

Ψηφιακές Επικοινωνίες 1

Όνοματεπώνυμο : Νικόλας Φιλιππάτος

ΑΜ: 1072754

Εργασία: 1η

Ημερομηνία: November 23, 2023

Ερωτημα 1

Χρησιμοποιείτε το παρακάτω ποίημα να υπολογίσετε και να απαντήσετε στα εξής:

```
Livin' easy
Lovin' free
Season ticket on a one way ride
Askin' nothin'
Leave me be
Takin' everythin' in my stride
Don't need reason
Don't need rhyme
Ain't nothin' that I'd rather do
Goin' down
Party time
My friends are gonna be there too
I'm on the highway to hell
On the highway to hell
Highway to hell
I'm on the highway to hell
No stop signs
Speed limit
Nobody's gonna slow me down
Like a wheel
Gonna spin it
Nobody's gonna mess me around
Hey satan
Payin' my dues
Playin' in a rockin' band
Hey mumma
Look at me
I'm on the way to the promised land
I'm on the highway to hell
Highway to hell
I'm on the highway to hell
Highway to hell
Don't stop me
I'm on the highway to hell
On the highway to hell
Highway to hell
I'm on the highway to hell(Highway to hell) I'm on the highway to hell
(Highway to hell) highway to hell
(Highway to hell) highway to hell
(Highway to hell)
And I'm goin' down
All the way
I'm on the highway to hell
```

1. Την αυτοπληροφορία των L, h, l, H, s, n και w .

1. Την αυτοπληροφορία των L, h, l, H, s, n και w .

Η αυτοπληροφορία των γραμμάτων βρίσκεται απο τον τυπο $I(x_i) = \log_2 \left(\frac{1}{P(x_i)} \right) = -\log_2 (P(x_i))$, οπου $P(x_i)$ είναι η πιθανότητα εμφανισης του γραμματος, και βρίσκεται απο τον τυπο $P(x) = \frac{\text{Number of Letter}}{\text{Number of all the characters}}$, το πηλικο του αριθμου των γραμμάτων σε ολο το τραγουδι N=417.

Για τον Υπολογισμό του παρακάτω πίνακα αξιοποιήθηκε το παρακάτω [python πρόγραμμα](#).

Letter	Count	P = Count/N	I= -log2(P)
L	5	0.00563063063063063	7.472487771462744
h	73	0.08220720720720721	3.6045913074700886
l	47	0.05292792792792793	4.239827014672469
H	10	0.01126126126126126	6.472487771462744
s	19	0.021396396396396396	5.54648835290652
n	56	0.06306306306306306	3.987060944292502
w	28	0.03153153153153153	4.987060944292502
Number of Letters	888		
Number of Symbols	179		
Number of Characters	1067		

Κώδικας - Ανανέωση

2. Την εντροπία της γλώσσας αυτού του κειμένου.

2. Την εντροπία της γλώσσας αυτού του κειμένου.

Η συνολική εντροπία της γλώσσας βρίσκεται απο τον τυπο: $H(X) = - \sum_{i=1}^N p_i \log_2(p_i)$

Θα βρουμε την πιθανοτητα εμφανισης και την αυτοπληροφορια για καθε χαρακτηρα του ποιηματος (εκτος του \n)

Letter	Count	P = Count/N	I= -log2(P)
L	5	0.004686035613870665	7.7374163659370625
i	48	0.04498594189315839	4.474381960103269
v	4	0.0037488284910965324	8.059344460824425
n	56	0.05248359887535145	4.2519895387668205
'	29	0.02717900656044986	5.201363465696853
	142	0.1330834114339269	2.909597341319743
e	74	0.06935332708528585	3.849891095195475
a	48	0.04498594189315839	4.474381960103269
s	19	0.01780693533270853	5.811416947380839
y	36	0.033739456419868794	4.889419459382112
o	65	0.06091846298031865	4.036976647795971
f	2	0.0018744142455482662	9.059344460824425
r	15	0.014058106841611996	6.152453865215906
S	2	0.0018744142455482662	9.059344460824425
t	57	0.053420805998125584	4.226454446659683
c	2	0.0018744142455482662	9.059344460824425
k	6	0.005623242736644799	7.474381960103269

Letter	Count	P = Count/N	I= -log2(P)
w	28	0.026241799437675725	5.2519895387668205
d	19	0.01780693533270853	5.811416947380839
A	4	0.0037488284910965324	8.059344460824425
h	73	0.06841611996251172	3.8695199019444075
m	25	0.023430178069353328	5.4154882710497
b	5	0.004686035613870665	7.7374163659370625
T	1	0.0009372071227741331	10.059344460824425
D	3	0.0028116213683223993	8.474381960103269
l	11	0.010309278350515464	6.599912842187128
G	2	0.0018744142455482662	9.059344460824425
P	3	0.0028116213683223993	8.474381960103269
M	1	0.0009372071227741331	10.059344460824425
g	25	0.023430178069353328	5.4154882710497
l	47	0.044048734770384255	4.5047556091467875
O	2	0.0018744142455482662	9.059344460824425
H	10	0.00937207122774133	6.7374163659370625
N	3	0.0028116213683223993	8.474381960103269
p	5	0.004686035613870665	7.7374163659370625
u	3	0.0028116213683223993	8.474381960103269
(4	0.0037488284910965324	8.059344460824425
)	4	0.0037488284910965324	8.059344460824425
Number of Letters	1067		
Number of Symbols	179		
Number of Characters	1246		

$$H(X) = - \sum_{i=1}^{38} p_i \log_2(p_i) = 4.310815867404019$$

Αρα τελικά έχω εντροπία $H(x) = 4.310815867404019$ bits/symbol

3. Συμπεράσματα

3. Τι συμπεράσματα βγάζετε σχετικά με την εμφάνιση των παραπάνω συμβόλων παρατηρώντας την αυτοπληροφορία τους;

Η πιθανότητα εμφάνισης των γραμμάτων είναι αντιστροφώς αναλογη με την πληροφορία που περιεχει. Όσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα εμφανισης τους, τόσο μικροτερη θα είναι η αυτο-πληροφορια που κουβαλανε.

Είναι πιο κερδοφόρο ένα συχνο γεγονός να παρεχει λιγοτερη πληροφορια.

Ερώτημα 2

Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση $I(X;Y)=I(Y;X)$

assignment-1-2-math

$$I(X;Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x,y) \cdot \log \left(\frac{P(y|x) \cdot P(x)}{P(x) \cdot P(y)} \right) dx dy$$

$$I(X;Y) = I(Y;X) \iff$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x,y) \cdot \log \left(\frac{P(y|x) \cdot P(x)}{P(x) \cdot P(y)} \right) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(y,x) \cdot \log \left(\frac{P(x|y) \cdot P(y)}{P(x) \cdot P(y)} \right) dx dy \iff$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x,y) \cdot [\log(P(y|x) \cdot P(x)) - \log(P(x) \cdot P(y))] dx dy = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(y,x) \cdot [\log(P(x|y) \cdot P(y)) - \log(P(x) \cdot P(y))] dx dy \iff \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x,y) \cdot \log(P(y,x)) dx dy - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x,y) \cdot \log(P(y) \cdot P(x)) dx dy = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(y,x) \cdot \log(P(y,x) \cdot P(y)) dx dy - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(y,x) \cdot \log(P(y) \cdot P(x)) dx dy \iff \end{aligned}$$

$$\iff 0 = 0$$

Ερώτημα 3

Μία διακριτή πηγή παράγει σύμβολα 0 και 1 και η πιθανότητα εμφάνισης του 0 είναι 0,35.

Τα σύμβολα μεταδίδονται μέσα από ένα κανάλι το οποίο αλλοιώνει το 0 σε 1 με πιθανότητα 0,25 και το 1 σε 0 με πιθανότητα 0,10.

Να υπολογιστούν:

1. Η αυτοπληροφορία κάθε συμβόλου και η εντροπία της πηγής.

1. Η αυτοπληροφορία κάθε συμβόλου και η εντροπία της πηγής.

$$P(x = 0) = 0.35, P(x = 1) = 1 - P(x = 0) = 0.65$$

Εφόσον η πηγή εμφανίζει 0 με πιθανότητα 0.35, τότε αν X η τυχαία τιμή μεταβλητή που είναι εισοδος στο κανάλι, τότε $P(x=0)=0.35$

Επειδή η πηγή παραγει μονο 0 ή 1, τότε ισχυει η σχεση $P(x=1) = 1 - P(x=0) = 0.65$.

Επισης η πιθανοτητα αλλοιωσης του 0 στην εισοδο σε 1 στην εξοδο και αντιστοιχα για την αλλοιωση του 1 σε 0, εκφραζει τις εξης δεσμευτικες πιθανοτητες αν Y η τ.μ. που περιγραφει την εξοδο του

$$P(Y = 1|X = 0) = 0.25 \text{ ενω } P(Y = 0|X = 1) = 0.1$$

Αντιστοια θα εχουμε οτι η πιθανοτητα να μην υποστουν αλλοιωση, θα ειναι ιση με το συμπληρωμα της, δηλαδη:

$$P(Y = 1|X = 1) = 1 - P(Y = 0|X = 1) = 0.75 \text{ ενω } P(Y = 0|X = 0) = 1 - P(Y = 1|X = 0) = 0.9$$

Απο τον Νομο του Bayes, μπορουμε να βρουμε τα $P(Y=y)$ ως εξης

$$P(Y = 0) = P(Y = 0|X = 0)P(X = 0) + P(Y = 0|X = 1)P(X = 1) = 0.9 \cdot 0.35 + 0.25 \cdot 0.65 = 0.4775$$

$$P(Y = 1) = P(Y = 1|X = 0)P(X = 0) + P(Y = 1|X = 1)P(X = 1) = 0.1 \cdot 0.35 + 0.75 \cdot 0.65 = 0.52225$$

Βρισκουμε τις αυτοπληροφοριες του 0 και του 1 :

Letter	P	I = -log ₂ (P)
0	0.35	1.5145731728297582
1	0.65	0.6214883767462701

Και την εντροπία :

$$H(X) = - \sum_{i=1}^2 p_i \log_2(p_i) = 0.934068055375491$$

$$H(x) = 0.934068055375491 \text{ bits/symbol}$$

2. Η μέση αμοιβαία πληροφορία μεταξύ εισόδου και εξόδου του καναλιού.

2. Η μέση αμοιβαία πληροφορία μεταξύ εισόδου και εξόδου του καναλιού.

Η μέση αμοιβαία πληροφορία βρίσκεται από τον τύπο :

$$I(X;Y) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 P(x_i, y_j) \cdot I(x_i : y_j)$$

Από το θεώρημα Bayes γνωρίζουμε ότι $P(y_j|x_i) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)}$

Αρα το $I(X;Y)$ γίνεται :

$$I(X;Y) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 P(y_j|x_i) \cdot P(y_j) \cdot I(x_i : y_j)$$

Επιπλέον έχουμε ότι $I(x_i : y_j) = I(y_j : x_i) = \log_2 \left(\frac{P(y_j|x_i)}{P(y_j)} \right)$

Έχουμε υπολογίσει ήδη την τιμή για $P(y=0) = 0.4775$ και $P(y=1) = 0.5225$

Οι τιμές των ενδεχομένων :

P	Value
P(X=0)	0.35
P(X=1)	0.65
P(Y=0)	0.4775
P(Y=1)	0.5225
P(Y=0 X=0)	0.9
P(Y=0 X=1)	0.1
P(Y=1 X=0)	0.25
P(Y=1 X=1)	0.75

$$I(y=0; x=0) = \log_2 \left(\frac{P(y=0|x=0)}{P(y=0)} \right) = \log_2 \left(\frac{0.9}{0.4775} \right) = 0.9144242682939262$$

$$I(y=0; x=1) = \log_2 \left(\frac{P(y=0|x=1)}{P(y=0)} \right) = \log_2 \left(\frac{0.1}{0.4775} \right) = -2.255500733148386$$

$$I(y=1; x=0) = \log_2 \left(\frac{P(y=1|x=0)}{P(y=1)} \right) = \log_2 \left(\frac{0.25}{0.5225} \right) = -1.063502942306158$$

$$I(y=1; x=1) = \log_2 \left(\frac{P(y=1|x=1)}{P(y=1)} \right) = \log_2 \left(\frac{0.75}{0.5225} \right) = 0.5214595584149982$$

Οπότε έχουμε :

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= P(y=0|x=0) * P(x=0) * I(y=0|x=0) + \\ &P(y=0|x=1) * P(x=1) * I(y=0|x=1) + \\ &P(y=1|x=0) * P(x=0) * I(y=1|x=0) + \\ &P(y=1|x=1) * P(x=1) * I(y=1|x=1) = \\ &(0.9) * (0.35) * (0.9144242682939262) + \\ &(0.1) * (0.65) * (-2.255500733148386) + \\ &(0.25) * (0.35) * (-1.063502942306158) + \\ &(0.75) * (0.65) * (0.5214595584149982) = \\ &0.3025911241334645 \end{aligned}$$

Η μέση αμοιβαία πληροφορία μεταξύ εισόδου και εξόδου του καναλιού είναι :

$I(X;Y) = 0.3025911241334645$ bits