρώτα [77].

4.3 Γραμμικές εξισώσεις ευστάθειας κελυφών σύμφωνα με τις προσεγγίσεις DMV

Σε αυτήν την ενότητα χρησιμοποιείται η αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας για την εξαγωγή σχέσεων απώλειας ευστάθειας ισότροπων κελυφών.

Σύμφωνα με τον Koiter [41], η ελαστική ενέργεια U δίνεται από το άθροισμα της ελαστικής ενέργειας μεμβράνης U_m και της ελαστικής ενέργειας κάμψης U_b , οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις:

$$U = U_m + U_b \quad (4.10)$$

$$U_m = \frac{K}{2} \int \int \left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{1-\nu}{2}\gamma_{xy}^2 \right) AB dxdy \quad (4.11)$$

$$U_m = \frac{D}{2} \int \int \left(\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + 2\nu\kappa_x\kappa_y + 2(1-\nu)\kappa_{xy}^2 \right) AB dxdy \quad (4.12)$$

Έστω p_x, p_y, p_z οι συνιστώσες στην x, y, z διεύθυνση ενός φορτίου που επιβάλλεται ομοιόμορφα στην επιφάνεια ενός στοιχείου κελύφους. Τότε, το έργο των δυνάμεων W δίνεται από την εξίσωση:

$$W = - \int \int (p_x u + p_y v + p_z w) AB dxdy, \quad (4.13)$$

όπου u, v, w οι μετατοπίσεις στην x, y, z διεύθυνση αντίστοιχα.

Για την εξαγωγή σχέσης για το διαφορικό δεύτερης τάξης της δυναμικής ενέργειας, θεωρούνται οι παρακάτω σχέσεις [71]:

$$u \rightarrow u_0 + u_1 \quad (4.14\alpha)$$

$$v \rightarrow v_0 + v_1 \quad (4.14\beta)$$

$$w \rightarrow w_0 + w_1 \quad (4.14\gamma)$$

Με όμοιο τρόπο, η γραμμική παραμόρφωση ε_{x0} αντικαθίσταται από τους όρους $\varepsilon_{x0,0} + \varepsilon_{x0,1}$ κ.ο.κ.. Ο δείκτης 0 υποδηλώνει την τιμή του αντίστοιχου όρου πριν την απώλεια ευστάθειας, ενώ ο δείκτης 1 την τιμή έπειτα από την απώλεια ευστάθειας.

Το έργο των δυνάμεων είναι γραμμική συνάρτηση των μετατοπίσεων και επομένως η έκφραση του για το διαφορικό δεύτερης τάξης είναι μηδενική, δηλαδή $\delta^2 \Pi = 0$. Επομένως, το διαφορικό δεύτερης τάξης της δυναμικής ενέργειας δίνεται από τη σχέση:

$$\delta^2 \Pi = \delta^2 U_m + \delta^2 U_b \quad (4.15)$$

Αντικαθιστώντας τις **Εξισώσεις (4.14α)** έως **(4.14γ)** στις **Εξισώσεις (4.11)** έως **(4.12)** και χρησιμοποιώντας το άθροισμα της **Εξίσωσης (4.15)**, τελικά εξάγεται μια γενική έκφραση για το διαφορικό δεύτερης τάξης της ολικής δυναμικής ενέργειας ενός λεπτότοιχου κελύφους αυθαίρετου σχήματος. Μέσω του κριτηρίου Trefftz [78] εξάγονται οι παρακάτω γραμμικές εξισώσεις ευστάθειας για γενικά κελύφη, με χρήση των απλοποιήσεων DMV.

$$\frac{\partial(BN_{x1})}{\partial x} + \frac{\partial(AN_{xy1})}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} N_{y1} + \frac{\partial A}{\partial y} N_{xy1} = 0 \quad (4.16\alpha)$$

$$\frac{\partial(AN_{y1})}{\partial y} + \frac{\partial(BN_{xy1})}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} N_{x1} + \frac{\partial B}{\partial x} N_{xy1} = 0 \quad (4.16\beta)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (BM_{x1}) \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial y} M_{x1} \right) \right] + \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial y} (AM_{y1}) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial x} M_{y1} \right) \right] \\ & + 2 \left[\frac{\partial M_{xy1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial y} M_{xy1} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} M_{xy1} \right) \right] - AB \left(\frac{N_{x1}}{R_x} + \frac{N_{y1}}{R_y} \right) \\ & - \left[\frac{\partial}{\partial x} (BN_{x0}\beta_{x1} + BN_{xy0}\beta_{y1}) + \frac{\partial}{\partial x} (B\beta_{x0}N_{x1} + B\beta_{y0}N_{xy1}) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} (AN_{y0}\beta_{y1} + AN_{xy0}\beta_{x1}) + \frac{\partial}{\partial y} (A\beta_{y0}N_{y1} + A\beta_{x0}N_{xy1}) \right] = 0 \quad (4.16\gamma) \end{aligned}$$

Όπου όλοι οι παράμετροι δίνονται από τις **Εξισώσεις (3.26α)** έως **(3.26στ)**. Σημειώνεται ότι με β_i γράφονται οι περιστροφές, οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις:

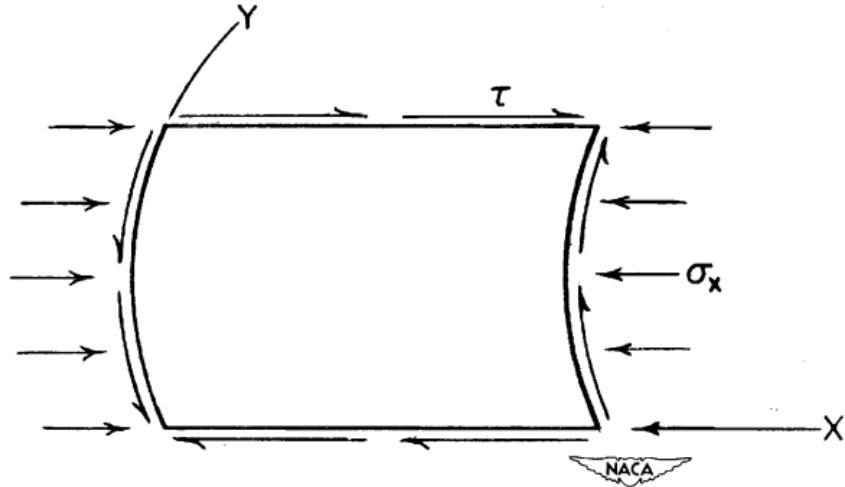
$$\beta_{x1} = -\frac{1}{A} \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{u_1}{R_x} \quad (4.17\alpha)$$

$$\beta_{y1} = -\frac{1}{B} \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{v_1}{R_y} \quad (4.17\beta)$$

Η εισαγωγή των **Εξισώσεων (3.26)** στις **Εξισώσεις (4.16)** δίνει ένα σετ τριών ομογενών εξισώσεων των u_1, v_1, w_1 με τους μεταβλητούς όρους $N_{x0}, N_{xy0}, N_{y0}, \beta_{x0}, \beta_{y0}$.

4.4 Σύνθετη θλιπτική-διατμητική φόρτιση κελύφους

Στην Εικόνα 4.1 απεικονίζεται ένα κέλυφος σε σύνθετη θλιπτική/διατμητική φόρτιση.



Εικόνα 4.1: Σύνθετη φόρτιση θλίψης/διάτμησης κελύφους [79]

Όταν εφαρμόζονται δύο ή περισσότερες διαφορετικές φορτίσεις ταυτόχρονα στην κατασκευή, τότε ο λυγισμός θα επέλθει σε φορτία χαμηλότερα από τα κρίσιμα φορτία λυγισμού αν κάθε επιμέρους φόρτιση είχε εφαρμοστεί ξεχωριστά. Για τον υπολογισμό του φορτίου λυγισμού στην περίπτωση συνδυασμένης καταπόνησης, εφαρμόζονται εμπειρικοί κανόνες, οι οποίοι λαμβάνουν υπόψη το λόγο των επιμέρους τάσεων προς το αντίστοιχο κρίσιμο όριο λυγισμού [10]. Για συνδυασμένες καταπονήσεις, οι γενικές συνθήκες για την αστοχία εκφράζονται από τον Shanley [80] σύμφωνα με την εξίσωση

$$R_1^x + R_2^y + R_3^z = 1 \quad (4.18)$$

όπου R_1, R_2, R_3 ο λόγος τάσεων της θλίψης, διάτμησης και κάμψης αντίστοιχα και x, y, z οι εκθέτες οι οποίοι δίνουν τη σχέση για τη συνδυασμένη καταπόνηση. Οι εκθέτες αυτοί υπολογίζονται είτε θεωρητικά είτε πειραματικά. Οι λόγοι R_i δίνονται από τη σχέση

$$R_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_{κρίσιμο,i}} \quad (4.19)$$

όπου σ_i η εφαρμοζόμενη τάση και $\sigma_{κρίσιμο,i}$ η τάση αστοχίας για τη συγκεκριμένη τάση. Στην περίπτωση των προβλημάτων λυγισμού, η $\sigma_{κρίσιμο,i}$ αντιπροσωπεύει το κρίσιμο φορτίο λυγισμού της επιμέρους φόρτισης.

Για επίπεδες πλάκες, ο νόμος της συνδυασμένης καταπόνησης σε θλιπτικά και διατμητικά φορτία δίνεται από την καμπύλη αλληλεπίδρασης φορτίων [81]:

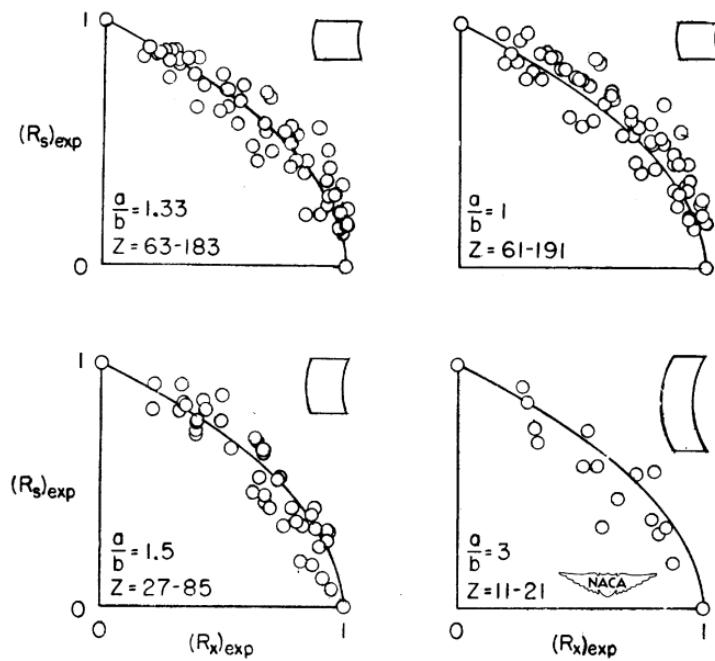
$$R_\theta + R_\delta^2 = 1 \quad (4.20)$$

όπου οι δείκτες θ, δ αντιπροσωπεύουν τη θλίψη και τη διάτμηση αντίστοιχα.

Ο Kromm [82] ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε ένα σετ εξισώσεων ευστάθειας για τον υπολογισμό του λυγισμού κελυφών σε σύνθετη φόρτιση θλίψης/διάτμησης, χρησιμοποιώντας την ενεργειακή μέθοδο Ritz.

Οι Legget [83] και Batdorf [84] κατέληξαν στην ίδια καμπύλη αλληλεπίδρασης με αυτή της **Εξίσωσης (4.20)** για κελύφη με μικρή καμπυλότητα, για τα οποία ισχύουν οι απλοποιήσεις DMV.

Έπειτα, οι Schilderout και Stein [79] πραγματοποίησαν πειράματα για την επαλήθευση της Εξίσωσης 4.20. Τα αποτελέσματα τους απεικονίζονται στην **Εικόνα 4.2**, όπου η συνεχής μαύρη γραμμή είναι η καμπύλη της **Εξίσωσης (4.20)**, ενώ οι κενές κουκίδες είναι τα αποτελέσματα των πειραμάτων. Μεγάλη απόκλιση εμφανίζεται στο κέλυφος με μεγάλο περιφερειακό μήκος σε σχέση με το αξονικό μήκος.



Εικόνα 4.2: Σύγκριση πειραματικών αποτελεσμάτων σύνθετης φόρτισης κελυφών με την Εξίσωση 4.20

Οι Featherstone και Ruiz [85] πραγματοποίησαν επίσης πειράματα σε δύο κελύφη με διαφορετική καμπυλότητα, καθώς χρησιμοποίησαν και ένα αριθμητικό μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων για τον έλεγχο της εγκυρότητας της **Εξίσωσης (4.20)**. Κατέληξαν στο συμπέρασμα πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για προκαταρκτικό σχεδιασμό κελυφών, καθώς οι αρχικές ατέλειες έχουν αρνητική επίδραση στη συμπεριφορά τους στο λυγισμό. Τα κελύφη με αρχικές ατέλειες παρουσιάζουν κρίσιμα φορτία λυγισμού μικρότερα από αυτά που προβλέπει η **Εξίσωση (4.20)**.

Τέλος, ο Domb [86] διερεύνησε το μη-γραμμικό λυγισμό κελυφών σε σύνθετη θλιπτική/διατμητική φόρτιση και κατέληξε στο ίδιο συμπέρασμα με τους Featherstone και Ruiz. Οι αρχικές ατέλειες αλλάζουν τη μορφή της καμπύλης αλληλεπίδρασης. Ωστόσο, για μικρές αρχικές ατέλειες, η **Εξίσωση (4.20)** ισχύει για κελύφη.

Επομένως, εξάγεται το συμπέρασμα πως για τέλεια κελύφη μπορεί να χρησιμοποιηθεί η καμπύλη αλληλεπίδρασης που δίνεται παραπάνω. Για τον υπολογισμό των ελαστικών κρίσιμων τάσεων λυγισμού $\sigma_{κρίσιμο,i}$ σε θλίψη και διάτμηση ξεχωριστά, για τον υπολογισμό των λόγων τάσεων R_i , έχουν αναπτυχθεί αρκετές σχέσεις. Ο Martins και λοιποί [87] διεξάγουν λεπτομερή βιβλιογραφική ανασκόπηση για τις σχέσεις αυτές, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για το θεωρητικό υπολογισμό του σύνθετου λυγισμού.

5 Αριθμητική ανάλυση

5.1 Εισαγωγή

Το παρόν κεφάλαιο αποτελεί εισαγωγή στην αριθμητική ανάλυση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Αρχικά γίνεται περιγραφή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων και της χρησιμότητας της στην ανάλυση δομών. Έπειτα περιγράφεται αναλυτικά το λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιείται για την αριθμητική ανάλυση του λυγισμού και της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς ενισχυμένων κελυφών. Συγκεκριμένα, ορίζεται η διαδικασία που διεξάγεται για την κατασκευή και ανάλυση λυγισμού ενός πλήρους μοντέλου στο λογισμικό. Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει τον έλεγχο σύγκλισης πλέγματος, τη γραμμική ιδιομορφική ανάλυση λυγισμού, την εισαγωγή ατελειών στο μοντέλο και τη μη-γραμμική ανάλυση λυγισμού. Εφόσον η κατανόηση του τρόπου λειτουργίας των γραμμικών και μη-γραμμικών λυτών του λογισμικού είναι σημαντική για την ανάπτυξη των αριθμητικών μοντέλων, παρουσιάζεται η μαθηματική διατύπωση των μεθόδων της γραμμικής ιδιομορφικής ανάλυσης, Newton-Raphson και Μήκους Τόξου.

5.2 Μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι μια αριθμητική μέθοδος επίλυσης μερικών διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν από διάφορους τομείς της μηχανικής και της μαθηματικής μοντελοποίησης.

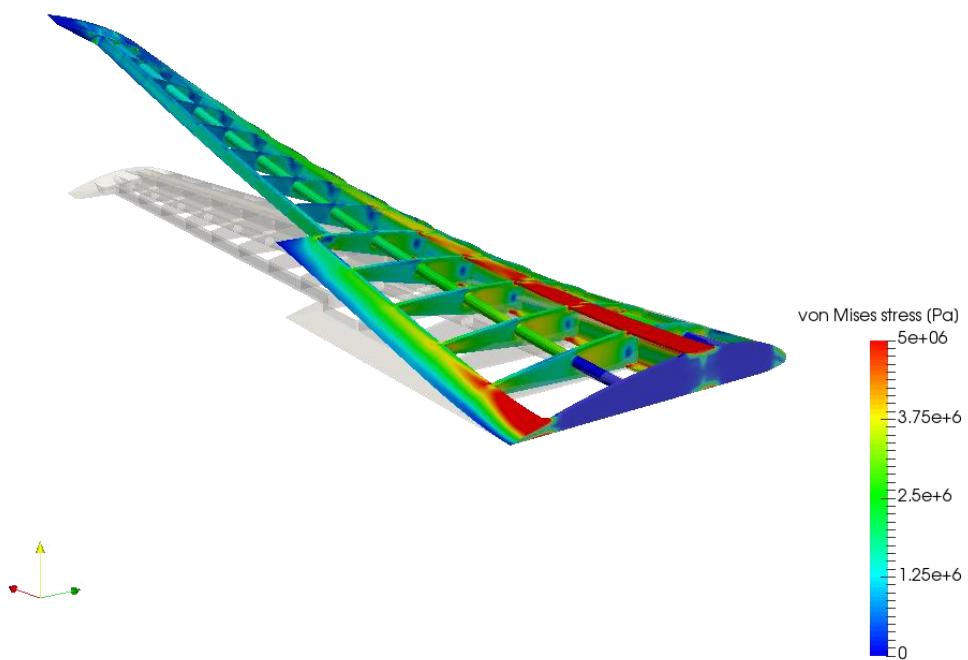
Η βασική αρχή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων είναι η διαίρεση ή διακριτοποίηση του συστήματος σε έναν αριθμό μικρότερων στοιχείων που ονομάζονται πεπερασμένα στοιχεία και πλέον το σύστημα μετατρέπεται από συνεχές σε διακριτό. Οι κόμβοι του συστήματος ορίζονται στα άκρα των πεπερασμένων στοιχείων (αναλόγως τον τύπο του στοιχείου, οι κόμβοι μπορούν να είναι και στο εσωτερικό του πεπερασμένου στοιχείου). Στους κόμβους του συστήματος ορίζονται οι βαθμοί ελευθερίας του και επομένως οι βασικές εξισώσεις που χαρακτηρίζουν τη φυσική συμπεριφορά του συστήματος είναι εκφρασμένες στους κόμβους [6]. Επιπλέον, το σύνολο των οριακών συνθηκών και φορτίων διακριτοποιούνται επίσης και

εφαρμόζονται στους κόμβους των πεπερασμένων στοιχείων. Το σύνολο των στοιχείων και κόμβων ονομάζεται **πλέγμα**.

Στα δομικά προβλήματα, όπως αυτό του λυγισμού, σκοπός είναι η κατασκευή των μητρώων δυσκαμψίας και δυνάμεων για τον υπολογισμό των μετατοπίσεων (ή αντίστοιχα, των υπολογισμό των δυνάμεων από τις μετατοπίσεις), μέσω της παρακάτω σχέσης [88]:

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (5.1)$$

Το μητρώο δυσκαμψίας εξαρτάται από τα φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος, ενώ το διάνυσμα των μετατοπίσεων προσεγγίζεται συνήθως από συναρτήσεις μορφής (shape functions), οι οποίες προσεγγίζουν με πολυώνυμα τη μετατόπιση σε κάθε στοιχείο. Όσο αυξάνεται η τάξη του πολυωνύμου, η ακρίβεια της προσέγγισης αυξάνεται. Οι παραμορφώσεις και τάσεις υπολογίζονται με βάση τις εξισώσεις ισορροπίας που διέπουν το σύστημα. Για παράδειγμα, για κελύφη χρησιμοποιούνται αυτές που παρουσιάστηκαν στο **Κεφάλαιο 3**.

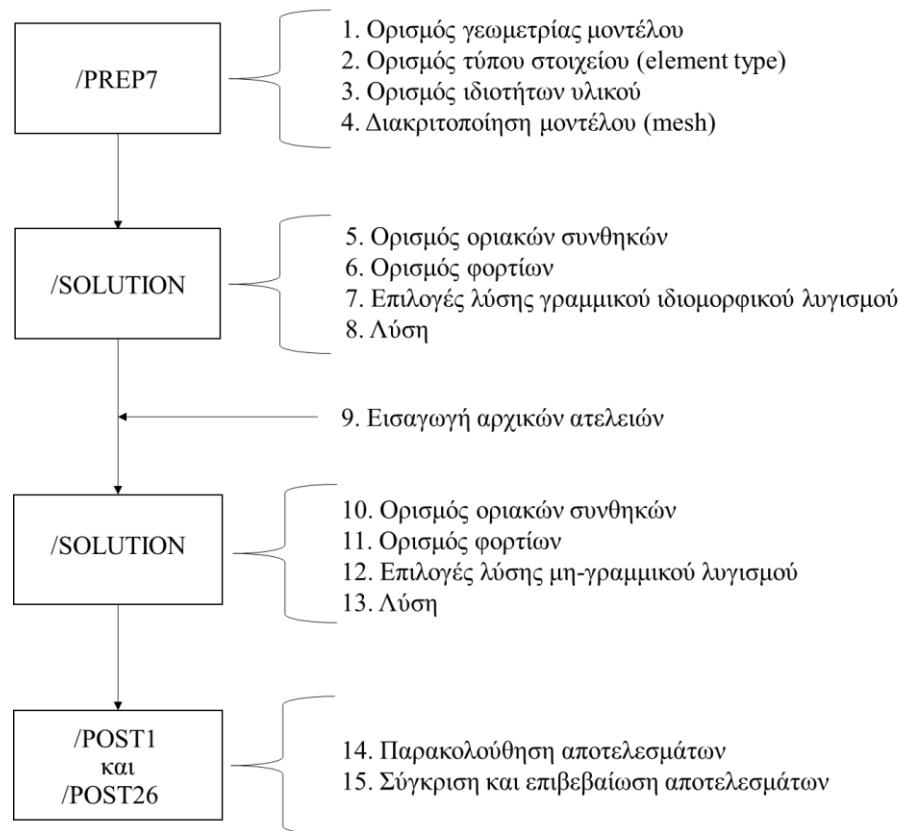


Εικόνα 5.1: Υπολογισμός τάσεων Von Mises σε δομή πτέρυγας μέσω της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων [89]

5.3 ANSYS Mechanical APDL

Το ANSYS Mechanical Parametric Design Language (APDL) είναι ένα εμπορικό λογισμικό για την επίλυση μηχανικών προβλημάτων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Το συγκεκριμένο λογισμικό παρέχει δυνατότητες δομικής ανάλυσης, συμπεριλαμβανομένων και προβλημάτων γραμμικού και μη-γραμμικού λυγισμού (μεγάλες μετατοπίσεις και μη-γραμμικής συμπεριφοράς υλικών). Ένα από τα κύρια πλεονεκτήματα του APDL και ο λόγος για τον οποίο επιλέχθηκε το συγκεκριμένο λογισμικό για τη διεξαγωγή των αριθμητικών αναλύσεων είναι η ευκολία παραμετροποίησης των προβλημάτων. Η παραμετροποίηση πραγματοποιείται μέσω κώδικα, στον οποίο ορίζονται οι παράμετροι και οι αντίστοιχες εντολές για την ανάπτυξη του μοντέλου. Οι παράμετροι μπορούν να είναι οτιδήποτε επιθυμεί ο χρήστης, όπως για παράδειγμα τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της κατασκευής, οι ιδιότητες του υλικού και τα φορτία. Επομένως, δίνεται η δυνατότητα να πραγματοποιηθεί μεγάλος αριθμός αναλύσεων, αλλάζοντας μόνο τις τιμές των παραμέτρων στον κώδικα. Επιπλέον, λόγω του ότι η ανάλυση είναι γραμμένη σε κώδικα, ο χρήστης έχει μεγαλύτερο έλεγχο και κατανόηση πάνω στο πρόβλημα που αντιμετωπίζεται. Η χρήση κώδικα επιτρέπει επιπλέον τη δημιουργία λούπας (*DO) και συνθηκών (*IF), τα οποία διευκολύνουν την εξαγωγή κάποιων αποτελεσμάτων και τη δημιουργία πολύπλοκων μοντέλων.

Στην **Εικόνα 5.2** απεικονίζεται η γενική διαδικασία κατασκευής ενός αριθμητικού μοντέλου μέσω του APDL για ανάλυση λυγισμού.



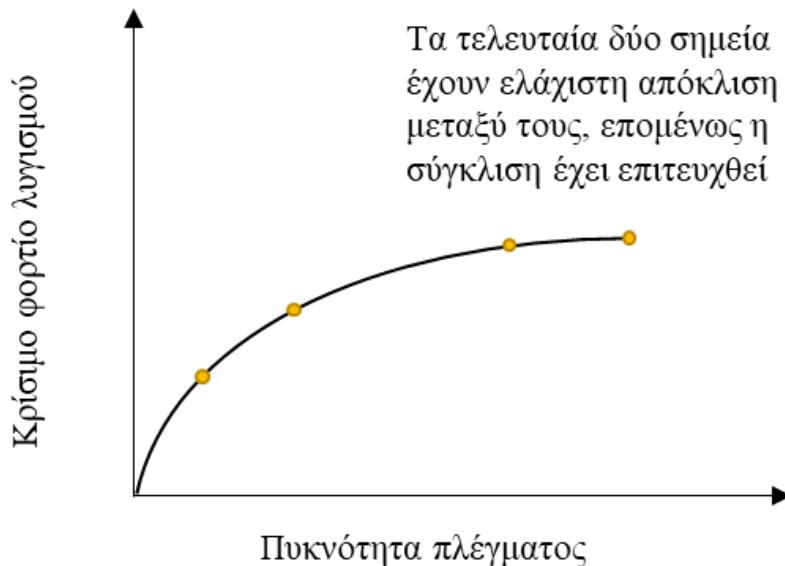
Εικόνα 5.2: Διαδικασία κατασκευής αριθμητικού μοντέλου για ανάλυση λυγισμού

5.3.1 Έλεγχος σύγκλισης πλέγματος

Στην ανάλυση προβλημάτων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχειών, μια πυκνή διακριτοποίηση συνήθως οδηγεί σε πιο ακριβείς λύσεις. Ωστόσο, ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται για τη λύση του προβλήματος αυξάνεται. Προκειμένου να βρεθεί το κατάλληλο μέγεθος του πλέγματος, ώστε τα αποτελέσματα να παρουσιάζουν ικανοποιητική ακρίβεια και παράλληλα ο υπολογιστικός χρόνος να βρίσκεται σε ένα λογικό πλαίσιο, είναι απαραίτητο να πραγματοποιηθεί έλεγχος σύγκλισης του πλέγματος [90].

Ο συνηθέστερος τρόπος με τον οποίο διεξάγεται ο προαναφερόμενος έλεγχος είναι η δημιουργία της καμπύλης σύγκλισης. Στην καμπύλη σύγκλισης, χρησιμοποιείται στον κάθετο άξονα η τιμή της λύσης μιας κρίσιμης παραμέτρου για την ανάλυση, ενώ στον οριζόντιο άξονα τοποθετείται η πυκνότητα του πλέγματος [91]. Για αναλύσεις λυγισμού, η κρίσιμη παράμετρος που επιλέγεται συνήθως είναι το γραμμικό κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Σύγκλιση επιτυγχάνεται όταν η επιλεγμένη κρίσιμη παράμετρος ανάμεσα σε δύο λύσεις του προβλήματος, παρουσιάζει μεταβολή μικρότερη από ένα προεπιλεγμένο σφάλμα. Στην Εικόνα 5.3 απεικονίζεται ένα

παράδειγμα καμπύλης σύγκλισης. Ως πυκνότητα πλέγματος μπορεί να οριστεί είτε ο συνολικός αριθμός στοιχείων, είτε ο συνολικός αριθμός βαθμών ελευθερίας, είτε το μέγεθος των χρησιμοποιούμενων στοιχείων.



Εικόνα 5.3: Παράδειγμα σύγκλισης πλέγματος

Η πυκνότητα του πλέγματος μπορεί να οριστεί είτε ολικά είτε τοπικά. Συχνά, είναι αναμενόμενο οι τάσεις σε κάποια περιοχή του μοντέλου (π.χ. σε οπές λόγω συγκεντρώσεων τάσεων) να είναι μεγαλύτερες από τις άλλες περιοχές. Η αρχή του St Venant [92] υποδηλώνει πως οι τοπικές τάσεις σε μια περιοχή της δομής δεν επηρεάζουν τις τάσεις σε κάποια άλλη περιοχή. Επομένως, είναι αποτελεσματικό σε αυτές τις περιπτώσεις, το πλέγμα να είναι πυκνότερο σε αυτές τις περιοχές ενδιαφέροντος, ενώ πιο αραιό στις υπόλοιπες.

Τέλος, είναι σημαντικό να αναφερθεί και η αριθμητική σύγκλιση. Όταν χρησιμοποιείται ένα γραμμικό, ευθύγραμμο στοιχείο για τη δημιουργία καμπυλών (όπως γίνεται στα αριθμητικά μοντέλα κελυφών που αναπτύσσονται στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας), απαιτείται πιο πυκνό πλέγμα για την πιο ακριβή αναπαράσταση της κυρτής επιφάνειας.

5.3.2 Γραμμική ιδιομορφική ανάλυση λυγισμού

Η γραμμική ανάλυση ιδιοτιμών και ιδιομορφών λυγισμού (eigenvalue buckling analysis) χρησιμοποιείται για την εκτίμηση του ελαστικού κρίσιμου φορτίου λυγισμού μιας κατασκευής που δεν παρουσιάζει ατέλειες. Στην ανάλυση αυτή απουσιάζουν οι μη-γραμμικότητες της

κατασκευής, όπως οι γεωμετρικές και του υλικού, επομένως τα αποτελέσματα που προκύπτουν από αυτή είναι συνήθως υπερεκτιμημένα. Εντούτοις, η ανάλυση αυτή είναι αρκετά σημαντική για την πρώτη εκτίμηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού και κυρίως για τον υπολογισμό των ιδιομορφών για την εισαγωγή αρχικών ατελειών στη μη-γραμμική ανάλυση.

Για τον υπολογισμό της γραμμικής συμπεριφοράς της κατασκευής σε λυγισμό, λόγω του παρακάτω πρόβλημα ιδιοτιμών για την εξαγωγή του πολλαπλασιαστή φορτίου (load multiplier) λ_i και της ιδιομορφής λυγισμού (buckling mode) ψ_i [93].

$$[K]\{\psi_i\} = \lambda_i[S]\{\psi_i\} \quad \text{ή} \quad ([K] - \lambda_i[S])\{\psi_i\} = 0 \quad (5.2)$$

Όπου:

- $[K]$ το μητρώο δυσκαμψίας της δομής
- ψ_i η ιδιομορφή λυγισμού
- λ_i η ιδιοτιμή λυγισμού ή πολλαπλασιαστής φορτίου
- $[S]$ το μητρώο δυσκαμψίας τάσεων

Για την επίλυση του ιδιομορφικού προβλήματος του λυγισμού το λογισμικό ANSYS διαθέτει δύο λύτες για την εξαγωγή των ιδιοτιμών και ιδιομορφών.

1. Μέθοδος Block Lanczos [94]
2. Μέθοδος Subspace

Όπου υπάρχει αναφορά για εφαρμογή γραμμικής ανάλυσης ιδιοτιμών και ιδιομορφών λυγισμού στην παρούσα διπλωματική, θα υπονοείται η χρήση της μεθόδου Block Lanczos. Οι δύο μέθοδοι παρουσιάζουν αμελητέα διαφορά στα αποτελέσματα του πολλαπλασιαστή φορτίου και της ιδιομορφής λυγισμού, όμως η Block Lanczos απαιτεί λιγότερο υπολογιστικό χρόνο [95].

5.3.3 Εισαγωγή γεωμετρικών ατελειών

Οι αρχικές ατέλειες και ο τρόπος εισαγωγής τους επηρεάζουν σημαντικά τη συμπεριφορά κελυφών σε λυγισμό. Η έρευνα των Martins και λοιπών [96] έδειξε πως η εναισθησία των κελυφών σε αρχικές ατέλειες είναι μεγαλύτερη, όσο η καμπυλότητα του κελύφους αυξάνεται, καθώς και ότι η αύξηση του μεγέθους της γεωμετρικής ατέλειας συνεπάγεται κατά κόρον και μείωση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Παρόλα αυτά, η μεταλυγισμική συμπεριφορά για όλα τα μεγέθη αρχικών ατελειών είναι όμοια. Στο ίδιο συμπέρασμα κατέληξε και ο Domb [97], ο

οποίος τονίζει πως τα κελύφη με καμπυλότητα είναι εξαιρετικά ευαίσθητα στο μέγεθος των αρχικών ατελειών, ιδίως όταν στην κατασκευή ενεργούν θλιπτικά φορτία.

Υπάρχουν δύο τρόποι με τους οποίους μπορεί να εισαχθεί η αρχική γεωμετρική ατέλεια στην κατασκευή. Αυτοί είναι:

1. Εισαγωγή αρχικής ατέλειας ως γραμμικός συνδυασμός των n ιδιομορφών λυγισμού της κατασκευής
2. Άμεσος ορισμός της αρχικής γεωμετρικής ατέλειας

Ο πρώτος τρόπος είναι ο πιο δημοφιλής και συνήθως χρησιμοποιείται μόνο η πρώτη ιδιομορφή της κατασκευής. Οι αρχικές ατέλειες με αυτόν τον τρόπο εισάγονται ως ένα ποσοστό τοις εκατό του πάχους της κατασκευής, δηλαδή $\alpha_0 = X\% \cdot t$. Στο ANSYS ο συγκεκριμένος τρόπος μπορεί να εφαρμοστεί πολύ εύκολα, καθώς υπολογίζεται το σύνολο των επιθυμητών ιδιομορφών μέσω της γραμμικής ιδιομορφικής ανάλυσης και έπειτα μέσω της εντολής /UPGEOM, δίνεται η δυνατότητα στο χρήστη να χρησιμοποιήσει την παραμορφωμένη γεωμετρία πολλαπλασιασμένη με έναν ορισμένο συντελεστή.

Ο δεύτερος τρόπος χρησιμοποιείται συνήθως όταν έχει πραγματοποιηθεί πειραματική μέτρηση της γεωμετρικής ατέλειας της κατασκευής [98]. Κατά αυτήν την έννοια, τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη μεταλυγισμική ανάλυση της κατασκευής είναι πιο ρεαλιστικά. Αφού μετρηθούν πειραματικά οι ατέλειες, εισάγεται η μετρούμενη μετατόπιση σε κάθε κόμβο του μοντέλου και έπειτα πραγματοποιείται η ανάλυση. Στο ANSYS, ο τρόπος αυτός μπορεί να πραγματοποιηθεί κατασκευάζοντας την τέλεια γεωμετρία (πχ ένα κέλυφος) και έπειτα τροποποιώντας τις συντεταγμένες των κόμβων στα επιθυμητά σημεία, μέσω της εντολής NMODIF.

5.4 Μη-γραμμικές μέθοδοι

Η γραμμική ανάλυση ιδιοτιμών και ιδιομορφών δεν λαμβάνει υπόψη τη μη-γραμμικότητα του υλικού και τη γεωμετρική μη-γραμμικότητα. Επομένως, οι τιμές του κρίσμου φορτίου λυγισμού που προκύπτουν από αυτή είναι συνήθως υπερεκτιμημένες. Επιπλέον, δεν δίνεται η δυνατότητα της πρόβλεψης της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς της κατασκευής. Για την ακριβέστερη ανάλυση της συμπεριφοράς μια κατασκευής, είναι απαραίτητο να

χρησιμοποιηθούν μέθοδοι μη-γραμμικής ανάλυσης. Ο τρόπος εφαρμογής της μη-γραμμικής ανάλυσης του λυγισμού αποτελείται στις περισσότερες περιπτώσεις από τρία βήματα.

- **Βήμα 1: Διαίρεση του φορτίου.** Οι υποδιαιρέσεις που προκύπτουν προστίθενται σε κάθε επανάληψη του λύτη που χρησιμοποιείται. Οι μικρότερες υποδιαιρέσεις χρησιμεύουν για την αντιμετώπιση των προβλημάτων σύγκλισης του λύτη, όμως ο υπολογιστικός χρόνος της λύσης αυξάνεται. Σημειώνεται πως αντί για διαίρεση του φορτίου, υπάρχει δυνατότητα διαίρεσης της μετατόπισης η οποία επιβάλλεται σε κάθε βήμα του λύτη.
- **Βήμα 2: Εφαρμογή του φορτίου σε κάθε βήμα.** Χρησιμοποιείται ένας λύτης (συνήθως η μέθοδος Newton-Raphson) για τη λύση του συστήματος εξισώσεων για κάθε βήμα. Συμπεριλαμβάνονται και όροι μεγαλύτερης τάξης ώστε να εισαχθούν στο πρόβλημα οι γεωμετρικές ατέλειες (μέσω της επιλογής /NLGEOM,ON) στο ANSYS APDL). Μπορούν επίσης να συμπεριληφθούν και οι μη-γραμμικότητες των υλικών.
- **Βήμα 3: Εμφάνιση των αποτελεσμάτων.** Συνήθως εξάγονται καμπύλες φορτίου-μετατόπισης, από τις οποίες διακρίνεται το κρίσιμο φορτίου λυγισμού καθώς και η μεταλυγισμική συμπεριφορά της κατασκευής. Η μεταλυγισμική συμπεριφορά χαρακτηρίζεται κυρίως από την κλίση της καμπύλης, καθώς αρνητική κλίση της καμπύλης υποδηλώνει πως η κατασκευή δεν μπορεί να φέρει τα φορτία μετά το λυγισμό. Επιπλέον, είναι διαθέσιμα τα αποτελέσματα των τάσεων και των παραμορφώσεων, τα οποία είναι ύψιστης σημασίας για το σχεδιασμό κατασκευών.

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται από το ANSYS APDL για την επίλυση των μη-γραμμικών προβλημάτων είναι η μέθοδος Newton-Raphson και η μέθοδος Μήκους Τόξου (arc length method). Παρακάτω περιγράφονται οι δύο προαναφερόμενοι μέθοδοι.

Όσον αφορά τις μη-γραμμικότητες των υλικών, όπως για παράδειγμα η πλαστικότητα, το ANSYS προσφέρει αρκετές δυνατότητες μη-γραμμικών μοντέλων συμπεριφοράς υλικών.

5.4.1 Μέθοδος Newton-Raphson

Η διαδικασία της διακριτοποίησης ενός προβλήματος μέσω της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων αποδίδει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων της μορφής:

$$[K]\{u\} = \{F^a\} \quad (5.3)$$

όπου

- $[K]$ το μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής
- u το διάνυσμα των áγνωστων βαθμών ελευθερίας
- $\{F^a\}$ το διάνυσμα των εξωτερικών εφαρμοζόμενων δυνάμεων

Αν το μητρώο δυσκαμψίας είναι από μόνο του συνάρτηση των áγνωστων βαθμών ελευθερίας (ή των παραγώγων τους), τότε η **Εξίσωση (5.3)** είναι μη-γραμμική. Η μέθοδος Newton-Raphson είναι μια επαναληπτική διαδικασία λύσης μη-γραμμικών εξισώσεων και μπορεί να γραφεί σύμφωνα με τον Bathe [99] ως:

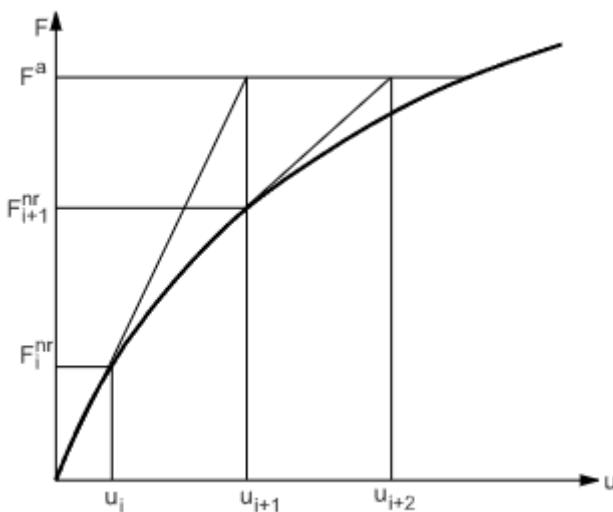
$$[K_i^T]\{\Delta u_i\} = \{F^a\} - \{F_i^{nr}\} \quad (5.4)$$

$$\{u_{i+1}\} = \{u_i\} + \{\Delta u_i\} \quad (5.5)$$

όπου:

- i ο δείκτης που αντιπροσωπεύει το τρέχον βήμα επανάληψης
- $\{K_i^T\}$ το εφαπτομενικό μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής στην επανάληψη i
- $\{\Delta u_i\}$ η επαύξηση του τρέχοντος διανύσματος μετατοπίσεων
- $\{F_i^{nr}\}$ το διάνυσμα των εσωτερικών δυνάμεων που αντιστοιχούν στις εσωτερικές τάσεις των στοιχείων στην επανάληψη i

Τα $[K_i^T]$ και $\{F_i^{nr}\}$ εκτιμώνται με βάση τις τιμές που δίνονται από το $\{u_i\}$. Το δεξί μέρος της **Εξίσωσης (5.4)** ονομάζεται υπολειπόμενο (residual) ή εκτός ισορροπίας διάνυσμα: αντιπροσωπεύει, δηλαδή, την ποσότητα κατά την οποία το σύστημα είναι εκτός ισορροπίας. Στην **Εικόνα 5.4** απεικονίζονται γραφικά δύο επαναλήψεις της μεθόδου Newton-Raphson για ένα μοντέλο ενός βαθμού ελευθερίας.



Εικόνα 5.4: Δύο επαναλήψεις της μεθόδου Newton-Raphson για ένα μοντέλο ενός βαθμού ελευθερίας

Είναι προφανές πως η μέθοδος χρειάζεται περισσότερες της μια επανάληψης ώστε να ληφθεί μια συγκλίνουσα λύση. Ο γενικός αλγόριθμος της μεθόδου Newton-Raphson έχει ως εξής:

1. Πραγματοποιείται υπόθεση για το $\{u_0\}$. Το $\{u_0\}$ συνήθως έχει τη συγκλίνουσα τιμή του προηγούμενου χρονικού βήματος. Για το πρώτο χρονικό βήμα, γίνεται η υπόθεση $\{u_0\}=0$.
2. Υπολογίζεται το αναθεωρημένο εφαπτομενικό μητρώο δυσκαμψίας και το διάνυσμα των εσωτερικών δυνάμεων $\{F_i^{nr}\}$ από τη διαμόρφωση $\{u_1\}$.
3. Υπολογίζεται το $\{\Delta u_i\}$ από την **Εξίσωση (5.4)**.
4. Υπολογίζεται η επόμενη προσέγγιση $\{u_{i+1}\}$ από την **Εξίσωση (5.5)**.
5. Επαναλαμβάνονται τα βήματα 2 έως 4 μέχρις ότου να πραγματοποιηθεί σύγκλιση.

Η λύση που προκύπτει στο τέλος της επαναληπτικής διαδικασίας αντιστοιχεί στο φορτίο $\{F^a\}$. Η τελική συγκλίνουσα λύση θεωρείται πως βρίσκεται σε ισορροπία, έτσι ώστε το διάνυσμα των εσωτερικών δυνάμεων $\{F_i^{nr}\}$ να είναι ίσο με το διάνυσμα των εξωτερικών εφαρμοζόμενων φορτίων (στα πλαίσια κάποιων ανοχών). Στην περίπτωση που η ανάλυση περιλαμβάνει μηγραμμικότητες που εξαρτώνται από το ιστορικό ή την καμπύλη της μετατόπισης (όπως η πλαστικότητα), τότε η λύση απαιτεί κάποια ενδιάμεσα βήματα να βρίσκονται σε ισορροπία έτσι ώστε να ακολουθείται ορθά η καμπύλη του φορτίου. Αυτό επιτυγχάνεται αποτελεσματικά προσδιορίζοντας μια σταδιακά αυξανόμενη ανάλυση· δηλαδή το τελικό διάνυσμα εξωτερικών

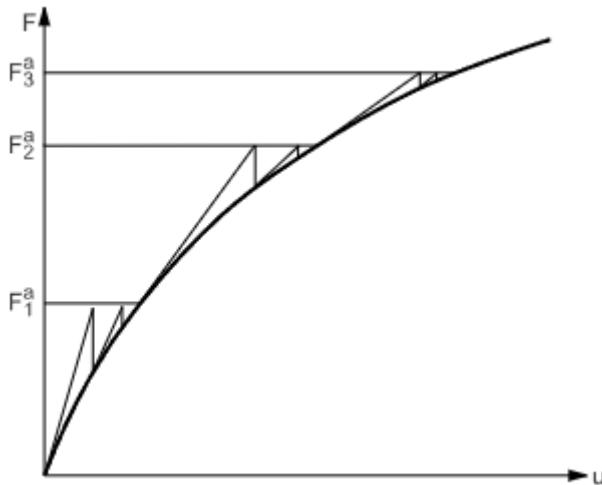
δυνάμεων $\{F^a\}$ επιτυγχνάνεται εφαρμόζοντας το φορτίο σε προσαυξήσεις και εκτελώντας τη μέθοδο Newton-Raphson σε κάθε βήμα προσαύξησης.

$$[K_{n,i}^T] \{\Delta u_i\} = \{F_n^a\} - \{F_{n,i}^{nr}\} \quad (5.6)$$

όπου

- $[K_{n,i}^T]$ το εφαπτομενικό μητρώο δυσκαμψίας για το χρονικό βήμα n , επανάληψη i
- $\{F_n^a\}$ το διάνυσμα των εξωτερικών εφαρμοζόμενων δυνάμεων στο χρονικό βήμα n
- $\{F^a\}$ το διάνυσμα των εξωτερικών εφαρμοζόμενων δυνάμεων για χρονικό βήμα n , επανάληψη i

Η διαδικασία αυτή ονομάζεται αυξητική (incremental) μέθοδος Newton-Raphson. Συχνά, χρησιμοποιείται η αυξητική μέθοδος και σε προβλήματα όπου δεν παρουσιάζονται οι προαναφερόμενες μη-γραμμικότητες, έτσι ώστε να προκύψει λύση που να αντιστοιχεί στο τελικό φορτίο, καθώς η μέθοδος Newton-Raphson εγγυάται τη σύγκλιση του προβλήματος, μόνο αν η λύση σε οποιαδήποτε επανάληψη $\{u_i\}$ βρίσκεται κοντά στην τελική λύση. Στην **Εικόνα 5.5** απεικονίζεται γραφική η αυξητική μέθοδος Newton-Raphson.



Εικόνα 5.5: Αυξητική μέθοδος Newton-Raphson

Η επαναληπτική διαδικασία που περιγράφηκε προηγουμένως συνεχίζει έως ότου επιτευχθεί σύγκλιση στο αποτέλεσμα.. Σύγκλιση θεωρείται πως υπάρχει όταν

$$\|\{R\}\| < \varepsilon_R R_{ref} \quad (5.7)$$

και/ή

$$\|\{\Delta u_i\}\| < \varepsilon_u u_{ref} \quad (5.8)$$

όπου $\{R\}$ το υπολειπόμενο διάνυσμα, το οποίο είναι ίσο με το δεξί μέρος της **Εξίσωσης (5.6)**, ε_R και ε_u είναι οι ανοχές, R_{ref} και u_{ref} οι τιμές αναφοράς και $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα διανύσματος, δηλαδή ένα μονόμετρο μέγεθος του μέτρου του διανύσματος.

5.4.2 Μέθοδος Μήκους Τόξου

Η μέθοδος Μήκους Τόξου (Arc-Length method ή Modified Riks method [100]) είναι μια αποτελεσματική μέθοδος επίλυσης μη-γραμμικών συστημάτων εξισώσεων όταν το πρόβλημα παρουσιάζει ένα ή περισσότερα κρίσιμα σημεία. Σε ένα δομικό μηχανικό πρόβλημα, κρίσιμο σημείο θεωρείται το σημείο στο οποίο το σώμα δεν μπορεί να υποστηρίξει την αύξηση των εξωτερικών φορτίων και επέρχεται αστάθεια. Επομένως, η μέθοδος αυτή είναι χρήσιμη - ιδίως για προβλήματα λυγισμού - καθώς η μέθοδος Newton-Raphson δεν μπορεί πάντα να ακολουθήσει την καμπύλη του φορτίου όταν αυτή έχει πτωτική τάση και έτσι η μέθοδος δεν συγκλίνει σε ορισμένα σημεία της καμπύλης φορτίου-μετατόπισης [101]. Για αυτόν το λόγο, όταν απαιτείται ο υπολογισμός της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς μιας κατασκευής, η χρήση της μεθόδου μήκους τόξου είναι συνήθως απαραίτητη.

Το ANSYS χρησιμοποιεί την εναλλακτική διατύπωση του Crisfield για τη μέθοδο Μήκους Τόξου [102], η οποία έχει την ικανότητα να εμποδίζει την οποιαδήποτε διακύμανση του βήματος (της διαίρεσης του συνολικού εξωτερικού φορτίου) κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων ισορροπίας. Γίνεται η υπόθεση πως το μέγεθος όλων των φορτίων μπορεί να ελεγχθεί από μια βαθμωτή παράμετρο, η οποία ονομάζεται συνολική παράμετρος φορτίου.

Για τη διαδικασία της μεθόδου Μήκους Τόξου, γράφεται ξανά η **Εξίσωση (5.3)**, συμπεριλαμβάνοντας τη συνολική παράμετρο φορτίου λ .

$$[K_i^T]\{\Delta u_i\} = \lambda\{F^a\} - \{F_i^{nr}\} \quad (5.9)$$

Γράφοντας την παράμετρο λ σε μια επαναληπτική μορφή στο βήμα n και επανάληψη i οδηγεί στην παρακάτω σχέση

$$[K_i^T]\{\Delta u_i\} = \{\lambda_n + \lambda_i\}\{F^a\} - \{F_i^{nr}\} = -\{R_i\} \quad (5.10)$$

Ομοίως η επαύξηση του τρέχοντος διανύσματος μετατοπίσεων $\{\Delta u_i\}$ γράφεται ως

$$\{\Delta u_i\} = \Delta\lambda\{\Delta u_i^1\} + \{\Delta u_i^2\} \quad (5.11)$$

όπου

$$\{\Delta u_i^1\} = [K_i^T]^{-1}\{F_a\} \quad (5.12\alpha)$$

$$\{\Delta u_i^2\} = -[K_i^T]^{-1}\{R_i\} \quad (5.12\beta)$$

Για κάθε επανάληψη της μεθόδου, είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθεί η **Εξίσωση (5.12α)** και η **Εξίσωση (5.12β)** για τον υπολογισμό των $\{\Delta u_i^1\}$ και $\{\Delta u_i^2\}$.

Ορίζεται ένα διάνυσμα μεταξύ του προηγούμενου σημείου ισορροπίας της μεθόδου και ενός σημείου που καθορίζεται στην επανάληψη i

$$t_i = \{\Delta u_n\} + \beta \lambda_i \quad (5.13)$$

όπου $\{\Delta u_n\}$ η επανέξηση του διανύσματος μετατοπίσεων έως το τρέχων βήμα και β το διάνυσμα κλιμάκωσης των μετατοπίσεων. Η νόρμα του διανύσματος αυτού είναι:

$$|t_i| = \sqrt{\{\Delta u_n\}^t \{\Delta u_n\} + \beta^2 \lambda_i^2} \quad (5.14)$$

Στην επανάληψη $i+1$, το διάνυσμα γράφεται ως εξής

$$t_{i+1} = \{\Delta u_n\} + \{\Delta u_i\} + \beta(\lambda_i + \Delta \lambda) \quad (5.15)$$

Η μέθοδος του Crisfield υποθέτει πως η νόρμα του διανύσματος είναι σταθερή ανάμεσα στις επαναλήψεις ισορροπίας, το οποίο συνεπάγεται πως $|t_i| = |t_{i+1}|$. Αντικαθιστώντας την **Εξίσωση (5.13)** και **Εξίσωση (5.15)** στην προηγούμενη ισότητα και χρησιμοποιώντας την **Εξίσωση (5.11)**, παράγεται η δευτεροβάθμια εξίσωση:

$$\alpha(\Delta \lambda)^2 + b(\Delta \lambda) + c = 0 \quad (5.16)$$

Οπου

$$\alpha = \beta^2 + \{\Delta u_i^1\}^t \{\Delta u_i^1\} \quad (5.17\alpha)$$

$$b = 2(\beta^2 \lambda_i + \{\Delta u_n\}^t \{\Delta u_i^1\} + \{\Delta u_i^2\}^t \{\Delta u_i^1\}) \quad (5.17\beta)$$

$$c = 2\{\Delta u_n\}^t \{\Delta u_i^2\} + \{\Delta u_i^2\}^t \{\Delta u_i^2\} \quad (5.17\gamma)$$

Η **Εξίσωση (5.16)** έχει δύο πραγματικές ρίζες $\Delta \lambda^{(1)}$ και $\Delta \lambda^{(2)}$, οι οποίες ικανοποιούν τη σταθερή ακτίνα μήκους-τόξου. Για καθεμία από τις ρίζες, ορίζεται η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων t_{n-1} (του προηγούμενου συγκλίνων βήματος) και t_{n+1} (του τρέχοντος βήματος). Όποια από τις

γωνίες είναι πιο κοντά στην τιμή 1, επιλέγεται η αντίστοιχη επαύξηση της παραμέτρου φορτίου $\Delta\lambda$. Η γωνία υπολογίζεται από τη σχέση:

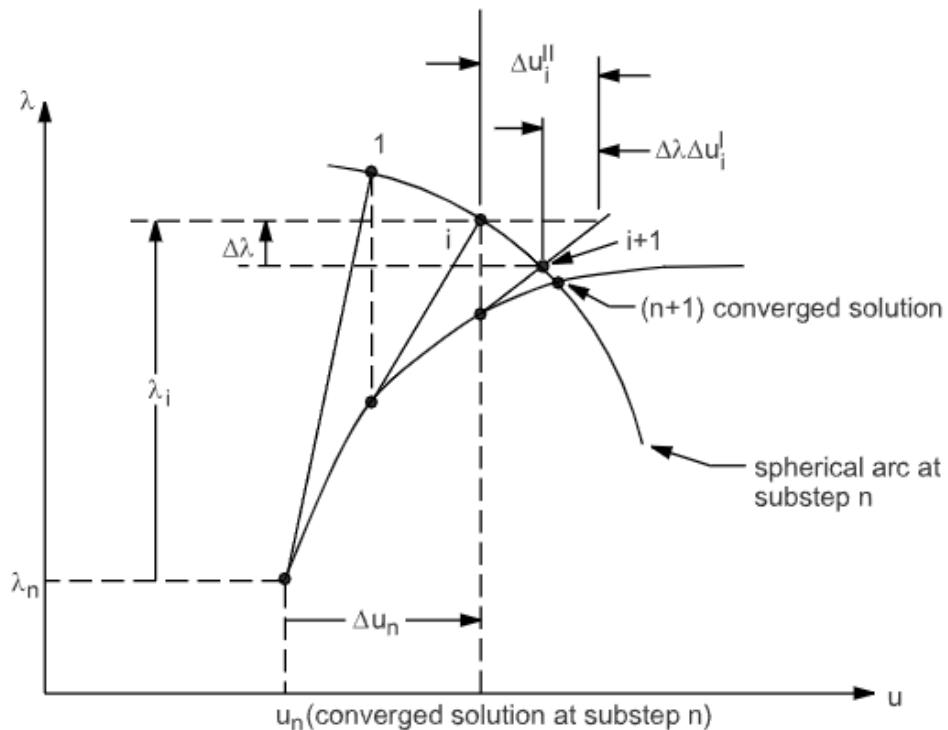
$$\cos\theta = \frac{(t_{i+1})^T \cdot (t_{n-1})}{|t_n| \cdot |t_{n-1}|} \quad (5.18)$$

Τέλος, τα διανύσματα της μετατόπισης και της παραμέτρου φορτίου υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\{u_{i+1}\} = \{u_n\} + \{\Delta u_n\} + \{\Delta u_i\} \quad (5.19)$$

$$\lambda_{i+1} = \lambda_n + \lambda_i + \Delta\lambda \quad (5.20)$$

Στην **Εικόνα 5.6** απεικονίζεται γραφικά η μέθοδος Μήκος Τόξου.



Εικόνα 5.6: Μέθοδος Μήκους Τόξου [93]

Παρά τη χρηστικότητα της μεθόδου, παρουσιάζει κάποια μειονεκτήματα [103]. Η δευτεροβάθμια **Εξίσωση (5.16)** στη γενική περίπτωση οδηγεί σε δύο διακριτές λύσεις του $\Delta\lambda$ και κατά συνέπεια σε δύο λύσεις του $\{\Delta u_i\}$. Επομένως, σε κάθε επανάληψη της μεθόδου, υπολογίζονται δύο σετ λύσεων, συγκεκριμένα $(\Delta u_i^{(1)}, \Delta\lambda^{(1)})$ και $(\Delta u_i^{(2)}, \Delta\lambda^{(2)})$. Η παραπάνω παρατήρηση είναι προφανής, καθώς ένας κύκλος (ή μια έλλειψη) πάντα θα τέμνουν μια

καμπύλη σε δύο σημεία, αν το κέντρο του βρίσκεται πάνω στην καμπύλη. Το πρόβλημα έγκειται στην επιλογή του σωστού σετ ($\delta u_i, \Delta \lambda$) για την ανανέωση της λύσης. Γενικά, θεωρείται επιθυμητή η επιλογή του σετ κατά το οποίο η λύση «εξελίσσεται προς τα εμπρός», δηλαδή σε ένα σημείο στο οποίο δεν έχει πραγματοποιηθεί ακόμη η σύγκλιση και όχι σε ένα προηγούμενο σημείο της λύσης. Σε μη-γραμμικά προβλήματα αστάθειας, συνήθως η σωστή λύση οδηγεί σε αύξηση των μετατοπίσεων και κατά συνέπεια του διανύσματος επαύξησης μετατοπίσεων $\{\Delta u_i\}$. Ωστόσο, υπάρχουν προβλήματα αστάθειας τύπου snap-back, κατά την οποία υπάρχει περίπτωση να παρατηρείται μείωση των μετατοπίσεων σε κάποια κρίσιμα σημεία.

6 Ανάπτυξη και επιβεβαίωση αριθμητικών μοντέλων

6.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα διεξαχθεί η αριθμητική ανάλυση του φαινομένου του λυγισμού για διάφορες χαρακτηριστικές περιπτώσεις φόρτισης. Οι περιπτώσεις φόρτισης μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ανάλογα με το αν η φόρτιση είναι μονο-αξονική ή πολυ-αξονική. Όσον αφορά τις μονο-αξονικές φορτίσεις, θα αναπτυχθούν μοντέλα για το λυγισμό και τη μεταλυγισμική συμπεριφορά δομών υπό θλιπτική ή εντός επιπέδου διατμητική φόρτιση. Οι δομές αυτές μπορεί να είναι επίπεδες πλάκες, επίπεδες ενισχυμένες πλάκες, κελύφη και ενισχυμένα κελύφη. Οι πολυ-αξονικές φορτίσεις περιλαμβάνουν το συνδυασμό φόρτισης σε θλίψη και διάτμηση. Όλα τα μοντέλα που αναπτύσσονται σε αυτό το κεφάλαιο γράφονται σε παραμετρικό κώδικα ANSYS Mechanical APDL. Οι παράμετροι που ορίζονται είναι όλα τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των δομών, τα οποία μπορεί να είναι το μήκος, πλάτος, πάχος ελάσματος και ενισχυτικών δομών, ο αριθμός των ενισχυτικών στοιχείων, οι αποστάσεις μεταξύ των ενισχυτικών δομών, οι διάφορες ιδιότητες των υλικών, οι οριακές συνθήκες, καθώς και οτιδήποτε σχετίζεται με διεξαγωγή της αριθμητικής ανάλυσης (πυκνότητα πλέγματος, αριθμός βημάτων κτλ.). Ακόμα και σε περιπτώσεις που δεν μπορεί να επιτευχθεί παραμετροποίηση, όπως για παράδειγμα στο σχήμα των ενισχυτικών δομών, οι κώδικες μπορούν εύκολα να τροποποιηθούν για το επιθυμητό πρόβλημα. Τα αποτελέσματα των μοντέλων επιβεβαιώνονται (verification) με τη χρήση αναλυτικών σχέσεων και πειραματικών αποτελεσμάτων ή επικυρώνονται (validation) μέσω σύγκρισης με αποτελέσματα αριθμητικών μοντέλων της βιβλιογραφίας, στα οποία έχει επιτευχθεί ένας βαθμός επιβεβαίωσης.

Το κεφάλαιο χωρίζεται σε τρία υποκεφάλαια, τα οποία είναι η περίπτωση φόρτισης θλίψης, η περίπτωση φόρτισης διάτμησης και η συνδυασμένη φόρτιση. Σε κάθε ένα από αυτά, θα περιλαμβάνονται τα διάφορα μοντέλα που αναπτύσσονται και επιβεβαιώνονται ή επικυρώνονται.

6.2 Περίπτωση φόρτισης αξονικής θλίψης

Παρακάτω θα πραγματοποιηθεί ανάπτυξη των αριθμητικών μοντέλων για την περίπτωση φόρτισης αξονικής θλίψης. Οι δομές που περιλαμβάνονται στο παρόν υποκεφάλαιο είναι:

- Επίπεδη πλάκα
- Επίπεδη ενισχυμένη πλάκα
- Κέλυφος
- Ενισχυμένο κέλυφος

Σημειώνεται πως στην περίπτωση του ενισχυμένου κελύφους, θα χρησιμοποιηθεί σύνθετο υλικό (πολυστρωματικό), έτσι ώστε να επεκταθούν και επιβεβαιωθούν τα μοντέλα και για τη χρήση τέτοιων υλικών, καθώς διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην αεροναυπηγική βιομηχανία.

6.2.1 Επίπεδη πλάκα

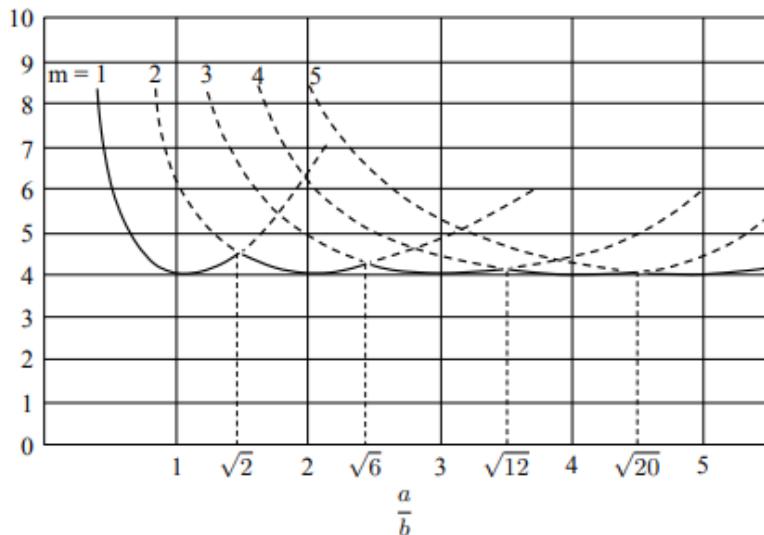
Ο απλούστερος τρόπος με τον οποίο μπορεί να μοντελοποιηθεί το κέλυφος της ατράκτου (skin) ενός αεροσκάφους είναι ως μία επίπεδη πλάκα, διαστάσεων $a \times b \times t$. Για το λυγισμό επίπεδων πλακών, το ελαστικό κρίσιμο φορτίο λυγισμού μπορεί να υπολογιστεί από την παρακάτω αναλυτική εξίσωση [9]

$$\sigma_{\kappa\rho} = \kappa \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2, \quad (6.1)$$

όπου κ η παράμετρος λυγισμού. Η παράμετρος λυγισμού είναι συνάρτηση του λόγου των πλευρών a/b και των οριακών συνθηκών του προβλήματος και δίνεται από την εξίσωση:

$$\kappa = \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2 \quad (6.2)$$

Για απλή αμφιέριστη πλάκα, η παράμετρος λυγισμού κ συναρτήσει του λόγου των πλευρών δίνεται από την **Εικόνα 6.1**. Το m στη σχέση αντιπροσωπεύει τον αριθμό των κυματομορφών που σχηματίζονται στην πλάκα.



Εικόνα 6.1: Παράμετρος λυγισμού κ για απλή αμφιέριστη πλάκα [104]

Έστω μια λεπτότοιχη ορθογώνια επίπεδη πλάκα η οποία φορτίζεται με αξονική θλίψη. Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά και οι ιδιότητες του υλικού που χρησιμοποιούνται βασίζονται στην ανάλυση του Qi [105] και φαίνονται στους **Πίνακες 6.1** και **6.2** αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα της μεταλυγισμικής ανάλυσης της επίπεδης πλάκας θα συγκριθούν με τα αντίστοιχα του Qi, ώστε να επιβεβαιωθεί το μοντέλο. Στο μοντέλο χρησιμοποιούνται στοιχεία κελύφους SHELL181, τα οποία είναι ιδανικά για τη μοντελοποίηση λεπτότοιχων κατασκευών. Το μέγεθος του στοιχείου καθορίζεται από έναν έλεγχο σύγκλισης πλέγματος, όπως περιγράφηκε στο **Κεφάλαιο 5**, χρησιμοποιώντας την τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού σ_{cr} ως παράμετρο. Επιλέγεται μέγεθος στοιχείου ίσο με $5 \times 5 mm^2$, σύμφωνα με τον **Πίνακα 6.3** και τον έλεγχο σύγκλισης πλέγματος που παρουσιάζεται στην **Εικόνα 6.2**. Η διακριτοποιημένη πλάκα μαζί με τις οριακές συνθήκες απεικονίζεται στην **Εικόνα 6.3**. Οι οριακές συνθήκες που επιλέγονται για το πρόβλημα είναι αυτές της απλής στηριζόμενης πλάκας ή αμφιέριστης πλάκας με την προσθήκη του επιπλέον περιορισμού να παραμένουν ευθύγραμμες οι μηφορτιζόμενες πλευρές. Ο λόγος που εισάγεται ο επιπλέον περιορισμός, είναι πως αντιπροσωπεύει ακριβέστερα το πρόβλημα του λυγισμού ελασμάτων ανάμεσα στα ενισχυτικά στοιχεία.

Πίνακας 6.1: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά επίπεδης πλάκας: Αξονική θλίψη

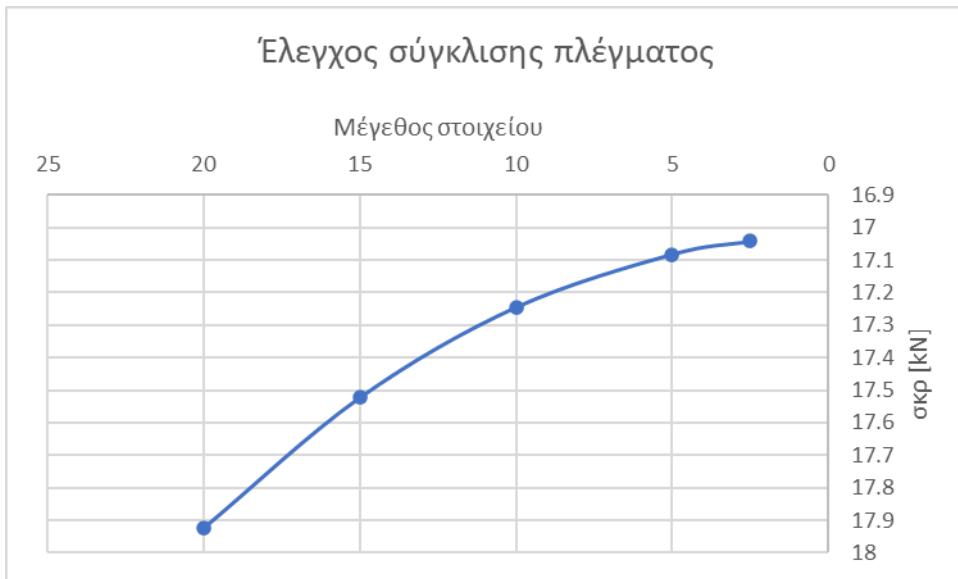
Μήκος a	Πλάτος b	Πάχος t	a/b	Αριθμός κυματομορφών
[mm]	[mm]	[mm]	-	Εικόνα 6.1
480	120	2	4	4

Πίνακας 6.2: Ιδιότητες υλικού επίπεδης πλάκας: Αξονική θλίψη

E [GPa]	v
70	0.316

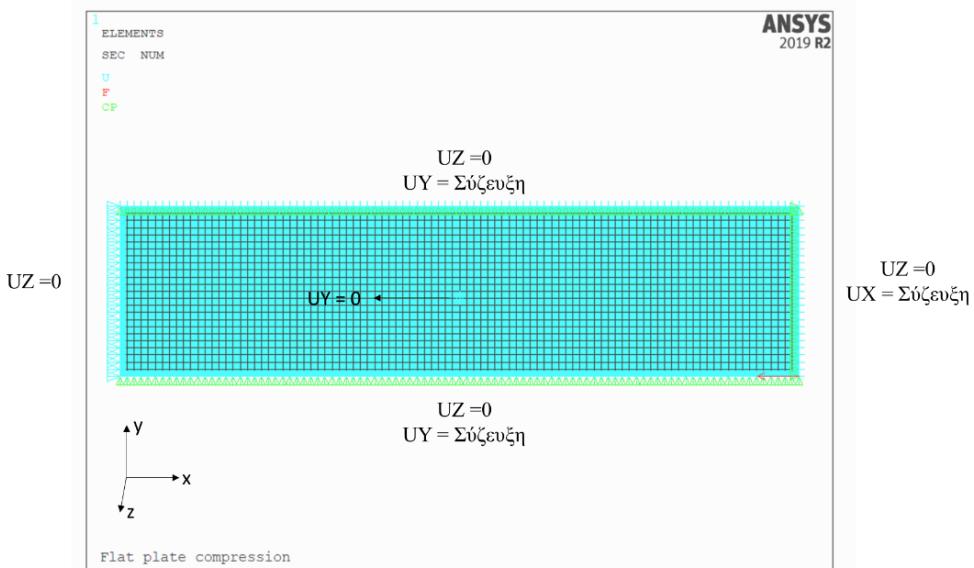
Πίνακας 6.3: Έλεγχος σύγκλισης πλέγματος επίπεδης πλάκας: Αξονική θλίψη

Έλεγχος σύγκλισης πλέγματος		
Μέγεθος στοιχείου	σ_{kp} [kN]	δ (%)
20	17.925	-
15	17.523	2.29
10	17.245	1.61
5	17.082	0.95
2.5	17.042	0.23



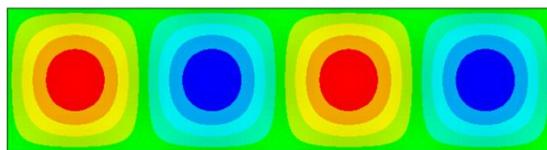
Εικόνα 6.2: Έλεγχος σύγκλισης πλέγματος επίπεδης πλάκας: Περίπτωση αξονικής θλίψης

Προκειμένου να μοντελοποιηθεί η συνθήκη να παραμένουν οι πλευρές ευθύγραμμες, εισάγεται συζευγμένη οριακή συνθήκη (CP στο APDL) στις δύο μη-φορτιζόμενες πλευρές, κατά την οποία οι πλευρές αυτές έχουν την ίδια μετατόπιση για τη διάρκεια της ανάλυσης. Τέλος, για να αποφευχθεί η κίνηση στερεού σώματος, θα πρέπει να περιοριστεί ένας επιπλέον κόμβος του προβλήματος ως προς τη για διεύθυνση. Ο κόμβος που περιορίζεται βρίσκεται στο κέντρο της ορθογώνιας πλάκας. Η φόρτιση (ή μετατόπιση) της πλάκας εισάγεται από τη δεξιά πλευρά, σύμφωνα με την **Εικόνα 6.3**.

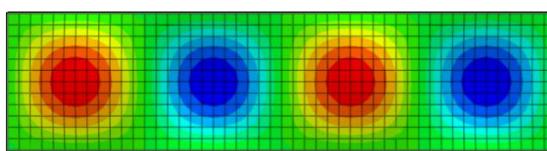


Εικόνα 6.3: Οριακές συνθήκες επίπεδης πλάκας: Αξονική θλίψη

Στην **Εικόνα 6.4** απεικονίζεται η εκτός επιπέδου μετατόπιση της πρώτης ιδιομορφής και συγκρίνεται με αυτή του Qi. Παρατηρείται πως είναι όμοιες οι ιδιομορφές από τα δύο αριθμητικά μοντέλα, ενώ ο αριθμός των ιδιομορφών που παρουσιάζεται στην πλάκα είναι ο αναμενόμενος, σύμφωνα με διάγραμμα της **Εικόνας 6.1**.



FE



Lijian Qi

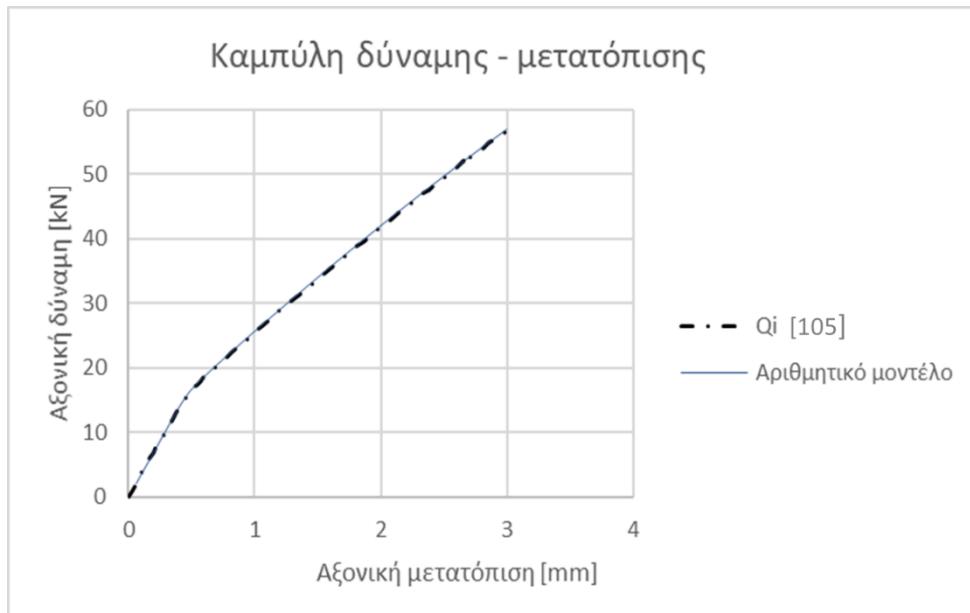
Εικόνα 6.4: Πρώτη ιδιομορφή γραμμικής ανάλυσης λυγισμού επίπεδης πλάκας υπό αξονική θλίψη – σύγκριση με αποτελέσματα της βιβλιογραφίας (Qi [105])

Στον **Πίνακα 6.4** συγκρίνονται και οι τιμές του κρίσιμου φορτίου λυγισμού που υπολογίζονται από το αριθμητικό μοντέλο και από την **Εξίσωση (6.1)**. Η τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού έχει απειροστή διαφορά με αυτή της αναλυτικής σχέσης, επομένως επιβεβαιώνεται το μοντέλο ως προς το γραμμικό ιδιομορφικό λυγισμό.

Πίνακας 6.4: Σύγκριση αποτελεσμάτων ιδιομορφικού λυγισμού με τη θεωρητική τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού: Αξονική θλίψη

Αριθμητικό κρίσιμο φορτίου λυγισμού $N_{kp,FE}$	Θεωρητικό κρίσιμο φορτίο λυγισμού $N_{kp,th}$	Σφάλμα
kN	kN	%
17.082	17.054	0.15

Στην **Εικόνα 6.5** συγκρίνεται η καμπύλη της αξονικής δύναμης – μετατόπισης της πλάκας για την πρόβλεψη του λυγισμού και της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς της. Λόγω της φύσης της επίπεδης πλάκας, προκειμένου να εκκινήσει το φαινόμενο του λυγισμού, πρέπει να εισαχθεί μια εκτός επιπέδου μετατόπιση ή δύναμη στο μοντέλο. Έπειτα από ανάλυση ευαισθησίας ατέλειας, βρέθηκε ότι η ελάχιστη μετατόπιση για την εκκίνηση του φαινομένου του λυγισμού είναι 5% της πρώτης ιδιομορφής (**Εικόνα 6.4**). Παρατηρείται πως οι δύο καμπύλες συμπίπτουν επακριβώς, επομένως το μοντέλο επικυρώνεται και ως τη μεταλυγισμική συμπεριφορά της επίπεδης πλάκας.



Εικόνα 6.5: Καμπύλη δύναμης - μετατόπισης για την επίπεδη πλάκα: Αξονική θλίψη

Παρατηρείται πως η αναλυτική σχέση, καθώς και η ιδιομορφική ανάλυση λυγισμού προβλέπουν με μεγάλη ακρίβεια το κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Η μεταλυγισμική συμπεριφορά είναι γραμμική, και η κλίση της (δηλαδή η δυσκαμψία) υπολογίζεται περίπου στο μισό της

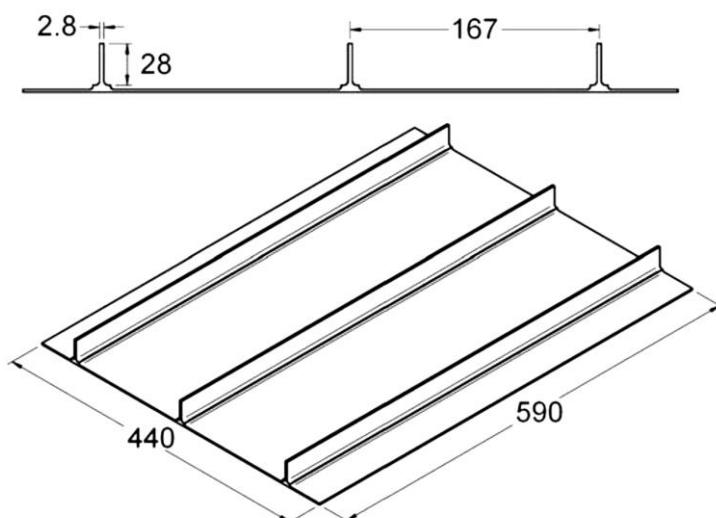
κλίσης πριν το λυγισμό. Αυτό είναι μία ακόμη επιβεβαίωση της ορθότητας του μοντέλου, καθώς οι αναλυτικές σχέσεις για τη μεταλυγισμική συμπεριφορά των πλακών δείχνουν πως η δυσκαμψία των πλακών μειώνεται κατά 52% σε σχέση με την προ λυγισμού δυσκαμψία [104].

6.2.2 Επίπεδη ενισχυμένη πλάκα

Το μοντέλο της επίπεδης ενισχυμένης πλάκας αναπτύσσεται με βάση τη δημοσίευση των Quinn και λοιπών [98]. Η ενισχυμένη πλάκα αποτελείται από το ορθογώνιο έλασμα (skin) και τρία διαμήκη ενισχυτικά στοιχεία, όπως φαίνεται στην **Εικόνα 6.6**. Το έλασμα έχει διαστάσεις $590 \times 440 \times 2.2 \text{ mm}^3$ μήκος επί πλάτος επί πάχος, ενώ τα διαμήκη ενισχυτικά στοιχεία έχουν διαστάσεις $590 \times 28 \times 2.8 \text{ mm}^3$ μήκος επί ύψος επί πάχος. Τα ενισχυτικά στοιχεία ισαπέχουν 167 mm μεταξύ τους, με το ένα να βρίσκεται στο μισό του πλάτους της πλάκας. Ολόκληρη η δομή είναι κατασκευασμένη από κράμα αλουμινίου 2024-T351, το οποίο παρουσιάζει τις μηχανικές ιδιότητες που φαίνονται στον **Πίνακα 6.5** [106].

Πίνακας 6.5: Μηχανικές ιδιότητες κράματος αλουμινίου 2024-T351

E [GPa]	v	σ_y [MPa]	ρ [kg/m ³]
73.1	0.33	299	2780



Εικόνα 6.6: Γεωμετρία επίπεδης ενισχυμένης πλάκας [98]

Κατά τη διάρκεια του πειράματος, παρουσιάζονται πλαστικές παραμορφώσεις. Επομένως, για την ακριβή πρόβλεψη της συμπεριφοράς της κατασκευής, απαιτείται η εισαγωγή κάποιου μοντέλου πλαστικότητας στο αριθμητικό μοντέλο. Ο τρόπος με τον οποίο θα εισαχθεί η πλαστικότητα στο παρόν μοντέλο, είναι μέσω του multi-linear isotropic kinematic hardening. Ο τρόπος αυτός απαιτεί την εισαγωγή χαρακτηριστικών σημείων της καμπύλης τάσης-παραμόρφωσης του υπό ανάλυση υλικού. Τα σημεία αυτά παρέχονται από τα δεδομένα της δημοσίευσης [107].

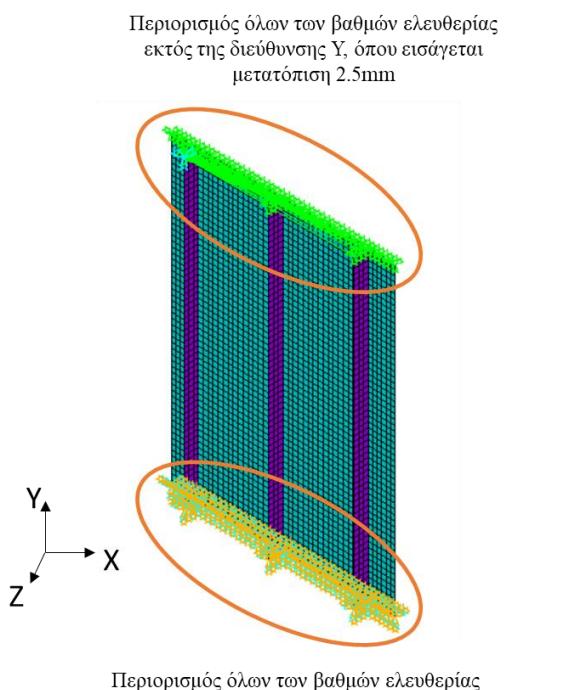
Ο τρόπος με τον οποίο μοντελοποιείται η σύνδεση του ελάσματος με τις ενισχυτικές δοκούς γίνεται σύμφωνα με τη shared-node method, κατά την οποία οι κόμβοι του ελάσματος και οι αντίστοιχοι κόμβοι των ενισχυτικών δοκών στην περιοχή της σύνδεσης τους ταυτίζονται. Κατά αυτόν τον τρόπο, δεν μπορεί να γίνει πρόβλεψη φαινομένων όπως η αποκόλληση του ενισχυτικού στοιχείου από το έλασμα (debonding), όμως τα φαινόμενα αυτά ξεφεύγουν του σκοπού της διπλωματικής εργασίας.

Το στοιχείο που χρησιμοποιείται στο μοντέλο είναι το συμβατικό SHELL181 με μέγεθος στοιχείου $10 \times 10 mm^2$. Το μέγεθος αυτό επιλέχθηκε πραγματοποιώντας έλεγχο σύγκλισης πλέγματος, αντίστοιχο με τον έλεγχο σύγκλισης που παρουσιάστηκε στο **Κεφάλαιο 5**.

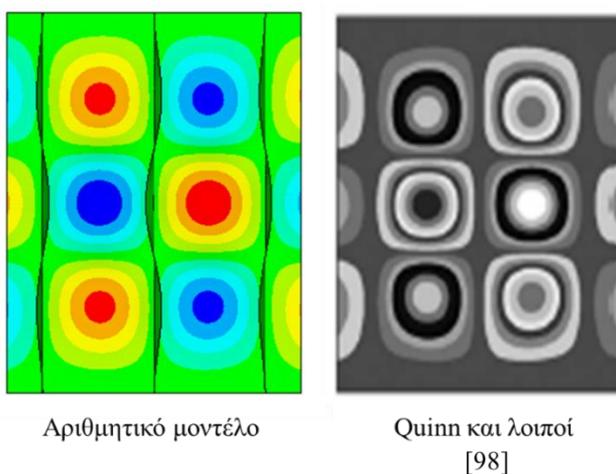
Το πείραμα διεξήχθη σε υδραυλική μηχανή δυνατότητας φόρτισης $500 kN$. Κατά το πείραμα, τα δύο άκρα υπό φόρτιση ενισχύονται με μια βάση εποξικής ρητίνης πάχους $42 mm$, ώστε να προσεγγιστούν οριακές συνθήκες πάκτωσης. Τα δύο μη-φορτισμένα άκρα είναι ελεύθερα να κινηθούν και να περιστραφούν. Η βάση εποξικής ρητίνης δεν θα μοντελοποιηθεί, επομένως αναμένεται μικρή απόκλιση στα αποτελέσματα μεταξύ του πειράματος και του μοντέλου.

Προκειμένου να αναπαρασταθούν οι συγκεκριμένες οριακές συνθήκες, περιορίζονται όλοι οι βαθμοί ελευθερίας (τρεις μετατοπίσεις και τρεις περιστροφές) στο ένα άκρο υπό φόρτιση, ενώ στο άλλο περιορίζονται όλοι οι βαθμοί ελευθερίας εκτός της αξονικής εντός επιπέδου μετατόπισης. Στη διαμήκη διεύθυνση θα εισαχθεί μετατόπιση $2.5 mm$, ώστε να ελεγχθεί αν η συμπεριφορά της ενισχυμένης πλάκας είναι όμοια με αυτή του πειράματος. Συγκεκριμένα, οι κόμβοι του άκρου αυτού θα συνδεθούν μαζί τους σε όλες τις διευθύνσεις μέσω σύζευξης (CP), ώστε η διαμήκη μετατόπιση τους να είναι ομοιόμορφη, όπως ακριβώς και στο πείραμα. Οι οριακές συνθήκες που εισάγονται στο μοντέλο απεικονίζονται στην **Εικόνα 6.7**.

Η εκτός επιπέδου μετατόπιση της πρώτης ιδιομορφής που προκύπτει από τη γραμμική ιδιομορφική ανάλυση παρουσιάζεται στην **Εικόνα 6.8** και συγκρίνεται με την αντίστοιχη υπολογισμένη από τη βιβλιογραφία. Οι δύο ιδιομορφές είναι πανομοιότυπες. Επιπρόσθετα, το κρίσιμο φορτίο που υπολογίζεται από τη γραμμική ανάλυση υπολογίζεται 69.6 kN , το οποίο είναι μια ικανοποιητική πρώτη πρόβλεψη του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, καθώς στο πείραμα είναι ίσο με 74.5 kN (απόκλιση 6.58%).

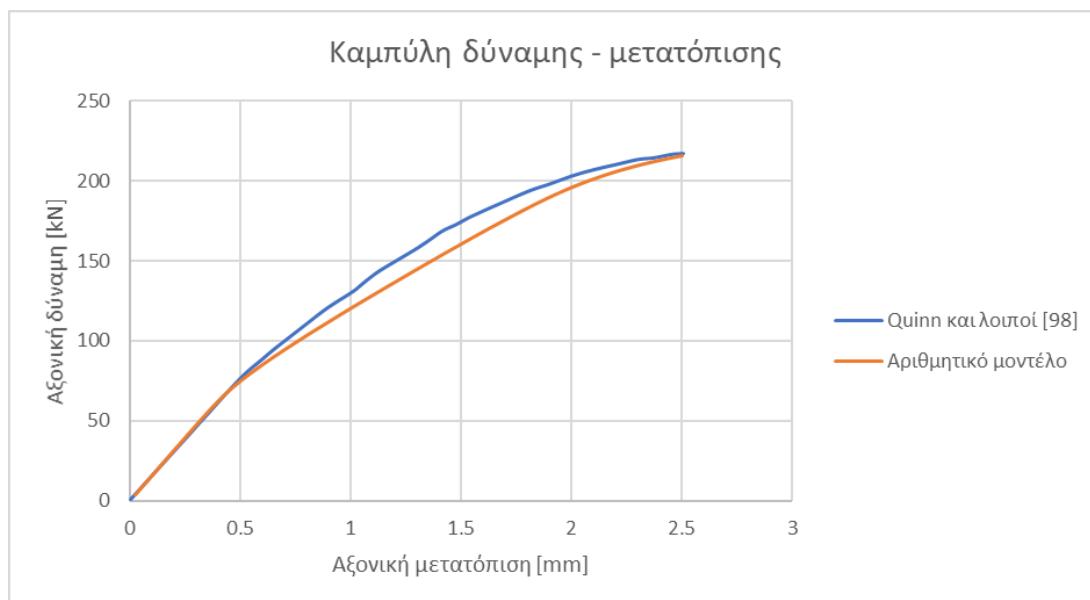


Εικόνα 6.7: Οριακές συνθήκες ενισχυμένης πλάκας: Αξονική θλίψη

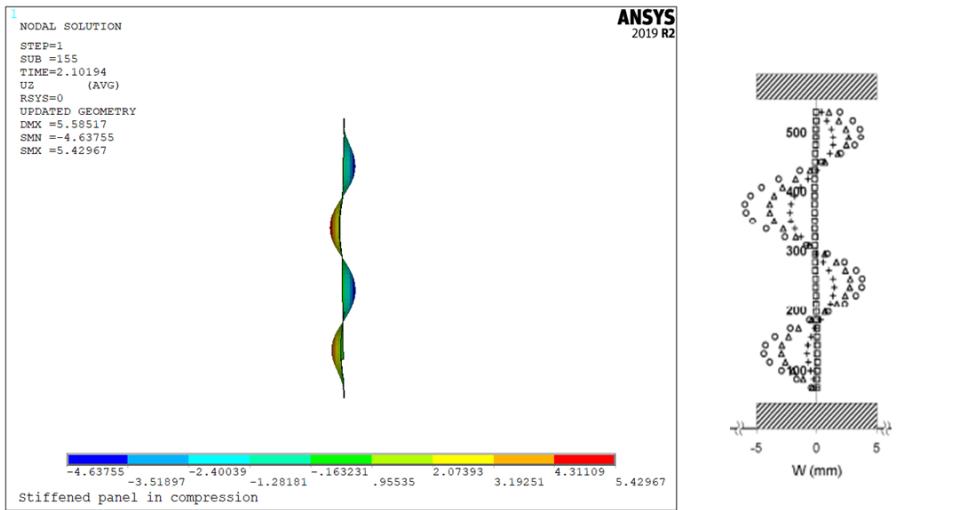


Εικόνα 6.8: Πρώτη ιδιομορφή ενισχυμένης πλάκας: Αξονική θλίψη

Στην **Εικόνα 6.9** συγκρίνονται οι καμπύλες μετατόπισης – φορτίου του αριθμητικού μοντέλου και του πειράματος. Η συμπεριφορά της ενισχυμένης πλάκας και η δυσκαμψία της προβλέπονται ακριβώς μέχρι τη στιγμή του λυγισμού, ο οποίος συμβαίνει στα $72kN$. Έπειτα, η συμπεριφορά της ενισχυμένης πλάκας παρουσιάζει μέγιστη απόκλιση της τάξης του 10% , το οποίο είναι αναμενόμενο, καθώς οι αρχικές ατέλειες που μετρήθηκαν στην ενισχυμένη πλάκα έχουν διαφορετική μορφή από αυτή της πρώτης ιδιομορφής. Επιπλέον, δεν είναι γνωστές οι ακριβείς οριακές συνθήκες, ιδιότητες υλικού και μοντέλο πλαστικότητας που χρησιμοποιήθηκαν στη βιβλιογραφία. Ωστόσο, η προσέγγιση της καμπύλης είναι ικανοποιητική, αφού προβλέπεται με μεγάλη ακρίβεια το τελικό φορτίο ($216kN$) στα $2.5mm$, αλλά και οι μετατοπίσεις της ενισχυμένης πλάκας παρουσιάζουν μικρή απόκλιση. Στην **Εικόνα 6.10** συγκρίνεται η εκτός επιπέδου μετατόπιση του ελάσματος μεταξύ του δεύτερου και τρίτου ενισχυτικού στοιχείου για αξονική δύναμη ίση με $200kN$. Οι κυματομορφές που σχηματίζονται, καθώς και οι τιμές της εκτός επιπέδου μετατόπισης είναι πανομοιότυπες. Τέλος, ο τρόπος που αστοχεί η ενισχυμένη πλάκα είναι όμοιος με αυτόν του πειράματος, καθώς παρατηρείται στρεπτοκαμπτικός λυγισμός των ενισχυτικών δομών και πλαστική διαρροή.



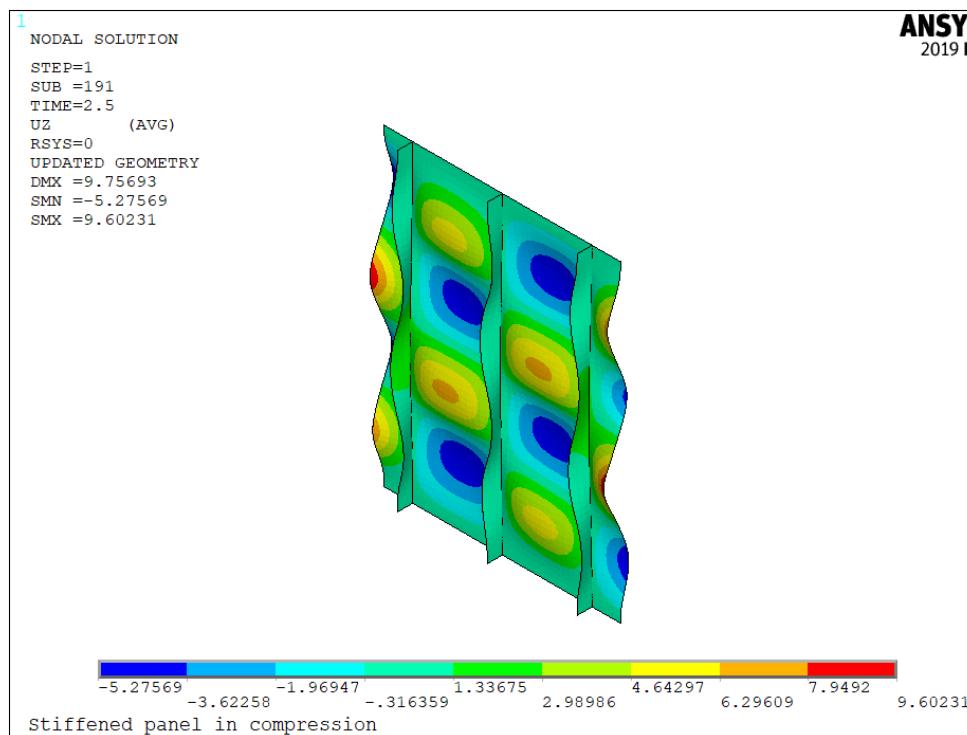
Εικόνα 6.9: Καμπύλη δύναμης - μετατόπισης για την ενισχυμένη επίπεδη πλάκα υπό αξονική θλίψη



Αριθμητικό μοντέλο

Quinn και λοιποί

Εικόνα 6.10: Εκτός επιπέδου μετατόπιση της ενισχυμένης πλάκας στα 200kN



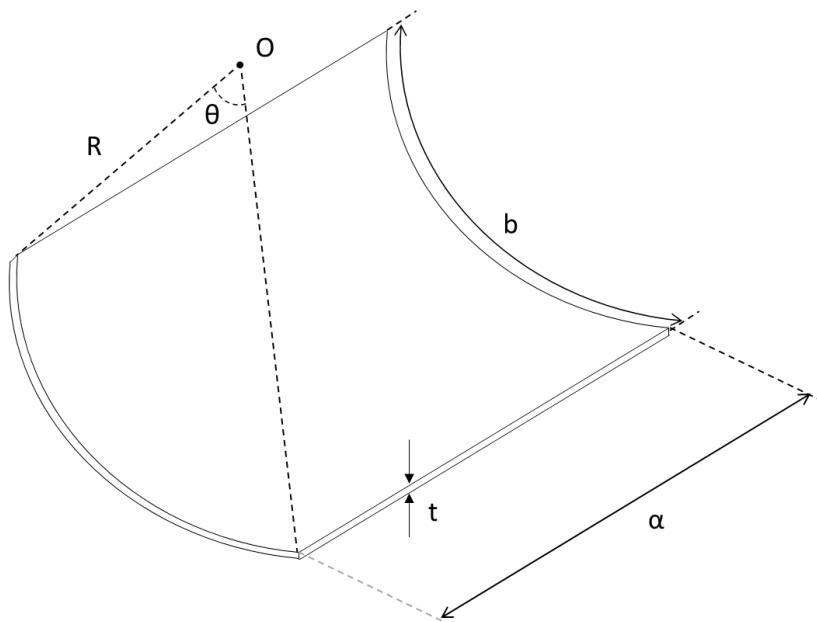
Εικόνα 6.11: Τελική εκτός επιπέδου μετατόπιση της ενισχυμένης πλάκας

6.2.3 Κέλνφος

Το μοντέλο του κελύφους κατασκευάζεται με βάση την έρευνα των Domb και Leigh [108], οι οποίοι διερεύνησαν το λυγισμό και τη μεταλυγισμική συμπεριφορά κελυφών, χρησιμοποιώντας υπολογιστικά εργαλεία, έτσι ώστε να ανανεώσουν τις καμπύλες σχεδιασμού της NACA. Τα κελύφη παρουσιάζουν τα γεωμετρικά στοιχεία της **Εικόνας 6.12**. Για την επικύρωση του αριθμητικού μοντέλου, θα χρησιμοποιηθούν τρία κελύφη τα οποία παρουσιάζουν διαφορετικές παραμέτρους καμπυλότητες, σύμφωνα με τον **Πίνακα 6.6**. Οι παράμετροι αυτοί επιλέχθηκαν ώστε να ερευνηθούν τρεις διαφορετικές περιπτώσεις κελυφών, οι οποίες είναι:

- $Zb = 5$: Κελύφη με χαμηλή καμπυλότητα, τα οποία παρουσιάζουν όμοια συμπεριφορά με αυτή των πλακών.
- $Zb = 30$: Κελύφη με μέτρια καμπυλότητα
- $Zb = 100$: Κελύφη με υψηλή καμπυλότητα

Το υλικό που χρησιμοποιείται για τα κελύφη είναι αλουμίνιο και οι ιδιότητες του μέτρου ελαστικότητας και λόγου Poisson δίνονται στον **Πίνακα 6.7**.



Εικόνα 6.12: Γεωμετρία κελύφους

Πίνακας 6.6: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά μοντέλων κελύφους: Αξονική θλίψη

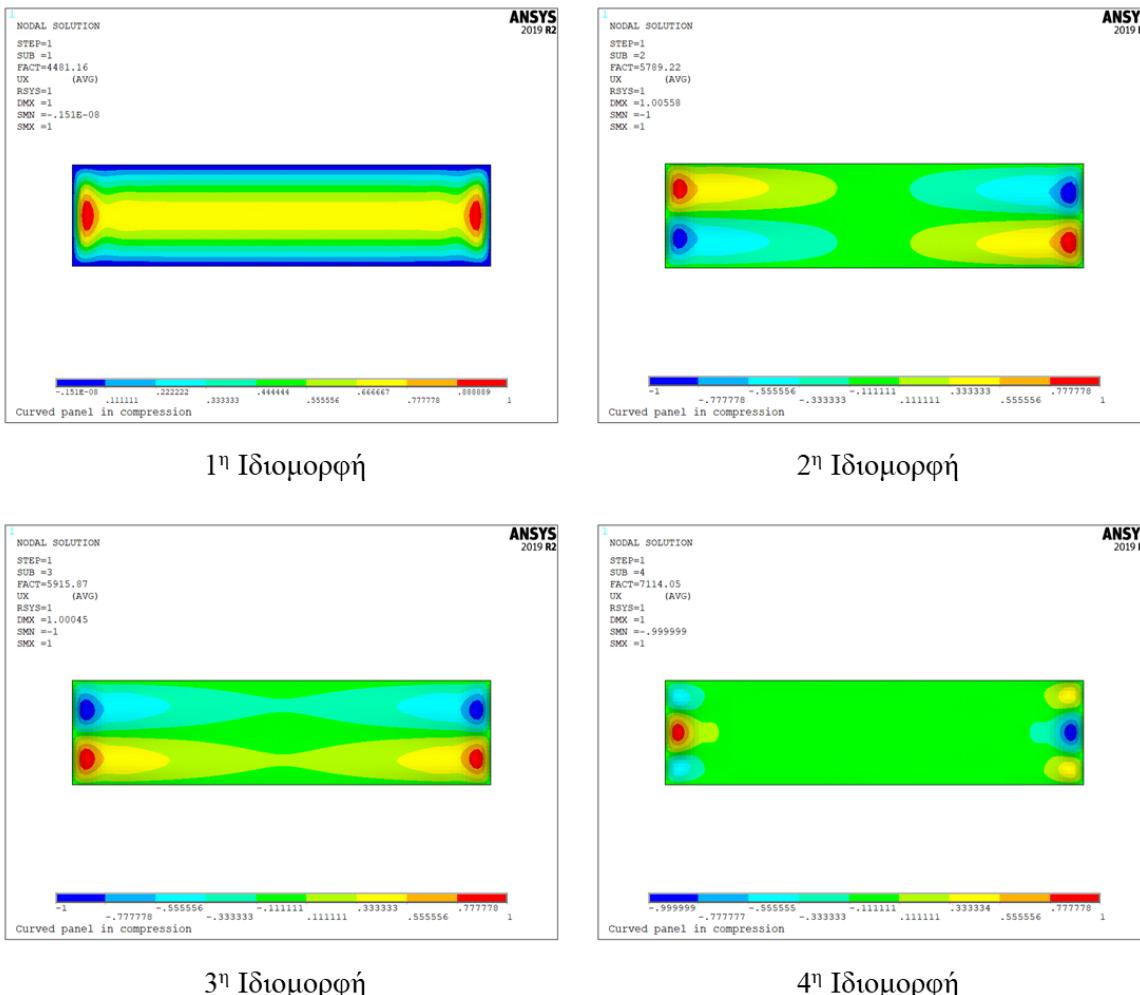
Μοντέλο	Z_b	R	t	b	$a = 4b$
	-	mm	mm	mm	mm
1	5	762	0.762	55.482	221.928
2	30	762	0.762	135.839	543.356
3	100	762	0.762	248	1240

Πίνακας 6.7: Ιδιότητες υλικού μοντέλων κελύφους: Αξονική θλίψη

E [GPa]	v
72.4	0.33

Για την κατασκευή των μοντέλων χρησιμοποιείται το συμβατικό στοιχείο SHELL181. Για κάθε ένα μοντέλο πραγματοποιείται έλεγχος σύγκλισης πλέγματος. Επιλέγεται μέγεθος στοιχείου $2x2mm^2$, $5x5mm^2$, $10x10mm^2$ για το Μοντέλο 1, 2 και 3 αντίστοιχα. Οι οριακές συνθήκες του προβλήματος είναι απλής στήριξης και είναι αντίστοιχες της επίπεδης πλάκας του **Υποενότητας 6.2.1**, με τη διαφορά ότι οι διευθύνσεις X , Y , Z συμβολίζουν την ακτινική, περιφερειακή και αξονική διεύθυνση αντίστοιχα. Για την εισαγωγή των αρχικών ατελειών χρησιμοποιούνται οι τέσσερις πρώτες ιδιομορφές που υπολογίζονται από τη γραμμική ιδιομορφική ανάλυση. Ωστόσο, το μέγεθος της ατέλειας που εισάγεται από κάθε ιδιομορφή πολλαπλασιάζεται με έναν προκαθορισμένο συντελεστή βαρύτητας, ο οποίος δεν δίνεται στο άρθρο. Επομένως, αναμένεται να υπάρχουν αποκλίσεις στη σύγκριση των αποτελεσμάτων όπου υπάρχουν ατέλειες. Σημειώνεται επίσης πως χρησιμοποιείται ο μη-γραμμικός λύτης Μέθοδος Τόξου, καθώς ο λύτης Newton-Raphson δεν έχει τη δυνατότητα να υπολογίσει την αρνητική κλίση που φαίνεται στην **Εικόνα 6.16**.

Για τη σύγκριση των αποτελεσμάτων του αριθμητικού μοντέλου με αυτό της βιβλιογραφίας, θα χρησιμοποιηθούν οι καμπύλες αξονικής τάσης – αξονικής παραμόρφωσης, ενώ επίσης θα παρουσιαστούν τα παραμορφωμένα σχήματα του Μοντέλου 3. Στην **Εικόνα 6.13** παρουσιάζονται οι τέσσερις πρώτες ιδιομορφές του Μοντέλου 3.

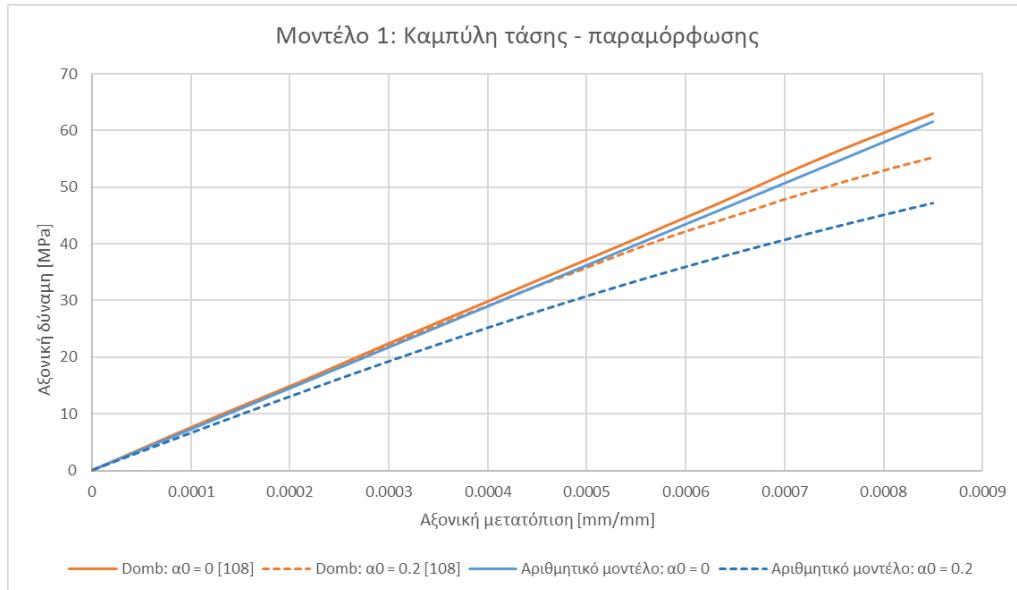


Εικόνα 6.13: Τέσσερις πρώτες ιδιομορφές του Μοντέλου 3 κελύφους υπό αξονική θλίψη

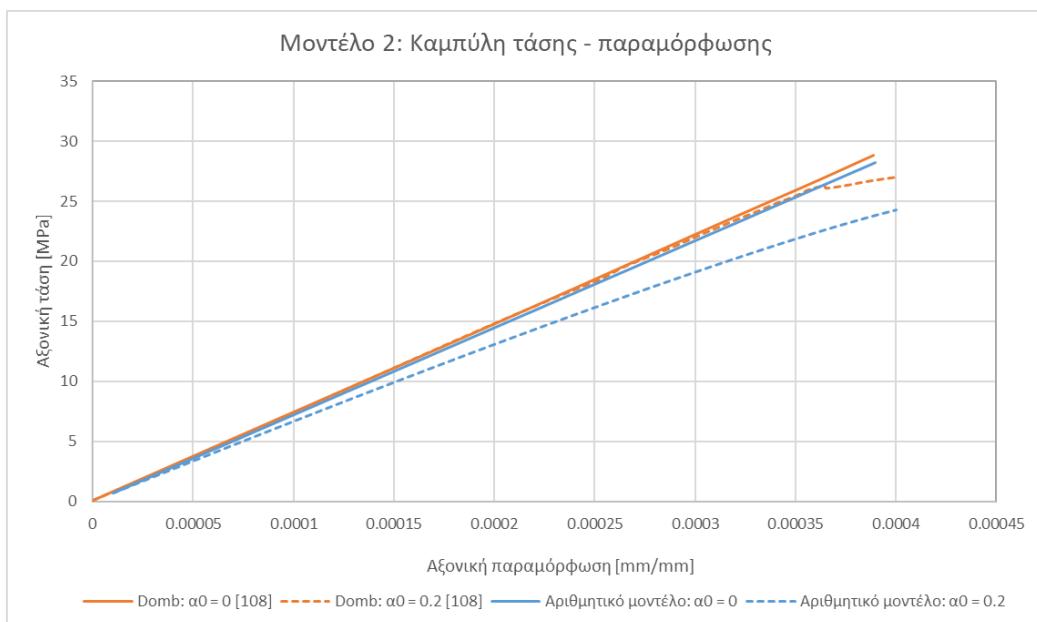
Το σχήμα της πρώτης ιδιομορφής επιβεβαιώνεται από τα αποτελέσματα του Tran [109], ο οποίος μελέτησε το λυγισμό κελυφών σε θλίψη και κατέληξε στο συμπέρασμα πως η αύξηση της καμπυλότητας έχει ως αποτέλεσμα τη συγκέντρωση των κυματομορφών στα άκρα του κελύφους.

Στις **Εικόνες 6.14** έως **6.16** συγκρίνονται οι καμπύλες αξονικής τάσης – αξονικής παραμόρφωσης των τριών μοντέλων για τέλεια κελύφη (κελύφη χωρίς αρχικές ατέλειες) και για κελύφη με μέγεθος ατέλειας $\alpha_0 = 0.2$. Με συνεχόμενες γραμμές περιγράφονται τα τέλεια κελύφη, ενώ με διακοπτόμενες τα κελύφη με αρχικές ατέλειες. Παρατηρείται πώς ενώ οι καμπύλες των κελυφών σχεδόν ταυτίζονται, οι καμπύλες των κελυφών με αρχικές ατέλειες αποκλίνουν, λόγω του άγνωστου συντελεστή βαρύτητας που χρησιμοποιεί ο συγγραφέας.

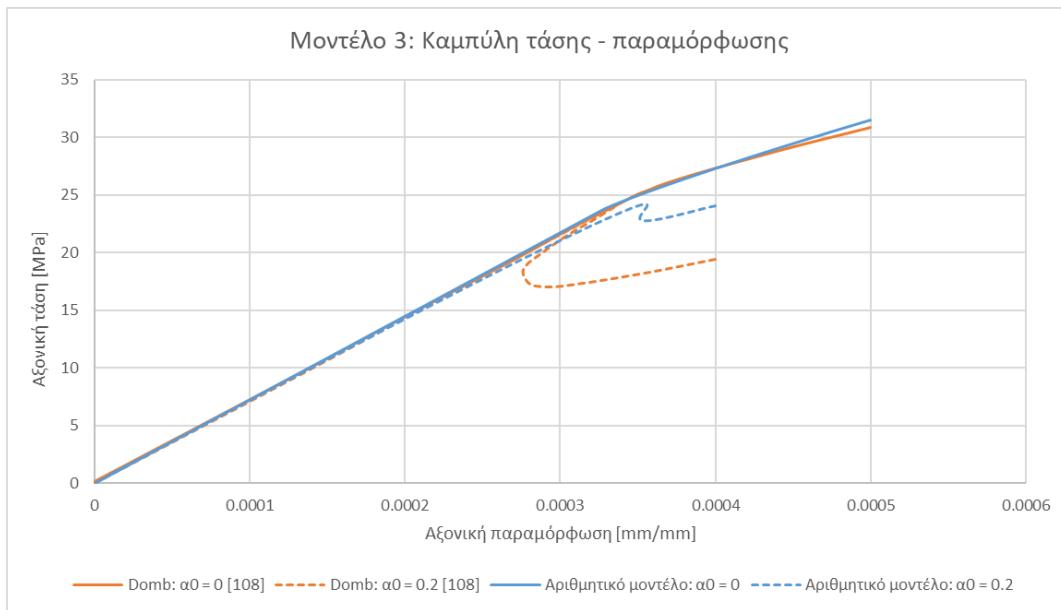
Παρόλα αυτά, εξάγεται το ίδιο συμπέρασμα με τον συγγραφέα, ότι οι αρχικές ατέλειες επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό τη συμπεριφορά των κελυφών, όχι μόνο στη μεταλυγισμική περιοχή, αλλά και πριν το λυγισμό.



Εικόνα 6.14: Μοντέλο 1: Καμπύλη τάσης - παραμόρφωσης κελύφους

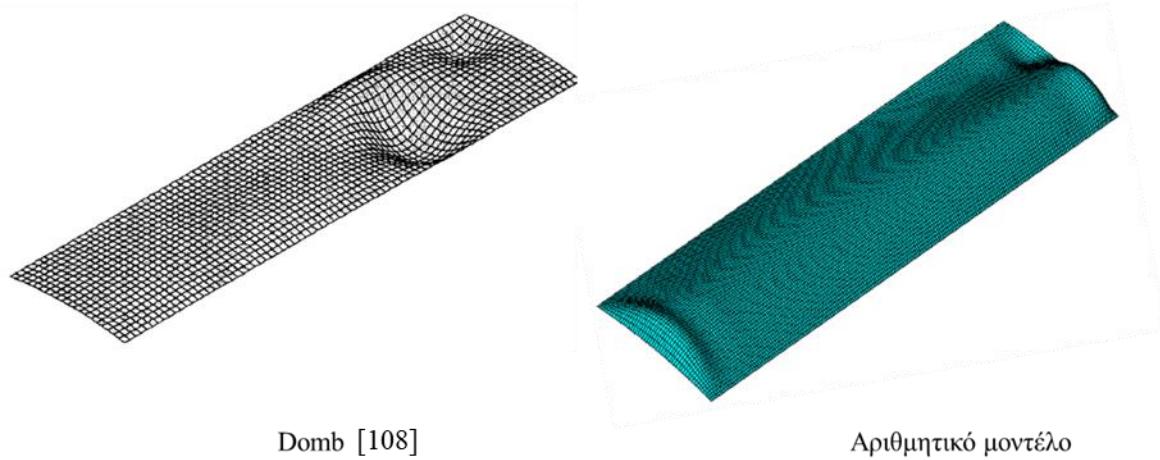


Εικόνα 6.15: Μοντέλο 2: Καμπύλη τάσης - παραμόρφωσης κελύφους



Εικόνα 6.16: Μοντέλο 3: Καμπύλη τάσης - παραμόρφωσης κελύφους

Τονίζεται επίσης, πως για τον υπολογισμό της συμπεριφοράς των κελυφών και τον εντοπισμό των κρίσιμων σημείων, απαιτείται μεγάλος αριθμός βημάτων στη μη-γραμμική ανάλυση. Επομένως, συμπεραίνεται πως τα κελύφη παρουσιάζουν σημαντικά προβλήματα ευστάθειας, τα οποία είναι δύσκολο να προβλεφθούν, ιδίως με την εισαγωγή ατελειών.



Εικόνα 6.17: Σύγκριση μετατοπίσεων Μοντέλου 3 (μέγεθος αρχικής ατέλειας $\alpha_0 = 0.2$)

Όπως φαίνεται από την **Εικόνα 6.17**, υπάρχει απόκλιση στην ακτινική μετατόπιση του αριθμητικού μοντέλου με αυτό του Domb. Όμως, είναι ξεκάθαρο πως ο λόγος είναι ο

προκαθορισμένος συντελεστής βαρύτητας με τον οποίο πολλαπλασιάζεται κάθε ιδιομορφή, καθώς στο ένα άκρο του αριθμητικού μοντέλου του Domb, παρουσιάζεται μηδενική μετατόπιση. Απεναντίας, στο παρόν αριθμητικό μοντέλο φαίνεται η επίδραση και των τεσσάρων ιδιομορφών στο κέλυφος. Σημασία ωστόσο έχει πως το αριθμητικό μοντέλο υπολογίζει με ακρίβεια τη μεταλυγισμική συμπεριφορά των τέλειων κελυφών.

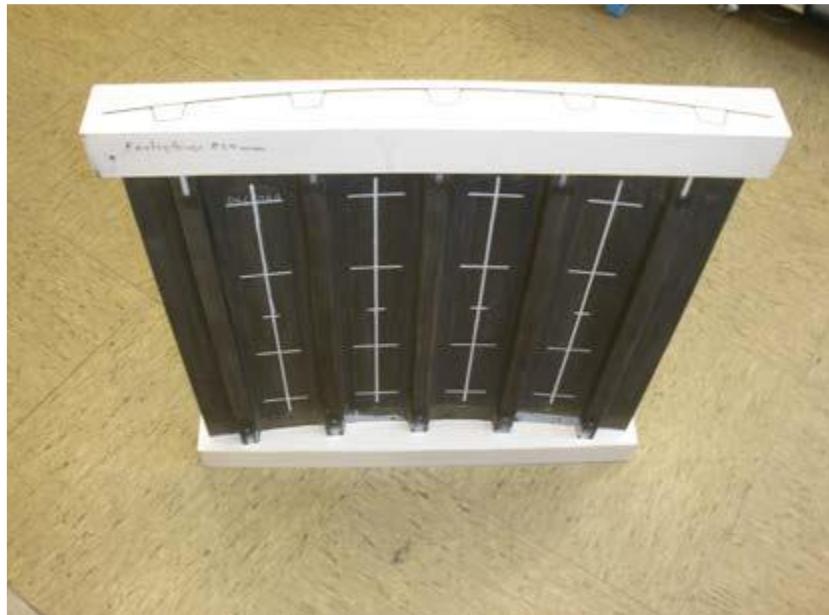
6.2.4 Ενισχυμένο κέλυφος

Το μοντέλο του ενισχυμένου κελύφους κατασκευάζεται με βάση την πειραματική δημοσίευση των Wilckens, Odermann και Kling [21]. Συγκεκριμένα, το κέλυφος αποτελείται από πέντε διαμήκεις ενισχύσεις σχήματος ωμέγα, των οποίων τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά φαίνονται στην **Εικόνα 6.18** και στον **Πίνακα 6.8**. Το υλικό από το οποίο αποτελείται ολόκληρο το ενισχυμένο κέλυφος είναι σύνθετο πολυστρωματικό υλικό με ίνες άνθρακα (CFRP) με τις μηχανικές ιδιότητες που φαίνονται στον **Πίνακα 6.9**.

Πίνακας 6.8: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά κελύφους και ενισχύσεων

Μήκος ενισχυμένου κελύφους [mm]	825
Ελεύθερο μήκος [mm]	584
Ακτίνα [mm]	1680
Πάχος κελύφους [mm]	1.625
Μήκος τόξου [mm]	750
Αριθμός ενισχύσεων	5
Απόσταση μεταξύ ενισχύσεων [mm]	150
Κωδικοποίηση στρώσεων κελύφους	[45,-45,0,90,-45,45,0,45,-45,90,0,-45,45]
Κωδικοποίηση στρώσεων ενισχύσεων	[45,0,-45,0,90,0,-45,0,45]
Πάχος στρώσης [mm]	0.125
Πάχος ενίσχυσης [mm]	1.125

Υψος ενίσχυσης [mm]	24
Πλάτος κεφαλής ενίσχυσης [mm]	27
Γωνία μεταξύ κεφαλής και πλευράς ενίσχυσης [$^{\circ}$]	80
Πλάτος φλάντζας ενίσχυσης [mm]	21



Εικόνα 6.18: Ενισχυμένο κέλυφος υπό αξονική θλίψη [21]

Πίνακας 6.9: Μηχανικές ιδιότητες υλικού CFRP ενισχυμένου κελύφους

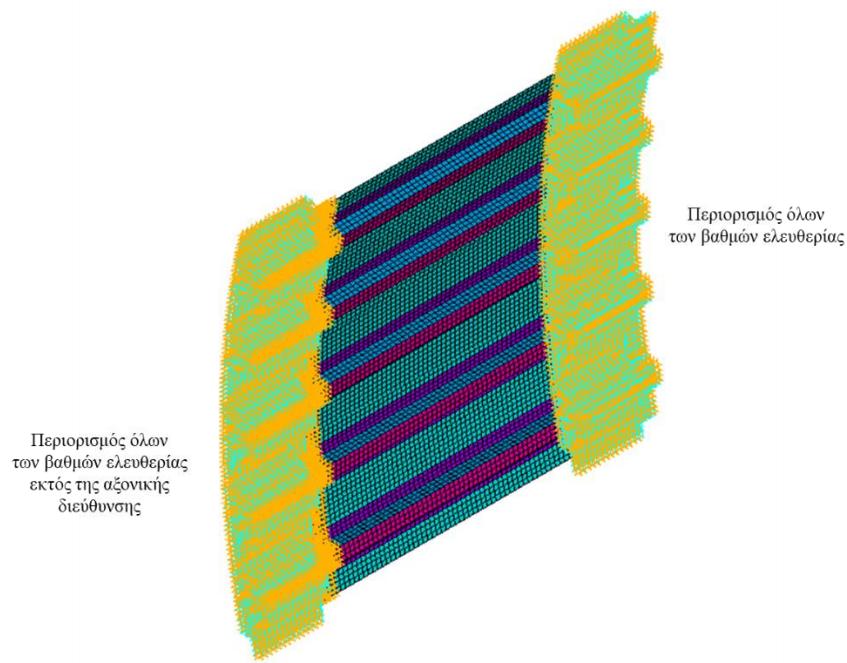
E ₁₁ [GPa]	E ₂₂ [GPa]	v ₁₂	G ₁₂ [GPa]	G ₁₃ [GPa]	G ₂₃ [GPa]
131	11.2	0.33	5.3	5.3	3.95

Κατά το πείραμα, το ένα άκρο του ενισχυμένου κελύφους κατά την αξονική διεύθυνση πακτώνεται, περιορίζοντας όλους τους βαθμούς ελευθερίας, ενώ στο άλλο άκρο περιορίζονται όλοι οι βαθμοί ελευθερίας εκτός της κίνησης στην αξονική διεύθυνση. Το φορτίο εισάγεται στο ενισχυμένο κέλυφος ελέγχοντας τη μετατόπιση στο άκρο του. Για να επιτευχθεί ομοιόμορφη κατανομή φορτίου στο κυρτό άκρο του ενισχυμένου κελύφους, τα άκρα του εγκιβωτίζονται σε μπλοκ μήκους 120mm, όπως φαίνεται στην Εικόνα 6.18. Τα εγκάρσια άκρα

του ενισχυμένου κελύφους είναι ελεύθερα. Το πείραμα διεξάγεται έως την αστοχία του πάνελ, η οποία συμβαίνει όταν η αξονική μετατόπιση είναι ίση με $2.7mm$.

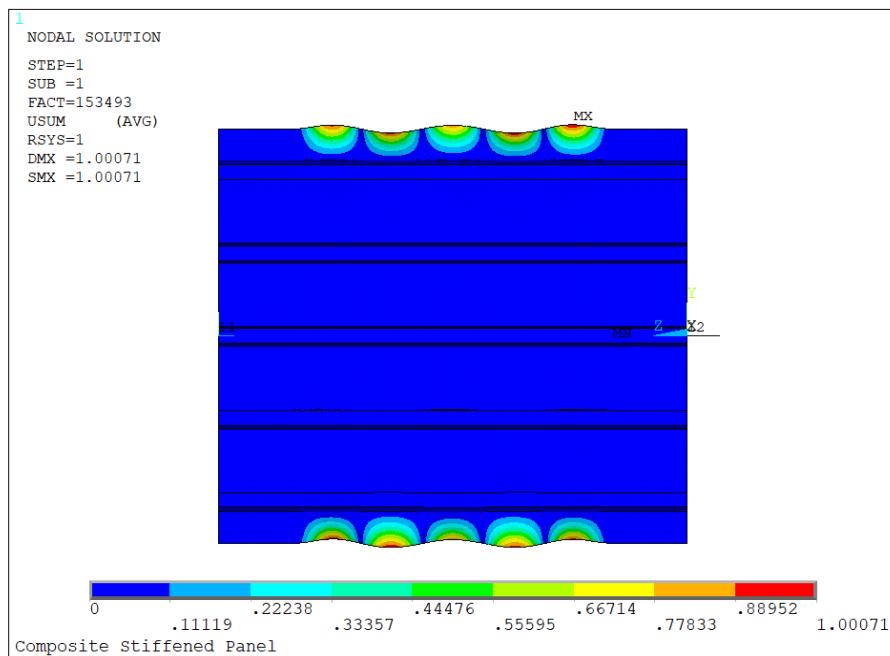
Για τη μοντελοποίηση του ενισχυμένου κελύφους, χρησιμοποιείται το συμβατικό στοιχείο SHELL181, το οποίο είναι ιδανικό για πολύστρωματικά υλικά. Έπειτα από έλεγχο σύγκλισης πλέγματος, το μέγεθος του στοιχείου ορίζεται ως $10x10mm^2$. Ο τρόπος σύνδεσης των ενισχύσεων με το κέλυφος πραγματοποιείται με τη shared-node method. Η δυσκολία που αντιμετωπίζεται στα ορθότροπα υλικά κατά τη μοντελοποίηση του στο ANSYS είναι η δημιουργία της διεπαφής κελύφους (skin) και ενισχυτικών στοιχείων τα οποία αυξάνουν το πάχος του κελύφους, όπως για παράδειγμα η φλάντζα των δοκών ωμέγα. Όταν χρησιμοποιούνται πολύστρωτα υλικά στο SHELL181, το ANSYS ορίζει μια πλευρά του στοιχείου ως επάνω και μια ως κάτω. Καθώς ορίζεται η κάθε στρώση στον κώδικα, το ANSYS τις τοποθετεί από κάτω έως πάνω. Επομένως, χρειάζεται προσοχή ώστε να εισαχθούν με τη σωστή σειρά οι στρώσεις. Ένα άλλο υπολογιστικό πρόβλημα που αντιμετωπίζεται στα στοιχεία κελύφους SHELL181, είναι πως μοντελοποιούνται στη μέση επιφάνεια τους. Έτσι, εφόσον τα στοιχεία που έρχονται σε επαφή (κέλυφος – φλάντζα) έχουν μεγαλύτερο πάχος από το κέλυφος, δημιουργείται ανομοιομορφία στον ορισμό της γεωμετρίας, η οποία αποδεικνύεται πως επηρεάζεται τα αποτελέσματα σε έναν βαθμό. Το πρόβλημα αυτό επηρεάζει και τα αποτελέσματα των ισότροπων και ορθότροπων υλικών. Το ANSYS δίνει τη δυνατότητα ορισμού άλλης επιφάνειας αναφοράς αντί της μέσης επιφάνειας, έτσι ώστε να αντιμετωπιστούν αυτά τα προβλήματα. Στο εξής, στα προβλήματα ενισχυμένων δομών, χρησιμοποιούνται τα παραπάνω για την εξαγωγή ακριβέστερων αποτελεσμάτων.

Προκειμένου να αναπαρασταθούν οι οριακές συνθήκες που αναφέρθηκαν, θα περιοριστούν τα άκρα του ενισχυμένου κελύφους σε απόσταση $120mm$, το οποίο είναι το μήκος του μπλοκ και θα εισαχθεί στο ένα άκρο του αξονική μετατόπιση $2.7mm$. Σημειώνεται πως πραγματοποιείται σύζευξη (CP) των κόμβων του άκρου στους οποίους εισάγεται η αξονική μετατόπιση, έτσι ώστε να είναι ομοιόμορφη η μετατόπιση του άκρου. Το αριθμητικό μοντέλο και οι οριακές συνθήκες φαίνονται στην **Εικόνα 6.19**.

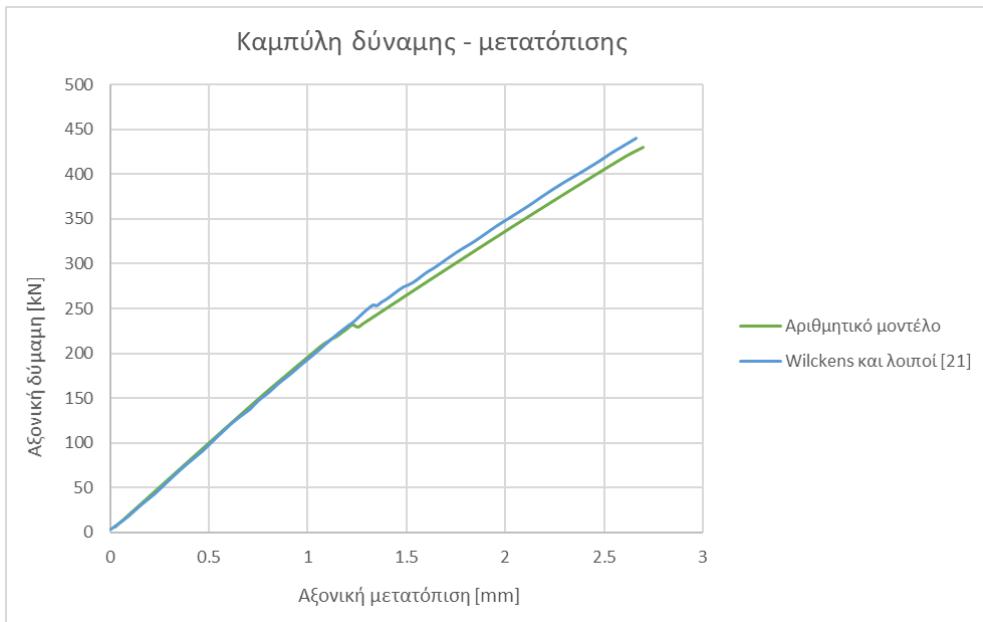


Εικόνα 6.19: Οριακές συνθήκες ενισχυμένου κελύφους υπό αξονική θλίψη

Στην **Εικόνα 6.20** απεικονίζεται η πρώτη ιδιομορφή που υπολογίζεται από τη γραμμική ιδιομορφική ανάλυση, ενώ στην **Εικόνα 6.21** συγκρίνονται οι καμπύλες δύναμης – μετατόπισης του αριθμητικού μοντέλου και του πειράματος.

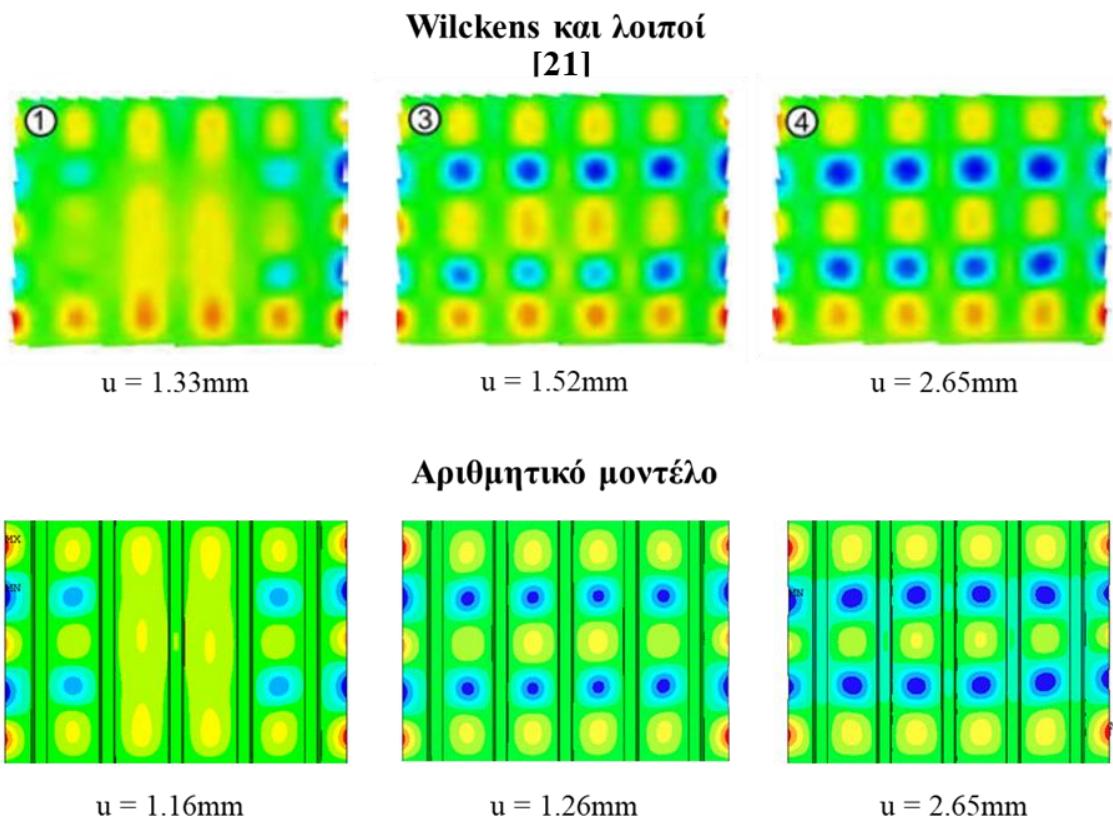


Εικόνα 6.20: Πρώτη ιδιομορφή ενισχυμένου κελύφους υπό αξονική θλίψη



Εικόνα 6.21: Καμπύλη δύναμης - μετατόπισης ενισχυμένου κελύφους υπό αξονική θλίψη

Η καμπύλη η οποία εξάγεται από το αριθμητικό μοντέλο συμπίπτει επακριβώς με αυτή του πειράματος πριν το λυγισμό. Ωστόσο, υπάρχει απόκλιση στη μετατόπιση στην οποία επέρχεται ο τοπικός λυγισμός ανάμεσα στα ενισχυτικά στοιχεία. Συγκεκριμένα, το αριθμητικό μοντέλο υπολογίζει πως σχηματίζονται πλήρεις ιδιομορφές ανάμεσα στα ενισχυτικά στοιχεία όταν η αξονική μετατόπιση είναι ίση με 1.26mm , ενώ στο πείραμα σχηματίζονται όταν είναι ίση με 1.49mm . Πιθανόν η απόκλιση αυτή να οφείλεται στο ότι δεν είναι γνωστές όλες οι μηχανικές ιδιότητες του υλικού, στο ότι υπάρχουν αρχικές ατέλειες στο ενισχυμένο κελύφους του πειράματος, καθώς και στο ότι δεν μοντελοποιείται με ακρίβεια η σύνδεση των ενισχυτικών στοιχείων στο κέλυφος. Στη δημοσίευση, κατασκευάστηκε αριθμητικό μοντέλο το οποίο λαμβάνει υπόψη τη σύνδεση των ενισχυτικών στοιχείων, καθώς και τις αρχικές ατέλειες και υπάρχει μηδενική απόκλιση ανάμεσα στην προσομοίωση και το πείραμα. Εξαιρώντας την απόκλιση αυτή, το φορτίο υπολογίζεται με μικρή απόκλιση ακόμα και στη μεταλυγισμική περιοχή (μέγιστη απόκλιση 4%), ενώ ο τρόπος σχηματισμού των ιδιομορφών στο ενισχυμένο κέλυφος ταυτίζεται με αυτό του πειράματος. Στην Εικόνα 6.22 συγκρίνεται η ακτινική μετατόπιση του ενισχυμένου κελύφους που παρουσιάζεται στο πείραμα και στο αριθμητικό μοντέλο.



Εικόνα 6.22: Σύγκριση ανάπτυξης ιδιομορφών στο ενισχυμένο κέλυφος

Από την **Εικόνα 6.22** φαίνεται πως η εξέλιξη των ιδιομορφών στο αριθμητικό μοντέλο και στο πείραμα είναι όμοια. Αρχικά, σχηματίζονται πέντε ιδιομορφές στο εξωτερικό έλασμα, όμως δεν παρατηρείται μείωση της δυσκαμψίας της κατασκευής. Σημειώνεται πως η γραμμική ιδιομορφική ανάλυση είναι ικανή στην πρόβλεψη των πρώτων κυματομορφών σε αυτήν την περίπτωση. Έπειτα σχηματίζονται οι κυματομορφές στο έλασμα ανάμεσα στο πρώτο-δεύτερο και τέταρτο-πέμπτο ενισχυτικό στοιχείο. Τέλος σχηματίζονται κυματομορφές τοπικά σε όλες τις περιοχές ανάμεσα στα ενισχυτικά στοιχεία.

Επομένως, παρά το γεγονός πως δεν προβλέπεται ακριβώς η αξονική μετατόπιση στην οποία εξελίσσονται οι κυματομορφές στο ενισχυμένο κέλυφος, προβλέπεται με ακρίβεια ο τρόπος εξέλιξης τους, καθώς και το απαιτούμενο φορτίο.

6.3 Περίπτωση φόρτισης εντός επιπέδου διάτμησης

Παρακάτω θα πραγματοποιηθεί ανάπτυξη των αριθμητικών μοντέλων για την περίπτωση εντός επιπέδου διάτμησης. Οι δομές που περιλαμβάνονται στο παρόν υποκεφάλαιο είναι:

- Επίπεδη πλάκα
- Επίπεδη ενισχυμένη πλάκα
- Κέλυφος
- Ενισχυμένο κέλυφος

Για την περίπτωση του ενισχυμένου κελύφους, υπάρχει έλλειψη βιβλιογραφίας για την επιβεβαίωση του μοντέλου. Ωστόσο, θα πραγματοποιηθεί ανάλυση χωρίς επιβεβαίωση, για την πληρότητα της εργασίας.

6.3.1 Επίπεδη πλάκα

Μία ορθογωνική πλάκα υπό την επίδραση διατμητικών φορτίων ομοιόμορφα κατανεμημένων κατά μήκος των ακμών της λυγίζει όταν το φορτίο φθάσει κάποια κρίσιμη τιμή. Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού υπολογίζεται όπως και στην περίπτωση των θλιπτικών φορτίων από τη σχέση [9]

$$\sigma_{\kappa\rho} = \kappa_s \frac{\pi^2 D}{b^2 t}, \quad (6.3)$$

όπου κ_s η παράμετρος λυγισμού σε διατμητικά φορτία, η οποία εξαρτάται από το λόγο των ακμών a/b και τις οριακές συνθήκες του προβλήματος. Για τετράγωνες πλάκες, η παράμετρος λυγισμού παίρνει την τιμή $\kappa_s = 9.35$, ενώ για $a \gg b$ παίρνει την τιμή $\kappa_s = 5.35$. Μια προσεγγιστική λύση για την παράμετρο λυγισμού για οριακές συνθήκες απλής στήριξης δίνεται από τη σχέση:

$$k_s = 5.35 + 4 \left(\frac{b}{a} \right)^2 \quad (6.4)$$

Λόγω απουσίας της μεταλυγισμικής απόκρισης επίπεδων πλακών υπό διατμητικά φορτία, θα επιβεβαιωθούν τα αποτελέσματα της γραμμικής ιδιομορφικής ανάλυσης με αυτά που προκύπτουν από τις **Εξισώσεις (6.3) και (6.4)**, ενώ η ιδιομορφή θα συγκριθεί με αντίστοιχη της βιβλιογραφίας. Έπειτα, θα πραγματοποιηθεί μη-γραμμική ανάλυση του λυγισμού, έτσι ώστε να προκύψει η καμπύλη δύναμης – μετατόπισης.

Έστω μια επίπεδη πλάκα $a \times b \times t$ με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά που φαίνονται στον **Πίνακα 6.10**. Το υλικό από το οποίο αποτελείται η επίπεδη πλάκα είναι χάλυβας με μηχανικές ιδιότητες αυτές του **Πίνακα 6.11**.

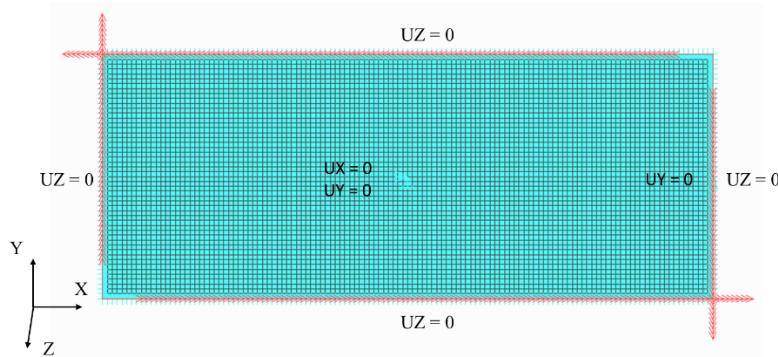
Πίνακας 6.10: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά επίπεδης πλάκας: Εντός επιπέδου διάτμηση

Μήκος a	Πλάτος b	Πάχος t	a/b
mm	mm	mm	-
2500	1000	3	2.5

Πίνακας 6.11: Ιδιότητες υλικού επίπεδης πλάκας: Εντός επιπέδου διάτμηση

E [GPa]	v
200	0.3

Οι οριακές συνθήκες είναι όμοιες με αυτής της επίπεδης πλάκας υπό θλιπτικά φορτία. Συγκεκριμένα, όλες οι πλευρές της πλάκας περιορίζονται στην εκτός επιπέδου διεύθυνση, ενώ δύο κόμβοι του μοντέλου περιορίζονται για την αποφυγή της κίνησης στερεού σώματος [110]. Συγκεκριμένα, περιορίζεται ο κόμβος που βρίσκεται στο κέντρο της πλάκας στις δύο εντός επιπέδου διεύθυνσεις και ο κόμβος που βρίσκεται στο κέντρο της εγκάρσιας πλευράς στην εγκάρσια διεύθυνση. Ταυτόχρονα, εισάγεται ομοιόμορφη κατανομή φορτίου κατά μήκος κάθε πλευράς για τις διατμητικές δυνάμεις. Οι οριακές συνθήκες του μοντέλου απεικονίζονται στην **Εικόνα 6.23**. Έπειτα από έλεγχο σύγκλισης πλέγματος, το μέγεθος του στοιχείου επιλέγεται να είναι ίσο με $20 \times 20 mm^2$.

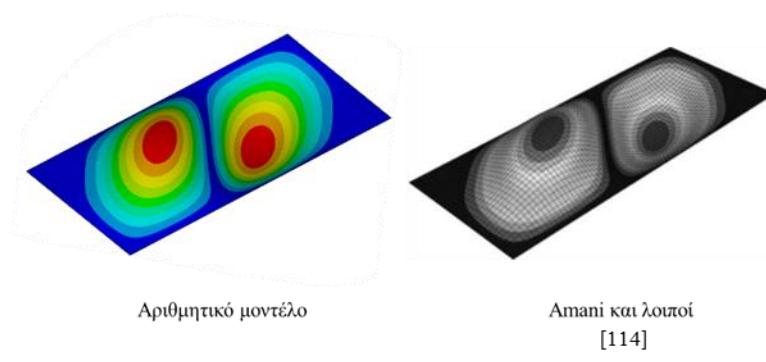


Εικόνα 6.23: Οριακές συνθήκες επίπεδης πλάκας: Εντός επιπέδου διάτμηση

Στον **Πίνακα 6.12** συγκρίνεται η υπολογισμένη κρίσιμη τάση λυγισμού με αυτή της **Εξίσωσης (6.3)**. Στην **Εικόνα 6.24** συγκρίνεται η ιδιομορφή που προκύπτει από το αριθμητικό μοντέλο με την ιδιομορφή που προκύπτει από την ανάλυση των Amani και λοιπών [111]. Η ανάλυση τους αφορά κελύφη, όμως στη συγκεκριμένη σύγκριση η καμπυλότητα του κελύφους είναι ίσο με $Zb = 5$, επομένως μπορεί να θεωρηθεί επίπεδη πλάκα. Η παρατήρηση αυτή επισημαίνεται και στη δική τους ανάλυση. Παρατηρείται πως η κρίσιμη τάση λυγισμού παρουσιάζει ελάχιστη απόκλιση με αυτή της αναλυτικής **Εξίσωσης (6.3)**, ενώ η ιδιομορφή που προκύπτει είναι ίσοια με αυτή της βιβλιογραφίας.

Πίνακας 6.12: Σύγκριση αποτελεσμάτων ιδιομορφικού λυγισμού με τη θεωρητική τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού: Εντός επιπέδου διάτμηση

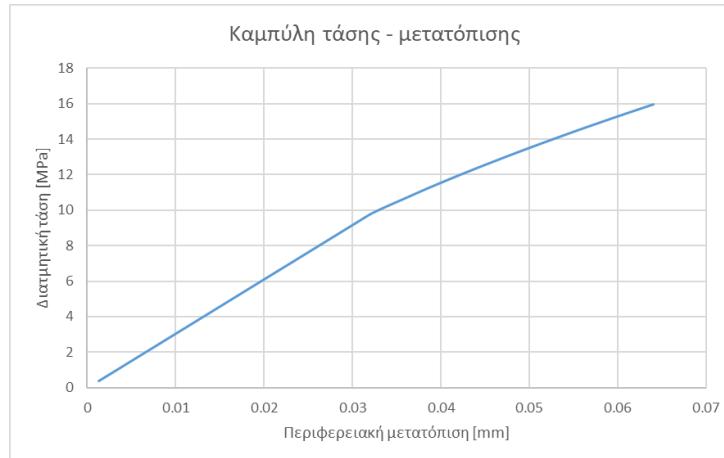
Αριθμητική κρίσιμη τάση λυγισμού σ_{κρ,FE}	Θεωρητική κρίσιμη τάση λυγισμού σ_{κρ,th}	Σφάλμα
MPa	MPa	%
9.83	9.74	0.86



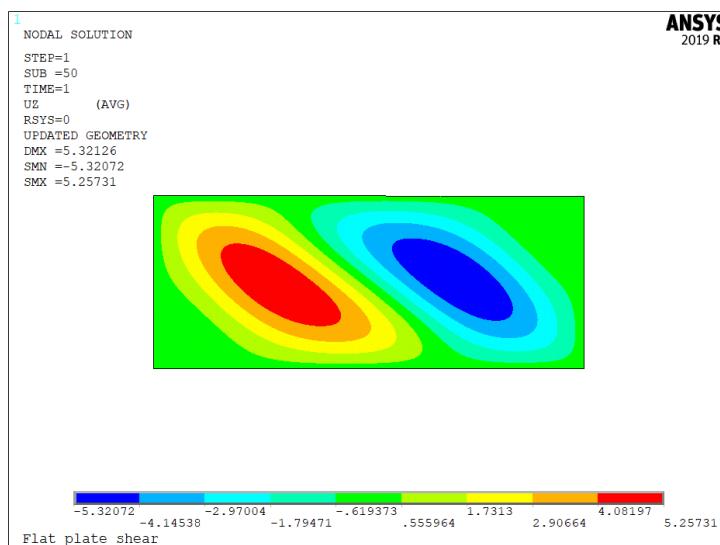
Εικόνα 6.24: Πρώτη ιδιομορφή επίπεδης πλάκας υπό διατμητικά φορτία

Στην **Εικόνα 6.25** και **6.26** παρουσιάζεται η καμπύλη διατμητικής τάσης – μετατόπισης της διαμήκους πλευράς της επίπεδης πλάκας και η εκτός επιπέδου μετατόπιση της στη μεταλυγισμική περιοχή. Όπως φαίνεται από την καμπύλη, η πλάκα είναι ικανή να φέρει φορτία ακόμα και στην μεταλυγισμική περιοχή και η συμπεριφορά της είναι ίσοια με την θλιπτική

φόρτιση. Τέλος, παρατηρείται ότι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού υπολογίζεται με ακρίβεια από τη γραμμική ιδιομορφική ανάλυση.



Εικόνα 6.25: Καμπύλη δύναμης - μετατόπισης για την επίπεδη πλάκα: Εντός επιπέδου διάτμηση



Εικόνα 6.26: Εκτός επιπέδου μετατόπιση επίπεδης πλάκας στη μεταλυγισμική περιοχή: Εντός επιπέδου διάτμηση

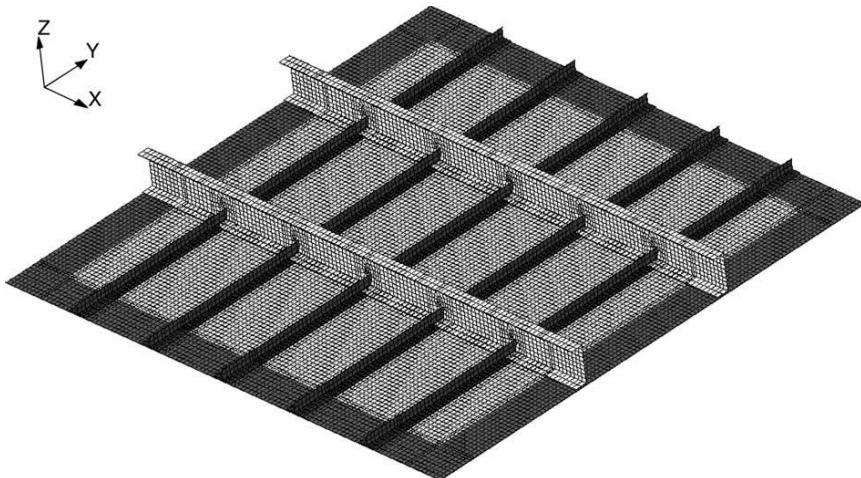
6.3.2 Επίπεδη ενισχυμένη πλάκα

Το μοντέλο της επίπεδης ενισχυμένης πλάκας κατασκευάζεται με βάση την πειραματική και αριθμητική μελέτη των Murphy και λοιπών [25]. Το έλασμα της ενισχυμένης πλάκας ενισχύεται με πέντε διαμήκη ενισχυτικά στοιχεία σχήματος πτερυγίου και δύο εγκάρσια ενισχυτικά στοιχεία σχήματος C. Επιπλέον, το έλασμα (skin) της κατασκευής ενισχύεται στα

άκρα του με skin doubler. Η γεωμετρία της ενισχυμένης πλάκας απεικονίζεται στην **Εικόνα 6.27**, ενώ τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της παρουσιάζονται στον **Πίνακα 6.13**. Η κατασκευή αποτελείται από κράματα αλουμινίου με τις μηχανικές ιδιότητες που φαίνονται στον **Πίνακα 6.14**.

Ο τρόπος φόρτισης της κατασκευής παρουσιάζεται στην **Εικόνα 6.28**. Επομένως, προκειμένου να μοντελοποιηθεί η επίπεδη πλάκα σε απλή διάτμηση, περιορίζονται όλοι οι βαθμοί ελευθερίας στο ένα άκρο της, ενώ στο άλλο περιορίζονται όλοι εκτός της οριζόντιας μετατόπισης, στη διεύθυνση όπου εισάγεται το διατμητικό φορτίο. Στις εγκάρσιες πλευρές περιορίζονται οι εκτός επιπέδου μετατόπιση, καθώς και η διαμήκης μετατόπιση, ώστε οι πλευρές αυτές να παραμένουν ευθύγραμμες.

Στο μοντέλο εισάγονται και φαινόμενα πλαστικότητας, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα της καμπύλης τάσης-παραμόρφωσης που δίνονται στη δημοσίευση για το υλικό που χρησιμοποιείται. Χρησιμοποιείται το μοντέλο του multi-linear isotropic kinematic hardening.



Εικόνα 6.27: Γεωμετρία επίπεδης ενισχυμένης πλάκας: Εντός επιπέδου διάτμηση

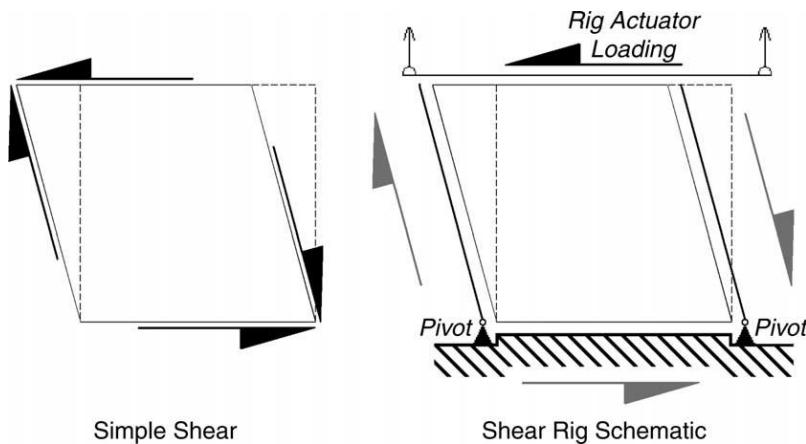
Πίνακας 6.13: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά επίπεδης ενισχυμένης πλάκας: Εντός επιπέδου διάτμηση

Μήκος ενισχυμένης πλάκας [mm]	1067
Πλάτος ενισχυμένης πλάκας [mm]	1067
Πάχος κελύφους [mm]	1.27
Αριθμός διαμηκών ενισχύσεων	5

Αριθμός εγκάρσιων ενισχύσεων	2
Απόσταση μεταξύ διαμηκών ενισχύσεων [mm]	177.8
Απόσταση μεταξύ εγκάρσιων ενισχύσεων [mm]	355.6
Πάχος διαμήκους ενίσχυσης [mm]	1,27
Υψος διαμήκους ενίσχυσης [mm]	38.1
Πάχος εγκάρσιας ενίσχυσης [mm]	2.032
Πλάτος φλάντζας εγκάρσιας ενίσχυσης [mm]	25.4
Υψος εγκάρσιας ενίσχυσης [mm]	82.55
Πάχος Skin Doubler [mm]	1.27x2

Πίνακας 6.14: Ιδιότητες υλικού αλουμινίου: Εντός επιπέδου διάτμηση

E [GPa]	v	σ_y [MPa]
70	0.33	330

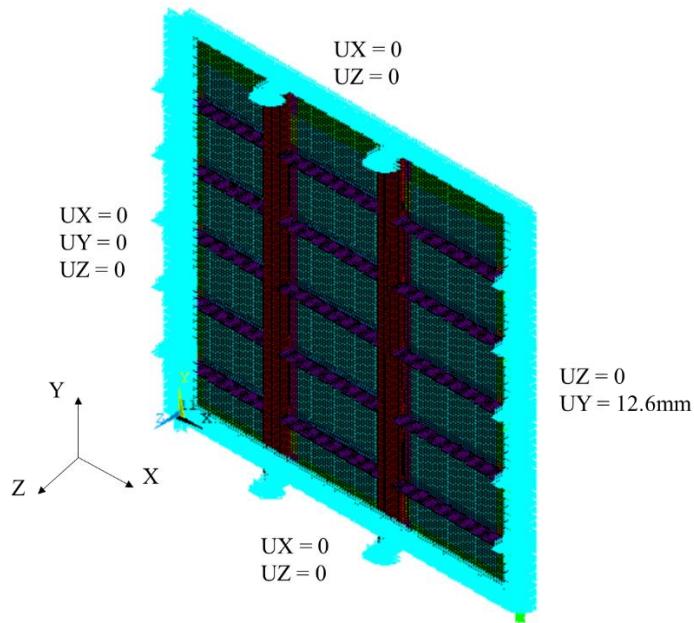


Εικόνα 6.28: Φόρτιση επίπεδης ενισχυμένης πλάκας: Εντός επιπέδου διάτμηση [25]

Το στοιχείο που χρησιμοποιείται στο μοντέλο είναι το συμβατικό SHELL181 με μέγεθος στοιχείου $8 \times 8 mm^2$. Το μέγεθος αυτό επιλέχθηκε πραγματοποιώντας έλεγχο σύγκλισης πλέγματος, όπως παρουσιάστηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Η σύνδεση του ελάσματος με τα

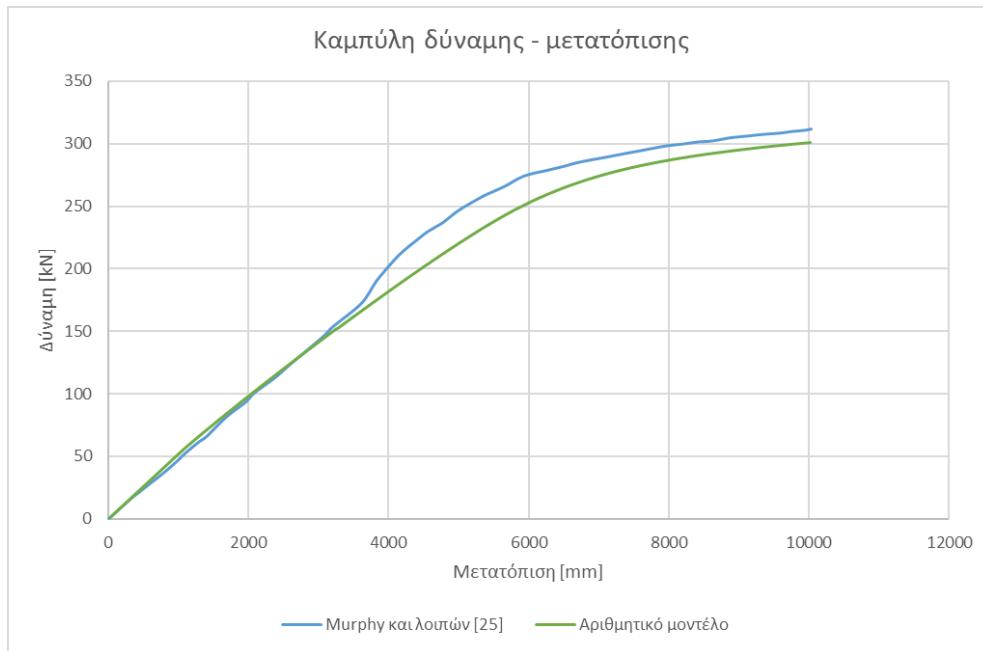
Τμήμα Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών
Τομέας Εφαρμοσμένης Μηχανικής, Τεχνολογίας, Υλικών και Εμβιομηχανικής

ενισχυτικά στοιχεία πραγματοποιείται με τη shared node method. Το διακριτοποιημένο μοντέλο, καθώς και οι οριακές συνθήκες απεικονίζονται στην **Εικόνα 6.29**.

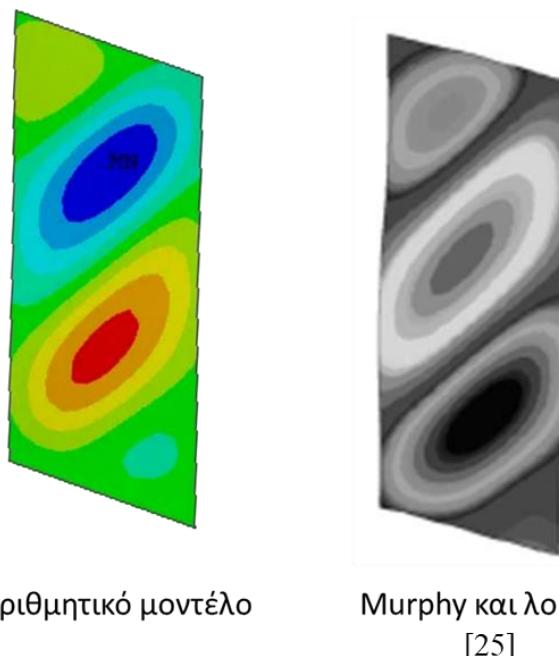


Εικόνα 6.29: Οριακές συνθήκες επίπεδης ενισχυμένης πλάκας: Εντός επιπέδου διάτμηση

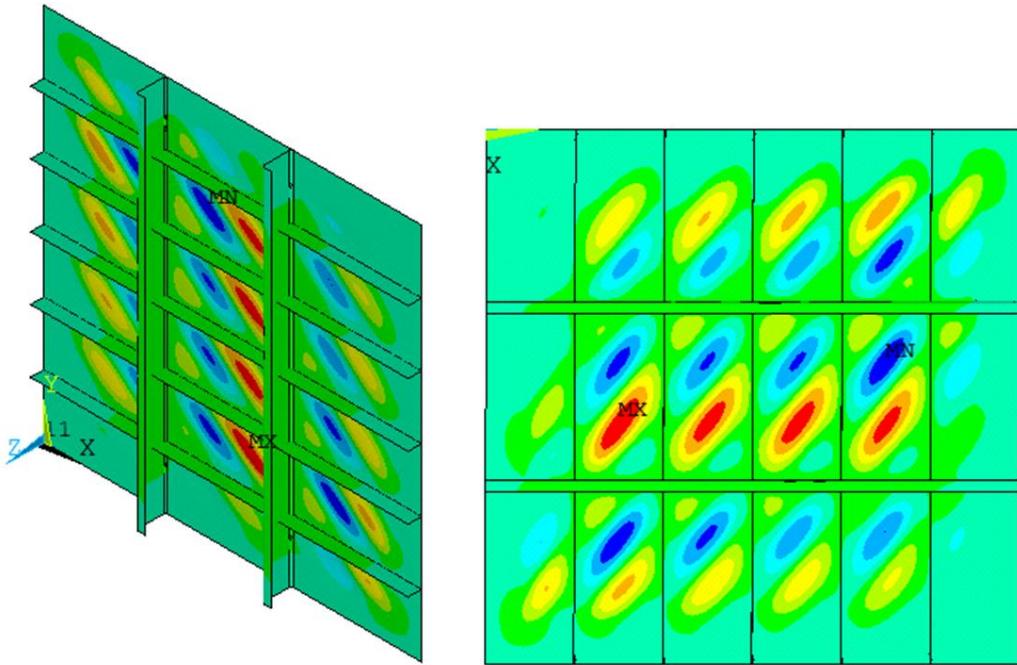
Στην **Εικόνα 6.30** συγκρίνονται οι καμπύλες φορτίου-μετατόπισης του αριθμητικού μοντέλου και της βιβλιογραφίας. Παρατηρείται απόκλιση κυρίως στη μεταλυγισμική περιοχή, ενώ η δυσκαμψία της κατασκευής πριν το λυγισμό προβλέπεται ικανοποιητικά από το αριθμητικό μοντέλο. Οι αποκλίσεις στη μεταλυγισμική περιοχή οφείλονται στον τρόπο μοντελοποίησης της σύνδεσης των ενισχυτικών στοιχείων με το έλασμα. Επίσης, δεν είναι γνωστά τα μοντέλα πλαστικότητας που χρησιμοποιήθηκαν στη βιβλιογραφία, το οποίο πιθανότατα επηρεάζει τη συμπεριφορά του υλικού όταν αυτή επέρχεται. Ωστόσο, το τελικό φορτίο αστοχίας δεν παρουσιάζει μεγάλη απόκλιση. Επίσης, στην **Εικόνα 6.31** συγκρίνεται η εκτός επιπέδου μετατόπιση στο κεντρικό skin bay (έλασμα ανάμεσα στα ενισχυτικά στοιχεία) και το μοντέλο προβλέπει με προβλέπει με ακρίβεια τον αριθμό των κυματομορφών. Αναπτύσσονται τέσσερις κυματομορφές στο κεντρικό skin bay; δύο μεγαλύτερες και δύο μικρότερες. Το μέγεθος τους αποκλίνει μερικώς, και πιθανόν οφείλεται στον τρόπο μοντελοποίησης της επαφής του ελάσματος και των ενισχυτικών στοιχείων. Τέλος, στην **Εικόνα 6.32** παρουσιάζεται η εκτός επιπέδου μετατόπιση όλου του αριθμητικού μοντέλου.



Εικόνα 6.30: Καμπύλη δύναμης - μετατόπισης: Εντός επιπέδου διάτμηση



Εικόνα 6.31: Σύγκριση εκτός επιπέδου μετατόπισης κεντρικού skin bay: Εντός επιπέδου διάτμηση



Εικόνα 6.32: Εκτός επιπέδου μετατόπιση αριθμητικού μοντέλου επίπεδης ενισχυμένης πλάκας: Εντός επιπέδου διάτμηση

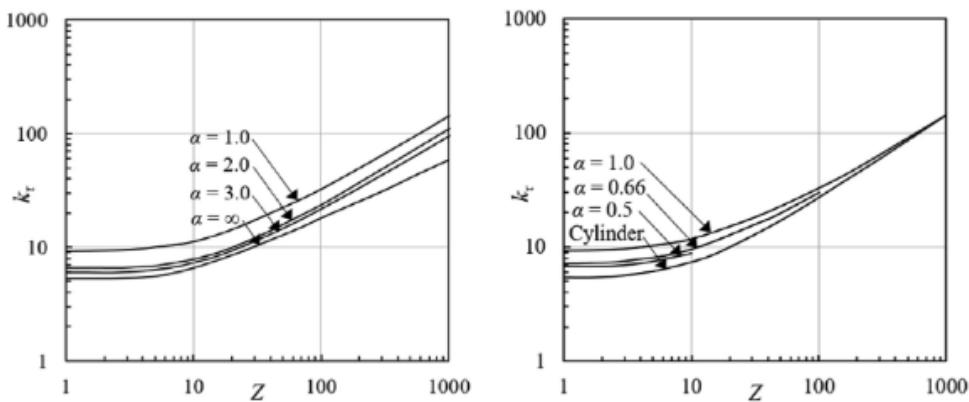
6.3.3 Κέλυφος

Όμοια με την επίπεδη πλάκα, το κρίσιμο φορτίου λυγισμού του κελύφους δίνεται από την εξίσωση:

$$\sigma_{\kappa\rho} = \kappa_s \frac{\pi^2 D}{b^2 t}, \quad (6.5)$$

Η κρίσιμη παράμετρος λυγισμού κ_s εξαρτάται από τη γεωμετρία του κελύφους και τις οριακές συνθήκες του προβλήματος. Η NASA συγκέντρωσε όλες τις προηγούμενες μελέτες που είχαν πραγματοποιηθεί στα κελύφη και εξήγαγε τις καμπύλες σχεδιασμού NASA [112], στις οποίες δίνεται η παράμετρος λυγισμού για διάφορες τιμές της καμπυλότητας Z και του λόγου των πλευρών a/b . Οι καμπύλες σχεδιασμού δίνονται στην Εικόνα 6.33 όπου με α συμβολίζεται ο λόγος των πλευρών και με Z η παράμετρος καμπυλότητας, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$Z = \frac{b^2}{Rt} \sqrt{1 - \nu^2} \quad (6.6)$$



Εικόνα 6.33: Καμπύλες σχεδιασμού NASA

Έστω ένα κέλυφος με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του **Πίνακα 6.15** και τις ιδιότητες υλικού του **Πίνακα 6.14**.

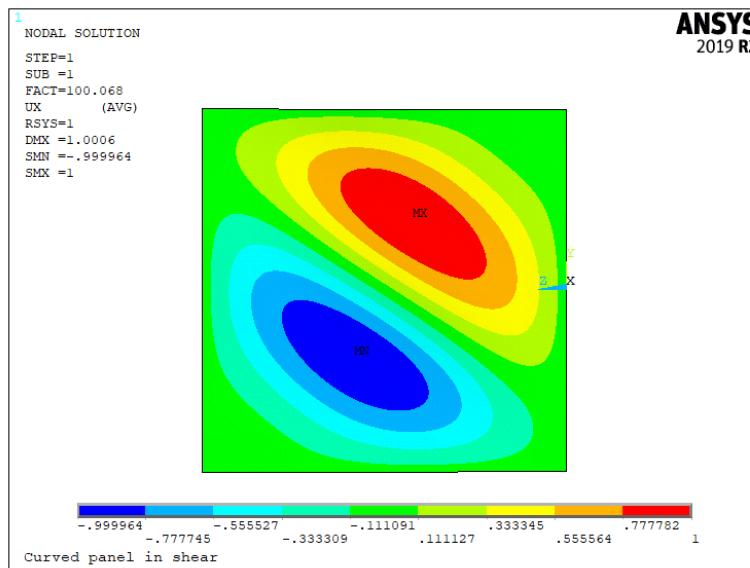
Πίνακας 6.15: Γεωμετρία κελύφους: Εντός επιπέδου διάτμηση

Μήκος a	Πλάτος b	Πάχος t	Ακτίνα R	a/b	Z
mm	mm	mm	mm	-	-
100	100	1	314	1	30

Οι οριακές συνθήκες του μοντέλου είναι όμοιες με αυτές της επίπεδης πλάκας της **Υποενότητας 6.3.1**, με τη διαφορά πως εφαρμόζονται σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Στον **Πίνακα 6.16** συγκρίνεται η κρίσιμη τιμή ιδιομορφικού λυγισμού του μοντέλου με αυτή που προκύπτει από την **Εξίσωση (6.5)**, ενώ στην **Εικόνα 6.34** παρουσιάζεται η πρώτη γραμμική ιδιομορφή λυγισμού.

Πίνακας 6.16: Σύγκριση αποτελεσμάτων ιδιομορφικού λυγισμού με τη θεωρητική τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού: Εντός επιπέδου διάτμηση

Αριθμητική κρίσιμη τάση λυγισμού $\sigma_{cr,FE}$	Θεωρητική κρίσιμη τάση λυγισμού $\sigma_{cr,th}$	Σφάλμα
MPa	MPa	%
100.1	103.3	3.16

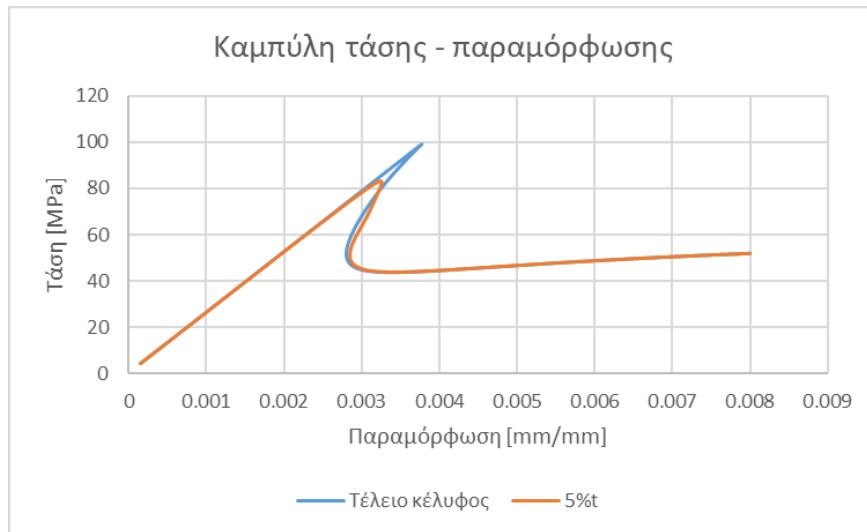


Εικόνα 6.34: Πρώτη ιδιομορφή γραμμικού ιδιομορφικού λυγισμού κελύφους: Εντός επιπέδου διάτμηση

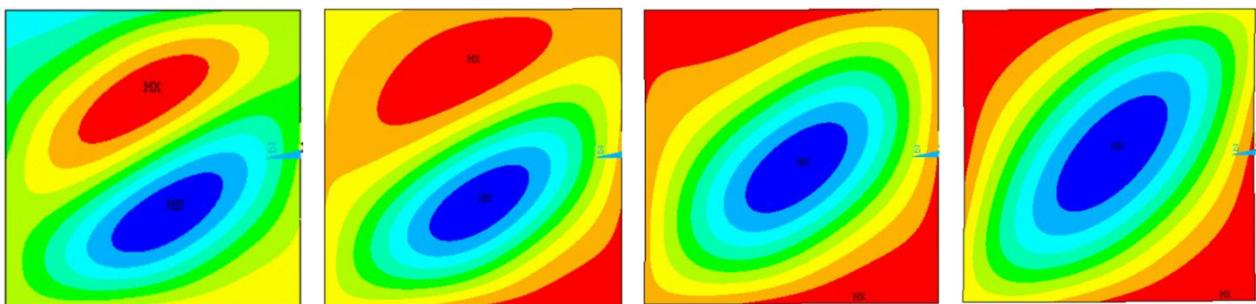
Στην **Εικόνα 6.35** παρουσιάζεται η καμπύλη τάσης – παραμόρφωσης για τέλειο κέλυφος και για κέλυφος με αρχική ατέλεια μεγέθους $5\%t$ της πρώτης ιδιομορφής. Στην **Εικόνα 6.36** παρουσιάζονται διάφορα στιγμιότυπα της εκτός επιπέδου μετατόπιση του κελύφους. Από την καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης, είναι φανερό πως τα κελύφη δεν παρουσιάζουν ευσταθής μεταλυγισμική συμπεριφορά σε εντός επιπέδου διατμητικά φορτία. Επιπλέον, οι αρχικές ατέλειες επηρεάζουν σημαντικά τη κρίσιμη τάση λυγισμού του κελύφους, όπως τονίζει και ο Domb [113]. Ο Domb αναθεώρησε τις καμπύλες σχεδιασμού της NASA για να περιλαμβάνει τις αρχικές ατέλειες και κατέληξε στην ίδια σχέση με την **Εξίσωση (6.5)**, με τη διαφορά πως η κρίσιμη τάση λυγισμού δίνεται από τη σχέση:

$$k_s(Z) = 1.4805(Z)^{0.6401} \quad (6.7)$$

για κελύφη με παράμετρο καμπυλότητας από $15 \leq Z \leq 200$. Στο κέλυφος με αρχική ατέλεια, ο λυγισμός επέρχεται στα $83.3MPa$, όπως φαίνεται και στην **Εικόνα 6.36**. Η κρίσιμη τάση λυγισμού, με βάση την παράμετρο λυγισμού της **Εξίσωσης (6.7)**, υπολογίζεται στα $84.4MPa$. Επομένως, προβλέπεται ικανοποιητικά η κρίσιμη τάση λυγισμού με αρχικές ατέλειες.



Εικόνα 6.35: Καμπύλη τάσης - παραμόρφωσης κελύφους: Εντός επιπέδου διάτμηση



Εικόνα 6.36: Ανάπτυξη κυματομορφών στο κέλυφος: Εντός επιπέδου διάτμηση

6.3.4 Ενισχυμένο κέλυφος

Το μοντέλο του ενισχυμένου κελύφους σε εντός επιπέδου διάτμηση κατασκευάζεται με βάση την πειραματική μελέτη των Odermann και Kling [114]. Στη δημοσίευση δεν συμπεριλαμβάνονται οι ιδιότητες του υλικού και η κωδικοποίηση των στρώσεων του κάθε στοιχείου, επομένως δεν είναι δυνατή η ακριβής επιβεβαίωση του μοντέλου. Επίσης, δεν παρουσιάζεται η καμπύλη δύναμης – μετατόπισης. Ωστόσο, θα συγκριθεί η ακτινική μετατόπιση του ενισχυμένου κελύφους με την τελική ακτινική μετατόπιση της βιβλιογραφίας. Το ενισχυμένο κέλυφος αποτελείται από πέντε διαμήκη ενισχυτικά στοιχεία, σχήματος ωμέγα. Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του ενισχυμένου κελύφους παρουσιάζονται στον **Πίνακα 6.17**. Το υλικό από το οποίο αποτελείται το ενισχυμένο κέλυφος είναι σύνθετο

πολυστρωματικό υλικό με ίνες άνθρακα (CFRP) με τις ίδιες μηχανικές ιδιότητες που παρουσιάζονται στον **Πίνακα 6.9**.

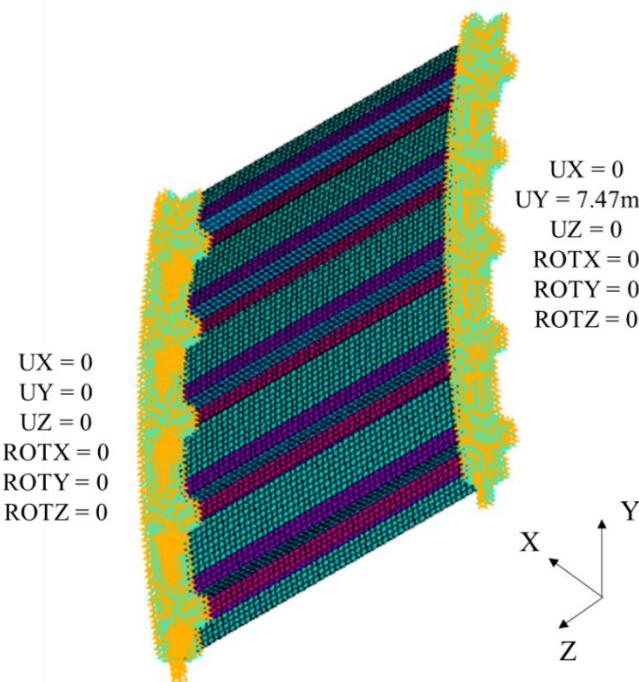
Πίνακας 6.17: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά ενισχυμένου κελύφους: Εντός επιπέδου διάτηση

Ελεύθερο μήκος [mm]	584
Ακτίνα [mm]	1978
Πάχος κελύφους [mm]	1.625
Μήκος τόξου [mm]	744
Αριθμός ενισχύσεων	5
Απόσταση μεταξύ ενισχύσεων [mm]	151
Κωδικοποίηση στρώσεων κελύφους	[45,-45,0,90,-45,45,0,45,-45,90,0,-45,45]
Κωδικοποίηση στρώσεων ενισχύσεων	[45,0,-45,0,90,0,-45,0,45]
Πάχος στρώσης [mm]	0.125
Πάχος ενίσχυσης [mm]	1.125
Υψος ενίσχυσης [mm]	24.9
Πλάτος κεφαλής ενίσχυσης [mm]	24.9
Πλάτος φλάντζας ενίσχυσης [mm]	26

Κατά το πείραμα, το ένα άκρο του ενισχυμένου κελύφους περιορίζονται όλοι οι βαθμοί ελευθερίας, ενώ στο άλλο περιορίζονται όλοι εκτός της εγκάρσιας μετατόπισης. Τα υπόλοιπα δύο άκρα αφήνονται ελεύθερα. Η τελική μετατόπιση στο πείραμα Το πείραμα πραγματοποιείται έως αστοχίας του ενισχυμένου κελύφους, το οποίο συμβαίνει για εγκάρσια μετατόπιση $v = 7.47\text{mm}$. Το αριθμητικό μοντέλο που κατασκευάζεται δεν εξετάζει την αστοχία της δομής. Οι οριακές συνθήκες του αριθμητικού μοντέλου απεικονίζονται στην **Εικόνα 6.37**.

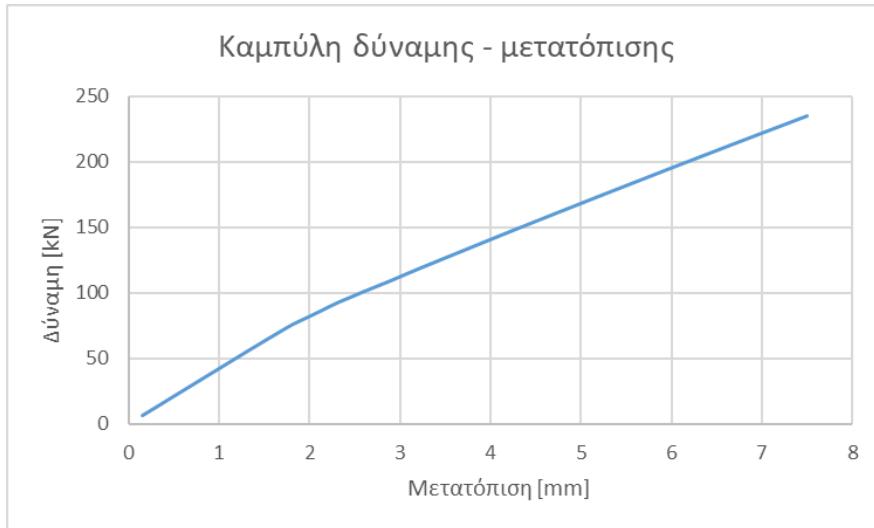
Για τη μοντελοποίηση του ενισχυμένου κελύφους, χρησιμοποιείται το συμβατικό στοιχείο SHELL181, το οποίο είναι ιδανικό για πολύστρωματικά υλικά. Έπειτα από έλεγχο σύγκλισης

πλέγματος, το μέγεθος του στοιχείο ορίζεται ως $5 \times 5 mm^2$. Ο τρόπος σύνδεσης των ενισχύσεων με το κέλυφος πραγματοποιείται με τη shared-node method. Σημειώνεται πως πραγματοποιείται σύζευξη (CP) των κόμβων του άκρου στους οποίους εισάγεται η εγκάρσια μετατόπιση, έτσι ώστε να είναι ομοιόμορφη η μετατόπιση του άκρου, όπως ακριβώς και στο πείραμα.

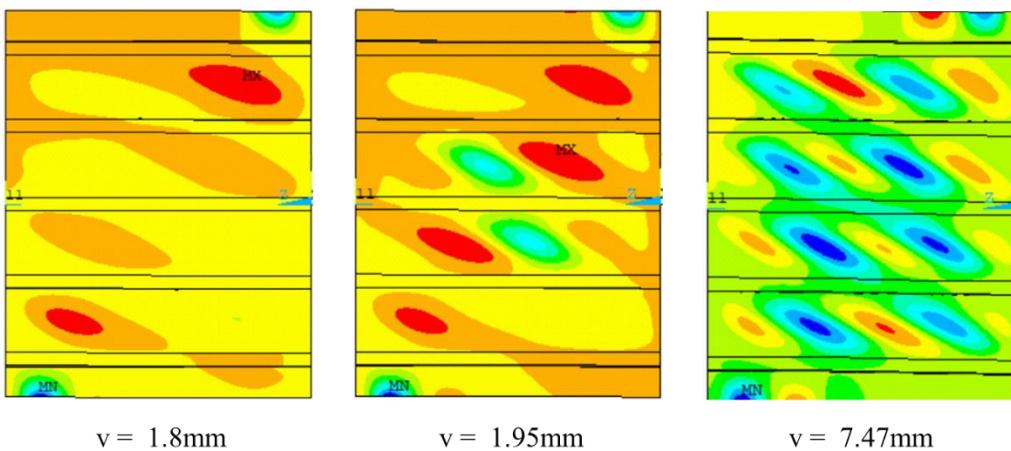


Εικόνα 6.37: Οριακές συνθήκες ενισχυμένου κελύφους: Εντός επιπέδου διάτμηση

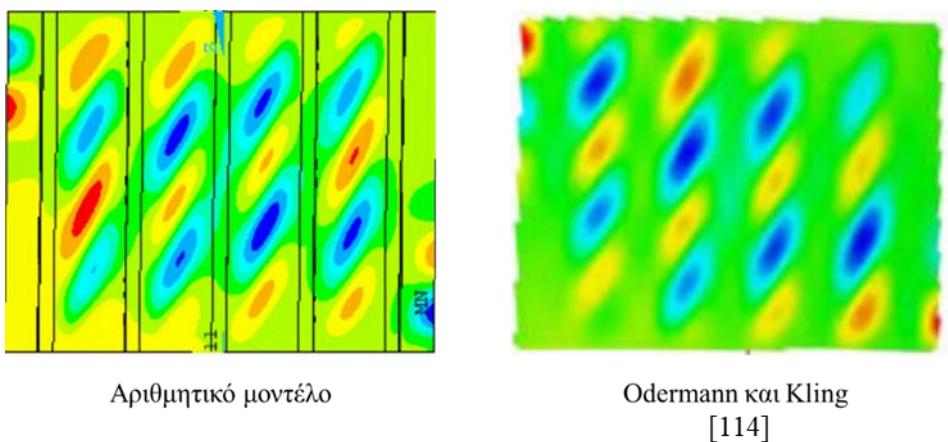
Στις **Εικόνες 6.38** και **6.39** παρουσιάζεται η καμπύλη δύναμης φορτίου και η εκτός επιπέδου μετατόπιση του ενισχυμένου κελύφους σε ορισμένες μετατοπίσεις. Όπως φαίνεται από την καμπύλη και την εκτός επιπέδου μετατόπιση, το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι $80.44 kN$ και επέρχεται σε μετατόπιση $1.95 mm$. Το ενισχυμένο κέλυφος παρουσιάζει ευσταθής μεταλυγισμική συμπεριφορά, ενώ τελικά σχηματίζονται τέσσερεις ολόκληρες κυματομορφές στο έλασμα ανάμεσα στα ενισχυτικά στοιχεία. Στην **Εικόνα 6.40** συγκρίνεται η εκτός επιπέδου μετατόπιση στα $7.18 mm$ με αυτή της βιβλιογραφίας. Οι κυματομορφές που σχηματίζονται είναι όμοιες σε σχήμα και αριθμό, παρά τις άγνωστες ιδιότητες του υλικού.



Εικόνα 6.38: Καμπύλη δύναμης - μετατόπισης ενισχυμένου κελύφους: Εντός επιπέδου διάτμηση



Εικόνα 6.39: Εκτός επιπέδου μετατόπιση ενισχυμένου κελύφους: Εντός επιπέδου διάτμηση



Εικόνα 6.40: Σύγκριση εκτός επιπέδου μετατόπισης ενισχυμένου κελύφους με τη βιβλιογραφία: Εντός επιπέδου διάτμηση

6.4 Περίπτωση συνδυασμένης φόρτισης

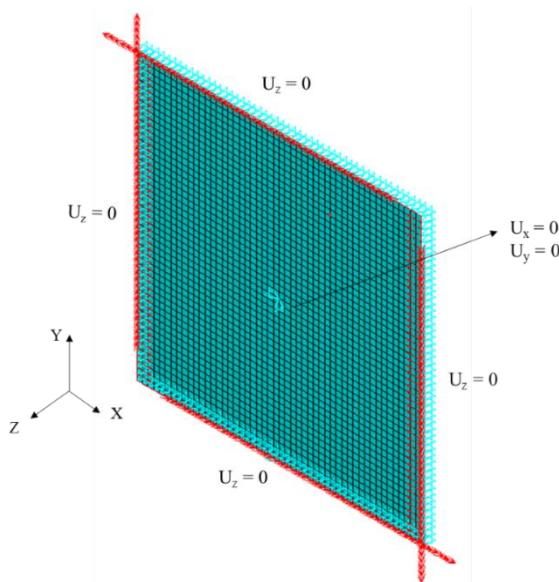
Στην ενότητα αυτή πραγματοποιείται επιβεβαίωση του αριθμητικού μοντέλου επίπεδης πλάκας μέσω της Εξίσωσης (4.20).

6.4.1 Επίπεδη πλάκα υπό συνδυασμένη θλιπτική και διατμητική φόρτιση

Έστω μια επίπεδη πλάκα διαστάσεων $100x100x0.5mm^3$ η οποία καταπονείται σε αξονική θλιπτική φόρτιση και εντός επιπέδου διατμητική φόρτιση. Σκοπός της ανάλυσης είναι να επιβεβαιωθεί το αριθμητικό μοντέλο με βάση το νόμο της συνδυασμένης καταπόνησης, ο οποίος δίνεται από την Εξίσωση (4.20). Το υλικό που χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση της επίπεδης πλάκας είναι αλουμίνιο, με τις μηχανικές ιδιότητες που φαίνονται στον **Πίνακα 6.18**. Οι οριακές συνθήκες είναι αυτές της απλής στήριξης και απεικονίζονται μαζί με τις συνθήκες φόρτισης στην **Εικόνα 6.41**. Χρησιμοποιείται τύπος στοιχείου SHELL181 μεγέθους $2x2mm^2$, το οποίο επιλέχθηκε ύστερα από μελέτη σύγκλισης πλέγματος.

Πίνακας 6.18: Μηχανικές ιδιότητες αλουμινίου: Συνδυασμένη καταπόνηση σε θλίψη και διάτμηση

E [GPa]	v
70	0.33



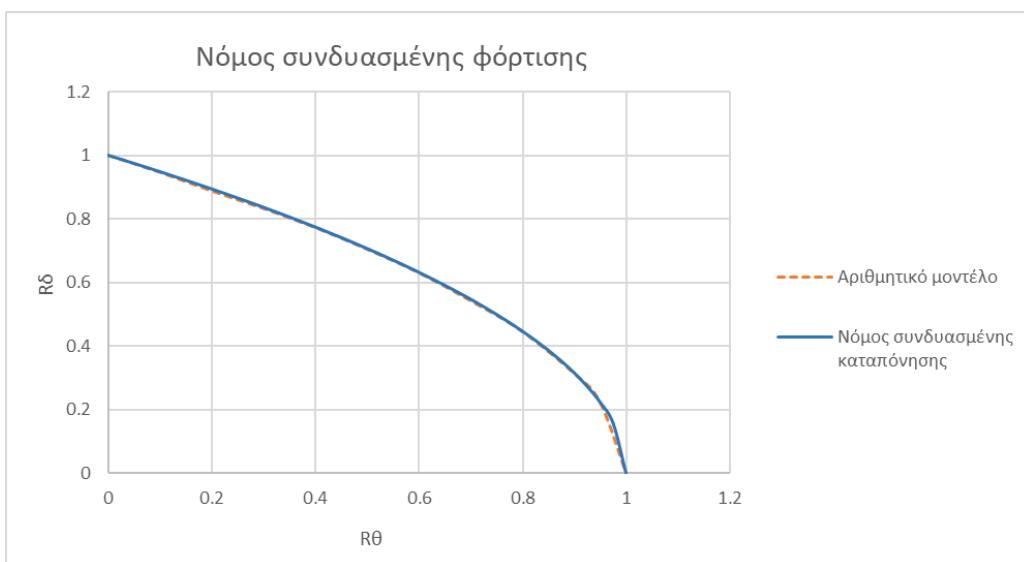
Εικόνα 6.41: Οριακές συνθήκες επίπεδης πλάκας: Συνδυασμένη καταπόνηση σε θλίψη και διάτμηση

Στον **Πίνακα 6.19** παρουσιάζονται τα υπολογισμένα κρίσιμα φορτία λυγισμού για θλιπτική ($\sigma_{κρίσιμο,θ}$) και διατμητική ($\sigma_{κρίσιμο,δ}$) φόρτιση αντίστοιχα. Οι τιμές αυτές χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των λόγων τάσεων.

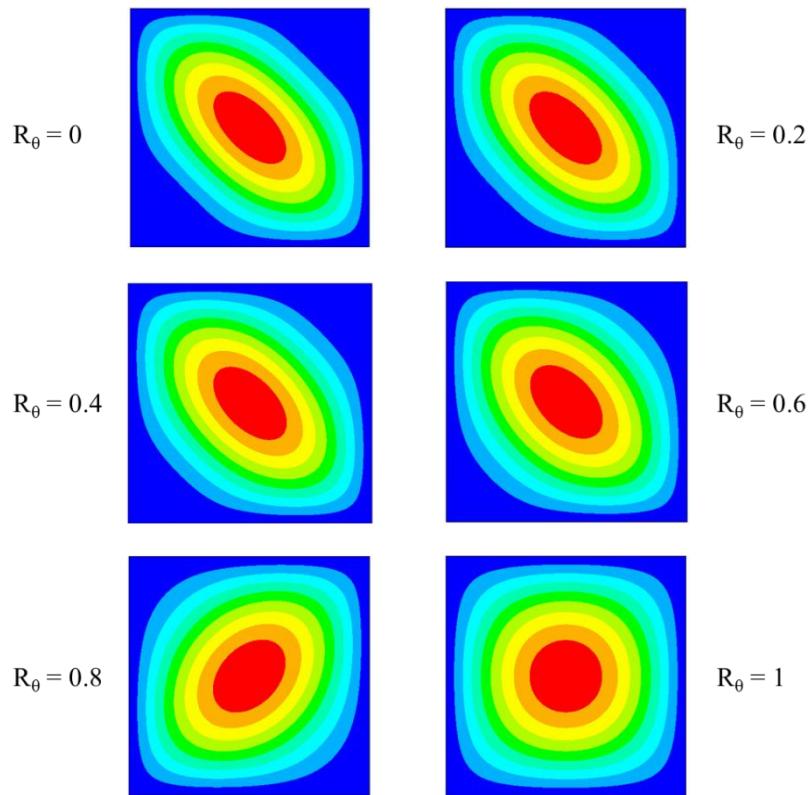
Πίνακας 6.19: Κρίσιμα φορτία λυγισμού θλίψης και διάτμησης για το μοντέλο της συνδυασμένης φόρτισης

$\sigma_{κρίσιμο,θ}$	$\sigma_{κρίσιμο,δ}$
N	N
333.2	755.9

Στην **Εικόνα 6.42** συγκρίνεται ο νόμος συνδυασμένης φόρτισης που προκύπτει από το αριθμητικό μοντέλο με αυτόν της **Εξίσωσης (4.20)**, ενώ στην **Εικόνα 6.43** παρουσιάζεται η παραμορφωμένη επίπεδη πλάκα για διάφορες τιμές των λόγων τάσεων.



Εικόνα 6.42: Σύγκριση αποτελεσμάτων νόμου συνδυασμένης καταπόνησης



Εικόνα 6.43: Παραμορφωμένη επίπεδη πλάκα για διάφορους λόγους τάσεων

Παρατηρείται από την **Εικόνα 6.43** πως όσο αυξάνεται ο λόγος τάσεων της θλίψης, το παραμορφωμένο σχήμα τείνει να γίνεται πιο τετράγωνο. Τέλος, από την **Εικόνα 6.42** παρατηρείται πως τα αποτελέσματα του αριθμητικού μοντέλου ταυτίζονται σχεδόν επακριβώς με την καμπύλη συνδυασμένης φόρτισης. Η σχέση που προκύπτει από το αριθμητικό μοντέλο είναι

$$R_\theta + R_\delta^{1.976} = 1 \quad (6.8)$$

και έχει μικρή απόκλιση από αυτή της **Εξίσωσης (4.20)**.

7 Αριθμητικά μοντέλα ενισχυμένων κελυφών σε σύνθετη φόρτιση

7.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο αναπτύσσονται αριθμητικά μοντέλα ενισχυμένων κελυφών για τη μελέτη της συμπεριφοράς τους σε λυγισμό υπό συνδυασμένη θλίψη-διάτμηση. Σκοπός της ανάλυσης είναι η εξαγωγή των καμπυλών αλληλεπίδρασης φορτίων και η σύγκριση τους. Για τη μελέτη της συνδυασμένης φόρτισης θα κατασκευαστούν δύο αριθμητικά μοντέλα ενισχυμένων κελυφών, των οποίων οι διαστάσεις και ιδιότητες των υλικών θα είναι όμοιες με αυτές του ενισχυμένου κελύφους της **Υποενότητας 6.2.3**. Συγκεκριμένα, θα κατασκευαστεί ένα ισότροπο αλουμινένιο κέλυφος και ένα ορθότροπο (ίνες άνθρακα) με πέντε διαμήκεις ενισχύσεις σχήματος ωμέγα (hat-stiffened panel). Στην **Ενότητα 7.4** θα πραγματοποιηθεί σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ του ισότροπου και ορθότροπου ενισχυμένου κελύφους.

Ως κρίσιμο φορτίο λυγισμού στις παρακάτω αναλύσεις θεωρείται το φορτίο στο οποίο επέρχεται ο τοπικός λυγισμός της δομής, ανάμεσα στα ενισχυτικά στοιχεία. Επιπλέον, δεν θα συμπεριληφθούν ατέλειες στις αναλύσεις των ενισχυμένων κελυφών. Η διαδικασία η οποία ακολουθείται για την εξαγωγή της καμπύλης αλληλεπίδρασης σε κάθε περίπτωση έχει ως εξής:

1. Υπολογισμός του κρίσιμου φορτίου λυγισμού σε θλίψη και διάτμηση, για την εύρεση του παρονομαστή του λόγου φορτίου R_θ και R_δ αντίστοιχα.
2. Ανάλυση του ενισχυμένου κελύφους σε σύνθετη φόρτιση θλίψης και διάτμησης, σε χαρακτηριστικές τιμές του λόγου φορτίου R_θ, R_δ .
3. Εύρεση του χρονικού σημείου κατά την οποία επέρχεται ο τοπικός λυγισμός, μέσω των καμπυλών φορτίου-μετατόπισης (είτε στην αξονική είτε στην εγκάρσια διεύθυνση) και παρακολουθώντας ταυτόχρονα την εκτός επιπέδου μετατόπιση του ενισχυμένου κελύφους.
4. Καταγραφή των φορτίων θλίψης και διάτμησης λυγισμού και υπολογισμός των λόγων τάσεων.
5. Εφόσον έχουν συλλεχθεί αρκετά σημεία, κατασκευάζεται η καμπύλη αλληλεπίδρασης.

Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του ενισχυμένου κελύφους φαίνονται στον **Πίνακα 7.1**. Για το ισότροπο αλουμινένιο ενισχυμένο κέλυφος επιλέγονται οι μηχανικές ιδιότητες που φαίνονται στον **Πίνακα 7.2**, ενώ οι μηχανικές ιδιότητες του ορθότροπου υλικού με ίνες άνθρακα είναι ίδιες με αυτές του **Πίνακα 6.9**.

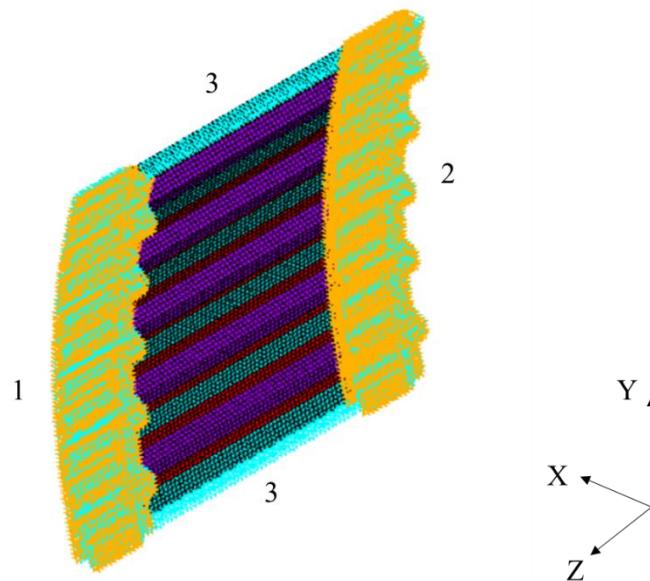
Πίνακας 7.1: Γεωμετρία ισότροπου ενισχυμένου κελύφους σε σύνθετη φόρτιση

Μήκος ενισχυμένου κελύφους [mm]	800
Ελεύθερο μήκος [mm]	600
Ακτίνα [mm]	2000
Πάχος κελύφους [mm]	1.6
Μήκος τόξου [mm]	750
Αριθμός ενισχύσεων	5
Απόσταση μεταξύ ενισχύσεων [mm]	150
Πάχος ενίσχυσης [mm]	1.2
Υψος ενίσχυσης [mm]	25
Πλάτος κεφαλής ενίσχυσης [mm]	25
Γωνία μεταξύ κεφαλής και πλευράς ενίσχυσης [°]	60
Πλάτος φλάντζας ενίσχυσης [mm]	25

Πίνακας 7.2: Ιδιότητες υλικού ισότροπου ενισχυμένου κελύφους σε σύνθετη φόρτιση

E [GPa]	v
70	0.33

Αναφέρεται ακόμη, ότι οι οριακές συνθήκες και στα δύο αριθμητικά μοντέλα είναι ίδιες και είναι όμοιες με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στη διάταξη DLR (βλ. **Κεφάλαιο 2**). Ωστόσο, προστίθεται μια ακόμη οριακή συνθήκη για την εξαγωγή ακριβέστερων αποτελεσμάτων, η οποία σχετίζεται με τα εγκάρσια άκρα του ενισχυμένου κελύφους. Ενώ στην πειραματική διάταξη DLR τα εγκάρσια άκρα αφήνονται ελεύθερα, στην παρούσα μελέτη θα περιοριστούν ως προς την εκτός επιπέδου μετατόπιση (ακτινική). Έτσι, οι οριακές συνθήκες προσεγγίζουν περισσότερο αυτές της πειραματικής διάταξης της NASA (βλ. **Κεφάλαιο 2**). Οι οριακές συνθήκες που επιβάλλονται απεικονίζονται στην **Εικόνα 7.1** και στον **Πίνακα 7.3**.



Εικόνα 7.1: Οριακές συνθήκες αριθμητικών μοντέλων σύνθετης φόρτισης

Όπου X , Y , Z η ακτινική, περιφερειακή και αξονική μετατόπιση αντίστοιχα.

Πίνακας 7.3: Οριακές συνθήκες αριθμητικών μοντέλων σύνθετης φόρτισης

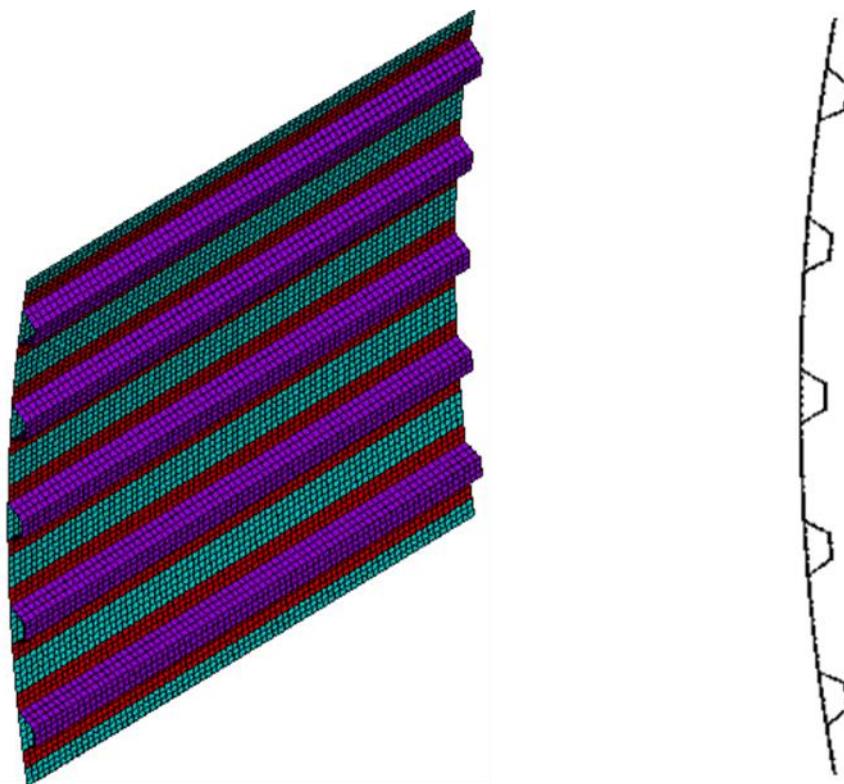
Οριακή συνθήκη	UX	UY	UZ	ROTX	ROTY	ROTZ
1	0	0	0	0	0	0
2	0	-	-	0	0	0
3	0	-	-	-	-	-

Όπου με 0 δηλώνεται περιορισμός στην αντίστοιχη διεύθυνση και με – η απουσία περιορισμού.

7.2 Ισότροπο ενισχυμένο κέλυφος

Έστω ένα ενισχυμένο κέλυφος από κράμα αλουμινίου με τις συνήθεις μηχανικές ιδιότητες που φαίνονται στον **Πίνακα 7.2**. Το κέλυφος ενισχύεται με πέντε διαμήκη ενισχυτικά στοιχεία σχήματος ωμέγα. Η γεωμετρία του κελύφους και των ενισχυτικών στοιχείων παρουσιάζονται στον **Πίνακα 7.1**.

Το διακριτοποιημένο ενισχυμένο κέλυφος απεικονίζεται στην **Εικόνα 7.2**. Έπειτα από έλεγχο σύγκλισης πλέγματος, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του γραμμικού ιδιομορφικού λυγισμού για τη θλίψη και διάτμηση ξεχωριστά, επιλέγεται τύπος στοιχείου SHELL181 με μέγεθος $10x10mm^2$.



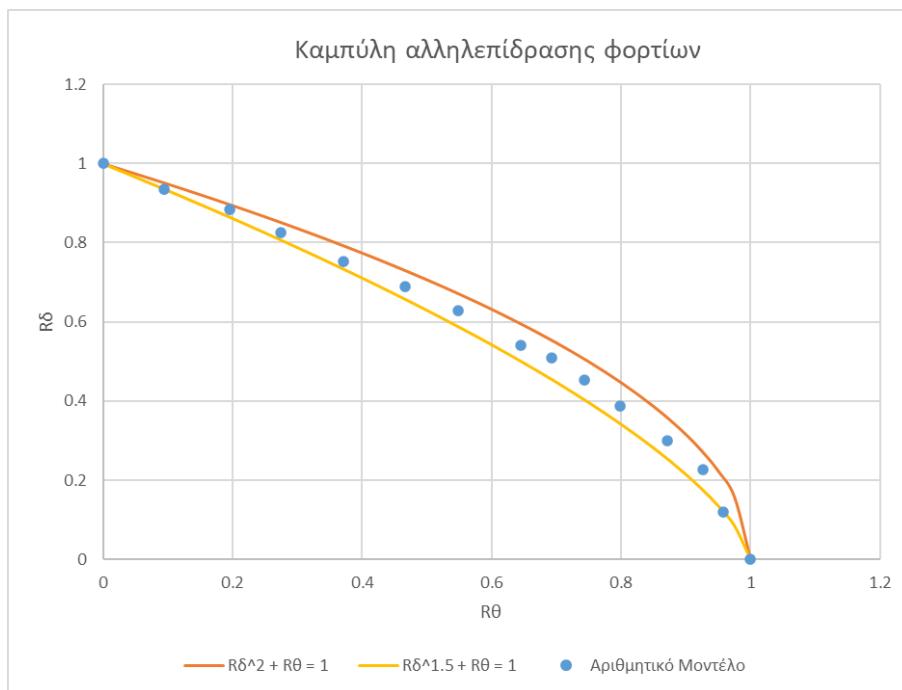
Εικόνα 7.2: Διακριτοποιημένη γεωμετρία ισότροπου ενισχυμένου κελύφους

Έπειτα από μη-γραμμική ανάλυση, υπολογίζονται τα κρίσιμα φορτία στα οποία επέρχεται τοπικός λυγισμός ανάμεσα στα ενισχυτικά στοιχεία του ενισχυμένου κελύφους. Τα κρίσιμα φορτία παρουσιάζονται στον **Πίνακα 7.4**.

Πίνακας 7.4: Κρίσιμα φορτία λυγισμού σε θλίψη και διάτμηση του ισότροπου ενισχυμένου κελύφους

$\sigma_{\text{κρίσιμο}, \theta}$	$\sigma_{\text{κρίσιμο}, \delta}$
[kN]	[kN]
416.3	229.1

Στην **Εικόνα 7.3** συγκρίνεται η καμπύλη αλληλεπίδρασης φορτίων με αυτή της **Εξίσωσης (4.20)** για $n = 1.5$ και $n = 2$. Από τα δεδομένα των αποτελεσμάτων του αριθμητικού μοντέλου, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το υπολογιστικό εργαλείο *MyCurveFit* [115] για την εύρεση καμπύλης η οποία προσεγγιστικά περνάει από όλα τα καταγεγραμμένα σημεία.



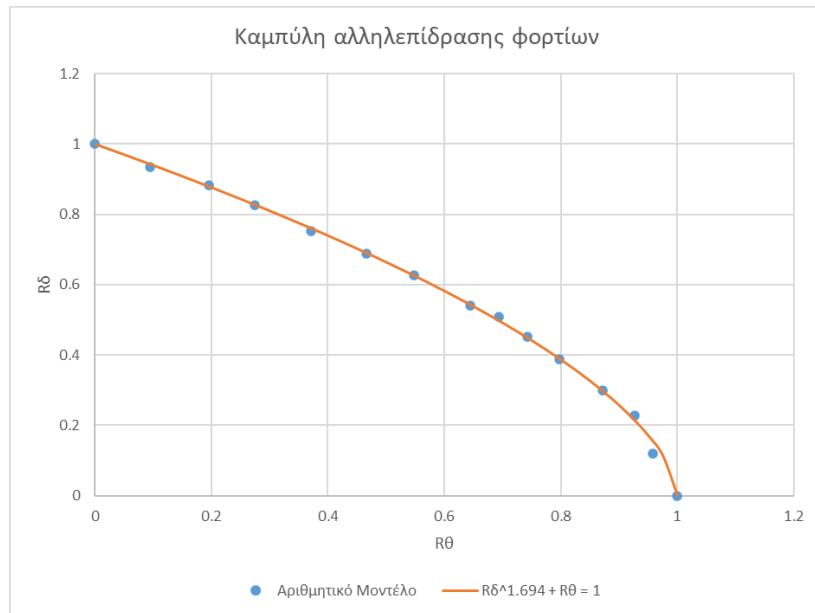
Εικόνα 7.3: Σύγκριση καμπύλης αλληλεπίδρασης φορτίων με Εξίσωση (4.20): Ισότροπο ενισχυμένο κέλυφος

Παρατηρείται πως τα σημεία που υπολογίζονται από το αριθμητικό μοντέλο βρίσκονται ανάμεσα στις δύο καμπύλες. Εισάγοντας τα σημεία στο *MyCurveFit*, υπολογίζεται πως τα σημεία περνάνε από την καμπύλη

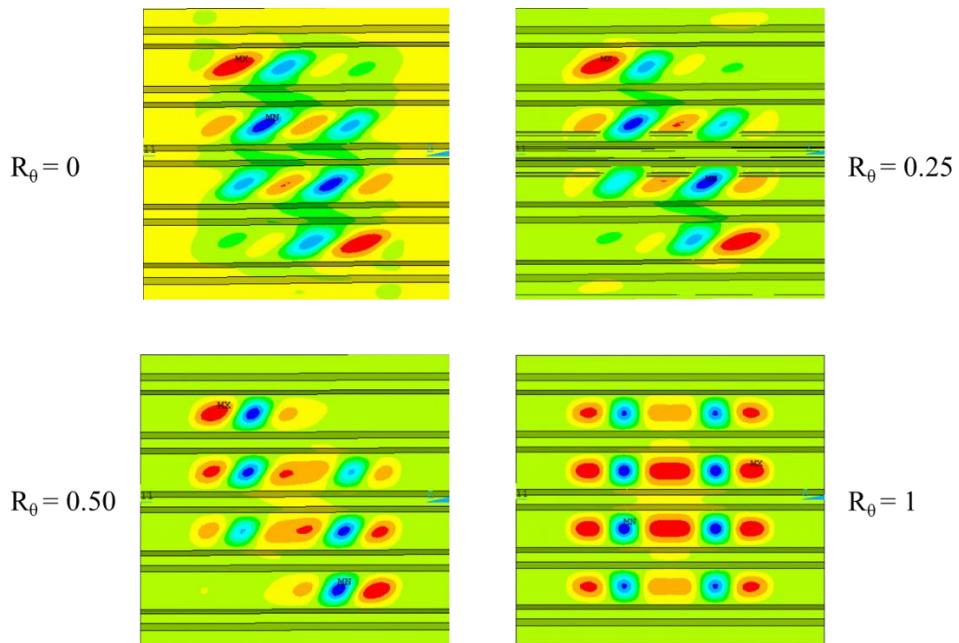
$$R_\theta + R_\delta^{1.694} = 1, \quad (7.1)$$

όπως φαίνεται και στην **Εικόνα 7.4**. Επομένως, παρατηρείται απόκλιση από την καμπύλη για $n = 2$. Εφόσον ο εκθέτης είναι μικρότερος, σημαίνει πως η διατμητική φόρτιση επιδρά

περισσότερο στη συμπεριφορά του λυγισμού των ενισχυμένων κελυφών. Στην **Εικόνα 7.5** παρουσιάζονται οι κυματομορφές που σχηματίζονται στο ενισχυμένο κέλυφος για διάφορες τιμές του λόγου τάσεων R_θ . Παρατηρείται πάλι, πως όσο αυξάνεται η θλιπτική φόρτιση, οι κυματομορφές που σχηματίζονται ανάμεσα στις διαμήκεις ενισχύσεις γίνονται πιο τετράγωνες.



Εικόνα 7.4: Υπολογισμένη καμπύλη αλληλεπίδρασης φορτίων: Ισότροπο ενισχυμένο κέλυφος



Εικόνα 7.5: Εκτός επιπέδου μετατόπιση για διάφορους λόγους τάσεων R_θ : Ισότροπο ενισχυμένο κέλυφος

7.3 Ορθότροπο ενισχυμένο κέλυφος

Έστω ένα ενισχυμένο κέλυφος από πολυστρωματικό υλικό ινών άνθρακα με τις συνήθεις μηχανικές ιδιότητες που φαίνονται στον **Πίνακα 6.9**. Το κέλυφος ενισχύεται με πέντε διαμήκη ενισχυτικά στοιχεία σχήματος ωμέγα. Η γεωμετρία του κελύφους και των ενισχυτικών στοιχείων παρουσιάζονται στον **Πίνακα 7.1**.

Έπειτα από έλεγχο σύγκλισης πλέγματος, χρησιμοποιείται όπως και στην περίπτωση του ισότροπου ενισχυμένου κελύφους τύπος στοιχείου SHELL181 με μέγεθος $10x10mm^2$. Το διακριτοποιημένο ενισχυμένο κέλυφος επομένως είναι όμοιο με αυτό της **Εικόνας 7.2**.

Τονίζεται πως το αριθμητικό μοντέλο του ενισχυμένου κελύφους κατασκευάζεται με τον ίδιο τρόπο που κατασκευάστηκε το αριθμητικό μοντέλο της **Υποενότητας 6.2.4**. Είναι σημαντικό να ελεγχθεί ποια πλευρά του στοιχείου θεωρεί το ANSYS ως επάνω και κάτω, ώστε να οριστούν κατάλληλα οι στρώσεις, αφού το ANSYS «διαβάζει τις στρώσεις από κάτω προς τα πάνω». Επιπλέον, στις περιοχές σύνδεσης του ενισχυτικού στοιχείου (στη φλάντζα) με το κέλυφος (skin), είναι απαραίτητο να μετακινηθεί το επίπεδο αναφοράς τους, ώστε να μην υπάρχουν ανομοιομορφίες στη γεωμετρία του κελύφους. Έτσι, επιτυγχάνονται πιο ακριβή αποτελέσματα, όπως αποδείχθηκε και στο **Κεφάλαιο 6**.

Έπειτα από μη-γραμμική ανάλυση, υπολογίζονται τα κρίσιμα φορτία στα οποία επέρχεται τοπικός λυγισμός ανάμεσα στα ενισχυτικά στοιχεία του ενισχυμένου κελύφους. Τα κρίσιμα φορτία παρουσιάζονται στον **Πίνακα 7.5**.

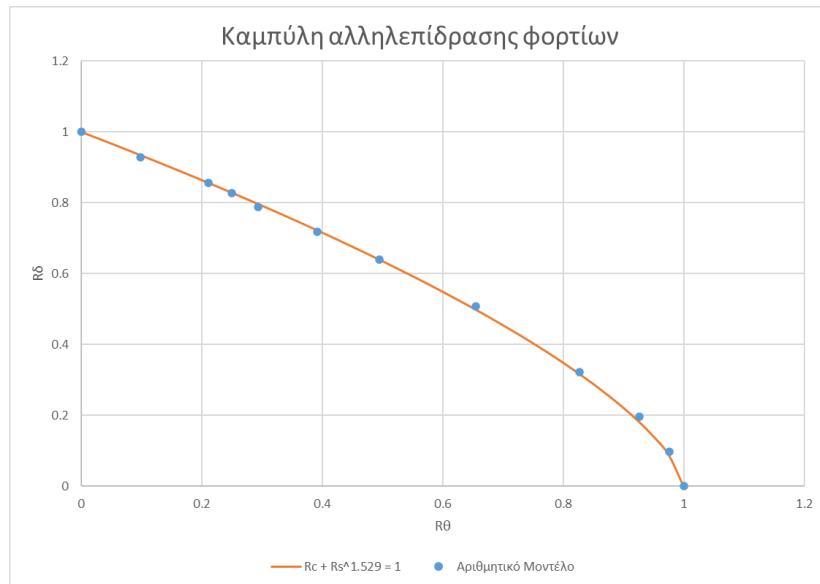
Πίνακας 7.5: Κρίσιμα φορτία λυγισμού σε θλίψη και διάτμηση του ορθότροπου ενισχυμένου κελύφους

$\sigma_{\text{κρίσιμο},\theta}$	$\sigma_{\text{κρίσιμο},\delta}$
[kN]	[kN]
322.7	142.4

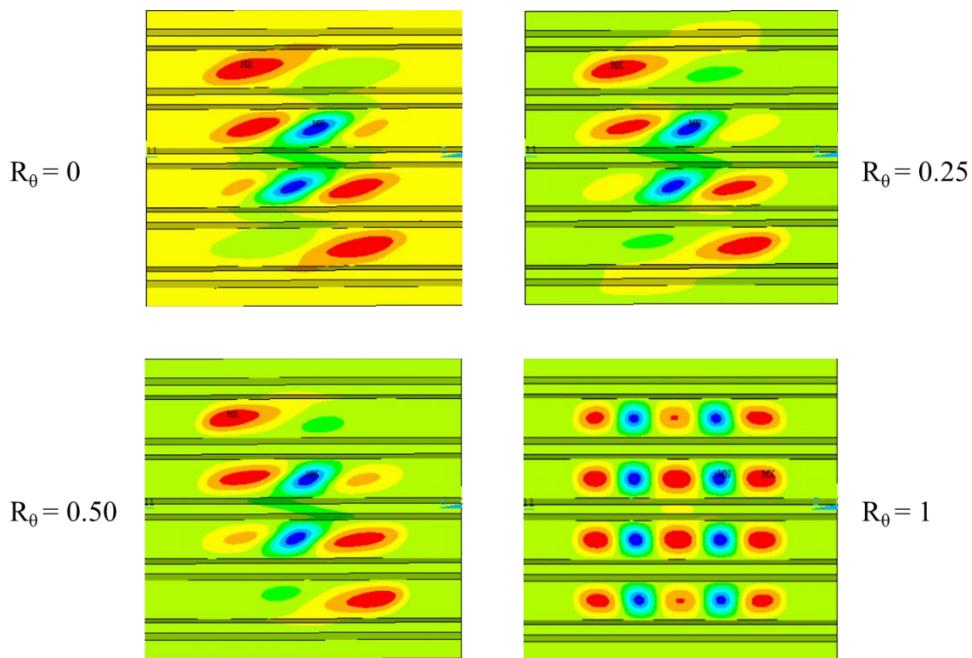
Στην **Εικόνα 7.6** φαίνεται η καμπύλη αλληλεπίδρασης φορτίων θλίψης-διάτμησης, η οποία υπολογίστηκε με το υπολογιστικό εργαλείο MyCurveFit. Υπολογίζεται πως τα σημεία περνάνε από την καμπύλη της **Εξίσωσης 7.2**.

$$R_\theta + R_\delta^{1.529} = 1, \quad (7.2)$$

Στην **Εικόνα 7.7** παρουσιάζονται η εκτός επιπέδου μετατόπιση του ενισχυμένου κελύφους για διάφορες τιμές του λόγου τάσεων R_θ . Ωστόσο, παρατηρείται πως το σχήμα των κυματομορφών επηρεάζεται από τη θλιπτική φόρτιση πιο αργά από ότι στο ισότροπο ενισχυμένο κέλυφος. Αυτό οφείλεται στη μικρότερη τιμή στην οποία υψώνεται ο λόγος διατμητικής φόρτισης R_δ .



Εικόνα 7.6: Υπολογισμένη καμπύλη αλληλεπίδρασης φορτίων: Ορθότροπο ενισχυμένο κέλυφος



Εικόνα 7.7: Εκτός επιπέδου μετατόπιση για διάφορους λόγους τάσεων R_θ : Ορθότροπο ενισχυμένο κέλυφος

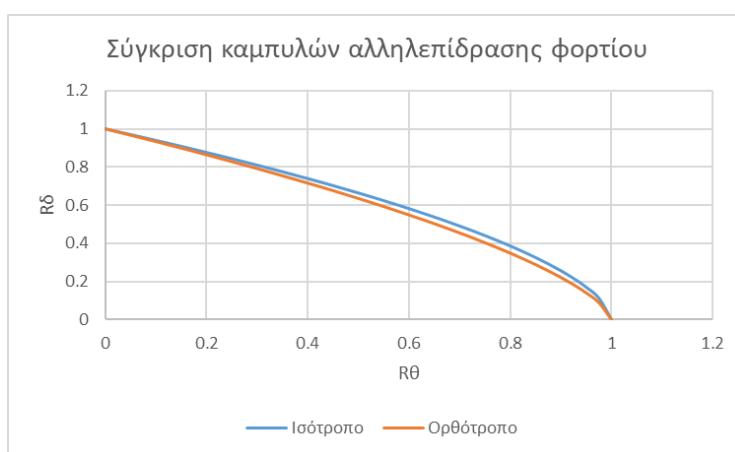
7.4 Σύγκριση αποτελεσμάτων σύνθετης φόρτισης μεταξύ του ισότροπου και ορθότροπου ενισχυμένου κελύφους

Από τα αποτελέσματα των Ενοτήτων 7.2 και 7.3 είναι προφανές πως ο συντελεστής n στην εξίσωση

$$R_\theta + R_\delta^n = 1, \quad (7.3)$$

εξαρτάται από το υλικό το οποίο αποτελείται η δομή. Συγκεκριμένα, υπολογίστηκε πως για την περίπτωση του ισότροπου ενισχυμένου κελύφους $n = 1.694$, ενώ για του ορθότροπου $n = 1.529$. Επομένως, τα ορθότροπα υλικά είναι πιο ευαίσθητα στις διατμητικές φορτίσεις ως προς το λυγισμό σε σύγκριση με τα ισότροπα υλικά. Αυτό φαίνεται και στις Εικόνες 7.5 και 7.7, όπου για $R_\theta = 0.5$, οι κυματομορφές στην περίπτωση του ισότροπου ενισχυμένου κελύφους προσεγγίζουν το τετράγωνο σχήμα που εμφανίζεται για $R_\theta = 1$, ενώ στο ορθότροπο ενισχυμένο κέλυφος προσεγγίζουν τις κυματομορφές για $R_\theta = 0$.

Όσον αφορά την αριθμητική ανάλυση που πραγματοποιήθηκε, δεν παρατηρείται διαφορά στα αποτελέσματα ως προς τον τύπο ή αριθμό των στοιχείων που χρησιμοποιείται. Ωστόσο, το ενισχυμένο κέλυφος που αποτελείται από ορθότροπο υλικό απαιτεί μικρότερα βήματα στη μηγραμμική ανάλυση, αυξάνοντας αρκετά τον υπολογιστικό χρόνο σε σχέση με αυτόν του ισότροπου. Συγκεκριμένα, ενώ για την ισότροπη δομή απαιτούνται κατά μέσο όρο 60 βήματα διαίρεσης φορτίου, το ορθότροπο απαιτεί 100. Επιπλέον, παρατηρείται πως το ορθότροπο πάνελ χρησιμοποιούσε περισσότερες επαναλήψεις ισορροπίας κατά τη χρήση της μεθόδου Newton – Raphson.



Εικόνα 7.8: Σύγκριση καμπυλών αλληλεπίδρασης φορτίου

8 Συμπεράσματα και μελλοντική έρευνα

8.1 Αριθμητικά μοντέλα

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας αναπτύχθηκαν εννέα αριθμητικά μοντέλα για τον υπολογισμό του λυγισμού και της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς των συνηθέστερων δομών που συναντώνται στην αεροναυπηγική. Όλα τα αριθμητικά μοντέλα επιβεβαιώθηκαν/επικυρώθηκαν συγκρίνοντας τα αποτελέσματα τους με αντίστοιχα πειραματικά ή αριθμητικά που βρέθηκαν στη βιβλιογραφία. Σε όλες τις περιπτώσεις, προβλέπεται με μεγάλη ακρίβεια το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, καθώς και η δυσκαμψία της κατασκευής πριν το φορτίο αυτό. Αποκλίσεις εμφανίζονται κυρίως στην πρόβλεψη της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς των κατασκευών, οι οποίες στις περισσότερες περιπτώσεις (ιδίως στις ενισχυμένες δομές) δεν είναι μεγάλες.

Οι αποκλίσεις πιθανόν οφείλονται στους παρακάτω λόγους:

- Τα κελύφη είναι πολύ ευαίσθητα ως προς τις αρχικές ατέλειες που εισάγονται στο μοντέλο. Επομένως, χωρίς να είναι γνωστές οι αρχικές ατέλειες από τη βιβλιογραφία, είναι δύσκολο να προβλεφθεί με ακρίβεια η συμπεριφορά των δομών αυτών. Ωστόσο, τα αποτελέσματα των τέλειων κελυφών (κελύφη χωρίς αρχικές ατέλειες) συγκλίνουν με αυτά της βιβλιογραφίας.
- Ο τρόπος μοντελοποίησης της επαφής μεταξύ του ελάσματος (skin) και των ενισχυτικών στοιχείων είναι αρκετά πιο πολύπλοκος από αυτόν που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία. Τα αριθμητικά μοντέλα που αναπτύσσονται στη βιβλιογραφία και επιβεβαιώνονται με πειραματικές μεθόδους χρησιμοποιούν contact modelling για τη μοντελοποίηση της επαφής. Επιπλέον, χρησιμοποιούνται ήλοι για τη σύνδεση των ενισχυτικών στοιχείων στο έλασμα, οι οποίοι δεν μοντελοποιήθηκαν στην εργασία.

Παρόλα αυτά, οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν στην εργασία, παρά την απλότητα τους, είναι ικανοί για την πρόβλεψη της συμπεριφοράς των ενισχυμένων κελυφών. Σε όλες τις περιπτώσεις οι καμπύλες φορτίου-μετατόπισης συγκλίνουν με ικανοποιητική ακρίβεια, ενώ οι μετατοπίσεις και οι κυματομορφές που σχηματίζονται είναι όμοιες. Το contact modelling απαιτεί μεγαλύτερο υπολογιστικό χρόνο, και η σύγκλιση μοντέλων που συμπεριλαμβάνουν

τέτοια φαινόμενα είναι συνήθως πολύπλοκη. Εκτός από τον υπολογιστικό χρόνο, για την αναπαράσταση της σύνδεσης μέσω contact modelling είναι απαραίτητο να είναι γνωστές και επιπλέον παράμετροι, όπως για παράδειγμα η τριβή μεταξύ των επιφανειών. Η αναπαράσταση τέτοιων φαινομένων είναι εκτός του σκοπού της παρούσας εργασίας, καθώς κύριος σκοπός ήταν η ανάπτυξη παραμετρικών αριθμητικών μοντέλων για τη διερεύνηση του φαινομένου του λυγισμού. Συγκεκριμένα, οι δυνατότητες πρόβλεψης των μοντέλων είναι οι εξής:

- Πρόβλεψη της συμπεριφοράς των αεροναυπηγικών δομών έως το κρίσιμο φορτίου λυγισμού με ακρίβεια (αποκλίσεις $\approx 1\%$).
- Πρόβλεψη της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς των αεροναυπηγικών δομών, ακόμη και ως την τελική αστοχία τους, με ικανοποιητική ακρίβεια, η οποία δικαιολογείται από τις παραδοχές της ανάλυσης (μέγιστη απόκλιση $\approx 10\%$).
- Πρόβλεψη του τοπικού και ολικού λυγισμού στις αεροναυπηγικές δομές, καθώς και των κυματομορφών που σχηματίζονται σε αυτές.

Από τη διερεύνηση της αριθμητικής ανάλυσης των αεροναυπηγικών δομών, τα αποτελέσματα των αριθμητικών μοντέλων είναι ακριβέστερα όταν:

- Πραγματοποιείται έλεγχος σύγκλισης πλέγματος με παράμετρο το γραμμικό κρίσιμο φορτίου λυγισμού.
- Για την περίπτωση της επίπεδης πλάκας, είναι απαραίτητη η εύρεση του ελάχιστου μεγέθους ατέλειας που πρέπει να εισαχθεί στο μοντέλο για την εκκίνηση των φαινομένων λυγισμού.
- Για την περίπτωση της επίπεδης πλάκας (ιδίως όταν εισάγεται μεγάλο μέγεθος αρχικής ατέλειας) και στα κελύφη, απαιτούνται πολλά βήματα του λύτη Newton – Raphson, το οποίο αποδεικνύει πως οι δομές αυτές είναι ασταθείς και απαιτούνται ενισχύσεις.
- Η μέθοδος Newton – Raphson ικανοποιεί τις προϋποθέσεις των περισσότερων προβλημάτων, όμως στις περιπτώσεις που υπάρχει αρνητική κλίση στα διαγράμματα δύναμης – φορτίου, είναι απαραίτητη η Μέθοδος Μήκους Τόξου.
- Η shared-node method, παρά την απλότητα της, μπορεί να προβλέψει με ικανοποιητική ακρίβεια τις περιπτώσεις φόρτισης όπου δεν εμφανίζονται αποκολλήσεις των ενισχυτικών στοιχείων από το έλασμα.
- Για την ακριβέστερη αναπαράσταση των ενισχυμένων δομών, απαιτείται προσοχή στα ορθότροπα πολυστρωματικά υλικά ως προς τον ορισμό των στρώσεων του. Επίσης, το

ANSYS αναπαριστά τα κελύφη στη μέση επιφάνεια τους, το οποίο προκαλεί προβλήματα στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων στις περιπτώσεις που το έλασμα (skin) ενισχύεται ως προς το πάχος του. Επομένως, είναι απαραίτητο η αναπαράσταση των κελυφών σε ένα επίπεδο έτσι ώστε να μην επιδρά στον ορισμό του ελάσματος.

- Σπανίως, ο ορισμός των οριακών συνθηκών μόνο στους κόμβους της πλευράς της δομής μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα στα αποτελέσματα. Επομένως, ο ορισμός των οριακών συνθηκών και σε κόμβους εσωτερικά της πλευράς μπορεί να βοηθήσει στην αποφυγή τέτοιων προβλημάτων.
- Η δυνατότητα AUTOTS,ON που προσφέρει το ANSYS, συχνά βοηθάει στην εξάλειψη των προβλημάτων σύγκλισης και μειώνει τον απαιτούμενο υπολογιστικό χρόνο. Μέσω του AUTOTS, ο χρήστης μπορεί να επιλέξει ελάχιστο και μέγιστο αριθμό βημάτων για το μη-γραμμικό λύτη. Έτσι, ο λύτης ξεκινάει με το μικρότερο αριθμό βημάτων και όταν συναντά προβλήματα σύγκλισης, χρησιμοποιεί μεγαλύτερο αριθμό βημάτων. Επομένως αποφεύγεται η χρήση μεγάλων αριθμού βημάτων εξαρχής, όπου η ευστάθεια της κατασκευής είναι εξασφαλισμένη και εντοπίζεται πιο εύκολο το κρίσιμο σημείο λυγισμού.

Τέλος, επιτεύχθηκε ο σκοπός παραμετροποίησης των αριθμητικών μοντέλων. Οι παράμετροι που μπορούν να αλλάξουν σε κάθε αριθμητικό μοντέλο είναι οι εξής:

- Οι μηχανικές ιδιότητες του υλικού.
- Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της κατασκευής: Το μήκος, το πλάτος και το πάχος του ελάσματος και των ενισχυτικών δομών, καθώς και η απόσταση μεταξύ τους.
- Οι οριακές συνθήκες και το μέγεθος των φορτίων/μετατοπίσεων

Επομένως, συμπεραίνεται πως οι κώδικες πέτυχαν τον πρωτεύοντα σκοπό της εργασίας, ο οποίος ήταν η πρόβλεψη των φαινομένων λυγισμού σε αεροναυπηγικές δομές (χωρίς την εισαγωγή πολλών μη-γραμμικών φαινομένων), καθώς και το δευτερεύοντα σκοπό της παραμετρικής ανάλυσης. Τέλος, τα αριθμητικά μοντέλα είναι ικανά να προβλέψουν το λυγισμό κατασκευών από ισότροπα ελαστικά υλικά, από ελαστο-πλαστικά υλικά, καθώς και από πολύστρωτα σύνθετα υλικά. Άρα, δεν περιορίζονται μόνο στην πρόβλεψη της ελαστικής συμπεριφοράς των κατασκευών.

8.2 Φόρτιση ενισχυμένων κελυφών σε σύνθετη φόρτιση θλίψης και διάτμησης

Στο **Κεφάλαιο 7** αναπτύχθηκαν δύο γεωμετρικά όμοια αριθμητικά μοντέλα ενισχυμένων κελυφών με πέντε ενισχύσεις σχήματα μοντέλου· ένα ισότροπο και ένα ορθότροπο. Το ισότροπο ενισχυμένο κέλυφος αποτελείται από κράμα αλουμινίου, ενώ το ορθότροπο ενισχυμένο κέλυφος αποτελείται από ίνες άνθρακα.

Η καμπύλη αλληλεπίδρασης φορτίων που υπολογίστηκε για το ισότροπο ενισχυμένο κέλυφος δίνεται από την **Εξίσωση (8.1)**.

$$R_\theta + R_\delta^{1.694} = 1, \quad (8.1)$$

Η καμπύλη αλληλεπίδρασης φορτίων που υπολογίστηκε για το ορθότροπο ενισχυμένο κέλυφος δίνεται από την **Εξίσωση (8.2)**.

$$R_\theta + R_\delta^{1.529} = 1, \quad (8.2)$$

Επομένως, εξάγεται το συμπέρασμα πως στις ενισχυμένες κατασκευές η καμπύλη αλληλεπίδρασης δίνεται στη γενική μορφή της από την **Εξίσωση (8.3)**.

$$R_\theta + R_\delta^n = 1, \quad (8.3)$$

Όπου το n εξαρτάται από τις ιδιότητες του υλικού και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της δομής.

Από τις παραπάνω καμπύλες αποδεικνύεται πως το ορθότροπο ενισχυμένο κέλυφος είναι πιο ευαίσθητο στις διατμητικές φορτίσεις.

8.3 Μελλοντική έρευνα

Οι προτάσεις για μελλοντική έρευνα μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως εξής:

1. Περαιτέρω ανάπτυξη αριθμητικών μοντέλων ως προς τις περιπτώσεις φορτίων.
2. Επιβεβαίωση των αριθμητικών μοντέλων του **Κεφαλαίου 7**.

Τα αριθμητικά μοντέλα που αναπτύχθηκαν στην παρούσα διπλωματική εργασία έχουν τη δυνατότητα να προβλέψουν τη συμπεριφορά αεροναυπηγικών δομών στις περιπτώσεις φόρτισης αξονικής θλίψης, εντός-επιπέδου διάτμησης και το συνδυασμό τους. Ωστόσο, υπάρχουν και άλλες περιπτώσεις φορτίων που έχουν ενδιαφέρον για αυτές τις κατασκευές,

όπως η δυαξονική θλίψη, η εντός-επιπέδου κάμψη και η εγκάρσια πίεση. Επομένως, επόμενο βήμα είναι η ανάπτυξη αριθμητικών μοντέλων που να συμπεριλαμβάνουν τις παραπάνω περιπτώσεις φόρτισης ως ξεχωριστά φορτία και έπειτα το συνδυασμό τους.

Επιπλέον, στο **Κεφάλαιο 7** έγινε μελέτη του λυγισμού ενισχυμένων κελυφών σε σύνθετη φόρτιση θλίψης και διάτμησης, έτσι ώστε να εξαχθούν οι αντίστοιχες καμπύλες αλληλεπίδρασης φορτίων. Εφόσον όλα τα μοντέλα που αναπτύχθηκαν είναι παραμετρικά, παρουσιάζει ενδιαφέρον η παραμετρική μελέτη της επίδρασης της αλλαγής των παραμέτρων στις καμπύλες αλληλεπίδρασης φορτίων και συγκεκριμένα στην παράμετρο n . Έτσι, θα μπορεί να εξαχθεί συμπέρασμα για το αν οι καμπύλες αλληλεπίδρασης που υπολογίστηκαν στο **Κεφάλαιο 7** ισχύουν στην πλειονότητα των γεωμετριών ενισχυμένων κελυφών.

Επιπρόσθετα, τα αριθμητικά μοντέλα μπορούν να αναπτυχθούν περαιτέρω ώστε να προσομοιωθούν περισσότερα μη-γραμμικά φαινόμενα. Για αρχή, η ενσωμάτωση contact modelling στα αριθμητικά μοντέλα, όπως αποδείχτηκε και παραπάνω, είναι απαραίτητη για την ακριβή πρόβλεψη της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς των κατασκευών. Έπειτα, μπορούν να ενσωματωθούν ακόμη πιο πολύπλοκα φαινόμενα, όπως η αποκόλληση των στρώσεων στα ορθότροπα υλικά, η αστοχία των ήλων στα μεταλλικά πάνελ και η κόπωση λυγισμού.

Επίσης, το μόνο γεωμετρικό χαρακτηριστικό το οποίο δεν είναι παράμετρος των αριθμητικών μοντέλων είναι το σχήμα των ενισχυτικών δομών. Μέσω του ANSYS APDL, μπορούν να κατασκευαστούν αρχεία MACRO με διαφορετικά σχήματα ενισχυτικών δομών. Έτσι, ο χρήστης θα μπορεί από το βασικό κώδικα να εισάγει το επιθυμητό σχήμα κάθε φορά, επιλέγοντας το αντίστοιχο MACRO αρχείο.

Τέλος, μπορούν να πραγματοποιηθούν πειράματα λυγισμού, έτσι ώστε να επιβεβαιωθούν τα αποτελέσματα του **Κεφαλαίου 7**. Η διαδικασία αυτή θα μπορούσε να είναι χρήσιμη και για την περαιτέρω ανάπτυξη των αριθμητικών μοντέλων και την άνξηση της ακρίβειας πρόβλεψης τους. Η εκτέλεση πειραμάτων και η ενσωμάτωση επιπλέον παραμέτρων στο αριθμητικό μοντέλο (όπως η τριβή που εισάγεται από την πειραματική διάταξη) θα οδηγήσει σε ακόμη πιο ακριβή αριθμητικά μοντέλα.

Βιβλιογραφία

- [1] A. P. Mouritz, Introduction to Aerospace Materials, Sawston: Woodhead Publishing , 2012.
- [2] B. Karthick, S. Balaji και P. Maniarasan, «Structural Analysis Of Fuselage With Lattice Structure,» *International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT)*, τόμ. 2, αρ. 6, 2013.
- [3] M. Rouse, R. D. Young και R. R. Gehrki, «Structural Stability of a Stiffened Aluminum Fuselage Panel Subjected to Combined Mechanical and Internal Pressure Loads,» σε *AIAA Paper 2003-1423*, 2003.
- [4] M. L. Gambhir, Stability Analysis and Design of Structures, Patiala: Springer, 2004.
- [5] G. J. Simitses και D. H. Hodges, Fundamentals of Structural Stability, Butterworth-Heinemann Limited, 2006.
- [6] Δ. Α. Σαραβάνος, Εισαγωγή Στην Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, Πάτρα : Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Πατρών, 2008.
- [7] S. Govindjee, Engineering Mechanics of Deformable Solids, Oxford: Oxford University Press, 2013.
- [8] J. Reddy, An Introduction to Continuum Mechanics, Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- [9] S. P. Timoshenko και J. M. Gere, Theory of Elastic Stability, New York: McGraw-Hill, 1963.
- [10] Γ. Λαμπέας και Θ. Κερμανίδης, Ελαφρές Κατασκευές - Ανάλυση Αεροπορικών Κατασκευών, Πάτρα, 2018.

- [11] J. Campbell, *Structural Stability, Lecture Notes*, School of Engineering, Cranfield University, 2010.
- [12] H. Cox και E. Pribram, «The Elements of the Buckling of Curved Plates,» *The Journal of the Royal Aeronautical Society*, τόμ. 52, αρ. 453, pp. 551-565, 1948.
- [13] N. Liu, «Global and Local Buckling Analysis of Stiffened and Sandwich Panel Using Mechanics of Structure Genome,» West Lafayette, Indiana, 2019.
- [14] J. K. Paik και B. J. Kim, «Ultimate strength formulations for stiffened panels under combined axial load, in-plane bending and lateral pressure: a benchmark study,» *Thin-Walled Structures*, τόμ. 40, αρ. 1, pp. 45-83, 2001.
- [15] R. R. Arnold και J. C. Parekh, «Buckling, Postbuckling and Failure of Stiffened Panels Under Shear and Compression,» *Journal of Aircraft*, τόμ. 21, αρ. 11, pp. 803-811, November, 1987.
- [16] N. Jaunky, N. F. K. Jr. και D. R. Ambur, «Formulation of an improved smeared stiffener theory for buckling analysis of grid-stiffened composite panels,» *Composites Part B: Engineering*, τόμ. 27, αρ. 5, pp. 519-526, 1996.
- [17] E. Byklum, «Ultimate Strength Analysis of Stiffened Steel and Aluminum Panels Using Semi-Analytical Methods,» 2002.
- [18] R. Vescovini και C. Bisagni, «Buckling Analysis and Optimization of Stiffened Composite Flat and Curved Panels,» *AIAA Journal*, τόμ. 50, αρ. 4, pp. 904-915, 2012.
- [19] M. J. Weber και P. Middendorf, «Semi-analytical Skin Buckling of Curved Orthotropic Grid-stiffened Shells,» *Composite Structures*, τόμ. 108, pp. 616-624, 2014.
- [20] A. Kling, «Shear - Compression Buckling Test Method on Curved Stiffened Composite Panels,» σε *16th European Conference on Composite Materials*, Seville, Spain, 2014.

- [21] D. Wilckens, F. Odermann και A. Kling, «Stringer Stiffened Panel Under Axial Compression, Shear and Combined Loading Conditions - Test and Numerical Analysis,» σε *European Conference of Composite Materials*, Venice, Italy, 2012.
- [22] D. Wilckens, F. Odermann και A. Kling, «Buckling and Post Buckling of Stiffened CFRP Panels under Compression and Shear - Test and Numerical Analysis,» σε *Structures, Structural Dynamics, and Materials and Co-Located Conferences*, Boston, Massachusetts, 2013.
- [23] Y. Mo, D. Ge και J. Zhou, «Experiment and Analysis Of Hat-Stringer-Stiffened Composite Curved Panels Under Compression,» *Composite Structures*, τόμ. 123, pp. 150-160, 2015.
- [24] C. Lynch, A. Murphy, M. Price και A. Gibson, «The Computational Post Buckling Analysis of Fuselage Stiffened Panels Loaded in Compression,» *Thin-Walled Structures*, τόμ. 42, pp. 1445-1464, 2004.
- [25] A. Murphy, M. Price, C. Lynch και A. Gibson, «The Computational Post-buckling Analysis of Fuselage Stiffened Panels Loaded in Shear,» *Thin-Walled Structures*, τόμ. 42, pp. 1455-1474, 2005.
- [26] B. Wang, X. Chen, X. Sun, P. Chen, Z. Wang και Y. Chai, «Interaction Formulae For Buckling and Failure of Orthotropic Plates Under Combined Axial Compression/Tension and Shear,» *Chinese Journal of Aeronautics*, τόμ. 35, αρ. 3, pp. 272-280, 2022.
- [27] J. Reddy, Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells: Second Edition, Boca Raton, Florida: CRC Press, 2007.
- [28] E. Ventsel και T. Krauthammer, Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications, CRC Press, 2001.
- [29] NASA, *Astronautic Structures Manual*, vol. II, Alabama, 1975.
- [30] C. R. Calladine, Theory of shell structures, Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

- [31] A. Love, «A treatise on the mathematical theory of elasticity,» University Press, Cambridge, Cambridge, 1888.
- [32] A. Zingoni, Shell Structures in Civil and Mechanical Engineering: Theory and Analysis, Second Edition, ICE Publishing, 2017.
- [33] C. Truesdell, «The membrane theory of shells of revolution,» *Transactions of the American Mathematical Society*, τόμ. 58, pp. 96-166, 1945.
- [34] M. Strozzi, O. V. Gendelman, I. E. Elishakoff και F. Pellicano, «Applicability and Limitations of Simplified Elastic Shell,» *Journal of Carbon Research*, pp. 7-61, 2021.
- [35] F. Alijani και M. Amabili, «Non-linear vibrations of shells: A literature review from 2003 to 2013,» *International Journal of Non-Linear Mechanics*, αρ. 58, pp. 233-257, 2014.
- [36] M. Amabili, «Classical Nonlinear Theories of Elasticity of Plates and Shells,» *Nonlinear Mechanics of Shells and Plates in Composite, Soft and Biological Materials*, pp. 8-59, 2018.
- [37] L. A. Samuelson και S. Eggwertz, Shell Stability Handbook, London: CRC Press, 2007.
- [38] T. A. Taha και A. N. Abbas, «Development and Background of Shells theories - A Review Study,» *Journal of Materials Science and Engineering B*. 10, 2020.
- [39] E. Reissner, «A New Derivation of the Equations of the Deformation of Elastical Shells,» *American Journal of Mathematics*, τόμ. 1, αρ. 63, pp. 84-177, 1941.
- [40] J. Sanders, «An Improved First Approximation Theory for Thin Shells,» NASA TR-R24, USA, 1959.
- [41] W. Koiter, «A Consistent First Approximation in the General Theory of Elastic Shells,» *Proc. Symp. on Theory of Thin Elastic Shells*, pp. 12-33, 1960.
- [42] A. Lur'ye, «General Theory of Elastic Shells,» *Prikl Mat Mekh*, τόμ. 4, αρ. 4, pp. 7-34, 1940.

- [43] W. Flugge, *Stresses in Shells*, Berlin: Springer-Verlag, 1962.
- [44] R. Byrne, «Theory of Small Deformations of a Thin Elastic Shell,» 1944.
- [45] V. Novozhilov και R. O. Finkelshtein, «On the Error in Kirchhoff's Hypothesis in the Theory of Shells,» *Prikl Mat Mekh*, τόμ. 5, αρ. 7, pp. 35-46, 1943.
- [46] L. Sanders, «Nonlinear Theories for Thin Shells,» *Quarterly of Applied Mathematics*, αρ. 21, pp. 21-36, 1963.
- [47] W. Koiter, «On the Nonlinear Theory of Thin Elastic Shells,» σε *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, 1966.
- [48] V. Novozhilov, *Foundations on the Nonlinear Theory of Elasticity*, New York: Graylock Press, 1953.
- [49] J. Ginsberg, «Large-Amplitude Forced Vibrations of Simply Supported Thin Cylindrical Shells,» *ASME Journal of Applied Mechanics*, αρ. 40, pp. 471-477, 1973.
- [50] V. Z. Vlasov, «General Theory of Shells and Its Application in Engineering,» NASA TT F-99, USA, 1964.
- [51] M. Mushtari και K. Z. Galimov, «Nonlinear Theory of Thin Shells,» The Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1961.
- [52] J. G. Simmonds και D. A. Danielson, «Nonlinear Shell Theory with Finite Rotation and Stress-Function Vectors,» *Journal of Applied Mechanics*, αρ. 39, pp. 90-1085, 1972.
- [53] J. Reddy και K. Chandrashekara, «Geometrically Non-Linear Transient Analysis of Laminated, Doubly Curved Shells,» *Internation Journal of Non-Linear Mechanics*, αρ. 20, pp. 79-90, 1985.
- [54] E. Beltrami, «Sull' equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili, 3rd Ed,» *Memorie dell' Academia delle Scienze*, Bologna, 1882.

- [55] L. Lecornu, «Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles,» *J de L'école Polytechnique*.
- [56] V. Sokolovskii, «Momentless Shells of Revolution,» *Prikl Mat Mekh*, τόμ. 3, αρ. 1, pp. 8-81, 1938.
- [57] A. Pucher, «Über Den Spannungszustand in Gekrümmten Flächen,» *Beton u Eisen*, αρ. 33, pp. 298-304, 1934.
- [58] L. Donnel, *Beams, Plates and Shells*, New York: McGraw-Hill, 1976.
- [59] K. Mushtari, «Certain Generalizations of the Theory of Thin Shells,» *Izv Fiz Mat O-va pri Kazan Un-te*, τόμ. 11, αρ. 8, 1938.
- [60] K. Marguerre, «Zur Theorie Der Gekrümmten Platten Grosser Formänderung,» *5th International Congress of Applied Mechanics*, pp. 93-101, 1939.
- [61] H. Reissner, «Spannungen in Kugelschalen,» Müller-Breslau-Festschrift, Leipzig, Germany, 1912.
- [62] E. Meissner, «Das Elastizität Problem Für dünne Schalen Von Ringflächen,» *Kugel- und Kegelvjschr Naturf Ges*, τόμ. 60, pp. 23-47, 1915.
- [63] N. J. Hoff, «Thin Circular Conical Shells under Arbitrary Loads,» *Journal of Applied Mechanics*, τόμ. 22, αρ. 4, pp. 557-562, 1955.
- [64] W. Flügge, «Die Stabilität der Kreiszylinderschale,» *Ingenieur Archiv*, τόμ. 3, pp. 463-506, 1932.
- [65] Langhaar και H. L., *Energy Methods in Applied Mechanics*, New York: John Wiley and Sons, Inc., 1962.
- [66] V. V. Novozhilov, *Thin Shell Theory*, P. Noordhoff: Groningen, 1964.

- [67] P. L. Gould, Analysis of Shells and Plates, New York, NY: Springer, 1988.
- [68] Π. Μ. Χατζηκωνσταντίνου, Λογισμός Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών και Διανυσματική Ανάλυση, Πάτρα, 2014.
- [69] A. C. Ugural, Plates and Shells: Theory and Analysis, 4th επιμ., Boca Raton: CRC Press, 2017.
- [70] F. I. Niordson, Shell Theory, τόμ. 29, North Holland: Elsevier Science Publishers, 1985.
- [71] D. O. Brush και B. O. Almroth, Buckling of Bars, Plates, and Shells, New York: McGraw-Hill, 1975.
- [72] J. J. L. Sanders, «Nonlinear Theories for Thin Shells,» *Quarterly of Applied Mathematics*, τόμ. 21, αρ. 1, pp. 21-36, 1963.
- [73] H. Eschenauer, N. Olhoff και W. Schnell, «Theory of Shallow Shells,» *Applied Structural Mechanics*, pp. 241-300, 1997.
- [74] V. Vlasov, «Basic differential equations in general theory of elastic shells,» *Prikladnaiia Matematika I Mekhanika*, 1951.
- [75] T. R. Chandrupatla και A. D. Belegundu, Introduction to Finite Elements in Engineering, 3rd Ed., Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall, 2002.
- [76] A. Leissa, «The Historical Bases of the Rayleigh and Ritz Methods,» *Journal of Sound and Vibration*, τόμ. 287, αρ. 4-5, pp. 961-978, 2005.
- [77] C. L. Dym και I. H. Shames, Solid Mechanics: A Variational Approach; Augmented Edition, New York: Springer Science+Business Media New York, 2013.
- [78] K. Rektorys, «Survey of Applicable Mathematics,» *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, τόμ. 53, αρ. 10, p. 724, 1973.

- [79] M. Schildcrout και M. Stein, «Critical Combinations of Shear and Direct Axial Stress for Curved Rectangular Panels,» NACA TN 1928, 1949.
- [80] F. Shanley και E. I. Ryder, «Stress Ratios. The Answer to Combined Loading Problem,» *Aviation*, τόμ. 36, αρ. 8, pp. 28,29,43,66-70, 1937.
- [81] G. Gerard και H. Becker, *Handbook of Structural Stability. Part 3 - Buckling of Curved Plates and Shells*, Washington D.C.: Washington, D.C.: National Advisory Committee for Aeronautics, 1957.
- [82] A. Kromm, «The Limit of Stability of Curved Plate Strip Under Shear and Axial Stresses,» NACA TN 898, 1939.
- [83] D. Legget, «The Initial Buckling of Slightly Curved Panels Under Combined Shear and Compression,» Ministry of Aircraft Production Report and Memorandum 1972, 1943.
- [84] S. Batdorf, M. Stein και M. Schildcrout, «Critical Shear Stress of Curved Rectangular Panels,» NACA TN 1348, 1947.
- [85] C. Featherstone και C. Ruiz, «Buckling of Curved Panels Under Combined Shear and Compression,» *Journal of Mechanical Engineering Science*, τόμ. 212, αρ. C, pp. 183-196, 1998.
- [86] M. M. Domb, «Nonlinear Buckling Predictions of Curved Panels Under Combined Compression and Shear Loading,» σε *International Council of the Aeronautical Sciences*, 2002.
- [87] J. Martins, F. Ljubinkovic, L. S. d. Silva και H. Gervasio, «Behaviour of Thin-Walled Steel Plates Under Generalised In-Plane Stresses: A Review,» *Journal of Constructional Steel Research*, τόμ. 140, pp. 191-207, 2018.
- [88] J. Reddy, *An Introduction To The Finite Element Method*: Third Edition, New York, U.S.A.: McGraw-Hill, 2006.

- [89] VS, «Simscale,» [Ηλεκτρονικό]. Available: https://www.simscale.com/projects/VDMurdeshwear/dbf_aircraft_wing_structural_analysis/.
- [90] Autodesk, 26 May 2015. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://knowledge.autodesk.com/search-result/caas/sfdcarticles/sfdcarticles/How-to-Perform-a-Mesh-Convergence-Study.html>.
- [91] NAFEMS, «The Importance of Mesh Convergence».
- [92] R. v. Mises, «On Saint-Venant's Principle,» *Bull. AMS*, τόμ. 51, pp. 555-562, 1945.
- [93] I. ANSYS, Ansys Theory Reference, Eleventh Edition, SAS IP, Inc., 1999.
- [94] R. Grimes, J. Lewis και H. Simon, «A Shifted Block Lanczos Algorithm for Solving Sparse Symmetric Generalized Eigenproblems,» *SIAM Journal Matrix Analysis Applications*, τόμ. 15, αρ. 1, pp. 228-272, 1996.
- [95] T. F. Chan, Y. Huang, T. Tang, J. Xu και L.-A. Ying, «Recent Progress in Computational and Applied PDES: Conference Proceedings for the International Conference Held in Zhanqijajie,» Zhangqiaje, 2002.
- [96] J. Martins, D. Beg, F. Sinur, L. S. d. Silva και A. Reis, «Imperfection Sensitivity of Cylindrically Curved Steel Panels,» *Thin-Walled Structures*, τόμ. 89, pp. 101-115, 2015.
- [97] M. M. Domb, «Nonlinear Buckling Predictions of Curved Panels Under Combined Compression and Shear Loading,» σε *23rd International Congress of Aeronautical Sciences*, Toronto, Canada, 2002.
- [98] D. Quinn, A. Murphy, W. McEwan and F. Lemaitre, "Stiffened panel stability behaviour and performance gains with plate prismatic sub-stiffening," *Thin-Walled Structures*, vol. 47, no. 12, pp. 1457-1468, 2009.
- [99] K. Bathe, Finite Element Procedures, New Jersey: Prentice Hall, Pearson Education, Inc., 1996.

- [100] E. Riks, «An Incremental Approach to the Solution of Buckling and Snapping Problems,» *Int. J. Solids Struct.*, τόμ. 15, pp. 524-551, 1979.
- [101] N. Lafontaine, X. Wang, K. Huang, M. Yuan και E. Oñate, «On the Arc Length Method: Combining Idead and Implementations Aspects,» 2013.
- [102] M. Crisfield, «A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure That Handles Snap-Through,» *Computers and Structures*, τόμ. 13, pp. 55-62, 1983.
- [103] N. Vasios, «The Arc Length Method: Formulation, Implementation and Applications,» 2015.
- [104] Unknown, «Structural Mechanics: Lecture 11».
- [105] L. Qi, «A Study of the Buckling Behaviour of Stiffened Panels under Compression and Lateral Pressure,» 2018.
- [106] M. Bauccio, ASM Metals Reference Book, Third Edition, Novelty, Ohio, United States: Material Park, 1993.
- [107] F. Esmaeili, M. Zehsaz, T. N. Chakherlou και S. B. Mohammadi, «Fatigue Life Estimation of Double Lap Simple Bolted and Hybrid (bolted/bonded) Joints Using Several Multiaxial Fatigue Criteria,» *Materials and Design*, τόμ. 67, pp. 583-595, 2015.
- [108] M. Domb και B. Leigh, «Refined Design Curves for Compressive Buckling of Curved Panels Using Nonlinear Finite Element Analysis,» 2001.
- [109] K. Tran και L. Davaine, «Stability of cylindrical steel panels under uniform axial compression,» σε *Annual Stability conference*, Pittsburgh, 2011.
- [110] H. Ahmed και K. Naci, «Modeling and Buckling Analysis of Rectangular Plates in ANSYS,» *International Journal of Engineering & Applied Sciences*, 2019.

- [111] M. Amani, B. Edlund και M. Alinia, «Buckling and Postbuckling Behavior of Unstiffened Slender Curved Plates Under Uniform Shear,» *Thin-Walled Structures*, τόμ. 49, pp. 1017-1031, 2011.
- [112] V. Weingarten, P. Seide και J. Peterson, «Buckling of Thin-Walled Circular Cylinders,» NASA, 1968.
- [113] M. M. Domb και B. R. Leigh, «Refined Design Curves for Shear Buckling of Curved Panels Using Nonlinear Finite Element Analysis,» σε *43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Con*, Denver, Colorado, 2002.
- [114] F. Odermann και A. Kling, «Shear-Compression Buckling Test Method on Curved Stiffened Composite Panels,» σε *European Conference on Composite Materials*, Seville, Spain, 2014.
- [115] MyCurveFit.com, MyAssays Ltd..