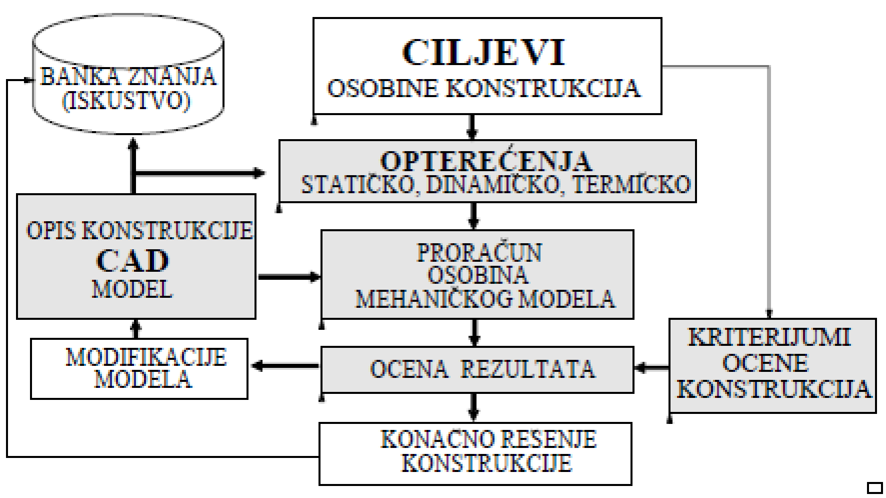
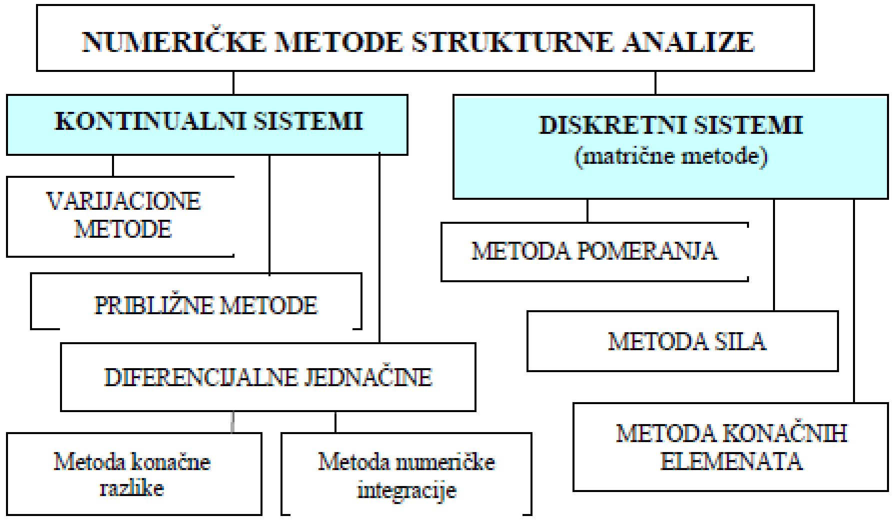
1. UVOD

METODAMA ANALIZE se u fazi projektovanja mašina i opreme traže odgovori o njihovim svojstvima otpornosti, pouzdanosti, nosivosti, kinematskom ponašanju, dinamičkom odgovoru. Skup svih zahvata traženja odgovora o svojstvima bazi fizičke forme, postavljaju se uprošćeni mehanički modeli. Za te uprošćene mehaničke modele postavljaju složenog sistema – strukture, predstavlja **strukturnu analizu.** Na bazi kriterijuma koje struktura mora da zadovolji u pogledu mehaničkih i funkcionalnih karakteristika, analizom se ocenjuje posmatrana struktura i traže njeni nedostaci. Očigledno, metode analize usavršavaju strukturu po sistemu "korak po korak" i one kao takve i danas zadovoljavaju konstruktorske zahteve. Primena MATRIČNIH METODA za analizu struktura, rešila je zahteve sistematskog predstavljanja kontinuuma, uvodjenja polja spoljašnjih koncentrisanih sila, polja površinskih opterećenja kakva se javljaju kod brodskih struktura, aviostruktura, struktura vozila i polja temperatura svojstvena za raketne konstrukcije, toplotne turbine i nuklearne reaktore. Pogodnost matričnih metoda analize pokazala se kod rešavanja zadataka plastičnosti, puzanja i ojačanja elemenata, kao i kod uvodjenja istorije prethodnog opterećenja strukture. Važan elemenat primene metoda analize, je BRZINA IZVODJENJA PROCEDURA, čime se u ranom periodu razvoja strukture, identifikuju posmatrane (prognozirane) osobine. Shodno tome, vrši se korekcija do postizanja zadovoljavajućih osobina. Dovoljnim brzinom analiza, moguće je istovremeno razvijati više konstruktivnih varijanti i odabrati najpovoljnije rešenje. Ideja analize dakle govori da se nizom iteracija dolazi do rešenja. Taj opšti koncept definisan je na slici 1.1. Prema ovom konceptu, na bazi postavljenih ciljeva, formiraju se kriterijumi za ocenu svojstava strukture. Pri tome je iskustvo osnovna sprega izvedenih strukture i očekivanih osobina traženog rešenja. Sama analiza (prikazana zatamnjenim poljima), izvodi se izabranom teorijskom metodom. Na osnovu dobijenih rešenja ocenjuje se polazno predpostavljeno rešenje. Ocena dobijenih osobina vodi modifikaciji strukture delimično ili u celosti. Nakon korekcije, obnavlja se procedura analize modela i analize osobina, dok postavljeni ciljevi ne budu dostignuti.



Slika 1.1 *Koncept korišćenja metoda analize u projektovanju*

METODE STRUKTURNE ANALIZE , dele se na **analitičke** i **numeričke**. Primena analitičkih metoda je ograničena na jednostavne slučajeve za koje je moguće naći rešenje u zatvorenom obliku. Rešenja se kod analitičkih metoda traže preko redova ili specijalnih funkcija. Realne strukture se u praksi tretiraju numeričkim metodama i one se mogu odnositi na kontinualne i diskretne sisteme. Slika 1.2 pokazuje klasifikaciju danas aktuelnih numeričkih metoda strukturne analize.



Slika 1.2 *Pregled numeričkih metoda za analizu struktura*

- METODA KONAČNIH RAZLIKA je numerička metoda pogodna za rešavanje raznovrsnih zadataka. Bazira se na matematičkoj diskretizaciji diferencijalnih jednačina prevodjenjem na jednačine sa konačnim razlikama. Uspešno se može primeniti na tankozidim nosačima, na problemima plastično deformabilnih konstrukcija. Efikasnost metode se smanjuje sa složenošću unutrašnjih veza posmatranog mehaničkog sistema.
- METODA NUMERIČKOG INTEGRISANJA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA se koristi široko u mnogim zadacima. Metoda se svodi na rešavanje zadatka *Cauchy*-ja s obzirom na postojanje dobrih matematičkih procedura za integraciju sistema diferencijalnih jednačina. Za rešavanje se dosta dobro mogu upotrebiti metoda *Euler*-a, metoda *Runge-Kutta* i ruge.
- METODA KONAČNIH ELEMENATA - (*Finite Element Method* - FEM), koristi različite tipove varijacionih metoda, rimenjenih na diskretnom modelu za strukturnu analizu kontinuuma. Kontinuum se diskretizuje konačnim brojem elemenata i stepeni slobode kretanja. Uspeh primene metode je u kvalitetu izabranih aproksimacija konačnih elemenata postavljenog modela. Pogodnost metode je u vrednostima varijacione metode. Zadatak se opisuje sistemom diferencijalnih jednačina koje se formiraju iz uslova minimuma funkcionala konstrukcije. Ovaj zadatak je rutinski, a rešavanje sistema diferencijalnih jednačina ide matričnim metodama, vrlo pogodnim za tretman računarom. Tačnost izračunavanja je definisana kvalitetom izabranih funkcija oblika (interpolacionih funkcija), mrežom i tipom konačnih elemenata. Zavisno od izabranih nezavisno-promenljivih veličina i načina formiranja jednačina, postoje četiri osnovne metode: metoda pomeranja (metoda deformacija), metoda sila, mešovita i hibridna metoda. Formiranje jednačina se izvodi primenom osnovnih zakona mehanike. Tako, recimo, kod metode pomeranja koristi se princip o minimumu funkcionala (pune energije sistema). Kod metode sile, koristi se princip o minimumu komplementarne energije sistema. Mešovita metoda koristi princip *Vašic*-a i *Reissner-Hellinger*-a.

- METODA GRANIČNIH ELEMENATA je specifična metoda prelaza iz sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina i zadatih graničnih uslova ka njihovoj integralnoj analogiji na granici oblasti koju posmatramo. Postupak se sastoji u diskretizovanju granične oblasti strukture graničnim elementima, primenom različitih vrsta aproksimacija geometrije granica i graničnih funkcija. Iz integralnih odnosa, diskretnom analogijom, formira se sistem algebarskih jednačina. Rešavanjem sistema dolazi se do traženih veličina na granicama oblasti.
- SLOŽENE METODE PRORAČUNA STRUKTURA. Inženjerski zahtevi proračuna složenih struktura, uslovili su razvoj metode konačnih elemenata. Naime, pokazalo se da je moguće grupisanje elemenata u velike makro-elemente da bi se analizirale osobine na njihovim granicama. Ova metoda poznata je kao METODA SUPER-ELEMENATA (MSE). Metoda se koristi naročito u aviogradnji, brodogradnji gde super-elementi predstavljaju sekcije struktura koje se ponavljaju. Prednost metode je što isključuje unutrašnje nezavisno - promenljive, pa preostaju samo nepoznate na granicama superelemenata. Na ovaj način je značajno smanjen računski obim problema te je realizacija brža i uspešnija. Pri tome se formiraju algebarski sistemi koji se rešavaju metodama *Gauss*-a, *Holeckog*, *Crout*-a, frontalnom metodom i drugim iteracionim metodama. U grupu metoda za statičku NELINEARNU analizu struktura spadaju metoda prostih iteracija, ***Newton-Raphson*** metoda, metoda tangentne krutosti i druge. Modeliranje često uslovljava aproksimacije problema. Aproksimacija posmatranih parametara kod nelinearnog problema, može biti izvršena razvijanjem u *Taylor*-ov red. Ukoliko se izvrši linearizacija, zadatak se dalje može tretirati metodama linearnog programiranja. To je koncept sekvencijalnog linearnog programiranja (SLP). U okviru metoda za **analizu struktura** pri nestacionarnim DINAMIČKIM DEJSTVIMA, primenjuju se metoda centralnih razlika prvog i trećeg reda (metoda *Houbolt*-a), metoda *Newmark*a, *Wilson*-ova teta metoda i druge. Savremene metode efikasno se primenjuju kroz profesionalne PROGRAMSKE PAKETE. Softver je modularnog tipa i svaka kategorija zadatka je nezavisna programska celina. Tako se zadaci analize rešavaju programskim modulom – solverom, zadaci geometrijskog modeliranja – modulom preprocesora, zadaci prikaza rezultata – postprocesorom, zadaci generisanja konačnih elemenata – modelerom mreže, zadaci optimizacije – modulom optimizacije, zadaci dinamike – odgovarajućim modulom dinamičke analize itd.

2. OSNOVE METODE KONAČNIH ELEMENATA

Metoda konačnih elemenata (MKE) spada u savremene metode numeričke analize. Njena primena prvo je počela u oblasti proračuna inženjerskih konstrukcija. Osnovna ideja o tzv. fizičkoj diskretizaciji kontinuma, na kojoj se zasniva MKE je vrlo stara, otprilike koliko i ljudsko nastojanje da se teško rešivi problemi zamene jednostavnijim, za koje se lakše nalaze rešenja.

Kao primer za ilustraciju može se navesti problem određivanja opsega ili površine kruga, na osnovu njegove podele na manje delove pravilnog oblika. Grčki matematičar i fizičar Arhimed, računao je broj π, odnosno granice između kojih se nalazi numerička vrednost ovog broja na taj način što je konturu kruga aproksimirao upisanim odnosno opisanim poligonom sa konačnim brojem stranica. Sa povećanjem broja stranica poligona, odnosno sa smanjivanjem njihove dužine, smanjivala se i razlika između granica u kojima se nalazi broj π, a povećavala tačnost njegove numeričke vrednosti. Otprilike u isto vreme, na sličan način, u starom Egiptu je računata zapremina piramide i površina sfere, a u Kini je dat dokaz poznate Pitagorine teoreme. Sa ovim prvim jednostavnim primerima, otvorena su neka fundamentalna pitanja, kao što su: tačnost rešenja, gornja i donja granica aproksimacije, monotonost i brzina konvergencije i dr., koja su i danas u MKE veoma aktuelna i značajna sa teoretskog i praktičnog stanovišta.

Razvoj metode konačnih elemenata počeo je polovinom prošlog veka. U početnoj fazi on se odvijao kroz dva međusobno nezavisna pristupa, prvo inženjerski, a odmah zatim matematički. Složene prostorne konstrukcije, u inženjerskim proračunima zamenjivane su diskretnim sistemima koji su se sastojali od štapova i koji su računati po poznatim postupcima statike linijskih nosača. Od strane matematičara, tražena su približna rešenja određenih graničnih zadataka pomoću diskretnih modela uz primenu varijacionih postupaka. Ova dva prilaza, inženjerski i matematički, kasnije su objedinjeni, što je bilo od ogromnog značaja za dalji brži razvoj i široku primenu MKE.

2.1 **Osnove na kojima se zasniva MKE**

Metoda konačnih elemenata spada u metode diskretne analize. Za razliku od ostalih numeričkih metoda, koje se zasnivaju na matematičkoj diskretizaciji jednačina graničnih problema, MKE se zasniva na fizičkoj diskretizaciji razmatranog područja. Umesto elementa diferencijalno malih dimenzija, osnovu za sva proučavanja predstavlja deo područja konačnih dimenzija, manje područje ili konačni element. Zbog toga su osnovne jednačine pomoću kojih se opisuje stanje u pojedinim elementima, a pomoću kojih se formuliše i problem u celini, umesto diferencijalnih ili integralnih, obične algebarske.

Sa stanovišta fizičke interpretacije, to znači da se razmatrano područje, kao kontinuum sa beskonačno mnogo stepeni slobode, zamenjuje diskretnim modelom međusobno povezanih konačnih elemenata, sa konačnim brojem stepeni slobode. S obzirom na to da je broj diskretnih modela za jedan granični problem neograničeno veliki, osnovni zadatak je da se izabere onaj model koji najbolje aproksimira odgovarajući granični problem.

2.2 Algoritamski koncepti MKE

Analiza i rešavanje problema mehanike kontinuma po MKE uvek se svode na tzv. proces korak po korak, što je od ogromnog praktičnog značaja za primenu računara u efektivnom proračunu. U tom procesu koji se može prikazati kao jednostavan algoritam, izdvaja se sledećih šest najvažnijih koraka:

1. diskretizacija kontinuma

2. izbor interpolacionih funkcija

3. računanje karakteristika elemenata

4. formiranje jednačina za mrežu konačnih elemenata

5. rešavanje sistema jednačina

6. proračun potrebnih uticaja

Od navedenih šest koraka, prva tri su naročito važna. Način diskretizacije, izbor oblika elemenata, kao i ukupnog broja elemenata, zavise od prirode problema koji se rešava i potrebne tačnosti traženog rešenja. Pored broja i oblika elemenata važan je i izbor čvorova, osnovnih nepoznatih u njima i interpolacionih funkcija. Pomoću interpolacionih funkcija se definiše polje promenjivih u svakom elementu. Od njihovog izbora neposredno zavisi i kontinuitet na granicama između pojedinih elemenata, a samim tim i tačnost aproksimacije. Promenjive u elementu mogu biti skalarne, vektorske ili tenzorske veličine.

Karakteristike pojedinih elemenata određuju se nezavisno od mreže elemenata kao celine. Matrica krutosti se formira autonomno za pojedine elemente, a potom na osnovu njih, sasvim jednostavno, formira se matrica za sistem u celini. S obzirom na to da je geometrija elemenata po pravilu jednostavna, to praktično znači da se kompleksan problem razbija na niz jednostavnih.
Posljednja tri koraka, iako su za praktične proračune od velikog značaja, danas spadaju u okvire rutinskog posla, koji je prilagođen automatskom radu računara.

2.3 Opša teorija MKE

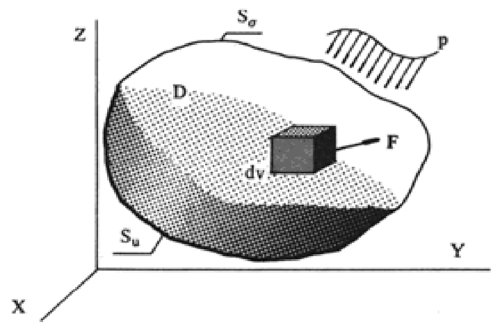
Osnovni princip na kojem se zasniva MKE, sastoji se u podeli razmatranog područja na konačan broj manjih područja, odnosno elemenata, tako da se analizom pojedinih elemenata, uz pretpostavku o njihovoj međusobnoj povezanosti, analizira celina. Ovaj pristup u analizi, gde se od posebnog ide ka opštem, od individualnog ka univerzalnom, u kome se analizom delova zaključuje o celini, je poznati induktivni pristup, koji se primenjuje u mnogim područjima nauke. Kod inženjerskih i drugih problema kod kojih se opšta rešenja ne mogu dobiti u zatvorenom obliku induktivni pristup je od posebnog značaja.

U okviru MKE, razmatrano područje zamenjuje se velikim brojem malih delova konačnih dimenzija, koji su međusobno povezani u određenom broju tačaka. Na ovaj način, područje sa beskonačno mnogo stepeni slobode, zamenjuje se diskretnim sistemom sa konačnim brojem stepeni slobode i analizira metodama diskretne analize. U matematičkoj formulaciji, ovo znači da se razmatrani problem prevodi iz područja analize u područje algebre. MKE se može shvatiti kao metoda numeričke analize o okviru koje se definiše način prevođenja kontinuiranih fizičkih sistema u diskretne, odnosno način formiranja sistema algebarskih jednačina pomoću kojih se aproksimira određeni konturni zadatak.

Na slici 2.1 prikazano je područje D elastičnog kontinuma, koji je ograničen konturom S, tako da su na delu konture S_σ zadati konturni uslovi po silama, a na delu S_u konturni uslovi po pomeranjima. U području D deluju zapreminske sile F (F_x, F_y, F_z), a na konturi S_σ površinske sile p (p_x, p_y, p_z).

Za pomeranja u području D se pretpostavlja da su neprekidne funkcije koordinata, odnosno:

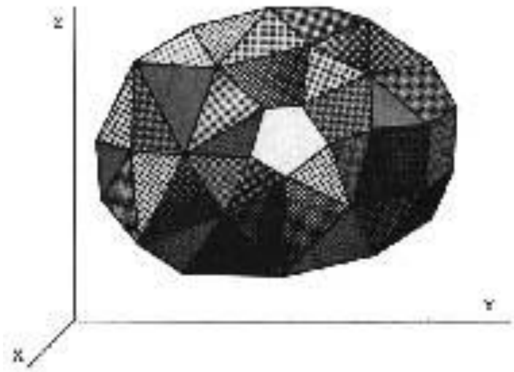
$u = u(x, y, z)$, $u = u(x, y, z)$, $u = u(x, y, z)$ 2.1



Slika 2.1. Područje D elastičnog kontinuuma

Zadatak teorije elastičnosti, kada se problem formuliše po pomeranjima, odnosno po metodi deformacije, sastoji se u određivanju funkcija pomeranja, koje zadovoljavaju uslove ravnoteže i uslove na konturi, odnosno diferencijalne jednačine i konturne uslove. Granični zadatak koji je formulisan na ovaj način, u kinematičkom smislu, predstavlja sistem s beskonačnim brojem stepeni slobode. Zadatak je da se odredi rešenje ovog graničnog problema pomoću odgovarajućeg diskretnog sistema sa konačnim brojem stepeni slobode, odnosno kao rešenje odgovarajućeg sistema algebarskih jednačina

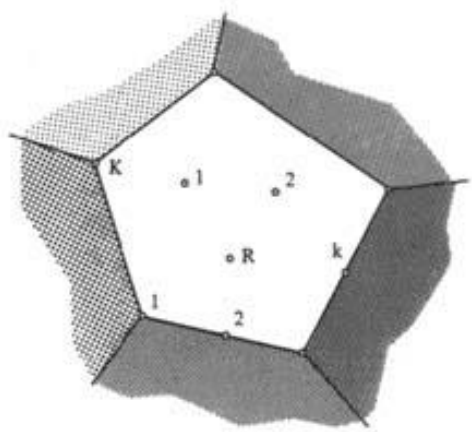
Razmatrano područje D deli se na konačan broj malih delova – konačnih elemenata, koji su međusobno povezani u određenom broju tačaka, koje se nazivaju čvorovi (Slika 2.2).



Slika 2.2 Područje D podeljeno na konačan broj elemenata

Ako se pretpostavi da se pomeranja u bilo kojoj tački konačnog elementa mogu, na određeni način, prikazati u zavisnosti od pomeranja u čvorovima, onda se problem određivanja polja pomeranja u području D svodi na određivanje pomeranja u čvorovima, a broj pomeranja u čvorovima je konačan. Pomeranja u čvorovima u području D i na konturi S_σ određuju se iz sistema jednačina, koji predstavljaju uslove ravnoteže u čvorovima, uslove kontinuiteta u čvorovima i konturnih uslova na konturi S_σ.

Na slici 2.3 prikazan je konačni element, koji je izdvojen iz sistema elemenata sa slike 2.2. Zbog jednostavnosti, element je prikazan kao dvodimenzionalni, ograničen sa pravolinijskim konturama. Ovim se ne želi suziti opseg razmatranja, koja važe za jednodimenzionalne i višedimenzionalne elemente sa ravnim i krivim konturama.



Slika 2.3 Konačni element izdvojen iz sastava elemenata

Na elementu je usvojen određeni broj tačaka na konturi, koje se nazivaju čvorne tačke ili čvorovi. Čvorovi su obeleženi brojevima 1,2, … K, gde je K ukupan broj čvorova. Ovi čvorovi se nazivaju spoljašnji čvorovi, da bi se razlikovali od čvorova koji mogu biti usvojeni u elementu i koji se nazivaju unutrašnji čvorovi. Ukupan broj unutrašnjih čvorova obeležen je sa R.

U čvorovima elementa kao osnovne nepoznate veličine, usvajaju se parametri pomeranja. Pod pomeranjima, ovde se podrazumevaju pomeranja u generalnom smislu, tj. komponente pomeranja, njihove kombinacije i sl. Broj parametara pomeranja u čvorovima zavisi od prirode razmatranog problema. Npr. kod trodimenzionalnih problema u svakom čvoru, za parametre pomeranja se usvajaju po tri komponente pomeranja (u, v, w) kod dvodimenzionalnih po dve (u, v), kod savijanja ploča najmanje po tri (w, $\theta_x=w_{,y}$, $\theta_y=w_{,x}$) itd. Parametri pomeranja u čvorovima često se nazivaju stepeni slobode, po analogiji sa značenjem koje ove veličine imaju u statici linijskih sistema. Ako je u svakom čvoru usvojeno po S parametara pomeranja, element ima SxK spoljašnjih stepeni slobode i SxR unutrašnjih stepeni slobode.

Suština aproksimacije kontinuma po MKE, sastoji se u sledećem:

1. Razmatrano područje kontinuuma, pomoću zamišljenih linija ili površina, deli se na određeni broj manjih područja konačnih dimenzija. Pojedina manja područja se nazivaju konačni elementi, a njihov skup za celo područje sistem ili mreža konačnih elemenata.

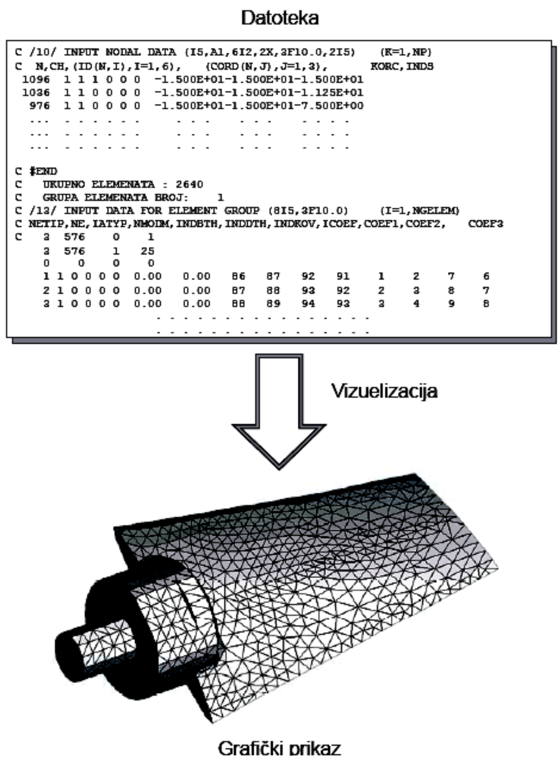
2. Pretpostavlja se da su konačni elementi međusobno povezani u konačnom broju tačaka, koje se usvajaju na konturi elementa. Te tačke se nazivaju čvorne tačke ili čvorovi.

3. Stanje u svakom konačnom elementu (npr. polje pomeranja, deformacija, napon, prostiranje temperature i sl.) opisuje se pomoću interpolacionih funkcija i konačnog broja parametara u čvorovima koji predstavljaju osnovne nepoznate veličine u MKE.

4. Za analizu i proračun sistema konačnih elemenata važe svi principi i postupci koji važe za klasične diskretne sisteme.

Osnovna ideja analize metodom konačnih elemenata je modeliranje problema podrazumevajući da je prostorni domen problema podeljen – diskretizovan na poddomene na koje se primenjuju opšta znanja i iskustva iz mehanike kontinuma i numeričke matematike. Poddomeni o kojima je reč terminološki se označavaju kao konačni elementi. Analiza sistema spregnutih konačnih elemenata, dobijenih diskretizacijom kontinuma, omogućava numeričku simulaciju odziva kontinuma na zadate pobude. Fizičke veličine koje su obuhvaćene modelom dobijaju se u diskretnom obliku, tj. u tačkama koje proizilaze iz diskretizacije. Ove tačke se zovu čvorne tačke, ili jednostavno čvorovi. Najčešće korišćeni konačni elementi su 2D i 3D konačni elementi kontinuma. Modeliranjem realnog objekta uz pomoć ovih elemenata, zatim definisanjem ograničenja i opterećenja, kao i svih potrebnih mehaničkih osobina materijala od koga su sačinjeni, i konačno rešavanjem problema numeričkim metodama, dovodi nas do željenih rezultata. Da bi se došlo do konkretnih vrednosti za čvorove, odnosno da bi se oni na pravilan način definisali u prostoru, kao i da bi se odredila sva ograničenja i opterećenja, potrebno je posedovati softverski paket koji se bazira na vizuelnom pristupu.

Tokom čitavog procesa modeliranja potrebno je omogućiti korisniku da interaktivno kreira objekat, i da u svakom trenutku može da vidi prikaz elemenata. Kada se na ovaj način problem definiše, generiše se datoteka konačnih elemenata koja sadrži sve potrebne podatke za njegovo rešavanje (Slika 2.4). Kada se dobiju rezultati, odnosno fizičke veličine u diskretnom obliku, koje predstavljaju odziv kontinuma na zadate pobude (opterećenja), one se ponovo smeštaju u datoteke za postprocesiranje koje u sebi sadrže sve rezultate. Ovakve datoteke je potrebno vizuelizovati, tako da se prikaže i geometrija problema, ali i vrednosti datih fizičkih veličina u svim tačkama tela. Proces vizuelizacije je u opštem slučaju vrlo kompleksan proces čija složenost zavisi od zahteva krajnjeg korisnika. Moguće je napisati aplikaciju koja prikazuje samo osnovne elemente, dok se rezultati analiziraju nekim jednostavnim alatom (čak i običnim editorom teksta). Sa druge strane, može se zahtevati da se prikazuju i opterećenja, ograničenja, deformisana stanja, vektori pomeranja, brzina, gradijenti polja, kao i da je sve to moguće animirati. U aplikaciji se mogu naći i mnoge specijalizovane funkcije koje se koriste samo kod malog broja problema. Takođe je moguće da programski paket poseduje određene osobine otvorenog sistema, tako da se može koristiti i u nekim usko specijalizovanim problemima bez potrebe za prepravkama na samom programu. Međutim, bez obzira na složenost zahteva, sve ove aplikacije imaju neke zajedničke elemente.



Slika 2.4 Ulazna datoteka

2.4 Tipovi elemenata

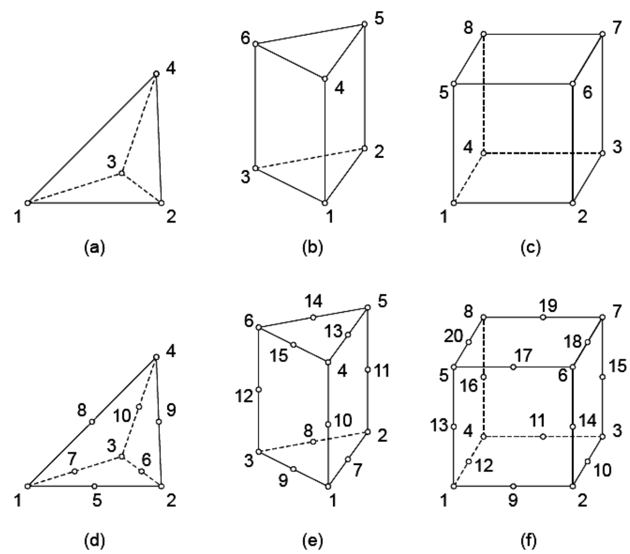
U narednom tekstu će biti opisana kolekcija elemenata koji se najčešće koriste za modeliranje objekata. Ova kolekcija se sastoji od različitih 2D i 3D elemenata, i otvorena je za dalju nadogradnju sa novim elementima. Najpre će biti izloženi 3D.

Trodimenzionalni elementi

Ovi konačni elementi se koriste za modeliranje trodimenzionalnih tela opšteg oblika (3D kontinuma). Element može imati različit broj čvorova – uobičajen je broj od 8 do 21. Ovakav elemenat se naziva osnovnim i ograničen je sa šest površi. Od ovakvog elementa se mogu formirati i drugi prostorni oblici, kao što su prizma, tetraedar ili četvorostrana piramida. Ovakvi elementi nastali poklapanjem nekih čvorova osnovnog elementa nazivaju se degenerisani 3D elementi. U aktuelnoj verziji programa podržani su sledeći elementi:

1. Tetraedar.
2. Tetraedar sa međučvorovima.
3. Prizma.
4. Prizma sa međučvorovima.
5. Osnovni 3D element.
6. Osnovni 3D element sa međučvorovima.

Na slici 2.5 dat je prikaz ovih elemenata i način na koji se definišu uz pomoć čvorova (elementi sa međučvorovima, u opštem slučaju imaju krivolinijske ivice).



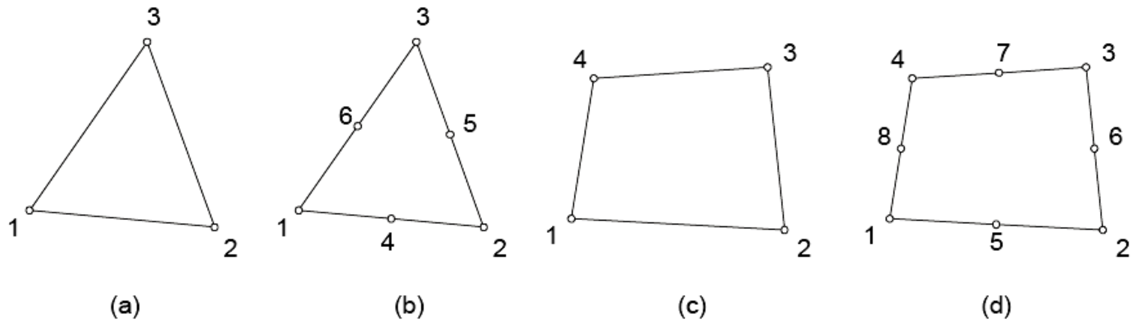
Slika 2.5 Tipovi trodimenzionalnih elemenata. (a) Tetraedar. (b) Prizma. (c) Osnovni 3D element (d) Tetraedar sa međučvorovima. (e) Prizma sa međučvorovima. (f) Osnovni 3D element .

Dvodimenzionalni elementi

U slučaju 2D elemenata, kao i kod 3D elemenata, postoji više vrsta, tako da oni čine familiju 2D konačnih elemenata za modeliranje kontinuma. Programom su podržani sledeći 2D elementi:

1. Trougao.
2. Trougao sa međučvorovima.

3. Četvorougao.
4. Četvorougao sa međučvorovima.
Na slici 2.6 dat je prikaz ovih elemenata i način na koji se definišu uz pomoć čvorova.



Slika 2.6 Tipovi dvodimenzionalnih elemenata. (a) Trougao. (b) Trougao sa međučvorovima. (c) Četvorougao. (d) Četvorougao sa međučvorovima.

2.5 Tipovi opterećenja

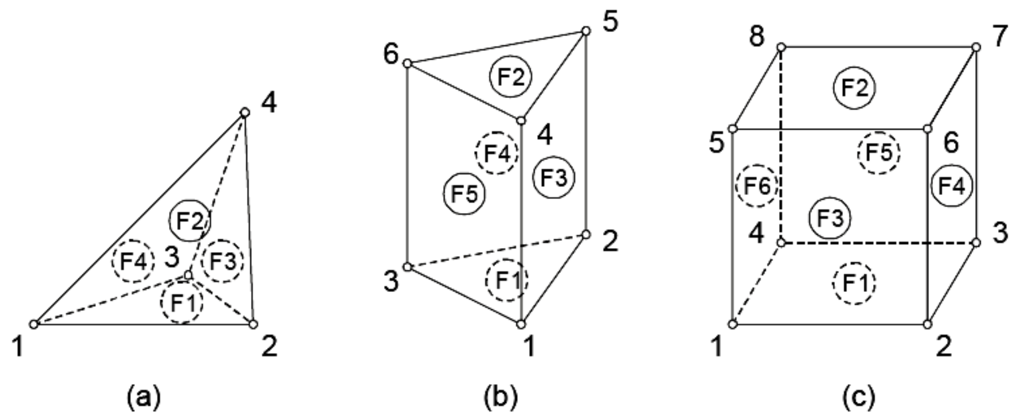
U rešavanju realnih problema, možemo se susresti sa više vrsta opterećenja. Opterećenja predstavljaju pobudu fizičkog sistema, i u inženjerskim problemima su to uglavnom sile, momenti, pritisak i sl. Opterećenja koja se najčešće mogu sresti u MKE mogu se podeliti u tri grupe:

1. Globalna opterećenja: a) Ubrzanje. b) Brzina. c) Temperatura.
2. Opterećenja u čvorovima: a) Sila/Moment. b) Pomeranje. c) Brzina. d) Temperatura. e) Izvor toplote (Toplotna energija/Jedinična zapremina). f) Toplotni fluks (Toplotna energija/Jedinična površina).
3. Opterećenja po elementima: a) Kontinualno. b) Pritisak. c) Temperatura. g) Izvor toplote (Toplotna energija/Jedinična zapremina). d) Toplotni fluks (Toplotna energija/Jedinična površina). e) Konvekcija. f) Radijacija. Sve tri vrste opterećenja se koriste za statičke/stacionarne, nelinearne i dinamičke/nestacionarne analize.

Globalna opterećenja se primenjuju na čitavo telo, i iz tog razloga se za jedan set opterećenja definišu samo jednom. Ovakva opterećenja se najčešće koriste da simuliraju uticaj gravitacije, ili da definišu temperaturu okoline i tela za termičke proračune. Opterećenja u čvorovima i opterećenja po elementima su uglavnom sile, momenti, pritisak itd. Najčešće se sve sile definišu u jednom setu, momenti u drugom i sl.

2.6 Opterećenja po elementima

U slučaju pritiska, potrebno je znati na koje strane elementa pritisak deluje. Iz tog razloga uvodi se numerisanje strana kao na slici 2.7.



Slika 2.7 Numerisanje strana kod trodimenzionalnih elemenata. (a) Tetraedar. (b) Prizma. (c) Osnovni 3D element.

2.7 Ograničenja

Onemogućavanje pomeranja po nekom od šest stepeni slobobe: translacija duž X, Y i Z, kao i rotacija oko X, Y i Z osa, naziva se ograničenje. Ograničenja se dele na globalna (ona koja važe za svaki čvor mreže konačnih elemenata) i na lokalna ograničenja u određenim čvorovima. Na ovaj način se modeliraju slučajevi uklještenja, oslanjanja, razne veze između tela i sl. Ograničenja se mogu definisati u globalnom koordinatnom sistemu, gde važe u pravcima osa globalnog koordinatnog sistema, ali i u lokalnim koordinatnim sistemima. Na ovaj način se olakšava modeliranje realnih uslova, kao i rešavanje simetričnih problema posmatranjem samo nekih njihovih delova. Kada ne bi bilo moguće definisati ograničenja u lokalnim koordinatnim sistemima, definisanje svih ograničenja u globalnom koordinatnom sistemu predstavljalo bi veliki problem. Često postoji mogućnost definisanja graničnih uslova uz pomoć jednačina, tako da se pomeranje u nekom pravcu ne izjednačava sa nulom, već sa nekom vrednošću dobijenom iz jednačine. Uz pomoć ovakvih ograničenja još se više približavamo realnim uslovima.

2.8 Postprocesiranje

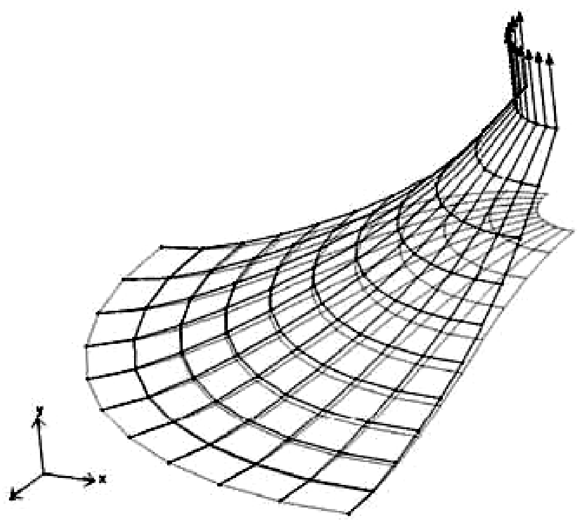
Postprocesiranje predstavlja proces vizuelizacije dobijenih rezultata. Prvi korak u postprocesiranju predstavlja dobavljanje rezultata. Rezultati su smešteni u datotekama koje predstavljaju izlaz iz solvera-a, odnosno programa koji na osnovu definicije problema izračunava vrednosti fizičkih veličina u čvorovima i elementima mreže konačnih elemenata. Najčešće se prikazivanje rezultata vrši na jedan od sledeća tri načina:

1. Deformacijom tela.
2. Konturnim prikazom.
3. XY graficima.

Prva dva načina se mogu kombinovati u jednom prikazu, tako da se telo može posmatrati kao deformisano, sa konturnim prikazom, recimo, napona. Pored ova tri načina, koji predstavljaju grafičko postprocesiranje, često je moguće i formiranje izveštaja koji predstavljaju formatiran tekstualni izlaz spreman za štampanje.

Deformisani model

Deformisani model predstavlja prikaz tela u deformisanom stanju. Postoje dva načina za određivanje deformacija ovog modela: stvarne deformacije i deformacije prema nekoj proizvoljnoj veličini. U slučaju stvarnih deformacija, za komponente pomeranja se uzimaju deformacije duž X, Y i Z osa globalnog koordinatnog sistema. Na ovaj način se dobija izgled deformisanog tela, gde deformacije mogu biti po potrebi skalirane. Jedan ovakav prikaz je dat na slici 2.8.

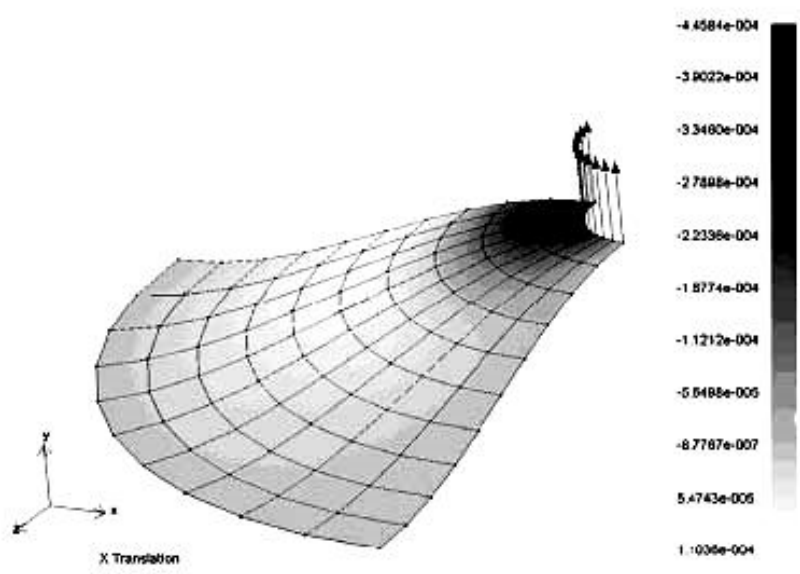


Slika 2.8 Prikaz deformisanog objekta.

Drugi način prikazivanja se dobija tako što se objekat deformiše duž neke od osa globalnog koordinatnog sistema srazmerno vrednosti neke fizičke veličine (napon, temperatura i sl.). Na ovaj način se dobija objekat koji nije sličan stvarnom definisanom telu, ali ovakav način deformisanja može imati određene primene.

Konturni prikaz

Konturni prikaz omogućuje vizuelizaciju određene fizičke veličine, na taj način što se određenim vrednostima dodeljuju odgovarajuće boje. Ako se znaju vrednosti neke veličine u čvorovima, na površini elementa između čvorova boje se interpoliraju. Najčešće se koristi linearna, ali je moguće dobiti i druge oblike interpolacije. Jedan primer konturnog prikaza dat je na slici 2.9.



Slika 2.9 Konturni prikaz pomeranja u pravcu X ose.

XY grafici

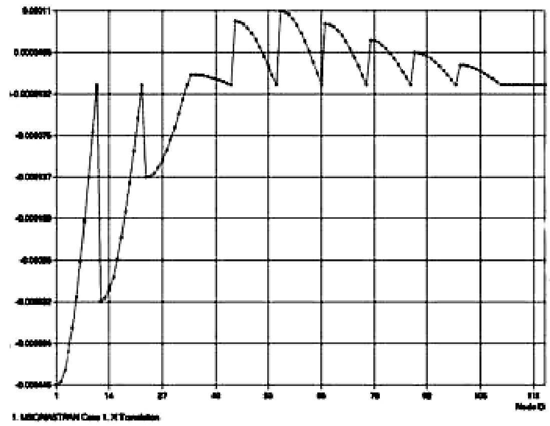
Pomoću ovakvog načina postprocesiranja moguće je prikazati razne zavisnosti između čvorova i vrednosti fizičkih veličina u njima. Najčešće se ovi grafici konstruišu kao:

a) Zavisnost vrednosti fizičke veličine od identifikacionog broja čvora.

b) Zavisnost vrednosti fizičke veličine od pozicije čvorova u prostoru.

c) Zavisnost vrednosti fizičke veličine od vremena (nestacionarna analiza),

ili kao grafici koji ne služe za postprocesiranje, a koji prikazuju grafik određene funkcije iskorišćene ili za definisanje opterećenja, ili ograničenja i sl. Na slici 2.10 dat je XY grafik koji odgovara rezultatu prikazanom na slici 2.9.



Slika 2.10 Zavisnost X pomeranja od konturnih čvorova.

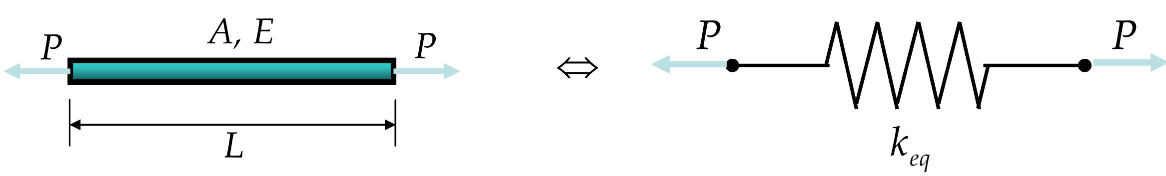
2.9 Primena animacije u postprocesiranju

Prva dva načina generisanja prikaza, deformisanim modelom i konturnim prikazom rezultata, se mogu kombinovati. Dakle, moguće je istovremeno prikazivati deformisano telo i vrednosti, recimo napona, u njegovim tačkama. Takođe, ovi prikazi se mogu i animirati, u želji da se opiše način na koji telo dolazi u krajnji položaj i kako se pri tome menjaju vrednosti određenih fizičkih veličina. Animacija se može zasnivati na dva principa. Prvi princip predstavlja generisanje stanja između početnog (nenapregnutog) i krajnjeg (deformisanog) stanja. Dakle, na osnovu ove dve konfiguracije, proračunavaju se međustanja (linearno) i dobija se određen broj koraka animacije. Drugi princip se može iskoristiti ukoliko postoji niz rezultata u više konfiguracija, dakle za razne vrednosti opterećenja ili vremena. Ovako se dobija animacija koja se zasniva na analizi u više koraka, koja je bliža realnom načinu dovođenja tela u krajnju konfiguraciju.

2.10 Konačni element 1D - prezentacija primene teorije MKE

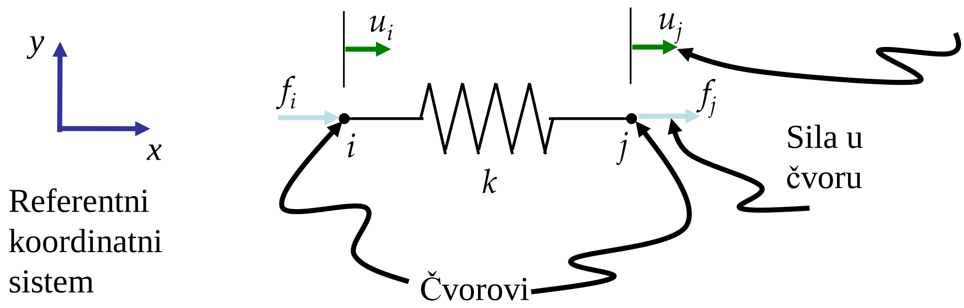
Definisanje krutosti 1-D elementa

Homogeni 1-D element (cev) dužine *L*, poprečnog preseka *A,* i modula elastičnosti *E* može se modelirati kao opruga krutosti $k_{eq} = \dfrac{AE}{L}$.



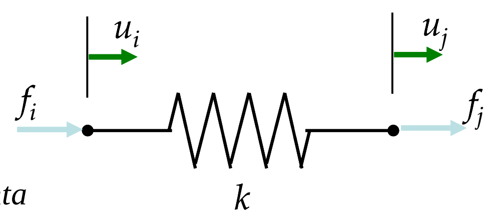
Čvorna pomeranja, Sile

Pomeranja dva kraja opruge, nazvana čvorovima, obeležena kao u_i i u_j, zovu se ***čvorna pomeranja,*** a sile u čvorovima ***čvornim silama*** obeležene kao f_i i f_j.



Zavisnost sile od pomeranja

$$f_i = k\left(u_i - u_j\right)$$
$$f_j = k\left(u_j - u_i\right)$$



Matrica krutosti elementa

Prethodne dve jednačine mogu biti napisane u matričnoj formi kao:

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$$

ili kraće kao

$$\mathbf{ku} = \mathbf{f}$$

gde je

matrica krutosti elementa (uvek je simetrična);

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

vektor čvornih pomeranja;

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

vektor čvornih sila

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$$

Pomeranja čvorova elementa su ujedno i stepeni slobode čvora (*degrees of freedom -DOF)*

Singularnost matrice krutosti

Jednačinom **ku** = **f** se ne mogu odrediti pomeranja zbog toga sto je matrica **k** singularna odnosno pošto pomeranja elementa kao krutog tela, ovim sistemom jednačina nisu određena. Jedan od krajeva mora biti fiksiran ili zadato pomeranje; pomeranje drugog kraja onda može biti određeno jednoznačno.

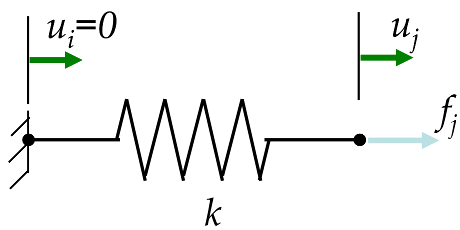
Rešenje za jedan element

Ako je čvor *i* fiksiran (pomeranje je 0) onda se **ku** = **f** redukuje u jednu jednačinu

$$ku_j = f_j$$

i pomeranje čvora *j* se lako određuje kao

$$u_j = \frac{f_j}{k}$$

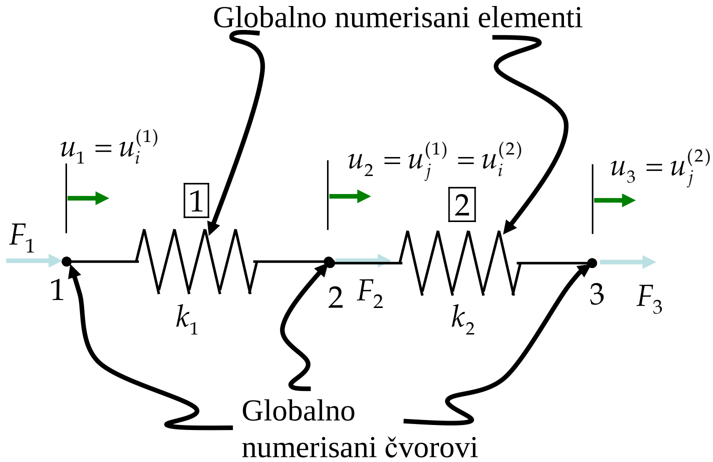


Redukcija matrice krutosti

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$$

Sistem sastavljen iz više elemenata
Dve opruge redno spojene

$$u_2 = u_j^{(1)} = u_i^{(2)}$$



Neprekidnost pomeranja

Kada su dva elementa spojena njihovi zajednički čvorovi imaju ista pomeranja.

$$u_2 = u_j^{(1)} = u_i^{(2)}$$

Pomeranja indeksirana sa donjim indeksom su globalna a sa gornjim indeksima lokalna, vezana za element.

Uslovi ravnoteže sila

Dejstvo sila u čvorovima konstrukcije je jednako zbiru sila u čvorovima svakog elementa konstrukcije:

$$F_1 = f_i^{(1)}$$
$$F_2 = f_j^{(1)} + f_i^{(2)}$$
$$F_3 = f_j^{(2)}$$

Gde su F_1, F_2, F_3 sile u čvorovima konstrukcije.

Ravnotežna jednačina konstrukcije

Matrična jednačina ravnoteže unutrašnjih i spoljašnjih sila je:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

ili

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F}$$

gde je:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

poznata kao globalna matrica krutosti (uvek simetrična);

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

je globalni vektor pomeranja i

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

je globalni vektor čvornih sila

Struktura Globalne Matrice Krutosti

Globalna matrica krutosti je sastavljena iz matrica krutosti elemenata

Matrica krutosti za element

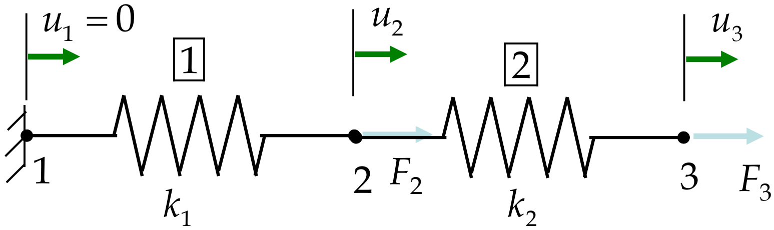
$\boxed{1}$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

U opštem slučaju matrica **K** je singularna odnosno iz jednačine ravnoteže se ne mogu odrediti pomeranja. Potrebno je da se pomeranja nekih čvorova definišu odnosno da se zadaju granična pomeranja tih čvorova tj. granični uslovi .

Ako se fiksira čvor 1 (pomeranje je 0) onda jednačina ravnoteže postaje:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$



Pomeranja čvorova 1 i 2 mogu se naći iz

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

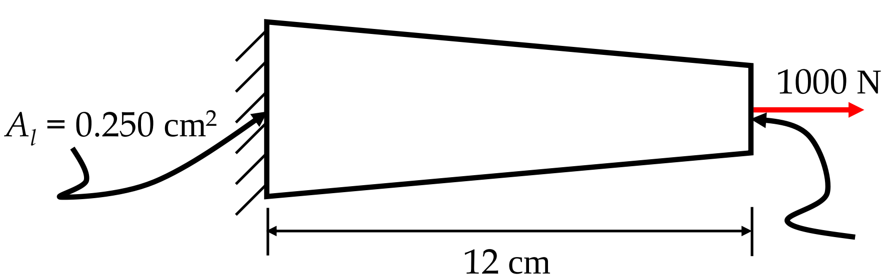
Redukcija matrice krutosti

Kada je jedno od pomeranja 0, u matrici krutosti se eliminišu sve vrste i kolone koje sadrže to pomeranje:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

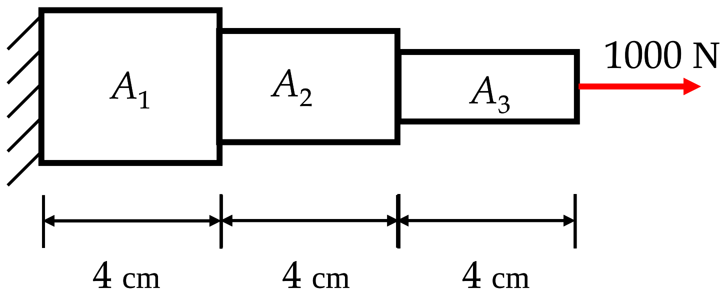
Primer

Greda od aluminijuma (E = 10.4 × 10^6 N/cm^2) promenljivog poprečnog preseka opterećena je silom na kraju (F=1000 N). Odrediti pomeranje kraja aluminijumske konzole:



Rešenje

Gredu promenljivog poprečnog preseka možemo aproksimirati sa nekoliko greda konstantnog poprečnog preseka (u ovom primeru aproksimiraće se sa tri grede konstantnog poprečnog preseka).



Površine poprečnih preseka mogu se izračunati iz sledećih izraza:

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(A_l + A_l - \frac{(A_l - A_r)}{12}(4) \right) = 0.229 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left(A_l - \frac{(A_l - A_r)}{12}(4) + A_l - \frac{(A_l - A_r)}{12}(8) \right) = 0.188 \text{ cm}^2$$

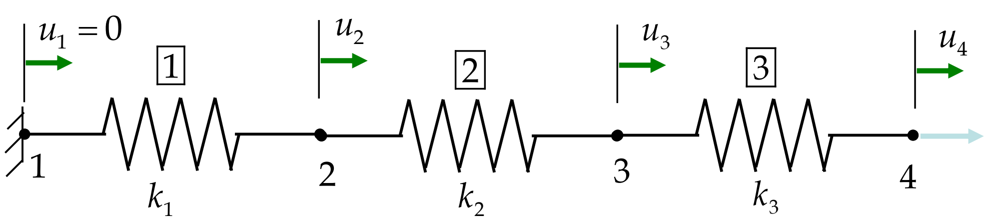
$$A_3 = \frac{1}{2}\left(A_l - \frac{(A_l - A_r)}{12}(8) + A_r \right) = 0.146 \text{ cm}^2$$

Odgovarajuće krutosti delova grede:

$$k_i = \frac{A_i E_i}{L_i}$$

$$k_1 = 5.95 \times 10^5 \text{ lb/in}$$
$$k_2 = 4.89 \times 10^5 \text{ lb/in}$$
$$k_3 = 3.80 \times 10^5 \text{ lb/in}$$

Greda modelirana oprugama (konačni element):



Ravnotežne jednačine mogu da se napišu u obliku:

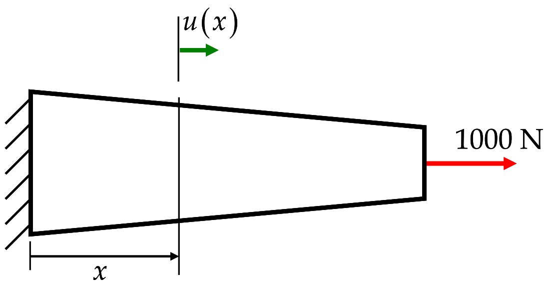
$$
\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \end{Bmatrix}
$$

Rešavanjem sistema jednačina dobija se:

$$
\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = 10^{-5} \times \begin{bmatrix} 10.84 & -4.89 & 0 \\ -4.89 & 8.69 & -3.80 \\ 0 & -3.80 & 3.80 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.68 \\ 3.73 \\ 6.36 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \quad \text{cm}
$$

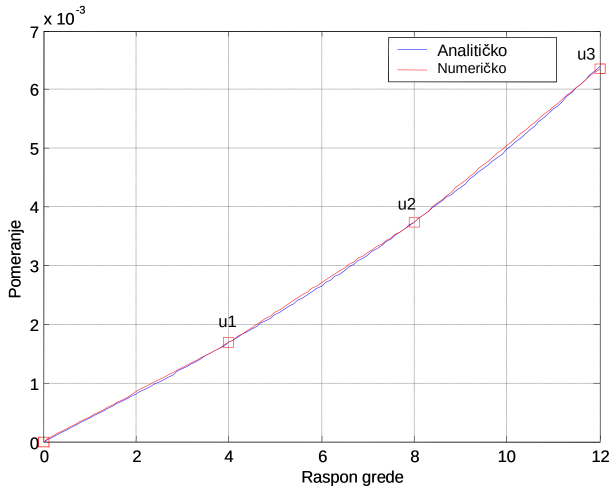
Analitička formula za određivanje pomeranja:

$$
u(x) = \frac{PL}{E(A_l - A_r)} \ln\left(\frac{A_l}{A_l - \dfrac{A_l - A_r}{L} x} \right)
$$



$$u(4) = 1.68 \times 10^{-3} \text{ cm}$$
$$u(8) = 3.74 \times 10^{-3} \text{ cm}$$
$$u(12) = 6.40 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

Upoređenje sa analitičkim rešenjem



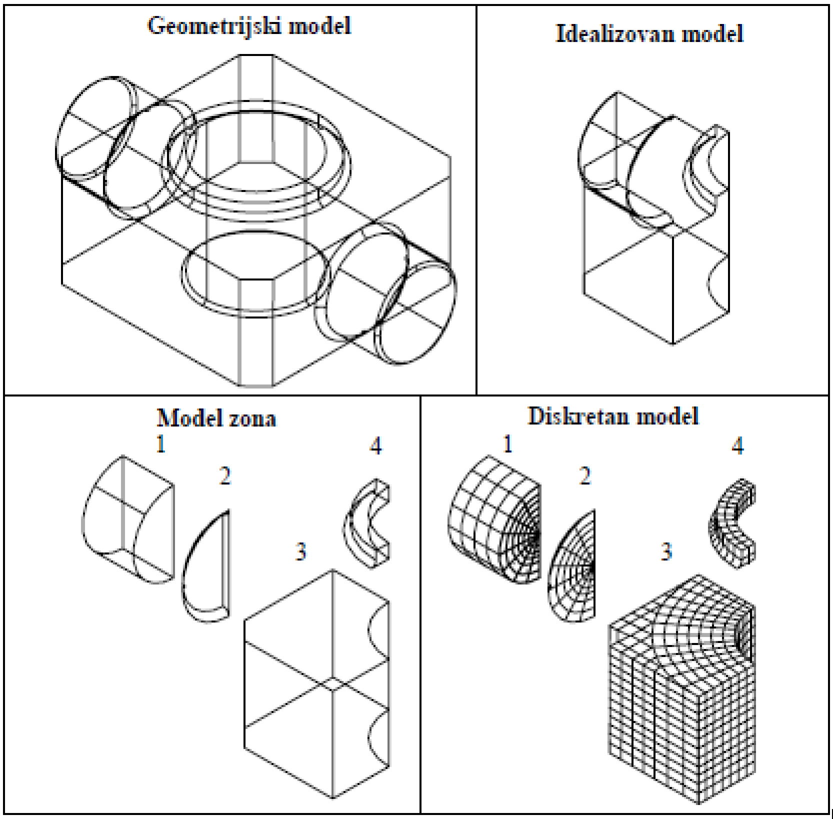
3. FORMIRANJE MODELA U METODI KONAČNIH ELEMENATA

Formiranje diskretnog modela je pripremna faza - procedura pre analize metodom konačnih elemenata. Formiranjem diskretnog modela stvara se osmišljena, uskladjena i povezana grupa konačnih elemenata kojom je opisan kontinuum, koji je predmet analize. Formiranje modela za analizu ima četiri faze realizacije: Formiranje geometrijskog modela, formiranje idealizovanog modela, formiranje modela zona i formiranje diskretnog modela. **Geometrijski model** kreira projektant, CAD softverom za projektovanje. Time nastaje datoteka podataka koji realno opisuju geometriju objekta sa svim potrebnim detaljima za izradu.Geometrijski model može da sadrži geometrijske elemente koji nemaju značaja za analizu jer ne

utiču na naponsko-deformacionu sliku objekta. Radi toga se formira idealizovan model u kome su obačeni nevažni detalji.**Idealizovan model** je uprošćen model koji ne mora da predstavlja celinu objekta ukoliko može da se njegovim simetričnim formama predstavi funkcija i način opterećenja celine.Idealizovan model se uvek formira sa zahtevom manjeg obima kontinuuma za analizu. Osnova razvoja **racionalnih** idealizovanih modela je apstrakcija. Apstrakcija je sagledavanje modela od strane analitičara kojom se postavlja koncept modela, uklanjaju detalji, prepoznaje simetrija, **redukuje model**, prilagodjavaju modaliteti unošenja opterećenja.

Model zona predstavlja idealizovan model rasčlanjen na pravilnije celine – zone koje dozvoljavaju podelu kontinuuma na konačne elemente prema standardnom – poznatom algoritmu generisanja ili preslikavanja. Na slici 3.1 pokazan je model sa 4 zone. Uskladjivanje medjusobnog poklapanja čvorova i odsustvo koincidencije elemenata i čvorova obezbedjuje se mapiranjem mreže – procedurom uskladjenog broja elemenata na kontaktnim površinama zona.

Diskretni model se razvija na bazi modela zona i uskladjenog broja elemenata kontaktnih površina zona. Diskretni model podrazumeva odredjivanje čvorova, konačnih elemenata, podataka o materijalu, diskretnom opterećenju i diskretnim graničnim uslovima. Diskretni model ima potrebna prilagodjavanja mreže konačnih elemenata graničnim uslovima oslanjanja i tačkama i površinama dejstva spoljašnjih sila. Razvijena mreža konačnih elemenata se ocenjuje parametrima oblika mreže. To su geometrijski okviri u kojima je primenjen konačan element (deformisanost oblika), pravilnost razvoja mreže (kontinualnost promene pravca i oblika elementa), pravilnost promene veličine elementa (kontinualnost promene geometrije). Na bazi ovih parametara vrši se poboljšanje mreže pre nego što se formira konačan diskretan model.Konačnim diskretnim modelom vrši se analiza.



Slika 3.1 *Faze transformacije modela. Slika pokazuje tri žičana modela: Geometrijski model, idealizovan model i model zona. Četvrti model - diskretni model je prikazan kao zapreminski – solid model objekta*

Razvoj mreže konačnih elemenata može se realizovati:
Ručnim putem (pojedinačnim definisanjem čvorova i elemenata),
Poluautomatskim putem kada se na bazi postavljenog koncepta modela zadaju pojedinačne komande automatskog generisanja konačnih elemenata u zonama. Poluautomatski generatori su interaktivnog tipa – zasnivaju se na instrukcijama definisanim kroz dijalog.
Automatska procedura podrazumeva generisanje mreže kao celine jednom komandom kojom nastaje ceo diskretni model iz zadatog geometrijskog modela i negeometrijskih instrukcija o osloncima, opterećenju, materijalu i fizičkim osobinama. Automatsko generisanje karakteriše najsavremenije modelere. Zato je osnovni programski alat za odredjivanje zona u kojima se generiše mreža – **generator granica**. Automatski generatori koriste tri metode za formiranje mreža: Metodu spajanja čvorova, metodu prilagodjavanja
uzorka mreže i metodu dekompozicije.
Softver za analizu, shodno načinu modeliranja, može da se razvija kao integralni i modularni. Integralni podrazumeva softverski potpuno integrisane sve faze razvoja modela, analize i postprocesiranja. Modularni pristup podrazumeva razvoj, korišćenje i distribuciju softverskih modula za pojedinačne etape analize (geometrijsko modeliranje, preprocesiranje, postprocesiranje, analiza).

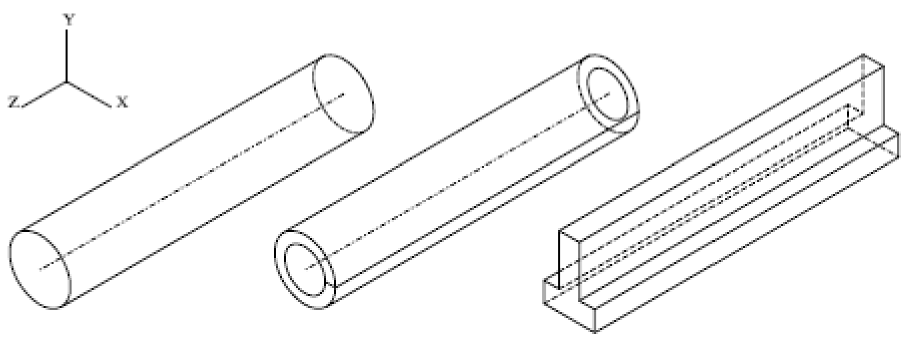
Modularni programi podrazumevaju i bogatiji interfejs za rad sa različitim formatima i programima. Primer takvih programa je FEMAP (*Finite Element Modeling And Postprocessing*), MicroStation-SE. Softverski paketi kao I-DEAS, ANSYS, ALGOR, NASTRAN, COSMOS integrišu sve proceduralne faze analize: Geometrijsko modeliranje, idealizaciju, kreiranje diskretnog modela, rešavanje zadatka i postprocesiranje. Često su tu pridodate opcije za optimizaciju, redizajn, analizu osetljivosti modela, konkurentni inžinjering, izradu tehničke dokumentacije, poredjenje sa eksperimentom.
Pre/post procesori su programi predvidjeni za rad sa geometrijskim podacima, opterećenjima, graničnim uslovima, naponima, deformacijama, vektorima, poljima, grafičkim tipovima geometrijskih modela, animacijom, greškama analize. Pre/post procesori su uvek zasnovani na grafičkom interfejsu i na taj način omogućuju analizu po različitim osnovama, istraživačkim ciljevima.
Generatori mreža – modeleri mreža. Mogu generisati dvodimenzionalne ili trodimenzionalne mreže konačnih elemenata. Dvodimenzione mreže se koriste za rešavanje ravanskih i osnosimetričnih zadataka1. Trodimenzione mreže su najopštija kategorija mreža i u domenu mašinstva njima se pokriva kontinuum objekata koji su uvek 3D. Drugi značajan parametar generacije je gustina elemenata u pojedinim zonama. **Generatori mreža** koriste dva pristupa u zadavanju gustine mreže:
Prvi pristup kod koga se **gustina elemenata unapred (*a priori*) pretpostavlja** analizom idealizovanog modela iz koje se odredjuju parametri generatora mreža. Ovaj model se zasniva na opštim osobinama mehanike kontinuuma i u pojedinim slučajevima može da da veću grešku proračuna kao posledicu neadekvatnog ili neraspoloživog predpostavljenog parametra programskog generatora mreže. Pretpostavke je potrebno proveriti nakon analize.
Drugi pristup zasniva se na **korišćenju rezultata izvršene analize (*a posteriori*),** za **redefinisanje gustine mreže**. Ovaj pristup postavlja inicijalnu mrežu sa početnom veličinom konačnog elementa odredjenog na bazi zoniranog modela. Sa tom gustinom izvrši se proračun pa se na bazi izvršene analize ocenjuje lokalna adekvatnost veličine i rasporeda elemenata. Na bazi gradijenta dobijenog napona, lokalne enerije (funkcionala Π) i greške modela, vrši se redefinisanje mreže. Mreža je sada uslovljena zahtevima kontinuuma i negeometrijskim parametrima objekta. Pošto takva mreža odgovara gustinom elemenata postavljenom zahtevu tačnosti i ima ujednačen kvaltet dobijenih rezultata, definiše se kao **adaptivna mreža**.
Do **adaptivne mreže** se ne dolazi direktno, već iterativno u više prolaza, dakle, serijom analiza sa podešavanjem jednakosti i nivoa greške modela u svim zonama i lokacijama kontinuuma. Softvrski je to automatizovana procedura koja se pokreće po generisanju prvog diskretnog modela. Rešenja za generisanje mreža su tražena i na drugim planovima. Tako je I.C.Taig, 1954. definisao ekspertni sistem za pripremu analize i procedure modeliranja objekta.

MODELIRANJE MREŽA - OPŠTE FUNKCIJE

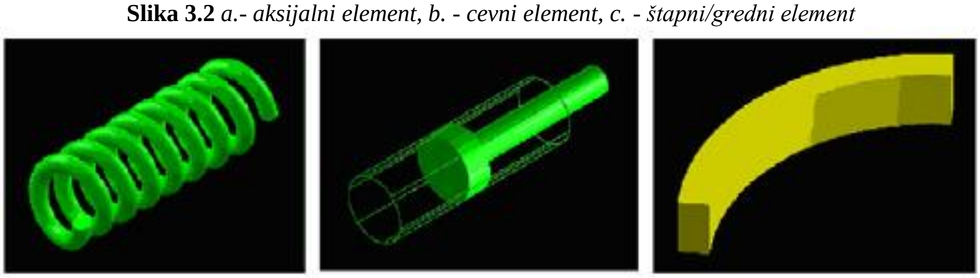
Razvoj diskretnih mreža konačnih elemenata na objektima podrazumeva definisanje osnovnih elemenata: tačaka, linija, površina, zapremina, čvorova i konačnih elemenata. Nad geometrijskim elementima modela obavljaju se operacije generisanja sastavnih elemenata diskretnih modela, primenom odgovarajućih softverskih alata. Postavljanje (konstruisanje) čvora u proizvoljnoj tačci prostora (x,y,z), u opštem slučaju dato je specificiranom naredbom IK3-01. Naredna tri alata pokazuju izvodjenje transformacija nad grupom čvorova. Programske naredbe za izvršenje ovih funkcija su date:
IK3-01: Kreirati čvorove (konačnog elementa) (*Create Nodes*)

IK3-02: Kopirati čvorove translacijom (*Copy Nodes*)
IK3-03: Kopirati čvorove rotacijom (*Rotate Nodes*)
IK3-04: Kopirati čvorove refleksijom (*Reflect Nodes*)

Kopiranje u zadatom pravcu, kopiranje rotacijom, kopiranje refleksijom
Pojedinačno kreiranje konačnih elemenata obavlja se naredbom za konstruisanje IK3-05, datom navodom **IK3-05**. Izbor tipa i oblika konačnog elementa sastavni je deo procedure kreiranja i automatski se softverom otvaraju podmeniji za izbor potrebnih osobina konačnih elemenata. Procedura se može uspešno okončati kada se svi potrebni podaci za kreiranje elementa zadaju. Tako na primer, kod kreiranja konačnog elementa ploče, zadaje se oblik ploče (trougaoni ili četvorougaoni), identifikacioni brojevi čvorova, način unošenja podataka o elementu (definisano interfejsom programa), debljina konačnog elementa, materijal elementa sa mogućnošću korišćenja baze podataka. Te osobine napredni softveri nude kao kompletnu opciju.
IK3-05: Kreirati konačan element (*Create Element*)
Pri navodjenju zahteva za kreiranje linijskih elemenata, programi obično nude izbor:
A. Element za aksijalna i torziona opterećenja (bez smicajna i savijanja–*rod element*), sl.3.2-a,
B. Cevni element sličnih osobina kao i prethodni (*tube element*), slika 3.2-b,
C. Štapni element za aksijalna opterećenja i savijanje (*bar element*), slika 3.2-c,
D. Linijski element krutosti (*spring element*), slika 3.3-a,
E. Linijski element prigušenja (*damper element*), slika 3.3-b,
F. Kombinovani element zadate krutosti i prigušenja,
G. Linijski element nelinearnosti (*gap element*),
H. Krivolinijski gredni element (*curved beam element*), slika 3.3-c



Slika 3.2 *a.- aksijalni element, b. - cevni element, c. - štapni/gredni element*



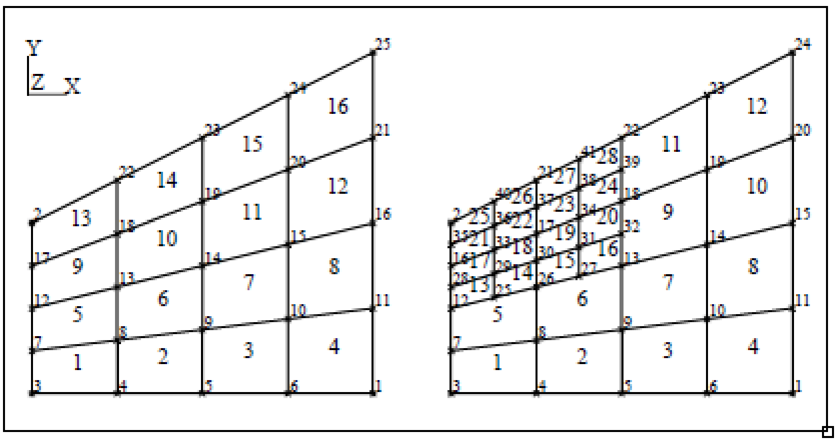
Slika 3.3 *a.- element krutosti, b. - element prigušenja, c. - krivolinijski gredni element*

GENERISANJE UNIFORMNIH MREŽA

Kada se na objektu razvija mreža sa topologijom koja je tačno unapred odredjena, definiše se površina na kojoj se izvodi operacija. Naredni korak je izbor alata za generisanje mreže. Generisanje mreže na proizvoljnoj četvorougaonoj ploči, što je navedeno funkcijom:

IK3-08: Kreirati mrežu izmedju uglova - temena (*Create Mesh between Corners*)

Ova funkcija zahteva unošenje oznake čvorova i broj elemenata u pravcima lokalnih osa (s) i (r) koji se generišu mrežom. Kada se generisanjem dobijaju proporcionalni ili identični konačni elementi, takva mreža se naziva **uniformna**. Za ploču na slici 3.4-a, zadata su temena N25, N2, N3, N1 i podela 4 x 4 elemenata. Ukoliko se funkcija ponovi na elementima E9, E10, E13, E14, sa istim parametrima, (posle odklanjanja koincidentnih čvorova i elemenata i renumeracije mreže), nastaje model mreže prikazan na slici 3.4-b. Ovaj model sa 28 elemenata ploče odlikuje se gušćom mrežom koja omogućuje precizan unos spoljašnjeg uticaja, manji stepen aproksimacije u analizi uticaja, bolji (detaljniji) prikaz polja napona i deformacija. Prelaz iz krupnijih u sitnije elemente mora naknadno da se dotera.



Slika 3.4-a,b Primeri generisanja uniformnih mreža

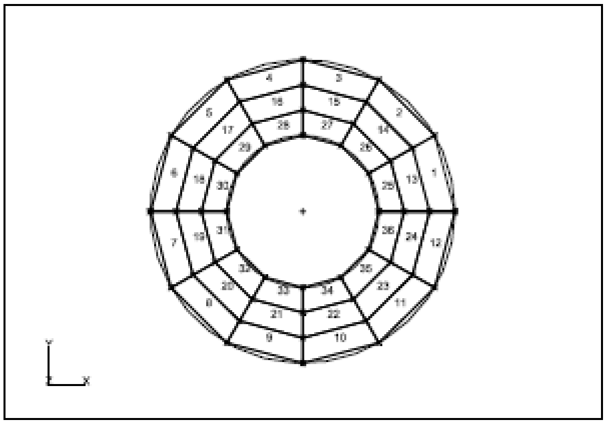
Procedura generisanja mreže složenija: Tako, recimo, kada se generiše mreža na prstenastoj ploči, bira se pomoćna funkcija za konstruisanje, kojom se generišu kontrolne tačke mreže:

IK3-09: Kreirati dimenziju mreže uzduž kriva na površini

(*Create Mesh Size along Curves on Surface* Ovom funkcijom se postavljaju kontrolne tačke po celoj konturi, izabrane gustine u cirkularnom i radijalnom pravcu. Kontrolne tačke omogućuju pravilno rasporedjivanje elemenata mreže. Kontrolne tačke su postavljene i simbolički prikazane na modelu, kod svakog softvera.Tek sada može se postaviti zahtev za kreiranje mreže na površini:

IK3-10: Generisati mrežu na površini (*Generate Mesh on a Surface*)

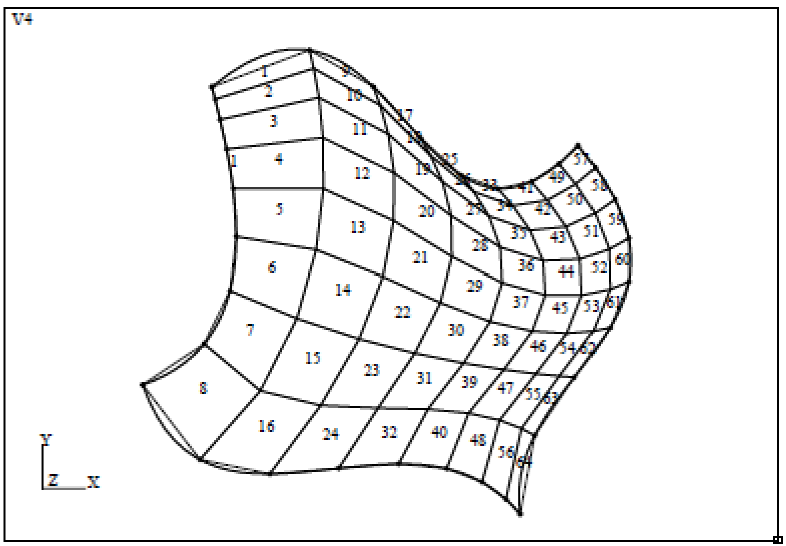
Ovom funkcijom se formira mreža koja ima položaje čvorova i elemenata prema postavljenom modelu sa kontrolnim tačkama. Slika 3.5, pokazuje primer kreiranja mreže na prstenastoj ploči sa 12 elemenata u cirkularnom i 3 u radijalnom pravcu. Generisano je 36 konačnih elemenata sa 48 čvorova i 48 x 6 stepeni slobode kretanja (SSK). Mreža ima pravilan oblik i proporcionalnu geometriju konačnih elemenata. Pri tome su prikazani četvorougaoni ravanski konačni elementi.



Slika 3.5 *Generisanje ravanskih četvorougaonih konačnih elemenata u polarno-cilindričnom koord. Sistemu*

IK3-11: Generisati parametre veličine mreže (*Generate Mesh Size*)

Primer na slici 3.6, pokazuje generisanje mreže na nepravilnoj ravnoj površini sa 8 konačnih elemenata u oba pravca i količnicima izvodnica mreže 5.0 i 0.2. Dobijena mreža ima povećanu gustinu elemenata u gornjem desnom uglu. Aproksimacija izvršena sa 64 četvorougaona elementa ploče, pri čemu tačnost modela više nije automatski kontrolisana već zavisi od kriterijuma i zahteva analitičara.



Slika 3.6 *Uniformna mreža sa nejednakom veličinom konačnih elemenata*

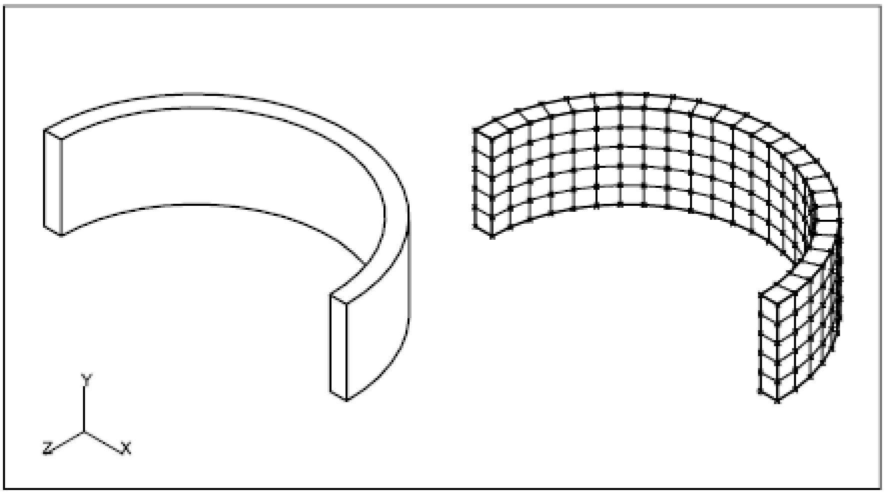
Slobodne mreže: Kod neautomatskih procedura kada se generišu SLOBODNE FORME MREŽA (***free mesh***), mora se poznavati tačnost modeliranja iz iskustva grupe predhodno izvedenih modela i proračuna. Slobodno formirana mreža mora poštovati opšte principe formiranja mreža:

- Specificirati veličine mreža sa prelaznim vrednostima parametara uzduž ivica,
- Ne zadavati parametre generacije mreža u širokim granicama,
- Koristiti standardne parametre za generisanje mreža (programski podešene),
- Razviti više realizacija mreža i izabrati najpovoljniju,
- Mapirati granice na površinama gde je god to moguće (manja logička složenost),
- Kod jako zakrivljenih oblika konačnih elemenata vršiti rekonstrukciju mreža

Generisanje mreže na zapreminskim (3D) objektima koristi opštu komandu za konstruisanje:

IK3-16: Generisati mrežu na zapremini (*Generate Mesh on a Volume*)

Korišćenjem komande na objektu (posteljica kliznog ležaja) prikazanom na slici 3.20, dobijena je mreža sa 125 - 3D konačnih elemenata (*solid brick*), 312 čvora i 936 stepeni slobode kretanja. Podešavanje kvaliteta rešenja preko veličine konačnih elemenata poznato je još kao **h**-*size* parametar. Kod poluautomatskog generisanja mreža, moguće je veličinom osnovnog elementa, definisati gustinu mreže.



Slika 3.6 *Primer generisanja uniformne mreže na 3D objektu*

AUTOMATSKO GENERISANJE MREŽA

Automatsko generisanje mreža konačnih elemenata koristi se za realizaciju obimnih zadataka kakvi su industrijski problemi sa više desetina hiljada konačnih elemenata. Te instrukcije se u softveru nalaze pod opštim navodima:

IK3-21: Automatski generisati granice mreže (*Automatically mesh generation boundaries*)

Automatski kreirati mrežu (*Auto_Create)*

Specifikacija argumenata mreže IK3-21:

Način generisanja mreže (pravilna, adaptivna),

Veličina elementa u mreži (*h-size*),

Broj elemenata u pravcima mreže,

Nagib elemenata u mreži (*biasing*),

Veličina globalnog i lokalnog elementa slobodne mreže,

Multiplikatori dužine za slobodne mreže,

Dužina elementa na bazi zakrivljenosti forme (*Curvature-Based Element Length*)

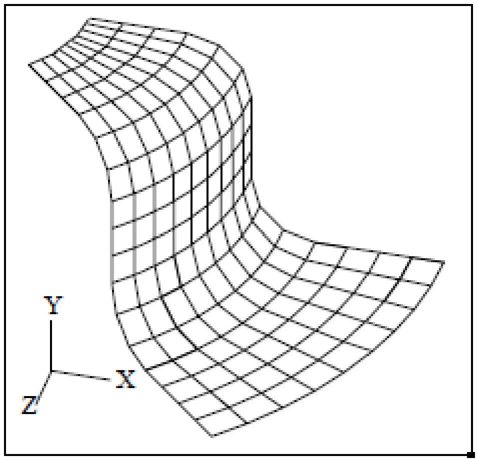
Automatska generacija mreže konačnih elemenata zasnovani su na sledećim postupcima:

A. Upravljanju razvojem mreže,

B. Tehnikama ravnanja mreže na objektu,

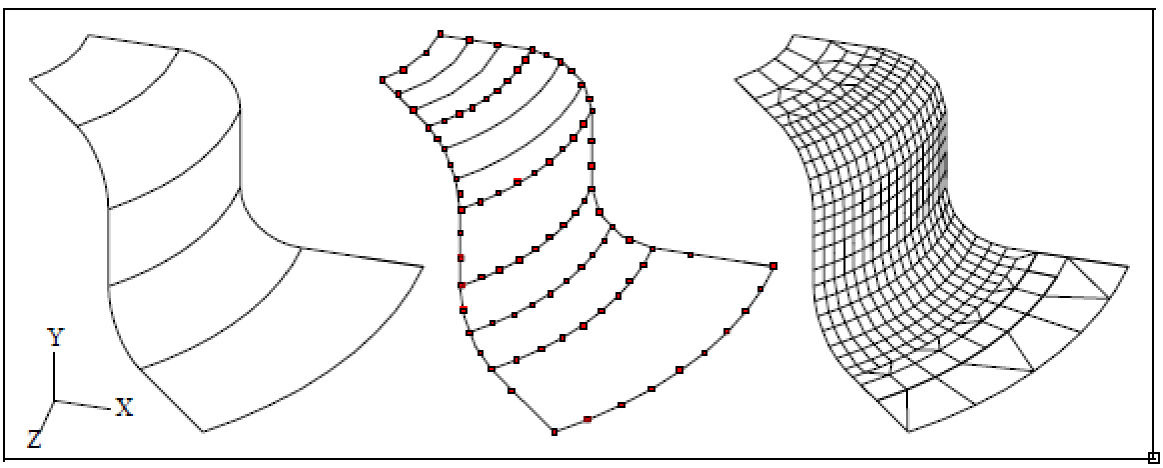
C. Metodama za izbor oblika i vrste elementa

A. UPRAVLJANJE RAZVOJEM MREŽE definiše početak i pravac generisanja mreže.Osnova razvoja takve mreže je **plan mreže (mapa)** koji je odredjen definisanjem podele na površinama i ivicama objekta. Postoje u osnovi dva modela razvoja mreže: pravilna (uniformna) i slobodna. **Pravilna mreža** ima strategiju simetričnog ravnomernog razvoja u pravcu promene toka konture. Pravilne mreže su proporcionalnih konačnih elemenata, estetske i daju veliki broj el.



Slika 3.7 *Uniformna - kontinualna mreža iste forme konačnih elemenata*

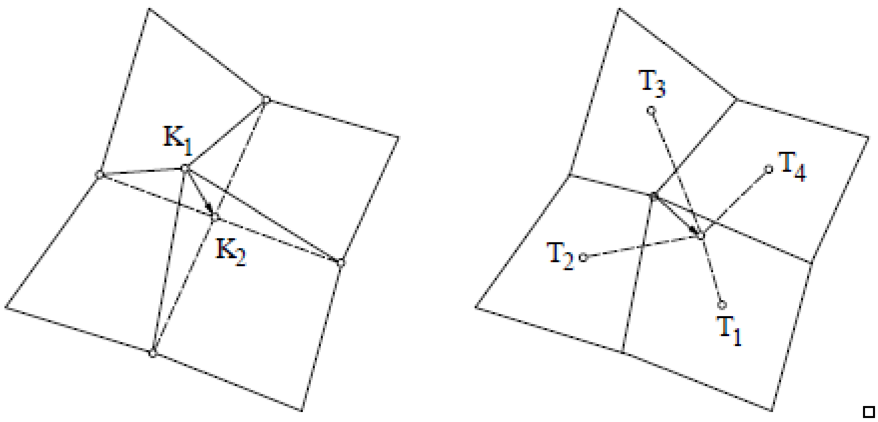
Slobodne mreže imaju veću slobodu u smislu rasporedjivanja granica elemenata. Slobodne mreže se specificiraju parametrom **globalne veličine elementa**, **lokalne veličine elementa**, **brojem elemenata** u krivini i **multiplikatorom** veličine elemenata u mreži.Kako veličina ivice konačnog elementa, predstavlja deo cele dužine ivice modela, to se ova specifikacija definiše veličinom elementa u odnosu na celu konturu i poznata je kao **h-specifikacija**. Parametar za ovu specifikaciju je **broj tačaka na konturi**. Uobičajeno se definiše od 20 do 30 elemenata:



Slika 3.8 *Definisanje tačaka na konturi - predgenerisanje elemenata za ocenu forme i gustine mreže*

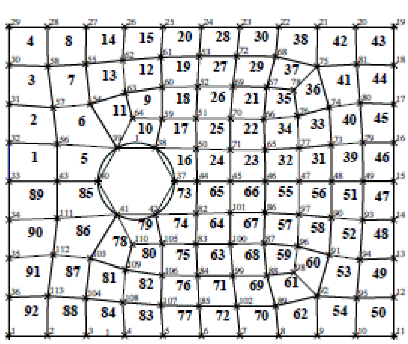
Drugi parametar razvoja mreže podrazumeva definisanje **maksimalnih geometrijskih odnosa** medju samim elementima u mreži. Idealno je da su konačni elementi iste veličine, ali se od ovog zahteva odstupa da bi se dobila mreža potrebne gustine na kritičnim lokacijama. Zato je uveden parametar nagiba (***biasing***2) elementa prema centru ili krajevima konture (3.0 i više). Ovaj parametar odredjuje zgušćenje trajektorija ivica konačnih elemenata u pravcu razvoja mreže. Njime je odredjena brzina prelaska diskretne strukture iz krupnog konačnog elementa na kraju površine u sitan element u prelaznoj zoni.

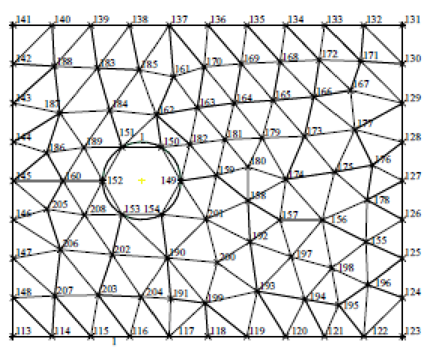
B. **RAVNANJE MREŽE** ima za cilj da obezbedi proporcionalnost oblika i kontinuitet granica elemenata u odnosu na konturu objekta. Na ovaj način smanjuje se izobličenje forme konačnih elemenata. Za ravnanje granica elemenata koriste se različite metode geometrijske ispune prostora pri čemu se dobar uspeh rasporedjivanja postiže primenom *Laplace*-ove i težišne iteracije. *Laplace*-ova metoda pomera zajednički čvor četiri susedna elementa, prema preseku obrazovanom direktnim poravnanjem ivica susednih elemenata, slika 3.9. Težišna metoda pomera zajedničku tačku ka težištu sva četiri konačna elementa, slika 3.9. *Laplace*-ova metoda stvara mrežu sa najmanjim izobličenjem elemenata. Ova metoda je brža od težišne metode. Ravnanje se izvodi do zadate tolerancije kvaliteta mreže ($\varepsilon=1\cdot10$-3).



Slika 3.9 *Dva modela za ravnanje mreža: Laplace-ov i težišni metod*

C. TREĆA GRUPA METODA stara se za **izbor vrste i tipa konačnog elementa**. To je, recimo, izbor 2D i 3D elemenata pripadajućeg oblika. Kod ravanskih i površinskih struktura to su trougaoni i četvorougaoni oblici ploča, ljuski, membrana. Kod 3D objekata to su osmougaoni elementi (*brick*) ili piramide. 2Geometrija samog konačnog elementa zadaje se **parametrom oblika**. Kod četvorougaonih konačnih elemenata to je minimalan dozvoljeni ugao zakošenja. Recimo, on se bira u granicama 75÷60° čime se dobijaju dobre diskretne forme mreža. Naredna dva primera pokazuju automatsku generaciju mreže na četvrtastoj 3D pločici sa kružnim otvorom. Prva mreža, na slici 3.10 izvedena je četvorougaonim elementima sa maksimalno zadatim odnosom zakošenja elemenata 5:1 i minimalnim uglom izmedju dve ivice od 60° i grubom h-specifikacijom veličine 10. Automatska generacija je dala ravnomerne veličine elemenata. Dobijena mreža se karakteriše sa 92 konačna elementa i 113 čvora. Ravnanjem je dobijeno odstupanje $\varepsilon=9.8\cdot10$-4, posle 35 iteracija, težišnom metodom.





Slika 3.10 *Automatsko generisanje mreže četvorougaonih konačnih elemenata na objektu sa otvorom (H-specifikacija =10, Biasing = 5, minimalan ugao nagiba stranica = 60° , metoda ravnanja – težišna)*

Slika 3.11 *Automatsko generisanje mreža na objektu primenom trougaonih konačnih elemenata H-specifikacija =10, Biasing =2, Laplace-ova metoda sa 10 iteracija i ε = 0.001. Realizacija: 54 čvora i 150 elemenata*

4. GREŠKE PRI ANALIZI STRUKTURA METODOM KONAČNIH ELEMENATA

UVOD

Analitičarima danas stoji na raspolaganju veliki broj komercijalnih programa za analizu struktura metodom konačnih elemenata i to za statičku, dinamičku, termičku i nelinearnu statičku analizu. Većina ovih programa ima različite provere ulaznih podataka. Sa druge strane, danas se za pripremu podataka najčešće koriste interaktivni ili automatski predprocesori koji pored ubrzanja procesa pripreme podataka znatno doprinose i povećanju stepena njihove tačnosti. Analiza rezultata dobijena proračunom je danas gotovo nezamisliva bez postprocesora.Iako je proces analize struktura metodom konačnih elemenata na taj način visoko automatizovan, ipak postoji opasnost da se u toku analize strukture prouzrokuju greške koje, u većoj ili manjoj meri, utiču na tačnost rešenja, a u nekim fatalnim slučajevima sprečavaju dobijanje bilo kakvog rezultata. U ovom poglavlju je učinjen pokušaj da se analiziraju svi mogući potencijalni izvori grešaka u procesu analize strukture metodom konačnih elemenata. Na osnovu ove analize je izvršena klasifikacija potencijalnih izvora grešaka po raznim osnovama. Rezultati analize grešaka mogu biti višestruko korisni kako za analitičare tako i za programere. Analitičarima oni mogu da pomognu u pravilnom modeliranju problema i pripremi podataka. Pored toga, mogu da neiskusnom korisniku stvore sliku o očekivanoj netačnosti rezultata analize metodom konačnih elemenata. Rezultati analize potencijalnih grešaka se takođe mogu iskoristiti za poboljšanje karakteristika pre i post procesora, kao i samih programa za analizu. U ovom radu analiza grešaka će poslužiti za sagledavanje problema modeliranja za analizu metodom konačnih elemenata, kao i za postavljanje zadataka ovog rada.

KLASIFIKACIJA GREŠAKA

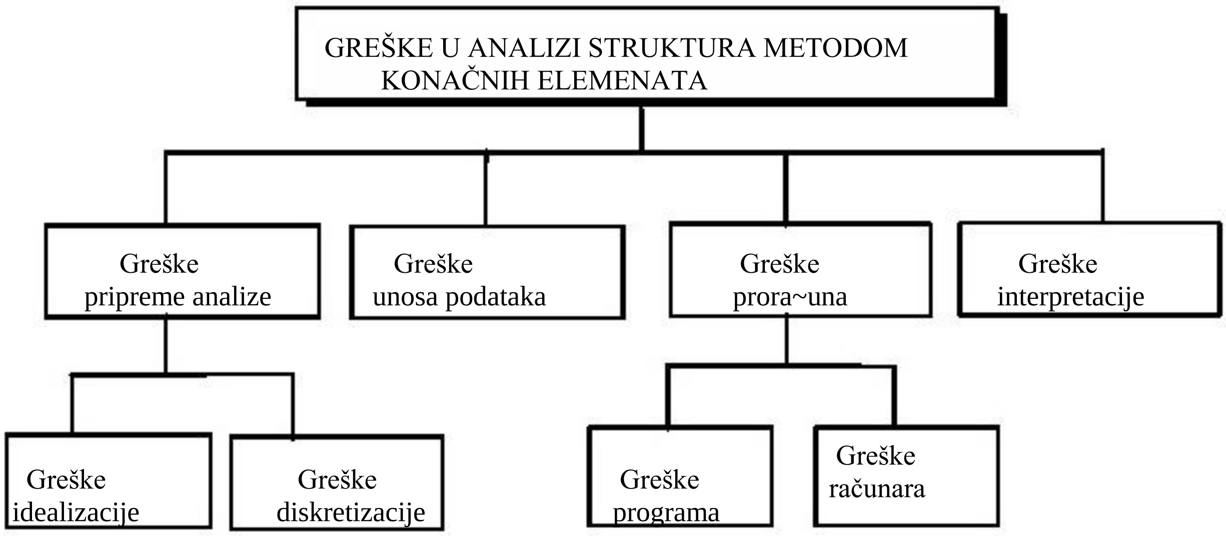
Pre nego što se izvrši bilo kakva klasifikacija grešaka pri analizi struktura metodom konačnih elemenata, potrebno je definisati pojam greške. Pri tom, treba načiniti razliku između pojmova:

- greška u rezultatu i
- nastajanje greške.

Greška u rezultatu je posledica greške nastale u procesu analize strukture. Pod greškom u rezultatu se podrazumeva razlika između veličine promenljive polja (npr. pomeranje, temperatura, napon) izračunate metodom konačnih elemenata i stvarne vrednosti promenljive polja u realnoj strukturi. Ovu grešku je nemoguće tačno odrediti, čak ni merenjem na realnoj strukturi, jer i sam proces merenja ima svoje greške. Greška nastaje kao posledica pogrešne aktivnosti čoveka, programa ili računara u procesu analize strukture. Ove pogrešne aktivnosti mogu da dovedu do prekida izvršenja programa ili do greške u rezultatu. Greške koje dovode do prekida programa nazivaju se fatalne greške.Ovde će se pod pojmom greške, ukoliko se drugačije ne navede, podrazumevati pogrešna aktivnost koja dovodi do greške u rezultatu ili do fatalne greške. U procesu analize strukture metodom konačnih elemenata se kao činioci javljaju analitičar, program i računar. Svaki od ovih činioca može biti uzrok pojave greške. Prema tome, greške se prema uzroku njihovog nastajanja mogu podeliti na:

- greške analitičara
- greške programa
- greške računara.

Najveći broj potencijalnih izvora grešaka u analizi struktura je vezan za analitičara.Zavisno od odnosa analitičara prema greškama, mogu se razlikovati svesne i nesvesne greške. Svesne greške nastaju sa znanjem analitičara, bez obzira da li je uzrok pojave greške sam analitičar, program ili računar. Analitičaru je u tom slučaju poznata činjenica da će se u rezultatu pojaviti greška, ali procenu njene veličine može da vrši samo na osnovu iskustva. Ovakve greške nastaju zbog nemogućnosti da se izvrši pravilno modeliranje problema, zbog njegove složenosti ili zbog ograničenih mogućnosti programa.



4.1 Klasifikacija potencijalnih izvora grešaka prema periodu njihovog nastanka

Mnogo opasnije su nesvesne greške koje nastaju iz bilo kog razloga, ali ih je analitičar nesvestan. Njihova opasnost je u tome što, bez obzira na veličinu greške rezultata, analitičar veruje da su rezultati tačni.Najpodesnija osnova za klasifikaciju grešaka je sam proces analize strukture. U uslovima kada se koristi neki od komercijalnih programa, proces analize strukture metodom konačnih elemenata se može podeliti na sledeće faze:

- priprema analize
- unos podataka
- proračun
- interpretacija rezultata.

Svaka od ovih faza sadrži niz različitih potencijalnih izvora grešaka koji će biti opisani u daljem tekstu. Na sl. 4.1 je prikazan jedan pokušaj klasifikacije potencijalnih izvora grešaka prema periodu njihovog nastanka.

GREŠKE PRIPREME ANALIZE

Modeliranje nekog problema za rešavanje metodom konačnih elemenata je vrlo složen posao koji od analitičara zahteva dobro poznavanje problema, teoretskih osnova, karakteristika i mogućnosti pograma kojim će se vršiti analiza. Posebno su pri tom značajna iskustva koja je analitičar stekao u rešavanju sličnih i drugih problema. Neke

greške u procesu pripreme analize ne zavise od analitičara, nego su posledica mogućnosti metode konačnih elemenata u ovom trenutku, odnosno posledica su kvaliteta raspoloživog programa.U fazi pripreme analize analitičar aproksimira realnu strukturu modelom koji sadrži samo relevantne delove strukture. Ovakav model se kasnije diskretizuje nizom konačnih elemenata koji čine takozvanu mrežu. Model pri tom treba dobro da aproksimira oblik, geometriju i fizičke karakteristike strukture, kao i granične i početne uslove. Shodno prethodnom greške modeliranja se mogu podeliti na:

- greške idealizacije

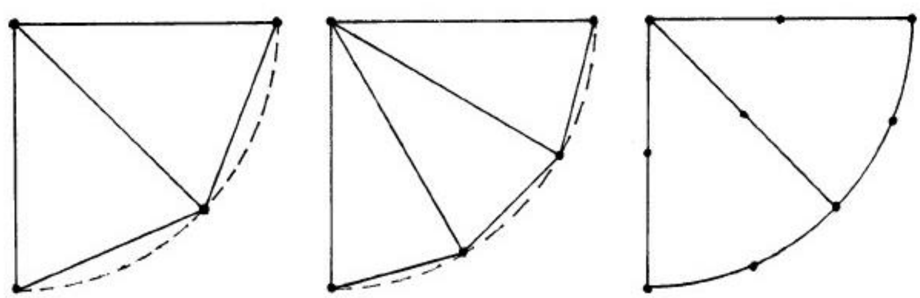
- greške diskretizacije.

GREŠKE IDEALIZACIJE

Greške idealizacije nastaju zbog nemogućnosti da se sva složenost realne strukture i njenog okruženja preslika na model. Naime, realne strukture su često po svom obliku veoma složene, a ponekad sastavljene od više delova različitih materijala. Greške idealizacije se mogu podeliti na:

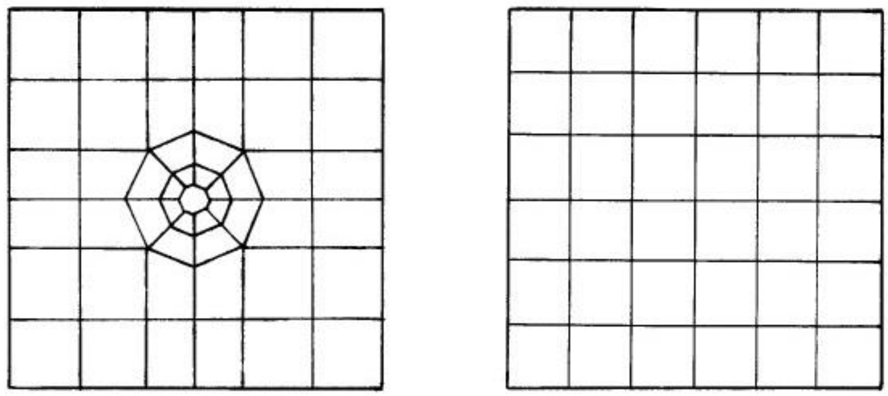
- greške aproksimacije oblika strukture
- greške aproksimacije graničnih uslova
- greške aproksimacije početnih uslova
- greške aproksimacije karakteristika materijala.

Greške aproksimacije oblika strukture nastaju zbog toga što nije uvek moguće načiniti model koji će topološki i geometrijski potpuno odgovarati realnoj strukturi.Ovo se najčešće događa kada struktura ima nepravilne granične površine. Ukoliko se pri tom koriste linerni konačni elementi, ovu grešku je nemoguće potpuno izbeći.Povećanjem broja elemenata greška se smanjuje, ali ipak postoji. Primer aproksimacije oblika četvrtine kruga linearnim konačnim elementima, prikazan na sl. 4.2. a i b, pokazuje da je greška aproksimacije pri korišćenju tri elementa (b) manja nego pri korišćenju dva elementa (a).



Sl 4.2 Greška aproksimacije oblika strukture
a) sa dva linearna elementa b) sa tri linearna elementa c) sa dva kvadratna elementa

Nekada je ovu grešku moguće potpuno izbeći korišćenjem elemenata višeg reda (kvadratnim ili kubnim), kao na slici 4.2.c . Ovaj način se preporučuje jer se sa mnogo manjim brojem elemenata može postići bolja aproksimacija.Sledeći problem aproksimacije oblika se javlja kada se na strukturi velikih dimenzija javljaju sitni detalji, kao što su npr. otvori i ispusti. Obuhvatanje ovih detalja modelom zahteva komplikovanu mrežu sa velikim brojem elemenata različite veličine, što stvara probleme u fazi diskretizacije i pripreme podataka a istovremeno poskupljuje proračun.Stoga analitičari često zanemaruju ovakve detalje. Pri tom se uvek unosi određena greška, jer ovi detalji, po pravilu, izazivaju lokalnu koncentraciju napona. Na slici 4.3. su prikazana dva modela kvadratne ploče sa otvorom na sredini. Očigledno je, da je model koji uzima u obzir otvor (sl. 4.3.a), daleko složeniji sa aspekta pripreme podataka, nego model koji zanemaruje otvor (sl. 4.3.b). Greška aproksimacija graničnih uslova se javlja pri određivanju interakcije između strukture i njene okoline. Posmatrana struktura je uvek podvrgnuta nekom dejstvu koje se definiše graničnim uslovima. U nekim slučajevima je granične uslove vrlo teško odrediti, a još teže obuhvatiti modelom a da on ne bude isuviše složen. Najveći problemi se javljaju kod višedelnih struktura kod kojih je vrlo teško odrediti interakciju (mehaničku i termičku) između pojedinih delova. Usled aproksimacije graničnih uslova mogu da se jave znatne greške u rezultatu.



Sl. 4.3. Aproksimacija oblika sa malim otvorom
a) uzimajući u obzir otvor b) zanemarujući otvor

Problemi u aproksimaciji graničnih uslova su različiti za različite vrste analiza (statička, dinamička, termička itd.), ali se greške generalno mogu podeliti na greške usled:

-definisanja graničnih stepena slobode

-definisanja spoljnjeg opterećenja.

Pri statičkoj i dinamičkoj analizi je potrebno definisati stepene slobode čije je kretanje ograničeno (oslonci) i spoljnje opterećenje.U slučaju definisanja oslonaca, greške mogu da se jave zbog:

a) netačnog položaja čvorova čiji su stepeni slobode ograničeni,

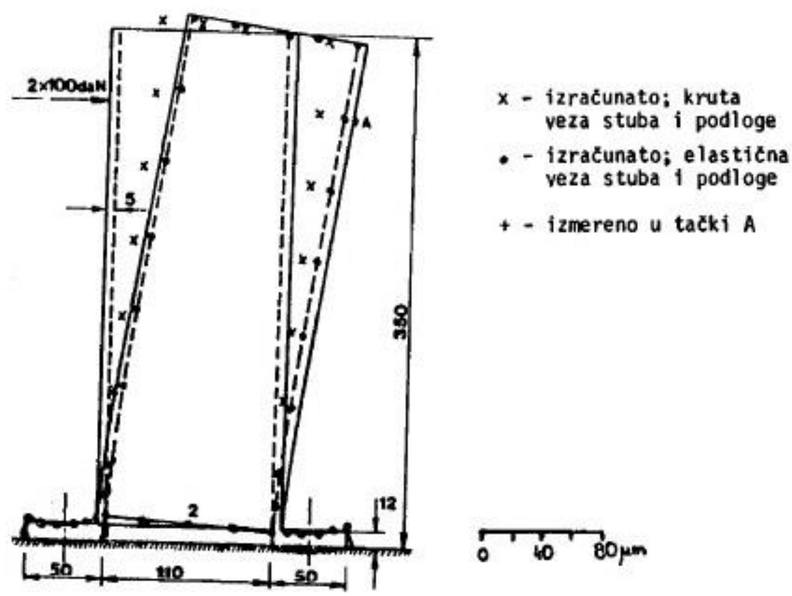
b) ograničavanja pogrešnih stepena slobode

c) zanemarivanja uticaja elastičnosti spoja posmatranog dela strukture sa okolnim delovima.

Prve dve greške (a,b) mogu lako da se otkriju i otklone, mada u suprotnom njihov uticaj na rezultate može da bude fatalan. Zanemarivanje uticaja elestičnosti spojeva posmatranog dela strukture sa ostalim delovima višedelne strukture je česta pojava. U takvim slučajevima je spojeve neophodno aproksimirati elastičnim elementima čija se krutost određuje iterativno. Pokazano je da na elastičnost spoja utiču:

- intenzitet i pravac opterećenja,
- vrsta spoja (klizni,valjčani,konusni),
- krutost spojenih delova strukture,
- stanje i kvalitet obrade površina u kontaktu,
- stanje prednaprezanja i krutost elemenata za prednaprezanje.

Kao ilustracija greške nastale zanemarivanjem uticaja elestičnosti spoja daje se primer stuba na slici 4.4., koji je vijcima pričvršćen za podlogu. Na slici je prikazan položaj stuba pod dejstvom opterećenja dobijen merenjem.



Sl. 4.4 Greška usled zanemarivanja uticaja elastičnog spoja pri proračunu deformacija stuba

Korišćenjem metode konačnih elemenata izvršen je proračun za dva modela stuba. Prvi model pretpostavlja krutu vezu između stuba i podloge, a drugi uzima u obzir i elestičnost spoja. Drugi model daje rezultate vrlo bliske izmerenim. Greška u pomeranju izazvana zanemarivanjem elastičnosti spoja iznosi 43 %.U slučaju definisanja opterećenja, pri statičkoj analizi, mogu da se jave greške zbog:

- netačnog položaja opterećenja
- netačnog intenziteta opterećenja
- netačne distribucije opterećenja (pritiska)
- netačnog temperaturnog polja.

Ako se vrši dinamička analiza greška može da se pojavi, pored gore navedenih razloga i zbog slabe aproksimacije prinudne sile.Pri termičkoj analizi, kako stacionarnoj, tako i nestacionarnoj, aproksimacija graničnih uslova je još veći problem, jer je cela površina strukture neprekidno podvrgnuta promenljivom uticaju okoline tokom vremena.

Pri dinamičkoj i nestacionarnoj termičkoj analizi je, pored ostalog, potrebno zadati i vrednosti promenljive polja za početni trenutak vremena. Pri tom može da se javi greška zbog aproksimacije početnih uslova. Krakteristika ove greške je da se smanjuje tokom uzastopnih vremenskih iteracija i da, u nekim slučajevima, posle izvesnog vremena može da se izgubi.Mehaničke i termičke karakteristike materijala strukture direktno utiču na rezultate analize. Greške aproksimacije karakteristika materijala nastaju zbog:

- netačnih podataka o karkteristikama materijala
- zanemarivanja ortotropnosti karakteristika materijala
- zanemarivanja promena karakteristika materijala sa promenom temperature.

GREŠKE DISKRETIZACIJE

Pod diskretizacijom se podrazumeva deljenje modela strukture na niz odgovarajućih konačnih elemenata, pri čemu se posmatrani domen sa beskonačnim brojem stepena slobode zamenjuje diskretizovanim modelom, koji ima konačni broj stepena slobode. U procesu diskretizacije je potrebno:

- izvršiti izbor vrste konačnih elemenata kojim će se izvršiti diskretizacija
- odrediti veličinu i oblik pojedinih elemenata, odnosno položaj čvorova
- izvršiti numeraciju elemenata i čvorova.

Prvi korak u diskretizaciji posmatranog modela je izbor vrste konačnih elemenata kojim će se izvršiti diskretizacija. Najčešće se mreža sastoji od više različitih vrsta konačnih elemenata. Izbor zavisi od dimenzionalnosti problema (linijski, ravanski, osnosimetrični ili zapreminski) i od geometrijskog oblika strukture. Greške izbora vrste konačnog elementa koje mogu da se jave u ovoj fazi analize su:

- kombinovanje elemenata različite vrste (npr. osnosimetrični i zapreminski)
- izbor elementa koji ne odgovara obliku strukture (npr. primena zapreminskih elemenata umesto tanke ljuske za diskretizaciju tankozidnih struktura).

Greška aproksimacije promenljive polja vezana je za izbor tipa, odnosno vrste konačnih elemenata, čime se automatski bira i interpolaciona funkcija. Promenljiva polja se unutar konačnih elemenata aproksimira interpolacionim funkcijama, koje su najčešće polinomi. Stepen polinoma kod izoparametarskih elemenata, koji se najčešće koriste, zavisi od vrste elemenata, odnosno od broja čvorova na elementu. Viši stepen polinoma znači i bolju aproksimaciju promenljive polja, ali i veći broj stepena slobode, a time i skuplju analizu.S druge strane, izbor elemenata sa nižim stepenom polinoma (npr. sa linearnom interpolacionom funkcijom), pri istoj gustini mreže, dovodi do velike greške. Zbog toga pod pojmom fina ili gruba mreža ne treba podrazumevati samo gustinu mreže elemenata nego i stepen polinoma interpolacione funkcije. Finija mreža je ona koja bolje aproksimira promenljivu polja u strukturi. Sa pofinjenjem mreže dolazi do konvergencije rezultata dobijenih metodom konačnih elemenata tačnom rešenju.Problemu izbora optimalne mreže i konvergenciji rešenja posvećen je čitav niz radova.Za sada, međutim, još ne postoji metod kojim bi se “a priori” odredila optimalna mreža ili mreža koja bi garantovala neku limitiranu grešku u rezultatu. Većina predloženih metoda omogućuje da se na osnovu izvršene analize sa jednom ili više različitih mreža oceni greške i da se eventualno dobiju smernice za pofinjenje mreže.Nedostatak većine predloženih metoda je što zahtevaju veliko računarsko vreme i što se teško implementiraju u postojeće programe.

GREŠKE UNOSA PODATAKA

Pošto se proces modeliranja završi, potrbno je izvršiti pripremu podataka u obliku definisanom ulaznim formatom programa za analizu. Priprema podataka može da se vrši:

- ručno
- poluautomatski
- automatski.

Ručna pripema podataka, koja se gotovo svuda u svetu napušta, je izrazito podložna greškama. U ovom slučaju se ručno vrši proračun koordinata čvorova i numeracija čvorova i elemenata. Greške koje pri tome mogu da se jave su:

- greške u proračunu koordinata čvorova

- greške u numeraciji čvorova i elemenata
- greške u definisanju topologije elemenata
- greške u definisanju ostalih podataka (opterećenje, granični uslovi, materijal)
- greške pri unošenju podataka (lapsusi)
- greška zaokruživanja nastala ograničenim ulaznim formatom.

Većinu ovih grešaka nije jednostavno uočiti, a u slučajevima velikih struktura je praktično i nemoguće otkriti. Većina programa za analizu zato ima detaljnu proveru ulaznih podataka. Međutim, ovakva kontrola ne može da ukaže npr. na grešku u vrednosti koordinate ili grešku u topologiji. Ukoliko zbog neke od navedenih grešaka ne dođe do prekida rada programa (fatalne greške), postoji postoji opasnost da analitičar ostane u uverenju da su rezultati analize tačni. Veliku pomoć u kontroli ulaznih podataka imaju programi za vizuelizaciju mreže (bilo na ploteru ili na grafičkom terminalu).Poluautomatski način pripreme podataka podrazumeva postojanje pre-procesora, kojim se definiše oblik, geometrija strukture kao i opterećenje i granični uslovi. Ukoliko je prethodno model dobro pripremljen, greške koje mogu da se jave ovim načinom pripreme podataka su:

- greške pri unošenju ulaznih podataka (lapsusi)
- greška zaokruživanja nastala ograničenjem ulaznog formata.

Tokom automatskog načina pripreme podataka mogu da se jave iste greške kao i pri poluautomatskom načinu. Ukoliko se za generisanje mreže konačnih elemenata koristi neki CAD paket, moguće je da dođe i do greške u fazi transfera podataka iz formata CAD

GREŠKE PRORAČUNA

Nakon što se izvrši priprema podataka, startuje se izvođenje programa za analizu.Karakteristika ove faze analize je da tokom nje ne postoji nikakav uticaj analitičara na rezultate, pa nema ni grešaka prouzrokovanih od strane analitičara. Jedini činioci koji učestvuju u fazi proračuna su program i računar, pa se greške proračuna mogu podeliti na:

- greške programa i
- greške računara.

GREŠKE PROGRAMA

Program za analizu metodom konačnih elemenata treba posmatrati kao kodirani algoritam (korišćenjem nekog programskog jezika npr. FORTRAN, PASCAL), za neku vrstu analize struktura (statičku, dinamičku, termičku), zasnovan na metodi konačnih elemenata. Kao takav, program ne generiše samo greške koje proističu iz prirode metode konačnih elemenata. Dakle, greške programa je dalje moguće podeliti na:

- greške kodiranja i
- greške metode.

Greške kodiranja su posledica propusta u fazi programiranja ili implementiranja programa na određenom računaru. Ovakve greške su česte kod novih izdanja programa, ali se većina njih može otkriti u fazi testiranja programa. Greške kodiranja mogu biti:

- lapsusi (bugs) i
- greške instalacije, koje najčešće potiču zbog različite interpretacije

Greške metode nastaju zbog aproksimativne prirode metode konačnih elemenata. Mada su evidentna stalna poboljšanja ove metode, greške nastale zbog prirode metode i dalje mogu bitno da utiču na tačnost rezultata. Greške metode se mogu podeliti na:

- greške formulacije metode konačnih elemenata
- greške u integraciji distribuisanih opterećenja (linijskih, površinskih i zapreminskih)
- greške interpolacije nelinearnih karakteristika materijala
- greške integracije nelinearnih karakteristika
- greške rešavanja (posebno pri nestacionarnim analizama kada je proces rešavanja iterativan).

GREŠKE RAČUNARA

Poznato je da računar prilikom obrade realnih brojeva koristi određen memorijski prostor kojim je definisan broj značajnih cifara nekog broja (recimo sedam). Zbog toga prilikom obrade dolazi do odsecanja viška cifara (zaokruživanja). Ovo odsecanje obično nije opasno. Međutim, kada se radi oduzimanje i sabiranje brojeva sa velikom razlikom u redu veličina, može da se izazove slabouslovljenost sistema zbog zaokruživanja cifara.Greška izazvana slabouslovljenošću sistema može da bude vrlo velika i karakteristična je za modele kod kojih su elementi vrlo mali ili postoji velika razlika u dimenzijama elemenata.

GREŠKE INTERPRETACIJE

Čak i kada se analiza izvrši korektno može se govoriti o greškama u rezultatu, jer pod rezultatom, u stvari, treba poimati analitičarevo viđenje rezultata. Ovde treba razlikovati slučaj kada analitičar interpretira rezultate, od slučaja interpretiranja post-procesorom.U slučaju kada ne postoji post-procesor, analitičar na osnovu numeričkih rezultata stvara sliku o polju promenljive. Međutim, kod složenih struktura ovo je vrlo težak posao, pre svega zbog obimnosti rezultata. Tom prilikom se mogu načiniti različiti previdi, pa se ovaj način interpretacije napušta.Korišćenje post-procesora, osim što skraćuje vreme analize rezultata i olakšava izradu izveštaja, zbog prirode ljudskih percepcionih mogućnosti, daje pravu sliku o polju promenljive. Međutim, prilikom interpretacije rezultata u vizuelnom obliku može da dođe do pojave grešaka zbog:

- nesavršenosti grafičke opreme (npr. konačan broj boja na terminalu ili ploteru)
- uzorkovanja veličina polja u pogrešnim tačkama i

ANALIZA POTENCIJALNIH IZVORA GREŠAKA

Na osnovu napred iznete klasifikacije grešaka moguće je načiniti njihovu analizu. U tu svrhu načinjena je tabela potencijalnih izvora grešaka pri statičkoj analizi struktura metodom kanačnih elemenata. Ova tabela je prikazana na slici 5.26. Prvi cilj analize je da se vidi izvor pojedinih vrsta grešaka. Kao mogući izvori označeni su analitičar (A), program (P) i računar (R).Iz tabele se vidi da je uzrok svih grešaka u procesu idealizacije analitičar. Što se tiče procesa diskretizacije, glavni izvor grešaka je opet analitičar, mada je pri automatskoj generaciji mreže, program za generaciju odgovoran za pojavu grešaka vezanih za oblik i veličinu konačnih elemenata. Ono što ovde treba posebno podvući je da greške analitičara u fazi pripreme podataka mogu da budu fatalne po rezultate.Nakon pripreme i unosa podataka, uticaj analitičara na tok analize je zanemarljiv. To je i razlog što odgovornost za pojavu grešaka u fazi unosa podataka, proračuna i interpretacije uglavnom snose program i računar.Zajednička karakteristika grešaka izazvanih programom i računarom je da su one predvidljive i u procesu rešavanja istog problema daju jednake greške u rezultatu.Nasuprot tome, greške izazvane od strane analitičara su nepredvidljive i zavise od njegovog iskustva, ali i od njegovih eventualnih previda. To dovodi do toga da greške koje potiču od analitičara nisu predvidljive i mogu da se razlikuju od slučaja do slučaja.Zbog toga posebnu pažnju treba posvetiti metodama pripreme podataka koje će smanjiti mogućnost pojave grešaka u toj fazi, što je i cilj ovog rada.Poseban problem predstavlja mogućnost procene uticaja pojedinih pogrešnih aktivnosti na veličinu greške u rezultatima analize. Analizom literature može se doći do zaključka da se samo u malom broju slučajeva greška može proceniti pre analize. Iz tabele se vidi da je to moguće uglavnom za greške računara i greške interpretacije.   Nakon ove analize mora se postaviti pitanje mogućnosti i metoda eliminacije generacije grešaka. Može se očekivati da će se većina grešaka nastalih zbog računara smanjiti ili eliminisati daljim razvojem računara. Povećanje brzine rada računara, sa druge strane, omogućuje i primenu tačnijih algoritma i metoda za interpolaciju i integraciju, koje do sada nisu korišćene zbog velikog potrebnog procesorskog vremena.Na taj način će se izmenama programa doprineti smanjenju većine programski izazvanih grešaka.Kao najozbiljniji problem ostaju greške izazvane od strane analitičara. Obzirom da je ceo proces pripreme podataka, a posebno proces idealizacije, baziran na iskustvu analitičara, jedini način da se smanji uticaj analitičara na pojavu grešaka je da se uključi veštačka inteligencija kao pomoć u procesu odlučivanja tokom faze idealizacije. U tu svrhu se predlaže izgradnja ekspertnog sistema, koji će imati znanje eksperta - analitičara i koji će moći da generiše kvalitetan model za analizu metodom konačnih elemenata.

Analiza potencijalnih izvora grešaka pri statičkoj analizi struktura po MKE				Izvor			Procena	Metod eliminacije
				A	P	R		
Greške pripreme podataka	Idealizacije		Tip problema	+				VI
			Oblik strukture	+				VI
			Granični uslovi	+				VI
			Opterećenje	+				VI
			Krakteristike materijala	+				VI
	Diskretizacije		Izbor tipa konačnog elementa	+				VI
			Veličina elemenata	+	+		+	AL
			Oblik elemenata	+	+		+	AL
			Granični uslovi	+				
			Opterećenje	+				
Greške unosa podataka			Unos podataka	+				
			Zaokruživanje		+			AL
			Transfer		+			AL
Greške proračuna	Programske greške	Kodi-ranje	Programske greške (bagovi)		+			AL
			Instalacija		+	+		AL
		Greške metode	Formulacija MKE		+			AL
			Integracija distribuiranih opterećenja		+			AL
			Interpolacija nelinearnih karakt.mater.		+			AL
			Intergracija nelinearnih karakteristika		+			AL
			Rešavanje jednačine sistema		+			AL
	Greške računara		Odsecanje			+	+	T/VI
			Zaokruživanje			+	+	T/VI
Greške interpretacije			Grafički uređaj			+	+	T
			Uzorkovanje		+		+	AL
			Linearizacija		+		+	AL

Legenda: A-analitičar, P-program, R-računar, VI-veštačka inteligencija, AL-algoritam, T-tehnologija

Slika 4.5 Analiza potencijalnih izvora grešaka