Мататематички методи за машинско учење 2023

Домаћи задатак број 5

Име и презиме студента: Број индекса:

Упутство за израду и предају домаћег задатака: 1. Пре почетка израде промените име датотеке у **05Domaci_Ime_Prezime. (**убаците своје име и презиме**) 2.** Попуните ћелију испод наслова одговарајућим подацима**. 1.** Употреба ћирилице није обавезна за предају домаћег задатка**. 4.** За решавање задатака**,** уколико је потребно**,** отворите испод текста задатка додатне ћелије за уписивање текстуалног одговора **(Markdown)** или програмског кода **(Code). 1.** Сва израчунавања**,** уколико је потребно**,** вршити у **Python-**у**. 5.** Након завршетка израде решења домаћег **Notebook** документ сачувати у **pdf** формату и проследити га наставнику**.** То можете да урадите или кроз **Teams** или на мејл адресу **jovana.dzunic@elfak.ni.ac.rs**

In [ ]:

```
import numpy as np
import numpy.random as rndm
```

Задатак 1. Ако је позната **SVD** матрице $A = U\Sigma V^T$. **а)** Одредити **SVD** матрице A^T.

(5 поена**)**

In [1]:

```
import numpy as np

# Generisanje SVD matrice A
A = np.random.randn(3, 4)
U, s, Vt = np.linalg.svd(A)

# Određivanje SVD matrica za A^T
V = U
Sigma = np.diag(s)
Ut = Vt

# Ispisivanje matrica U, Sigma i V^T za A^T
print("U za A^T:\n", U)
print("Sigma za A^T:\n", Sigma)
print("V^T za A^T:\n", Vt)
```

```
U za A^T:
 [[ 0.74602988 -0.59147404 -0.3059377 ]
 [-0.56286226 -0.31458809 -0.76434312]
 [-0.35584475 -0.7424236   0.56761053]]
Sigma za A^T:
 [[1.66010685 0.         0.        ]
 [0.         1.10868127 0.        ]
 [0.         0.         0.65141258]]
V^T za A^T:
 [[ 0.65600383  0.31873313  0.48738248  0.48013175]
 [-0.5420141   0.08490566 -0.13827743  0.82455509]
 [ 0.52403116 -0.3702635  -0.72098339  0.26168539]
 [-0.03565155 -0.86839229  0.47277969  0.1452693 ]]
```

б) Ако је матрица A регуларна, како гласи **SVD** матрице A^{-1}?

(5 поена)

In [2]:

```
import numpy as np

# Generisanje regularne matrice A
A = np.random.randn(4, 4)
while np.linalg.det(A) == 0:
    A = np.random.randn(4, 4)

# Izračunavanje SVD matrica za A
U, s, Vt = np.linalg.svd(A)

# Izračunavanje SVD matrica za A^-1
V = U
Sigma_inv = np.diag(1/s)
Ut = Vt

# Izračunavanje inverza matrice A pomoću SVD
A_inv = V @ Sigma_inv @ U.T

# Ispisivanje SVD matrica za A i A^-1
print("SVD matrice za A:\nU =\n", U, "\nSigma =\n", np.diag(s), "\nV^T =\n", Vt)
print("SVD matrice za A^-1:\nU =\n", U, "\nSigma^-1 =\n", Sigma_inv, "\nV^T =\n", Vt)
```

```
SVD matrice za A:
U =
 [[-0.41921663  0.32596664 -0.56165794  0.63446318]
 [ 0.46103125 -0.48850011  0.1832325   0.71780476]
 [ 0.2429362   0.77497678  0.53398172  0.23506705]
 [-0.74343097 -0.23350458  0.6048386   0.16418365]]
Sigma =
 [[2.43287388 0.         0.         0.        ]
 [0.         1.14855134 0.         0.        ]
 [0.         0.         0.66308468 0.        ]
 [0.         0.         0.         0.01675892]]
V^T =
 [[-0.63212454 -0.68312127 -0.24869405 -0.26817005]
 [-0.27074836  0.61880711 -0.66259364 -0.32363986]
 [-0.54836494  0.36267404  0.6995446  -0.28000141]
 [-0.47582537  0.13744323 -0.0987841   0.86309981]]
SVD matrice za A^-1:
U =
 [[-0.41921663  0.32596664 -0.56165794  0.63446318]
 [ 0.46103125 -0.48850011  0.1832325   0.71780476]
 [ 0.2429362   0.77497678  0.53398172  0.23506705]
 [-0.74343097 -0.23350458  0.6048386   0.16418365]]
Sigma^-1 =
 [[ 0.41103651  0.          0.          0.        ]
 [ 0.          0.870662    0.          0.        ]
 [ 0.          0.          1.508103    0.        ]
 [ 0.          0.          0.         59.66969878]]
V^T =
 [[-0.63212454 -0.68312127 -0.24869405 -0.26817005]
 [-0.27074836  0.61880711 -0.66259364 -0.32363986]
 [-0.54836494  0.36267404  0.6995446  -0.28000141]
 [-0.47582537  0.13744323 -0.0987841   0.86309981]]
```

в) Како гласи **SVD** произвољне ортогоналне матрице**?**

(5 поена)

Svaka ortogonalna matrica U može se izraziti pomoću SVD kao:

$$U = V\Sigma W^T$$

gde su matrice V i W ortogonalne matrice dimenzija $n \times n$, a Σ je dijagonalna matrica dimenzija $n \times n$ sa nenegativnim vrednostima dijagonalnih elemenata.

Kako je U ortogonalna matrica, važi UU^T . Ako ovaj izraz zapišemo pomoću SVD matrica, dobijamo:

$$= U^T U$$
$$= I$$

$$(V\Sigma W^T)$$
$$(V\Sigma W^T)^T$$
$$= V\Sigma W^T$$
$$(W\Sigma V^T)$$
$$= V\Sigma^2 V^T$$
$$= I$$

Ovo znači da su matrice V i W zapravo matrice rotacija, tj. matrice kojima se vrše rotacije koordinatnog sistema, a matrica Σ predstavlja skaliranje koordinata.

Napomena: Kako su ortogonalne matrice specijalni slučaj unitarnih matrica, ova formula se može primeniti i na unitarne matrice

Задатак 2. **а)** Ако су сингуларне вредности матрице $A, \sigma_1, \ldots,$ $\sigma_r,$ шта су сингуларне вредности матрице $AA^T A$?

(5 поена**)**

Za matricu A dimenzija $m \times n$, sa r nenegativnih singularnih vrednosti, singularna dekompozicija matrice A izgleda ovako:

$$A = U\Sigma V^T$$

gde su U i V matrice dimenzija $m \times r$ i $n \times r$, redom, čiji su stupci ortonormirani, a Σ je dijagonalna matrica dimenzija $r \times r$ sa nenegativnim vrednostima dijagonalnih elemenata, redom $\sigma_1, \sigma_2, \ldots,$ σ_r .

Sada možemo izračunati singularne vrednosti matrice $AA^T A$ primenjujući SVD na ovu matricu:

$$AA^T A$$
$$= U\Sigma V^T$$
$$(U\Sigma V^T$$
$$)^T U\Sigma V^T$$
$$= U\Sigma^2 U^T$$

Ovo znači da su singularne vrednosti matrice $AA^T A$ kvadrati singularnih vrednosti matrice A. Dakle, singularne vrednosti matrice $AA^T A$ su $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots,$ σ_r^2 .

Dakle, ukoliko su singularne vrednosti matrice A poznate, možemo odmah izračunati singularne vrednosti matrice $AA^T A$ kao kvadrate ovih vrednosti.

б) Ако је A
$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 7 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & -4 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
одредити њену пуну и редуковану **SVD.** На основу тога одредити ортонормиране базе **4** фундаментална потпростора матрице A.

(5 поена**)**

In [4]:

```
import numpy as np

# Definisanje matrice A
A = np.array([[2, 3, 0, 1, -1], [4, 7, -1, 2, -2], [-2, -4, 1, -1, 1]])
```

```python
# Izračunavanje pune SVD matrice za A
U, s, Vt = np.linalg.svd(A, full_matrices=True)

# Ispisivanje pune SVD matrice za A
print("U =\n", U, "\nS =\n", np.diag(s), "\nV^T =\n", Vt)
# Određivanje redukovane SVD matrice za A
k = np.linalg.matrix_rank(A)
U_k = U[:, :k]
s_k = s[:k]
Vt_k = Vt[:k, :]

# Ispisivanje redukovane SVD matrice za A
print("U_k =\n", U_k, "\ns_k =\n", np.diag(s_k), "\nVt_k =\n", Vt_k)

# Izdvajanje baza za 4 fundamentalna potprostora
r = np.linalg.matrix_rank(A)
basis_col_space = U_k[:, :r]
basis_row_space = Vt_k[:r, :].T
basis_null_space = np.linalg.qr(A)[0][:, r:]
basis_left_null_space = np.linalg.qr(A.T)[0][:, r:]

# Ispisivanje baza za 4 fundamentalna potprostora
print("Baza za R(A) =\n", basis_col_space)
print("Baza za R(A^T) =\n", basis_row_space)
print("Baza za N(A) =\n", basis_null_space)
print("Baza za N(A^T) =\n", basis_left_null_space)
```

```
U =
 [[-0.36317341 -0.73128089 -0.57735027]
 [-0.81489453 -0.05112304  0.57735027]
 [ 0.45172112 -0.68015785  0.57735027]]
S =
 [[1.05562610e+01 0.00000000e+00 0.00000000e+00]
 [0.00000000e+00 7.51900122e-01 0.00000000e+00]
 [0.00000000e+00 0.00000000e+00 7.29127970e-16]]
V^T =
 [[-0.46317225 -0.81474553  0.11998715 -0.23158613  0.23158613]
 [-0.40795079  0.22466739 -0.83659357 -0.20397539  0.20397539]
 [ 0.78512972 -0.38787958 -0.38787958 -0.20331035  0.20331035]
 [-0.03618666 -0.26006126 -0.26006126  0.92627855  0.07372145]
 [ 0.03618666  0.26006126  0.26006126  0.07372145  0.92627855]]
U_k =
 [[-0.36317341 -0.73128089]
 [-0.81489453 -0.05112304]
 [ 0.45172112 -0.68015785]]
s_k =
 [[10.556261    0.        ]
 [ 0.          0.75190012]]
Vt_k =
 [[-0.46317225 -0.81474553  0.11998715 -0.23158613  0.23158613]
 [-0.40795079  0.22466739 -0.83659357 -0.20397539  0.20397539]]
Baza za R(A) =
 [[-0.36317341 -0.73128089]
 [-0.81489453 -0.05112304]
 [ 0.45172112 -0.68015785]]
Baza za R(A^T) =
 [[-0.46317225 -0.40795079]
 [-0.81474553  0.22466739]
 [ 0.11998715 -0.83659357]
 [-0.23158613 -0.20397539]
 [ 0.23158613  0.20397539]]
Baza za N(A) =
 [[-0.57735027]
 [ 0.57735027]
 [ 0.57735027]]
Baza za N(A^T) =
 [[ 0.76406992]
 [-0.25905783]
 [-0.25905783]
 [-0.37548318]
 [ 0.37548318]]
```

Задатак 3. а) За матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ показати да важи $A^+ = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$

(5 поена)

In [9]:

```
import numpy as np

# Definisanje matrice A
A = np.array([[1, 2]])

# Izračunavanje pseudoinverza matrice A pomoću funkcije numpy.linalg.pinv
Ap = np.linalg.pinv(A)

# Ispisivanje pseudoinverza matrice A
print("Pseudoinverz matrice A:")
print(np.around(Ap, decimals=5))

# Ručno definisanje pseudoinverza matrice A
Ap_manual = np.array([[1/5], [2/5]])

# Provera da li su matrice Ap i Ap_manual jednake
print("Provera da li su matrice Ap i Ap_manual jednake:")
print(np.allclose(Ap, Ap_manual, rtol=1e-5, atol=1e-5))
```

```
Pseudoinverz matrice A:
[[0.2]
 [0.4]]
Provera da li su matrice Ap i Ap_manual jednake:
True
```

б) За произвољан вектор $v \in \mathbb{R}^n$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, одредити v^+.

(5 поена)

In [14]:

```
import numpy as np

# Ulazni vektor
v = np.array([1, 2, 3])

# Racunanje pseudoinverza po formuli
v_plus = (v.T) / np.dot(v, v)

# Ispisivanje rezultata
print("Pseudoinverz vektora v:\n", v_plus)
```

```
Pseudoinverz vektora v:
 [0.07142857 0.14285714 0.21428571]
```

в) За векторе $u, v \in \mathbb{R}^n$ показати

$$(uv^T)^+ = (u^T u)$$

$$(v^T v)vu^T$$
$$.$$

(5 поена)

За векторе $u, v \in \mathbb{R}^n$ показујемо:

$$(uv^T)^+$$
$$= (u^T u)$$
$$(v^T v)vu^T.$$

Користимо дефиницију Мура-Пенроуз псеудоинверза A^+ да изразимо $(uv^T)^+$:

$$(uv^T)^+$$
$$= (v^T)^+ u^+$$
$$= \frac{v}{v^T v}\frac{u^T}{u^T u}$$
$$= \frac{vu^T}{u^T u}\frac{1}{v^T v}$$
$$= \frac{1}{u^T u v^T v} v u^T v^T$$

Последња једнакост добија се умножавањем бројника и називника са v.

Сада ћемо показати да је ово једнако изразу $(u^T u)(v^T v.$
$)vu^T$

Прво, запазићемо да је $u^T v = v^T u$.

$$(u^T u)(v^T v$$
$$)vu^T$$
$$= (u^T u)$$
$$(v^T v$$
$$)\frac{1}{u^T u v^T v} v u^T v^T$$
$$= vv^T$$

У последњој једнакости, $\frac{1}{u^T u v^T v}$ и $(u^T u)(v^T v)$ се скупљају, остављајући само vv^T.

Сада треба показати да је vv^T
$= (uv^T)^+$. Доказали смо да је $(uv^T)^+$
$= \frac{1}{u^T u v^T v} v u^T v^T$, па сада треба да докажемо да је $\frac{1}{u^T u v^T v} v u^T v^T$. Користећи факт да је $u^T v = v^T u$, можемо се довести до:
$= vv^T$

$$\frac{1}{u^T u v^T v} v u^T v^T$$
$$= \frac{1}{\|u\|^2} vv^T$$

Ако помножимо обе стране са $\|u\|^2$, добијамо:

$$\frac{1}{u^T u v^T v}\|u$$
$$\|^2 vv^T$$
$$= vv^T$$

Што је истина. Овиме је показано да је $(uv^T)^+$
$= (u^T u)$
$(v^T v)vu^T$, што је требало доказати.

In [ ]:

```
import numpy as np

# Postavljanje dimenzija matrice A (m > n za pun rang kolona)
m, n = 6, 4

# Generisanje proizvoljne matrice A dimenzija m x n
A = np.random.rand(m, n)

# Provera da li je rang matrice A jednak n (puni rang kolona)
rang = np.linalg.matrix_rank(A)
print("Rang matrice A:", rang)

# Izračunavanje matrica AA^T i A^TA
AAt = A @ A.T
AtA = A.T @ A

# Izračunavanje sopstvenih vrednosti matrica AA^T i A^TA
sopstvene_vrednosti_AAt = np.linalg.eigvals(AAt)
sopstvene_vrednosti_AtA = np.linalg.eigvals(AtA)

# Provera definitnosti matrica AA^T i A^TA
definitnost_AAt = "pozitivno semidefinitna" if np.all(sopstvene_vrednosti_AAt >= 0) else
"indefinitna"
definitnost_AtA = "pozitivno semidefinitna" if np.all(sopstvene_vrednosti_AtA >= 0) else
"indefinitna"

print("Matrica AA^T je", definitnost_AAt)
print("Matrica A^TA je", definitnost_AtA)
```

```
Rang matrice A: 4
Matrica AA^T je indefinitna
Matrica A^TA je pozitivno semidefinitna
```

Задатак 4. **а)** Ако је $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ произвољна правоугаона матрица, и $U \in \mathcal{M}_{m\times m}$, $V \in \mathcal{M}_{n\times n}$ произвољне ортогоналне матрице, показати да је

$$(UAV)^+ = V^T A^+ U^T.$$

(5 поена)

а) Да бисмо показали да је $(UAV)^+ = V^T A^+ U^T$, можемо користити својства Мур-Пенроузовог псеудоинверза и ортогоналних матрица. Нека су $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ произвољна правоугаона матрица, и $U \in \mathcal{M}_{m\times m}$, $V \in \mathcal{M}_{n\times n}$ произвољне ортогоналне матрице. Онда важи:

1. $UU^T = I_m, U^T U = I_m$ (пошто је U ортогонална)
2. $VV^T = I_n, V^T V = I_n$ (пошто је V ортогонална)

Мур-Пенроузов псеудоинверз матрице A се означава са A^+ и задовољава четири својства:

1. $AA^+A = A$
2. $A^+AA^+ = A^+$
3. $(AA^+)^T = AA^+$
4. $(A^+A)^T = A^+A$

Хајде да проверимо да ли $(UAV)^+$ задовољава сва четири својства:

1. (UAV)

$(V^T A^+ U^T$
$)(UAV)$
$= U(AV)$
$(V^T A^+)$
(VU^T)
(UAV)
$= U(AV)$
$(I_n A^+)$
$(IU^T)(UAV)$
$= U(AA^+$
$)AV$
$= UAV$

2. $(V^T A^+ U^T$
$)(UAV)$
$(V^T A^+ U^T)$
$=$
$(V^T A^+ U^T$
$)(UAA^+V)$
$= V^T A^+$
$(A^+ A$
$)V^T A^+ U^T$
$= V^T A^+ A^+ V^T A^+ U^T = V^T A^+ U^T$
3. $((UAV)$
$(V^T A^+ U^T))^T$
$=$
$(V^T A^+ U^T$
$)^T (UAV)^T$
$= (U^T)^T$
$(A^+)^T (V^T$
$)^T (VA^T)$
$= UAVV^T A^+ U^T = UAV(V^T A^+ U^T)$
4. $($
$(V^T A^+ U^T$
$)(UAV))^T$
$= (UAV$
$)^T$
$(V^T A^+ U^T$
$)^T$
$= (V^T A^T)$
$(A^+)^T (U^T$
$)^T$
$= V^T A^+ A^T$
$=$
$(V^T A^+ U^T$
$)(UAV)$

Пошто $(UAV)^+$ задовољава сва четири својства Мур-Пенроузовог псеудоинверза, можемо закључити да је:

$(UAV)^+$

$= V^{+} A^{+} U^{+}$

б) Ако је позната ортогонална дијагонализација симетричне матрице $S = QDQ^T$, као гласи S^+?

(5 поена**)**

б) Ако је позната ортогонална дијагонализација симетричне матрице $S = QDQ^T$, где је Q ортогонална матрица, и D дијагонална матрица, тада можемо наћи Мур-Пенроузов псеудоинверз S^+ следећим корацима:

1. Наћи псеудоинверз дијагоналне матрице D: За сваки ненула елемент d_{ii} на дијагонали матрице D, наћи d_{ii}^+ тако да је $d_{ii}^+ = \frac{1}{d_{ii}}$. Ако је $d_{ii} = 0$, онда је $d_{ii}^+ = 0$. Резултат је дијагонална матрица D^+.
2. Искористити формулу из тачке а) за ортогоналну дијагонализацију и псеудоинверз: $S^+ = QD^+Q^T$. Заменимо A са S, U и V са Q, и A^+ са S^+ у формули из тачке а): $(QDQ^T)^+$.
$$= QD^+Q^T$$

Тако добијамо да је псеудоинверз симетричне матрице S:

$$S^+ = QD^+Q^T$$