

Università di Sapienza  
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali  
Dipartimento di Fisica  
Dissertazione Triennale in Fisica

# L'effetto Migdal e la ricerca diretta di dark matter

---

*Autore:*

Nikola Prodanov

*Relatore:*

prof. Daniele del Re

*Correlatore:*

prof. Antonio D. Polosa

28 Settembre 2020

Anno Accademico 2019/2020

---

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Particella in una buca di potenziale infinita unidimensionale</b>	<b>3</b>
2.1	Raddoppiamento della larghezza . . . . .	4
2.2	Eliminazione delle pareti . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Perturbazioni dipendenti dal tempo</b>	<b>5</b>
3.1	Transizioni causate da perturbazioni finite nel tempo . . . . .	6
3.2	Grande variazione istantanea sulla Hamiltoniana . . . . .	7
<b>4</b>	<b>L'effetto Migdal</b>	<b>8</b>
4.1	Ionizzazione di idrogeno tramite l'effetto Migdal . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Scattering elastico di DM sul nucleo atomico</b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>12</b>

---

## 1 Introduzione

La proposta per l'esistenza di dark matter proviene da varie misure macroscopiche sull'universo: dalle rotazioni e forme delle galassie, dalle loro interazioni gravitazionali intergalattiche, da gravitational lensing, dalle simulazioni di Cosmic-Microwave-Background-Radiation, etc[1]. Tutte queste misure e osservazioni ci hanno fatto dedurre l'esistenza di una materia, ulteriore a quella che conosciamo e possiamo vedere, che non interagisce tramite la forza elettromagnetica o forte, chiamata dark matter. Si ipotizza che l'universo sia costruito da 5% di materia, 25% di DM e il resto 70% è dark energy. L'identificazione della natura di DM è uno dei problemi più interessanti, oltre al Modello Standard, di cui si occupa la fisica delle particelle.

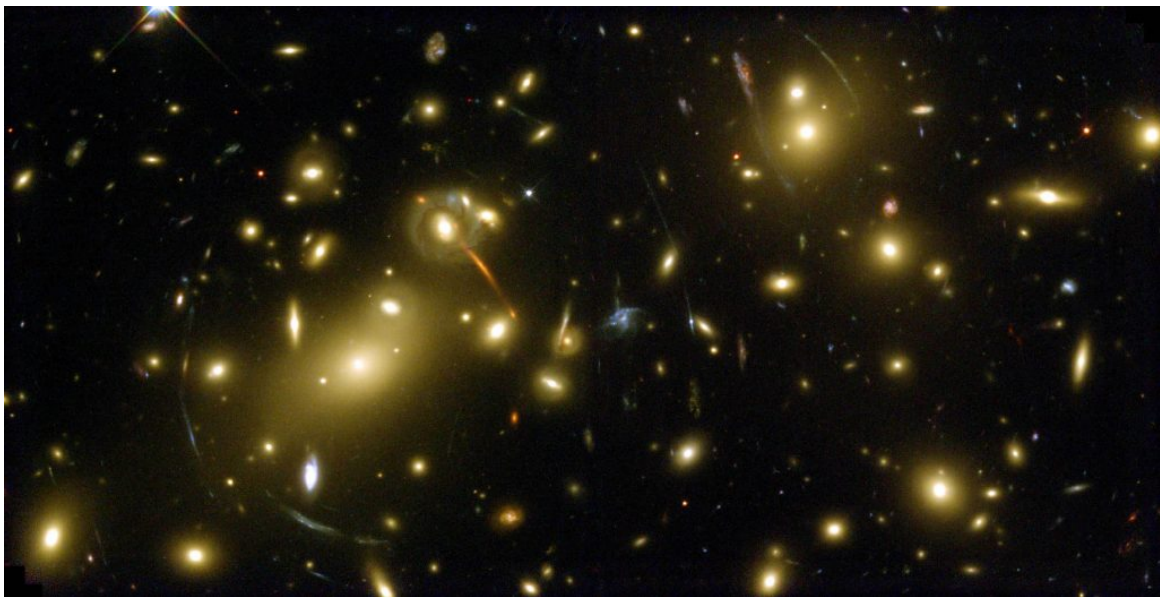


Figura 1: Foto di gravitational lensing che suggerisce l'esistenza di materia oscurata; Abell 2218.

credit: NASA/ESA

In (Figura 1) si vede l'effetto di gravitational lensing che è una distribuzione di materia in grado di curvare la traiettoria della luce in transito in modo analogo a una lente ottica. In questa foto sono state misurate le masse delle galassie per verificare i risultati sperimentali del gravitational lensing con quelli teorici. Il risultato di questo confronto indica la presenza di materia oscura.

Una delle teorie proposte per candidati di DM possibili sono i WIMPs, ovvero dall'inglese **Weakly Interacting Massive Particles**. Si pensa che queste particelle elementari siano state formate termicamente poco dopo il Big Bang e costituiscono, oggi, la cold DM. Per "cold" si intende che le WIMPs si muovono in regime non-relativistico. La massa della particella DM è ancora sconosciuta, momentaneamente si cercano WIMPs con masse di vari ordini di grandezza maggiore o minore da  $\sim GeV/c^2$ . L'ipotesi è che la nostra galassia, rispetto a questa DM, sia immersa in una densità costante di DM che denominiamo con  $\rho_{DM}$ . Nella Via Lattea, il Sole si muove tra questa DM con una velocità  $\sim 220 km/s$  lungo il disco galattico verso la costellazione del Cigno. Quindi, nel sistema di riferimento Terrestre, sarebbe presente un vento di DM che potenzialmente può essere osservato (Figura 2).

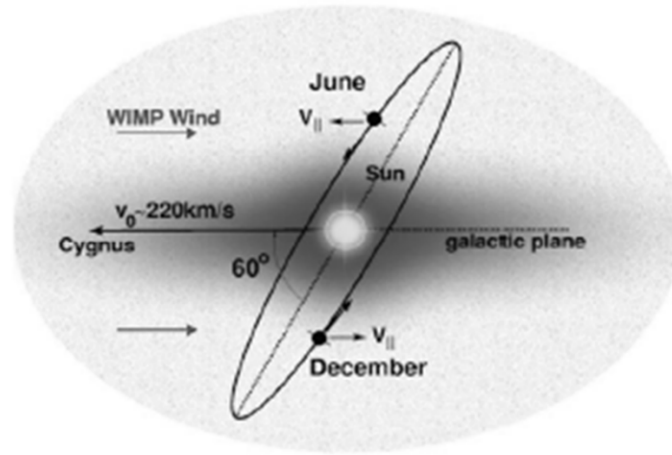


Figura 2: Modulazione annuale e il vento di particelle DM incidenti

Si ottiene una stima che il vento di particelle DM incidenti sulla Terra avrebbe una velocità:

$$v_{DM} \approx (2.2 \pm 0.3) \cdot 10^5 m/s \quad (1.1)$$

La ricerca di DM avviene usando differenti processi che riguardano la DM (vedere Figura 3): ricerca indiretta, diretta e con le collisioni di particelle del Modello Standard. Quest'ultimo metodo viene sfruttato al LHC (Large Hadron Collider), dove però, ad oggi, non si sono ancora osservati eccessi significativi di DM. La ricerca indiretta consiste nell'interazione particella-antiparticella di DM, queste possono annichilirsi o interagire con conseguente produzione di fotoni, neutrini o antimateria che è possibile rilevare in laboratorio. Sono stati fatti esperimenti di ricerca indiretta con il Fermi-LAT (Fermi Large Area Telescope) in cui non sono stati trovati risultati statisticamente significativi oltre alle altre radiazioni del fondo. La ricerca diretta sfrutta invece lo scattering tra una particella di DM e un bersaglio costituito da un protone o nucleo ( $1 GeV/c^2 < m_{BERSAGLIO} < 100 GeV/c^2$ ) [2]. Un nucleo colpito da una particella di DM subisce quindi un rinculo che può essere misurato sperimentalmente. Si tratta di una misura complessa perché le energie coinvolte sono confrontabili con quelle dei fondi ambientali. C'è una serie di esperimenti sotterranei che hanno preso dati o che sono in costruzione come DEAP a SNOLAB e Darkside a LNGS (Laboratori Nazionali del Gran Sasso). Tutti questi esperimenti hanno la stessa difficoltà nel cercare di distinguere il segnale di fondo dall'interazione di particelle DM. Un'ulteriore caratteristica che permette di distinguere il segnale dovuto alla collisione di queste particelle e il fondo è rappresentato dalla potenziale dipendenza stagionale

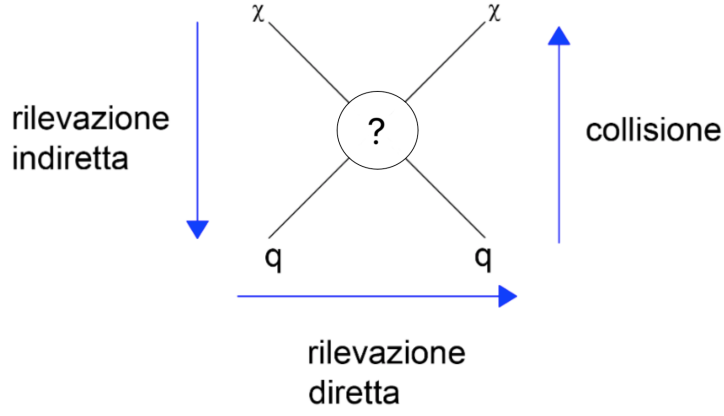


Figura 3: Diagramma di Feynman per ricerca diretta, indiretta e collisione;

del segnale. Esso deriva dal fatto che la velocità della Terra  $\sim 30\text{km/s}$  in giugno, si somma a quella del Sole nella Galassia, mentre in dicembre si sottrae.

In questa dissertazione studieremo un possibile esperimento di ricerca di dark matter. Nell'ipotesi in cui la Terra è attraversata da un vento di dark matter, gli urti di tali particelle con i nuclei di materia ordinaria potrebbe ionizzare gli atomi. Se la direzione del moto dell'elettrone che proviene dalla ionizzazione è correlata geometricamente con quella della particella di DM incidente, un esperimento potrebbe sfruttare questa caratteristica. Dal momento che si conosce la direzione del vento di DM, sarebbe possibile applicare ulteriori tagli sulla direzionalità del segnale, riducendo così il fondo. Questo scattering del nucleo-DM, nel mondo interparticellare, avviene istantaneamente in confronto ai moti e tempi della nuvola elettronica dell'atomo. Quindi per iniziare, abbiamo applicato delle variazioni rapide di potenziale su un problema semplice della particella in una buca infinita unidimensionale per dare una introduzione semplice all'effetto Migdal. Abbiamo quindi generalizzato il caso di variazioni rapide di potenziale a perturbazioni dipendenti dal tempo e mostrato come cambiano le ampiezze di probabilità nel tempo per trovare la particella in diversi stati della Hamiltoniana. Dimostriamo che esiste un unico strumento per calcolare le probabilità di transizione da uno stato iniziale a quello finale per perturbazioni istantanee, indipendentemente per perturbazioni grandi e piccole. Questo effetto di ionizzazione o eccitazione dell'atomo tramite una scossa del nucleo fu studiato dal fisico sovietico A.B. Migdal[3]. Partendo dall'effetto Migdal, abbiamo usato le perturbazioni istantanee per studiare il moto dell'elettrone ionizzato dalla particella dark matter. Da questa elaborazione dell'effetto Migdal otteniamo una condizione per ionizzare l'atomo sulla velocità del nucleo che automaticamente fissa le condizioni sull'impulso della particella dark matter e la direzione dell'elettrone che verrà ionizzato.

## 2 Particella in una buca di potenziale infinita unidimensionale

Presentiamo innanzitutto un background teorico del problema in esame partendo dalla definizione di una particella che si trovi in una buca di potenziale e ne riportiamo i risultati riassuntivi. Si consideri una particella il cui potenziale sia definito  $V = 0$  all'interno del dominio  $0 < x < a$  e diverga all'infinito altrimenti. Le soluzioni delle funzioni d'onda fuori dal dominio forniscono  $\psi(x) = 0$  che offre le condizioni al bordo  $\psi(0) = \psi(a) = 0$ . Risolvendo l'equazione di Schrödinger con suddette condizioni al contorno si ottengono le seguenti soluzioni all'energia e gli autostati per i numeri quantici  $n > 0$  interi:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (2.1)$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2 \quad (2.2)$$

## 2.1 Raddoppiamento della larghezza

Una particella si trova nello stato fondamentale  $\psi(x) = \sqrt{2/L} \sin(\pi x/L)$  di una buca di potenziale a pareti infinite posizionate a  $x = 0$  e a  $x = L$ , in una dimensione. La parete a  $x = L$  viene portata istantaneamente a  $x = 2L$ , in modo tale che la funzione d'onda della particella rimanga nella sua forma originale. Dopo l'espansione istantanea, la funzione d'onda è descritta nella nuova base di autostati  $\psi_n(x)$  della buca di potenziale infinita con larghezza  $2L$ :

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x) \quad (2.3)$$

dove gli coefficienti  $|a_n|^2$  rappresentano la probabilità di trovare la particella nel stato  $\psi_n(x)$  e si possono calcolare nel modo seguente:

$$a_n = \langle \psi_n(x) | \psi(x) \rangle = \frac{\sqrt{2}}{L} \int_0^L dx \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) \quad (2.4)$$

Otteniamo i seguenti valori per  $a_n$ :

$$a_n = \begin{cases} \frac{4\sqrt{2}}{(n^2-4)\pi} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) & n \neq 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & n = 2 \end{cases} \quad (2.5)$$

Da cui segue che la probabilità di trovare la particella nel stato fondamentale ( $n=1$ ) del nuovo sistema a buca di larghezza  $2L$  vale 36%. Mentre il stato più probabile è il primo stato eccitato (in questo caso per  $n = 2$ ) con probabilità di 50%.

Prima della espansione istantanea, la particella aveva energia  $E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2}$ . Dopo l'espansione istantanea ci aspettiamo che l'energia della particella si conservi, e dunque nel stato più probabile essa vale  $E_{n=2} = \frac{\hbar^2 (n\pi)^2}{2m (2L)^2} \Big|_{n=2} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2}$  uguale al caso prima dell'espansione istantanea.

Quindi se un sistema viene perturbato istantaneamente, la funzione d'onda non ha il tempo sufficiente per cambiare la sua forma e dunque rimane nella forma iniziale, in questo modo perde la certezza di essere nel suo stato unico iniziale e si distribuisce nei nuovi autostati. Ma tende di andare in quel autostato che lo fa conservare l'energia.

## 2.2 Eliminazione delle pareti

Se le pareti, della buca di larghezza  $L$ , istantaneamente vengono eliminate, ci riconducono al caso di una particella libera. Possiamo esprimere  $\psi(x)$  nello spazio di momento  $p$ , per semplicità lo esprimiamo in  $k = \frac{p}{\hbar}$ . Dunque avremmo una base di vettori nel spazio continuo  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$ :

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \psi(k) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \quad (2.6)$$

Secondo la proprietà della trasformata di Fourier, possiamo esprimere  $\psi(k)$  nel modo seguente:

$$\psi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) e^{-ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^L dx \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_0 x) e^{-ikx} \quad (2.7)$$

Dove  $k_0 = \frac{\pi}{L}$ . Si ottiene il risultato:

$$\psi(k) = \frac{e^{-ikL/2}}{\sqrt{\pi L}} \left( \frac{\sin((k - k_0)L/2)}{k - k_0} - \frac{\sin((k + k_0)L/2)}{k + k_0} \right) \quad (2.8)$$

La probabilità  $P$  che la particella libera finale abbia momento  $p$  è:

$$P = |\psi(k)|^2 dk = \frac{1}{\hbar} |\psi(p/\hbar)|^2 dp \quad (2.9)$$

Si nota che  $\psi(k)$  è una differenza tra due funzioni  $u(r) = \frac{\sin(r)}{r}$  che ha il massimo in  $r=0$  quindi per la nostra funzione  $\psi(k)$  avrà i massimi equiprobabili traslati rispettivamente in  $k = k_0 = \pm \frac{\pi}{L}$  cioè per

$$p_0 = \pm \hbar \pi / L \quad (2.10)$$

Facendo una stima con il principio di Heisenberg  $\Delta x \Delta p = L \Delta p \approx \hbar/2$  si ottiene il valore aspettato di trovare la particella con impulso  $p$ :

$$\Delta p \approx \frac{\hbar}{2L} = \frac{p_0}{2\pi} \quad (2.11)$$

Questo risultato che con l'eliminazione delle pareti, la particella diventa libera mostra che essa tende ad avere un impulso che soddisfa il principio di conservazione di energia. L'eliminazione istantanea delle pareti può essere comparata a una ionizzazione di un atomo. Se il nucleo istantaneamente spariva, allora ci possiamo aspettare che l'elettrone mantiene la sua energia cinetica uguale a quella nel momento prima della ionizzazione.

### 3 Perturbazioni dipendenti dal tempo

In questa sezione cerchiamo di descrivere come cambiano le ampiezze di probabilità di trovare una particella in un sistema descritto da una Hamiltoniana con delle perturbazioni al primo ordine. Guardiamo le perturbazioni istantanee piccole e grandi. Le piccole perturbazioni faranno una variazione di qualche stato vicino a quello iniziale, mentre quelle grandi, in cui siamo interessati, potranno variare sufficientemente lo stato legato tanto da far diventare una particella libera. Infine troviamo un modo unico generalizzato per descrivere l'ampiezza di probabilità di trovarsi in un stato finale che applicheremo al caso di ricerca diretta di DM e tratteremo l'impulso trasferito al nucleo come una perturbazione istantanea e vedremo cosa succede alla nuvola elettronica dell'atomo. Iniziamo con la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo in meccanica quantistica:

Supponiamo di avere una Hamiltoniana  $H_0$  e i suoi autostati e autovalori rispettivamente  $|\Psi_k\rangle$  e  $E_k$  tali che soddisfano l'equazione di Schrödinger. Inseriamo una perturbazione dipendente dal tempo  $H = H_0 + V(x, t)$ . Scelta  $|\Psi_k\rangle$  una base, cerchiamo le soluzioni di  $H |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle$  dove  $|\Psi\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) |\Psi_k\rangle$ :

$$i\hbar \partial_t |\Psi\rangle = (H_0 + V(x, t)) |\Psi\rangle \quad (3.1)$$

$$i\hbar \partial_t \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) |\Psi_k\rangle \right) = (H_0 + V(x, t)) \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) |\Psi_k\rangle \quad (3.2)$$

Notiamo che per l'equazione di Schrödinger vale  $H_0 |\Psi_k\rangle = E_k |\Psi_k\rangle$  quindi ci rimane da risolvere:

$$i\hbar |\Psi_k\rangle \sum_{k=1}^{\infty} \partial_t a_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) V(x, t) |\Psi_k\rangle \quad (3.3)$$

Proiettando sul vettore  $\langle \Psi_m |$  si ottiene:

$$i\hbar \partial_t a_m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_{mk}(x, t) a_k(t) \quad (3.4)$$

Dove abbiamo definito:

$$V_{mk}(x, t) = \langle \Psi_m | V(x, t) | \Psi_k \rangle \quad (3.5)$$

Se la particella si trova inizialmente in un stato  $|\Psi_n^0\rangle$  allora questo implica che i coefficienti all'ordine zero devono essere:  $a_m^0 = \delta_{mn}$ . Usando questa condizione, cerchiamo le soluzioni del tipo:

$$a_m(t) = a_m^0 + a_m^1(t) + \dots \quad (3.6)$$

$$i\hbar \partial_t (a_m^0 + a_m^1(t) + \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} V_{mk}(x, t) (a_k^0 + a_k^1(t) + \dots) \quad (3.7)$$

$$i\hbar \partial_t a_m^1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_{mk}(x, t) (a_k^0) = \sum_{k=1}^{\infty} V_{mk}(x, t) \delta_{kn} = V_{mn} \quad (3.8)$$

Questo vale per un stato che stava inizialmente in  $|\Psi\rangle = |\Psi_n\rangle$ . Introduciamo un altro prefisso:  $|\Psi\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kn}(t) |\Psi_k\rangle$  dove  $n$  indica lo stato in cui si inizialmente trovava. Infine, definendo  $\omega_{kn} = \frac{E_k - E_n}{\hbar}$  e  $V_{nk} = \langle \Psi_n | V(x, t) | \Psi_k \rangle$ , otteniamo che le ampiezze di probabilità al primo ordine:

$$a_{kn}(t) = \delta_{kn} - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' V_{nk} e^{i\omega_{kn}t'} \quad (3.9)$$

Il risultato (3.9) vale per piccole perturbazioni generalizzate fino al primo ordine. I moduli quadri di (3.9) rappresentano le probabilità nel tempo di trovare la particella in un certo stato  $k$ .

### 3.1 Transizioni causate da perturbazioni finite nel tempo

Si supponga una particella in un stato  $|\psi_n\rangle$  tale che risulti autostato dell'Hamiltoniana e quindi  $H_0 |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle$ , e che su di essa agisca una perturbazione finita  $V(x, t)$  in un intervallo di tempo limitato  $t \in (t_a, t_b)$ :

$$V(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < t_a \\ U(x, t) & \text{per } t_a < t < t_b \\ W(x) & \text{per } t > t_b \end{cases} \quad (3.10)$$

Se ne deduce quindi che i coefficienti (3.9) precedentemente calcolati per effetto della perturbazione assumano valori costanti per tempi  $t > t_b$ . Pertanto la funzione d'onda finale sarà:

$$|\Psi\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kn}(+\infty) |\psi_n\rangle \quad (3.11)$$

I valori  $|a_{kn}(+\infty)|^2$  determinano la probabilità di trovare la particella nello stato  $k$  ovvero nello specifico la probabilità che a seguito della perturbazione la particella effettui una transizione dallo stato  $n$  allo stato  $k$ . È possibile calcolare la probabilità  $P_{nk}$  esplicitamente usando la formula (3.9):

$$P_{nk} = |a_{kn}(+\infty)|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt' V_{nk} e^{i\omega_{kn}t'} \right|^2 \quad (3.12)$$

Si vede che non è possibile applicare direttamente tale formula in quanto l'integrale in (3.12) diverge, riscriviamo infatti l'integrale come la somma di 3 termini:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt' V_{nk} e^{i\omega_{kn}t'} = \int_{-\infty}^{t_a} dt' V_{nk} e^{i\omega_{kn}t'} + \int_{t_a}^{t_b} dt' V_{nk} e^{i\omega_{kn}t'} + \int_{t_b}^{\infty} dt' V_{nk} e^{i\omega_{kn}t'} = \quad (3.13)$$

$$= 0 \cdot \int_{-\infty}^{t_a} dt' e^{i\omega_{kn}t'} + \int_{t_a}^{t_b} dt' \langle \psi_n | U(x, t) | \psi_k \rangle e^{i\omega_{kn}t'} + \langle \psi_n | W(x) | \psi_k \rangle \int_{t_b}^{\infty} dt' e^{i\omega_{kn}t'} \quad (3.14)$$

Il terzo integrale diverge. Per rimuovere questa divergenza integriamo per parti:

$$a_{kn} = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' V_{nk} e^{i\omega_{kn}t'} = -\frac{V_{kn} e^{i\omega_{kn}t'}}{\hbar\omega_{kn}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \partial_{t'}(V_{nk}) \frac{e^{i\omega_{kn}t'}}{\hbar\omega_{kn}} \quad (3.15)$$

Serve determinare il valore di  $-\frac{V_{kn} e^{i\omega_{kn}t'}}{\hbar\omega_{kn}}$  in  $\pm\infty$ :

(i) in  $+\infty$ :  $V_{kn} = \text{costante}$  ma e' come una costante scalare aggiunta alla Hamiltoniana, dunque non avra un ruolo che come una fase davanti tutti i coefficienti  $a_{kn}$ . Quindi può essere messo in evidenza davanti la funzione d'onda e per questo motivo non avra nessun impatto sui calcoli dei moduli quadri.

(ii) in  $-\infty$ :  $V_{kn} = 0$  e quindi l'integrale sara' nullo.

Quindi infine possiamo scrivere la probabilità di transizione da un stato  $n$  a un stato  $k$  come:

$$P_{nk} = \frac{1}{(\hbar\omega_{kn})^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt' \partial_{t'}(V_{nk}) e^{i\omega_{kn}t'} \right|^2 \quad (3.16)$$

È necessario confrontare i due termini nell'integrale e i loro comportamenti, in particolare denotiamo due casi possibili:

Caso(1): Se  $V(x, t)$  varia poco nel intervallo di tempo  $\frac{1}{\omega_{kn}}$ , allora  $\partial_{t'} V_{nk}$  viene considerato costante e portato fuori dal integrale:

$$P_{nk} = \frac{1}{(\hbar\omega_{kn})^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt' \partial_{t'}(V_{nk}) e^{i\omega_{kn}t'} \right|^2 \propto \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega_{kn}t'} \right|^2 = |2\pi\delta(\omega_{kn})|^2 \quad (3.17)$$

Quindi non fa transizione ma rimane nel suo stato iniziale.

Caso(2): Se la perturbazione avviene molto rapidamente dove adesso il termine  $e^{i\omega_{kn}t'}$  viene considerato costante segue che:

$$P_{nk} = \frac{1}{(\hbar\omega_{kn})^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt' \partial_{t'}(V_{nk}) e^{i\omega_{kn}t'} \right|^2 = \frac{1}{(\hbar\omega_{kn})^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt' \partial_{t'}(V_{nk}) \right|^2 \quad (3.18)$$

Da cui otteniamo che per transizioni istantanee nei confronti di  $\frac{1}{\omega_{kn}}$ , la probabilità di trovare la particella in un stato  $k$  data inizialmente in  $n$  vale:

$$P_{nk} = \left( \frac{V_{nk}(+\infty)}{\hbar\omega_{kn}} \right)^2 \quad (3.19)$$

### 3.2 Grande variazione istantanea sulla Hamiltoniana

In un sistema, descritto da una Hamiltoniana  $H_0 | \psi_k^0 \rangle = E_k^0 | \psi_k^0 \rangle$ , supponiamo di avere una particella in un certo stato  $|\Psi\rangle$ , supponiamo per semplicità  $|\Psi\rangle = | \psi_n^0 \rangle$ . Su questo sistema si svolge una grande perturbazione in un tempo  $\delta t$  talmente piccolo da potere essere considerato istantaneo. Dopo la perturbazione il sistema sarà descritto da nuovi autostati  $|\psi_k\rangle$  che soddisfano la nuova Hamiltoniana  $H | \psi_k \rangle = E_k | \psi_k \rangle$ . La particella non avrà nessun tempo a disposizione in  $\delta t$  per cambiare la sua forma della funzione d'onda. Come in (2.4) la funzione d'onda  $|\Psi\rangle$  dovrà essere descritta dai nuovi autostati:

$$|\Psi\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k | \psi_k \rangle \quad (3.20)$$



Se gli autostati  $|\psi_k^0\rangle$  e  $|\psi_k\rangle$  sono diversi, ci sarà sempre un'ampiezza di probabilità  $a_k \neq 0$  e dunque una probabilità che la particella transisce da uno stato  $|\psi_n^0\rangle$  a uno stato  $|\psi_k\rangle$ . Questa probabilità di transizione  $P_{nk}$  può essere calcolata con i moduli quadri delle ampiezze di probabilità  $a_k$ :

$$P_{nk} = |\langle \psi_k | \psi_n^0 \rangle|^2 \quad (3.21)$$

Si può infatti dimostrare che per perturbazioni piccole  $V = H - H_0$ , la formula (3.21) coincide con (3.19). Proiettiamo le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} H_0 |\psi_n^0\rangle = E_n^0 |\psi_n^0\rangle \\ H |\psi_k\rangle = E_k |\psi_k\rangle \end{cases} \quad (3.22)$$

con gli autostati  $\langle \psi_k |$  e  $\langle \psi_n^0 |$  rispettivamente e facciamo la differenza delle equazioni ottenendo:

$$(E_k - E_n^0) \langle \psi_k | \psi_n^0 \rangle = \langle \psi_k | V(x, t) | \psi_n^0 \rangle \quad (3.23)$$

Se la perturbazione è piccola, gli autostati rimangono uguali, cioè  $|\psi_k\rangle = |\psi_k^0\rangle$  e  $E_k = E_k^0$ . Il modulo quadro della espressione precedente è:

$$|\langle \psi_k^0 | \psi_n^0 \rangle|^2 = \left| \frac{1}{E_k^0 - E_n^0} \langle \psi_k | V(x, t) | \psi_n^0 \rangle \right|^2 = \frac{1}{(E_k^0 - E_n^0)^2} \cdot V_{nk}^2 = \left( \frac{V_{nk}}{\hbar \omega_{kn}} \right)^2 \quad (3.24)$$

Quindi nonostante la perturbazione istantanea sia piccola o grande, se si conoscono gli autostati iniziali e finali, denotati rispettivamente  $|\psi_k^0\rangle$  e  $|\psi_k\rangle$ , possiamo calcolare la probabilità di transizione in uno stato generico dopo che la perturbazione finisce di agire sulla Hamiltoniana tramite la formula (3.21).

## 4 L'effetto Migdal

Supponiamo un atomo neutro con  $Z$  elettroni e il nucleo, a riposo, costituito da  $Z$  protoni che si trova nel suo stato fondamentale  $\psi_0$ . Denotiamo  $\mathbf{r}_i$  le coordinate del  $i$ -esimo elettrone. L'equazione di Schrödinger della nuvola di elettroni sarà:

$$\sum_{i=1}^Z \left( -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_i^2 - \frac{\alpha}{r_i} \right) \psi + \sum_{i<j}^Z \frac{\alpha}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (4.1)$$

di cui le soluzioni denotiamo  $\psi_m(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_Z, t) = \psi_m$ . In un certo momento  $t_0$  il nucleo riceve un impulso  $\Delta p$ , da una forza esterna, che mette in moto il nucleo nello spazio con velocità  $\mathbf{v}_n$  e supponiamo che il tempo  $\Delta t$  in cui il nucleo riceve l'impulso  $\Delta p$  è molto piccolo in confronto al periodo medio di convoluzione  $\frac{2\pi a}{\langle |v_e| \rangle}$ , dove  $a$  è il raggio di Bohr.

Dopo l'interazione della forza esterna, il nucleo si mette in moto. Se la reazione avviene rapidamente, gli elettroni non hanno sufficiente tempo  $\Delta t$  per cambiare la loro forma della funzione d'onda e dunque rimangono nella loro forma iniziale. Nel sistema di riferimento del nucleo, che sta in moto con velocità  $\mathbf{v}_n$ , quello che si osserva è che ad ogni elettrone si somma una velocità  $-\mathbf{v}_n$ .

Definiamo  $S$  e  $S'$  il sistema di riferimento del laboratorio e il sistema di riferimento del nucleo rispettivamente. Secondo le trasformazioni di Galileo in meccanica quantistica, la funzione d'onda, in  $S'$ , dei elettroni prende la forma  $\psi'_0$  (vedere Figure 4 e 5):

$$\psi'_0 = \psi_0 \exp \left\{ \sum_{i=1}^Z i \frac{m_e}{\hbar} (-\mathbf{v}_n) \cdot \mathbf{r}_i \right\} \quad (4.2)$$

Definiamo  $\mathbf{q} = m_e \mathbf{v}_n / \hbar$  e otteniamo l'espressione:

$$\psi'_0 = \psi_0 e^{-i\mathbf{q} \cdot \sum_{i=1}^Z \mathbf{r}_i} \quad (4.3)$$

Per la formula (3.21) sono soddisfatte tutte le condizioni e si può calcolare la probabilità di eccitazione:

$$P_{0k} = |\langle \psi_k | e^{-i\mathbf{q} \cdot \sum_{i=1}^Z \mathbf{r}_i} | \psi_0 \rangle|^2 \quad (4.4)$$

Dove  $\psi_k$  adesso sono le autofunzioni dell'atomo in moto con velocità  $\mathbf{v}_n$  nel sistema di riferimento del nucleo.

Quindi con l'effetto Migdal si può eccitare o ionizzare l'atomo.

Notazione: Il vettore  $\mathbf{v}_n$  e' rappresentato con la freccetta rossa sulle Figure 1 e 2

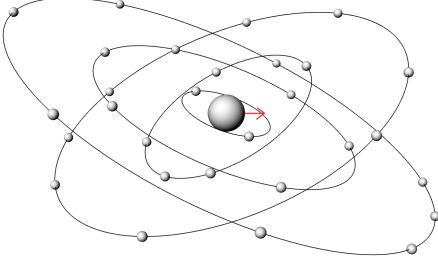


Figura 4: Nel sistema di riferimento del laboratorio  $S$  il nucleo riceve una velocità  $\mathbf{v}_n$ . L' $i$ -esimo elettrone mantiene la velocità iniziale prima della perturbazione  $\mathbf{v}_i$ .

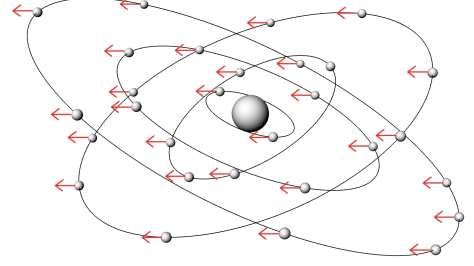


Figura 5: Nel sistema di riferimento del nucleo  $S'$ , traslato di  $\mathbf{v}_n$  rispetto ad  $S$ , sembra che gli elettroni hanno velocità:  $\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_n$ .

Da (4.4) si osserva, per il lemma di Riemann-Lebesgue, che se  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_i \gg 1$  la probabilità di andare in qualunque stato  $k = 0, 1, 2, \dots$  e' nulla, quindi avviene la ionizzazione. In altre parole otteniamo una oscillazione rapida se:

$$v_n \gg \frac{\hbar}{m_e a} \quad (4.5)$$

#### 4.1 Ionizzazione di idrogeno tramite l'effetto Migdal

Supponiamo che avvenga una ionizzazione dell'atomo, inizialmente a riposo in  $S$ , tramite l'effetto Migdal. Dopo la ionizzazione, il nucleo e l'elettrone saranno particelle libere con velocità  $\mathbf{v}_n$  e  $\mathbf{v}_e$ . L'elettrone ionizzato avrà una distribuzione in cui una specifica direzione sarà ad esso prediletta. Cerchiamo di trovare qual'è questa direzione nei due sistemi di riferimento  $S'$  e  $S$ . Possiamo descrivere l'elettrone libero in  $S'$  come  $\psi = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}'_e \cdot \mathbf{r}'/\hbar}$ . Mentre da (4.3)  $\psi' = \psi_0 e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar}$  dove  $\mathbf{p} = m_e \mathbf{v}_n$ . Consideriamo la densità di probabilità di trovare l'elettrone in  $\mathbf{p}'_e$ , segue:

$$\psi(\mathbf{p}'_e) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{r} \left( \frac{e^{i\mathbf{p}'_e \cdot \mathbf{r}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \right)^* \psi_0 e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{r} \psi_0 e^{-i(\mathbf{p} + \mathbf{p}'_e) \cdot \mathbf{r}/\hbar} \quad (4.6)$$

$\psi_0$  e' invariante sotto rotazioni, dunque possiamo ruotare il sistema di riferimento in tale modo da mettere  $\mathbf{p} + \mathbf{p}'_e$  lungo l'asse  $z$  cioè  $\mathbf{p} + \mathbf{p}'_e = (0, 0, |\mathbf{p} + \mathbf{p}'_e|)$ . A questo punto esprimiamo le funzioni in coordinate sferiche:  $\mathbf{r} = r(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$

$$\psi(\mathbf{p}'_e) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{+\infty} dr \frac{1}{\sqrt{\pi} a^{3/2}} r^2 e^{-r/a} \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{-i|\mathbf{p} + \mathbf{p}'_e| r \cos \theta / \hbar} \quad (4.7)$$

$$\psi(\mathbf{p}'_e) = \sqrt{\frac{8a^3}{\hbar^3 \pi^2}} \frac{1}{(1 + \frac{|\mathbf{p} + \mathbf{p}'_e|^2 a^2}{\hbar^2})^2} \quad (4.8)$$

Se definiamo  $\eta$  l'angolo tra  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{p}'_e$ , notiamo che  $|\psi(\mathbf{p})|^2$  dipende sia da  $|\mathbf{p}'_e|$  e l'angolo  $\eta$ :

$$\psi(\mathbf{p}'_e) = \sqrt{\frac{8a^3}{\hbar^3 \pi^2}} \frac{1}{(1 + \frac{p^2 + (p'_e)^2 + 2pp'_e \cos \eta}{\hbar^2} a^2)^2} \quad (4.9)$$

La probabilità di trovare l'elettrone con impulso  $\mathbf{p}'_e$  in un elemento  $d^3\mathbf{p}'_e$  vale:

$$P(\mathbf{p}'_e) = 4\pi(p'_e)^2 |\psi(\mathbf{p}'_e)|^2 dp'_e \quad (4.10)$$

Definiamo  $p_0 = \hbar/a$ . Si osserva che (4.10) dipende da  $p, p'_e$  e  $\eta$  nella maniera seguente:

$$P \propto \frac{(p'_e/p_0)^2}{(1 + (p'_e/p_0)^2 + (p/p_0)^2 + 2\frac{pp'_e}{p_0^2} \cos \eta)^4} dp'_e \quad (4.11)$$

Ancora dalla (4.6) possiamo fare lo stesso ragionamento con il lemma di Riemann-Lebesgue. L'unico modo che affinché questo integrale non sia nullo e che  $\mathbf{p}'_e \sim \mathbf{p}$ . Imponiamo questa condizione con i moduli:

$$P_p(\eta) \propto \frac{(p/p_0)^2}{(1 + 2(p/p_0)^2(1 + \cos \eta))^4} dp'_e \quad (4.12)$$

Eseguendo un grafico della funzione (4.12), vediamo l'andamento della direzione più probabile di trovare l'elettrone ionizzato in funzione dell'angolo  $\eta$  e parametrizzata da  $p = m_e v_n$ :

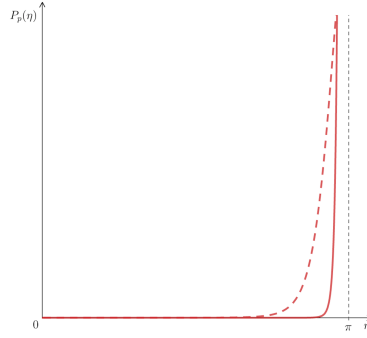


Figura 6: plot di (4.12) in rosso tratteggiato (con parametro  $p/p_0 = 2$ ) e rosso continuo (con parametro  $p/p_0 = 10$ ). Nel dominio  $p > p_0$  con l'aumentare di  $p$  si vede che la curva diventa più stretta verso  $\pi$ . Quindi la direzione più probabile di trovare l'elettrone libero in  $S'$  è  $\eta^* = \pi$ .

Nel sistema di riferimento del laboratorio  $S$  denotiamo  $\gamma$  l'angolo tra  $\mathbf{v}_n$  e  $\mathbf{v}_e$ , allora l'angolo  $\eta^* = \pi$  si traduce in:

$$\gamma^* = \pi/2 \quad (4.13)$$

possiamo vedere dalle trasformazioni dei angoli tra  $S$  e  $S'$ :

$$\tan \gamma = \frac{v'_e \sin \eta}{v'_e \cos \eta + v_n} \cdot \sqrt{1 - (v_n/c)^2} \quad (4.14)$$

facciamo il limite non relativistico  $v_n \ll c$ . Si ottiene dunque per l'espansione di Taylor:

$$\tan \gamma = \frac{v'_e \sin \eta}{v'_e \cos \eta + v_n} + o(v^2/c^2) \quad (4.15)$$

La probabilità è massima in  $S'$  quando:

$$\begin{cases} v'_e = v_n \\ \eta^* = \pi \end{cases} \quad (4.16)$$

consideriamo che  $\gamma \in (0, \pi)$  e inseriamo (4.16) in (4.15) da cui si ottiene  $\gamma^* = \pi/2$ . Ci aspettiamo di trovare l'elettrone in moto e dunque l'angolo preferito nel sistema del laboratorio è  $\gamma = \pi/2$ . Questa informazione ci dice che se sappiamo la direzione del nucleo dopo la ionizzazione, ci aspettiamo di trovare l'elettrone a  $\pi/2$  dal nucleo.

## 5 Scattering elastico di DM sul nucleo atomico

Nella sezione dell'effetto Migdal, abbiamo ottenuto una condizione sulla velocità del nucleo che deve istantaneamente avere per raggiungere la ionizzazione dell'atomo. Adesso guardiamo le condizioni iniziali per la particella DM che deve avere per riuscire a fare un urto sufficientemente forte per ionizzare l'atomo.

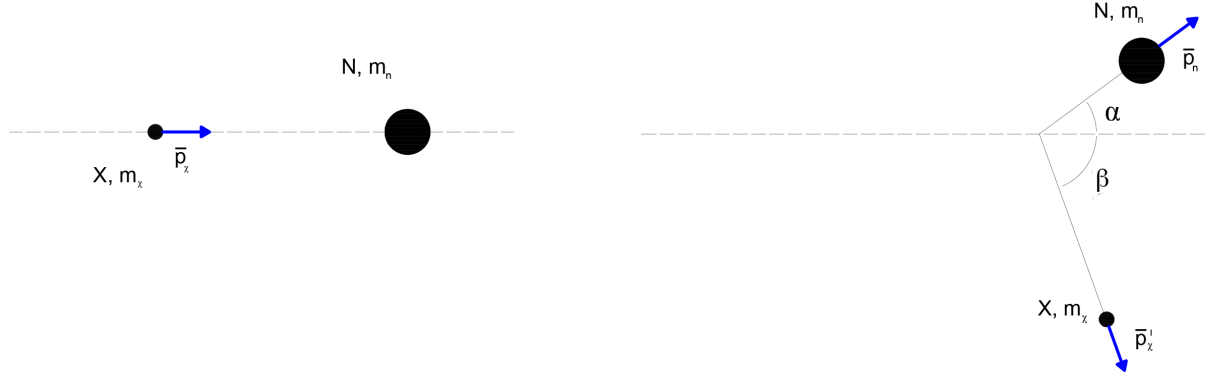


Figura 7: Schema di scattering elastico sul nucleo atomico;

Denotiamo:

$m_\chi$  massa di DM;

$m_n$  massa del nucleo;

$v_\chi$  velocità della DM particella prima del urto;

$v'_\chi$  velocità della DM particella dopo l'urto;

$v_n$  velocità del nucleo dopo l'urto;

$\alpha$  l'angolo tra  $\mathbf{p}_\chi$  e  $\mathbf{p}_n$ ;

$\beta$  l'angolo tra  $\mathbf{p}_n$  e  $\mathbf{p}'_\chi$ ;

Consideriamo il nucleo inizialmente fermo. Per la conservazione del impulso e energia vale rispettivamente:

$$\begin{cases} \mathbf{p}_\chi = \mathbf{p}'_\chi + \mathbf{p}_n \\ \frac{(p_\chi)^2}{2m_\chi} = \frac{(p'_\chi)^2}{2m_\chi} + \frac{(p_n)^2}{2m_n} \end{cases} \quad (5.1)$$

Da cui si ottengono due soluzioni:

$$v_n = \begin{cases} 2v_\chi \cos \alpha \cdot \frac{m_\chi}{m_\chi + m_n} \\ 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Siamo interessati solo alla soluzione non nulla. Imponiamo la condizione ( $m_\chi \ll m_n$ ) e ( $m_\chi \gg m_n$ ) del range che ipotizziamo per la massa della DM particella. In seguito vale per l'espansione di Taylor:

$$v_n = \begin{cases} \frac{2m_\chi}{m_n} \cdot v_\chi \cos \alpha + o((m_\chi/m_n)^2) & \text{se } m_\chi \ll m_n \\ 2v_\chi \cos \alpha + o(m_n/m_\chi) & \text{se } m_\chi \gg m_n \end{cases} \quad (5.3)$$

Il massimo impulso che può ricevere il nucleo è nel caso quando la DM particella ha impulso finale nella stessa direzione ma con verso opposto e dunque la velocità vale:

$$v_n = \begin{cases} \frac{2m_\chi}{m_n} \cdot v_\chi & \text{se } m_\chi \ll m_n \\ 2v_\chi & \text{se } m_\chi \gg m_n \end{cases} \quad (5.4)$$

Imponiamo (4.5) e otteniamo che per il massimo impulso trasferito dalla particella DM al nucleo, le condizioni iniziali della velocità della particella DM per ionizzare l'atomo sono:

$$v_\chi \gg \begin{cases} \frac{m_n}{m_\chi} \frac{\hbar}{2m_e a} & \text{se } m_\chi \ll m_n \\ \frac{\hbar}{2m_e a} & \text{se } m_\chi \gg m_n \end{cases} \quad (5.5)$$

## 6 Conclusioni

In questa dissertazione abbiamo approfondito le perturbazioni istantanee piccole e grandi del potenziale nella Hamiltoniana in meccanica quantistica per potere esaminare le probabilità di transizioni in stati finali. Questa analisi l'abbiamo applicata al vecchio problema proposto da A.B.Migdal nel 1939 che studiò il comportamento di un atomo in un istante in cui subisce una scossa di velocità  $\mathbf{v}_n$ . In questo caso il cambio di velocità del nucleo viene causato dal rinculo dovuto dall'urto di una particella di DM sul nucleo fermo. Si è ottenuto che la direzione della velocità dell'elettrone risulta correlata con quella della DM incidente. L'angolo tra le due velocità risulta essere  $\gamma^* = \pi/2$  (Figura 8).

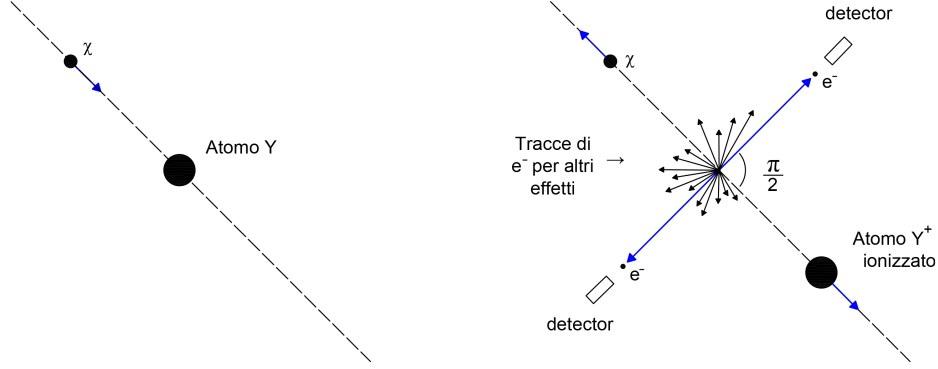


Figura 8: Schema di dark matter particella che ionizza un atomo in laboratorio e la ricerca dell'elettrone ionizzato a  $\gamma^* = \pi/2$ ;

Grazie a questa correlazione angolare in un esperimento si potrebbe studiare la distribuzione in angolo degli elettroni emessi. Un eccesso a  $\gamma^* = \pi/2$  indicherebbe la presenza di materia oscura. In (5.5) abbiamo ottenuto la condizione necessaria sulla velocità della particella incidente affinché si verifichi ionizzazione. Questa velocità deve essere dell'ordine di:

$$v_\chi \gg \begin{cases} \frac{m_n}{m_\chi} \cdot 10^6 m/s & \text{se } m_\chi \ll m_n \\ 10^6 m/s & \text{se } m_\chi \gg m_n \end{cases} \quad (6.1)$$

Nella discussione del flusso di DM particelle incidenti sulla Terra, abbiamo ottenuto che le velocità con cui incidono queste particelle è dell'ordine di  $v_{DM} \sim 10^5 m/s$ . Quindi con un esperimento di questo tipo non sarebbe possibile osservare alcuna ionizzazione di un atomo fermo sulla Terra.

## Riferimenti bibliografici

- [1] G. Bertone, D. Hooper e J. Silk, *Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints*, *Phys. Rept.* **405** (2005)
- [2] M. Ibe, W. Nakano, Y. Shoji e K. Suzuki, *Migdal effect in dark matter direct detection experiments* (2018) [https://doi.org/10.1007/JHEP03\(2018\)194](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2018)194)
- [3] A. Migdal, *Ionizatsiya atomov pri  $\alpha$ - i  $\beta$ -raspade*, *ZhETF*, 11, 207-212 (1941) [A. Migdal, *Ionization of atoms accompanying  $\alpha$ - and  $\beta$ -decay*, *J. Phys. Acad. Sci. USSR* 4(1-6), 449-453 (1941)].