Ψηφιακές Επικοινωνίες 1

Ονοματεπώνυμο : Νικόλας Φιλιππάτος
AM: 1072754
Εργασία: 5η

Ερωτήσεις

1 Υπολογίστε την αυτοπληροφορία του κάθε συμβόλου και την εντροπία της πηγής

1. Υπολογίστε την αυτοπληροφορία του κάθε συμβόλου και την εντροπία της πηγής.

Η αυτοπληροφορία των συμβόλων βρισκεται απο τον τυπο $I(x_i) = \log_2\left(\frac{1}{P(x_i)}\right) = -\log_2\left(P(x_i)\right)$, οπου $P(x_i)$ ειναι η πιθανοτητα εμφανισης του γραμματος, και βρισκεται απο τον τυπο $P(x) = \frac{Count\ of\ Symbol}{Number\ of\ all\ the\ Symbols}$, το πηλικο του αριθμου των γραμμάτων σε ολη τη φράση είναι N=72.

Letter	Count	P = Count/N	I= -log2(P)
α	22	0.306	1.71
β	14	0.194	2.363
γ	16	0.222	2.17
δ	20	0.278	1.848
Number of symbols	72		

Η εντροπία του κειμένου :

Η συνολική εντροπία της πηγής βρίσκεται απο τον τυπο: $H(X) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2(p_i)$

Θα βρουμε την πιθανοτητα εμφανισης και την αυτοπληροφορια για καθε χαρακτηρα του κειμένου

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{4} p_i \log_2(p_i)$$

$$H(X) = -0.306 * log_2(0.306) - 0.194 * log_2(0.194) - 0.222 * log_2(0.222) - 0.278 * log_2(0.278) = 1.978$$

H(x) = 1.978

2 Κωδικοποιήστε την έξοδο της πηγής με ένα κώδικα σταθερού μήκους.

2. Κωδικοποιήστε την έξοδο της πηγής με ένα κώδικα σταθερού μήκους.

Τα σύμβολα του κειμενου μας ειναι 4 οποτε ο κωδικας σταθερους μηκους δημιουργειται ως εξης :

Symbol	Code
α	00
β	01
γ	10
δ	11

Επομένως η εξοδος της πηγης :
αββββαγγγαγαγαβγαβααβααδαδαδαδβδδδγβαβδγαγδβααβγδδδαββγγγαααδδδδαδδγδγδγ

Κωδικοποιείται ως :
0001010101001010100010001000011000010000010000110011001100110111111110010001111000101101000001101111110001011010100000001111111001111011101110

3 Εξοδο της πηγής ανά ζεύγη συμβόλων με βέλτιστο κώδικα μεταβλητού μήκους

3. Κωδικοποιήστε την έξοδο της πηγής ανά ζεύγη συμβόλων με ένα βέλτιστο κώδικα μεταβλητού μήκους.

Θα αξιοποιησουμε την κωδικοποίηση Huffman:

Ξέρουμε ότι :

Γράμμα	Πιθανότητα Εμφάνισης
α	0.306
β	0.194
γ	0.222
δ	0.278

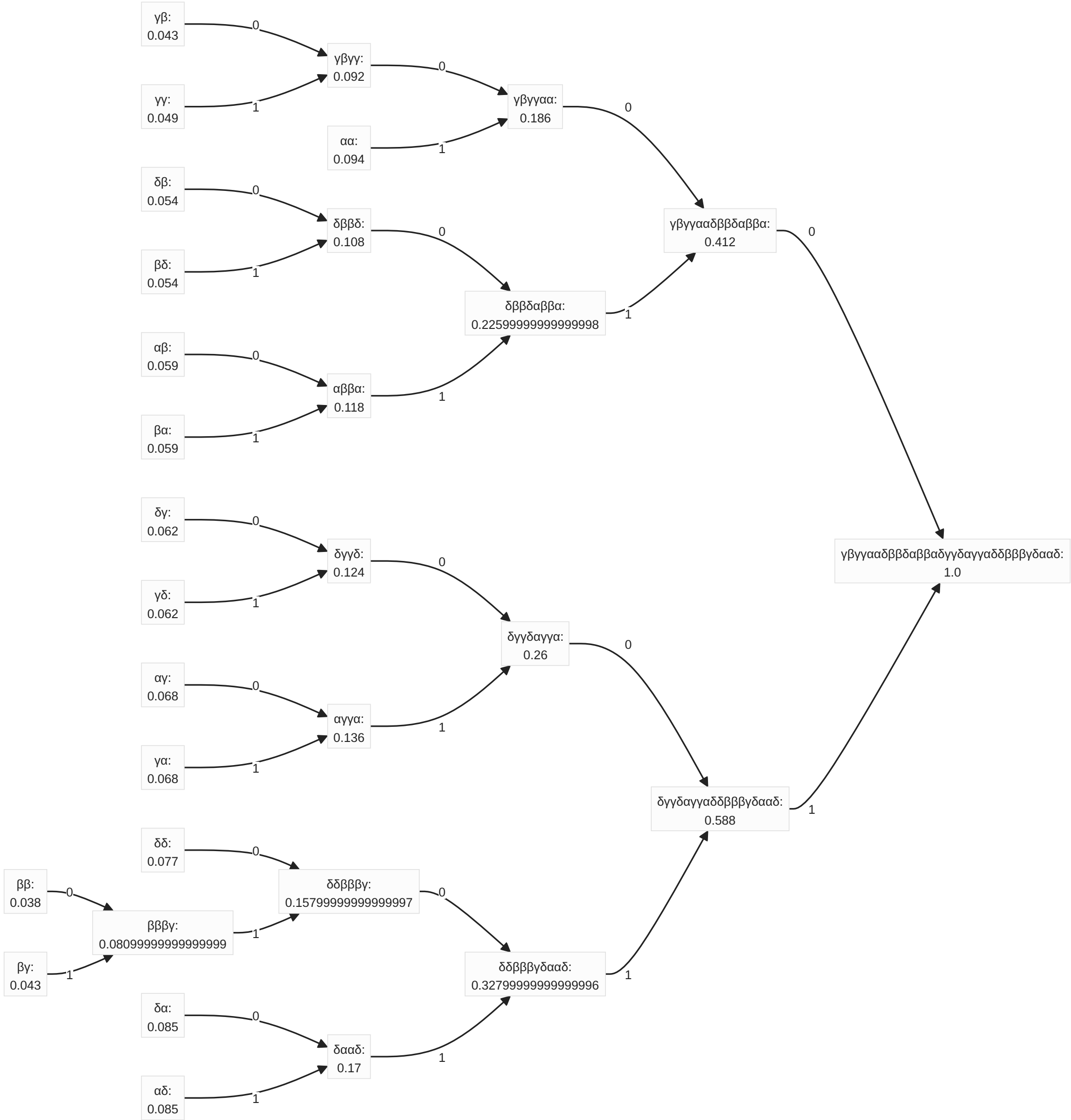
Οπότε θα βρουμε την πιθανότητα εμφάνισης σε συνδυασμό ανα 2:

Combination	Probability
αα	0.094
αβ	0.059
αγ	0.068
αδ	0.085
βα	0.059
ββ	0.038
βγ	0.043
βδ	0.054
γα	0.068
γβ	0.043
γγ	0.049
γδ	0.062
δα	0.085
δβ	0.054
δγ	0.062
δδ	0.077

Combination	Code
αα	001
αβ	0110
αγ	1010
αδ	1111
βα	0111
ββ	11010
βγ	11011
βδ	0101
γα	1011
γβ	0000
γγ	0001
γδ	1001
δα	1110
δβ	0100
δγ	1000
δδ	1100

Για να βγάλουμε τον πίνακα Combination|Code δημιουργηθηκε το παρακάτω δέντρο huffman.
Ξεκινώντας απο το μικρότερη πιθανότητα εμφάνισης, δημιουργουσαμε ζευγαρια με συνολικη πιθανοτητα το αθροισμα των επι μερους, και επαναλαμβαναμε την ιδια διαδικασια μεχρι που φτασαμε σε ενα ζευγαρι που εχει πιθανότητα 1.0 .
Ξεκιναμε απο το τέλος του δεντρου και ακολουθουμε τα 0 και 1 για να βγαλουμε την κωδικοποιηση του καθε ζεύγους.

assignment-5-huffman-tree-back



4 Υπολογίστε την αποδοτικότητα του κώδικα που προκύπτει από το ερώτημα 4

4. Υπολογίστε την αποδοτικότητα του κώδικα που προκύπτει από το ερώτημα 4.

Αποδοτικότητα ερωτήματος 2:

I	Log
I_α	1.71
I_β	2.363
I_γ	2.17
I_δ	1.848

$$H(X) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) \cdot I(x_i) = \\ I_\alpha \cdot P_\alpha + I_\beta \cdot P_\beta + I_\gamma \cdot P_\gamma + I_\delta \cdot P_\delta = \\ 1.71 \cdot 0.3055555555555556 + 2.363 \cdot 0.19444444444444445 + 2.17 \cdot 0.2222222222222222 + 1.848 \cdot 0.2777777777777778 = \\ 1.978$$

H(x) = 1.978

$$R = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) \cdot length_i = \\ 0.3055555555555556 \cdot 2 + 0.19444444444444445 \cdot 2 + 0.2222222222222222 \cdot 2 + 0.2777777777777778 \cdot 2 = \\ 2.0$$

R = 2.0

$$n = \frac{R}{H(x)} = \frac{1.978}{2.0} = 0.989 = 98.9\ \%$$

n = 0.989

Αποδοτικότητα ερωτήματος 3:

$$H(X) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) \cdot I(x_i) = \\ I_{aa} \cdot P_{aa} + I_{ab} \cdot P_{ab} + I_{ac} \cdot P_{ac} + I_{ad} \cdot P_{ad} + \\ I_{ba} \cdot P_{ba} + I_{bb} \cdot P_{bb} + I_{bc} \cdot P_{bc} + I_{bd} \cdot P_{bd} + \\ I_{ca} \cdot P_{ca} + I_{cb} \cdot P_{cb} + I_{cc} \cdot P_{cc} + I_{cd} \cdot P_{cd} + \\ I_{da} \cdot P_{da} + I_{db} \cdot P_{db} + I_{dc} \cdot P_{dc} + I_{dd} \cdot P_{da4} = \\ \\ 3.411 \cdot 0.094 + 4.083 \cdot 0.059 + 3.878 \cdot 0.068 + 3.556 \cdot 0.085 + 4.083 \cdot 0.059 + 4.718 \cdot 0.038 + \\ 4.54 \cdot 0.043 + 4.211 \cdot 0.054 + 3.878 \cdot 0.068 + 4.54 \cdot 0.043 + 4.351 \cdot 0.049 + 4.012 \cdot 0.062 + \\ 3.556 \cdot 0.085 + 4.211 \cdot 0.054 + 4.012 \cdot 0.062 + 3.699 \cdot 0.077 = \\ \\ 3.954$$

H(x) = 3.954

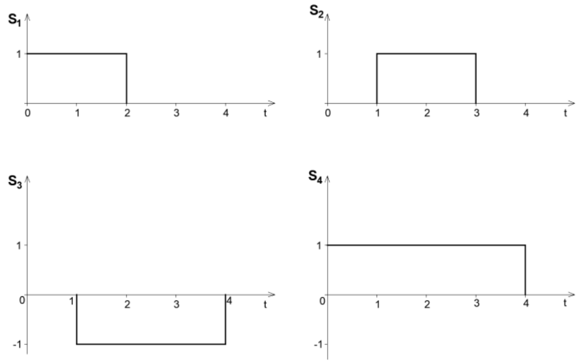
$$R = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) \cdot length_i = \\ 0.043 \cdot 4 + 0.049 \cdot 4 + 0.094 \cdot 3 + 0.054 \cdot 4 + \\ 0.054 \cdot 4 + 0.059 \cdot 4 + 0.059 \cdot 4 + 0.062 \cdot 4 + \\ 0.062 \cdot 4 + 0.068 \cdot 4 + 0.068 \cdot 4 + 0.077 \cdot 4 + \\ 0.038 \cdot 5 + 0.043 \cdot 5 + 0.085 \cdot 4 + 0.085 \cdot 4 = \\ 3.987$$

R = 3.987

$$n = \frac{R}{H(x)} = \frac{3.955}{3.988} = 0.992 = 99.2\ \%$$

n = 0.992

Για την μετάδοση χρησιμοποιούνται τα παρακατω σηματα



$$S_1 = \{(0.0),(0,1),(2,1),(2,0)\}$$
$$S_2 = \{(0,1),(1,1),(3,1),(3,0)\}$$
$$S_3 = \{(1,0),(1,-1),(4,-1),(4,0)\}$$
$$S_4 = \{(0,1),(4,1),(4,0)\}$$

5 Διανυσματικός χώρος των παραπάνω σημάτων, με την διαδικασία Gram Schmidt

5. Χρησιμοποιώντας την διαδικασία Gram Schmidt να βρεθεί ο διανυσματικός χώρος των παραπάνω σημάτων.

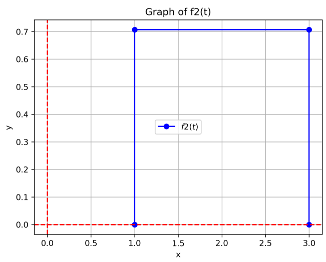
$f_2(t)$:

Απο το σημα 2 έχουμε ότι :

$$f_2(t) = \frac{S_2(t)}{\sqrt{E_2}}$$
$$E_2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_2(t)^2\,dt = \int_1^3 1^2\,dt = 2\cdot 1 = 2$$

Αρα (1):

$$f_2(t) = \frac{S_2(t)}{\sqrt{2}}$$



$S_3(t)$

$$f_3'(t) = S_3(t) - C_{32}\cdot f_2(t)$$
$$C_{32} = \int_{-\infty}^{\infty} S_3(t)\cdot f_2(t)\,dt = \int_1^3 (-1)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\,dt = -\sqrt{2}$$

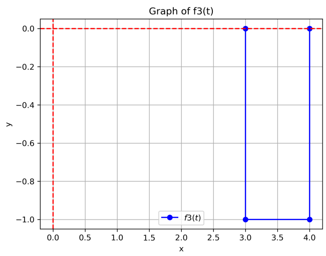
Άρα (2.1):

$$f_3'(t) = S_3(t) + \sqrt{2}f_2(t)$$
$$f_3'(t) = \frac{f_3'(t)}{\sqrt{E_2}}$$
$$E_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (f_3'(t))^2\,dt = \int_3^4 (-1)^2\,dt = 1$$

Άρα (2.2):

$$f_3(t) = f_3'(t)$$

Δηλαδη :



$S_4(t)$

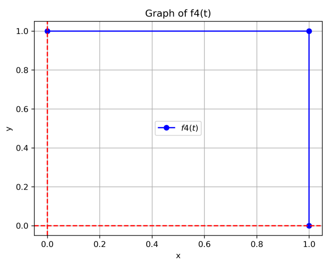
$$S_4(tt)$$
$$f_4'(t) = S_4(t) - C_{43}f_3(t) - C_{42}f_2(t)$$
$$C_{43} = \int_{-\infty}^{\infty} S_4 f_3\,dt = \int_3^4 1\cdot(-1)\,dt = -1$$
$$C_{42} = \int_{-\infty}^{\infty} S_4 f_2\,dt = \int_1^3 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\,dt = \sqrt{2}$$

Αρα (3.1):

$$S_4' = S_4 + f_3 - \sqrt{2}\cdot f_2$$
$$E_4' = \int_{-\infty}^{\infty} (f_4')^2\,dt = 1$$

Άρα (3.2):

$$f_4 = f_4'$$

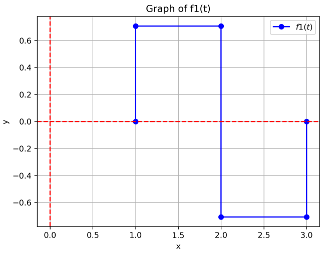


S_1

$$f_1'(t) = S_1(t) - C_{14}f_4(t) - C_{13}f_3(t) - C_{12}f_2(t)$$
$$C_{14} = \int_{-\infty}^{\infty} S_1\cdot f_4\,dt = \int_0^1 dt = 1$$

$$C_{13} = \int_{-\infty}^{\infty} S_1 f_3 \, dt = \int_0^2 0(1) \, dt + \int_3^4 0(-1) \, dt$$

$$C_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} S_1 f_2 \, dt = \int_0^2 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \, dt + 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Άρα (4.1):

$$f_1'(t) = S_1(t) - f_4(t) - \frac{\sqrt{2}}{2} f_2(t)$$

$$E_1' == \int_{-\infty}^{\infty} (f_1')^2 \, dt = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 dt + \int_2^3 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Άρα (4.2):

$$f_1 = \frac{f_1'}{\sqrt{E_1'}} = \sqrt{2} f_1'$$

Συνεπώς :

$$(1) \implies S_2(t) = \sqrt{2} f_2(t) = 0 \cdot f_1 + \sqrt{2} \cdot f_2 + 0 \cdot f_3 + 0 \cdot f_4$$

$$(2.1), (2,2) \implies S_3(t) = f_3(t) 0 \sqrt{2} f_2(t) = 0 \cdot f_1 - \sqrt{2} \cdot f_2 - f_3 + f_4$$

$$(3.1), (3.2) \implies S_4(t) = f_4 - f_3 + \sqrt{2} f_2 = 0 \cdot f_1 + \sqrt{2} \cdot f_2 - f_3 + f_4$$

$$(4.1), (4.2) \implies S_1(t) = \frac{f_1}{\sqrt{2}} + f_4 + \frac{\sqrt{2}}{2} f_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} f_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot f_2 + 0 \cdot f_3 + 1 \cdot f_4$$

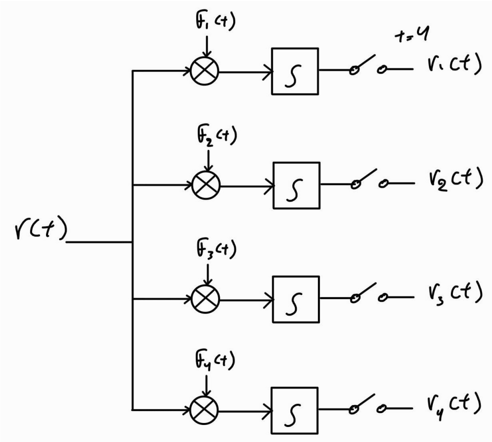
Άρα :

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

---

6 Να σχεδιαστεί ένας αποδιαμορφωτής ετεροσυσχετιστών

6. Να σχεδιαστεί ένας αποδιαμορφωτής ετεροσυσχετιστών.



$$r_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) f_j(t)\, dt$$

Συμφωνα με την αποσταση :

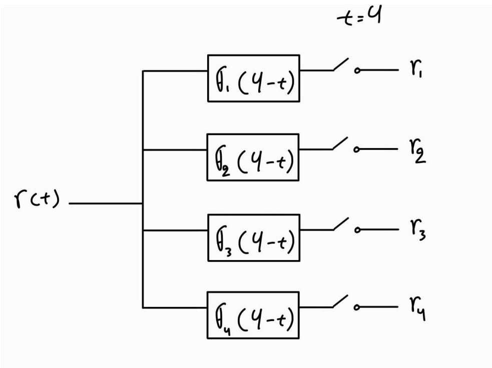
$$D(r, \overrightarrow{S_j}) = \sqrt{\sum_{i=4}^{4} (n - S_{ji})^2}$$

οποιο σημα S_j' εχει την μικροτερη αποσταση με το $r(t)$ ειναι το r(t)

$$S_3 = [S_{j1} \quad S_{j2} \quad S_{j3} \quad S_{j4}] \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

7 Να σχεδιαστεί ένας αποδιαμορφωτής προσαρμοσμένων φίλτρων.

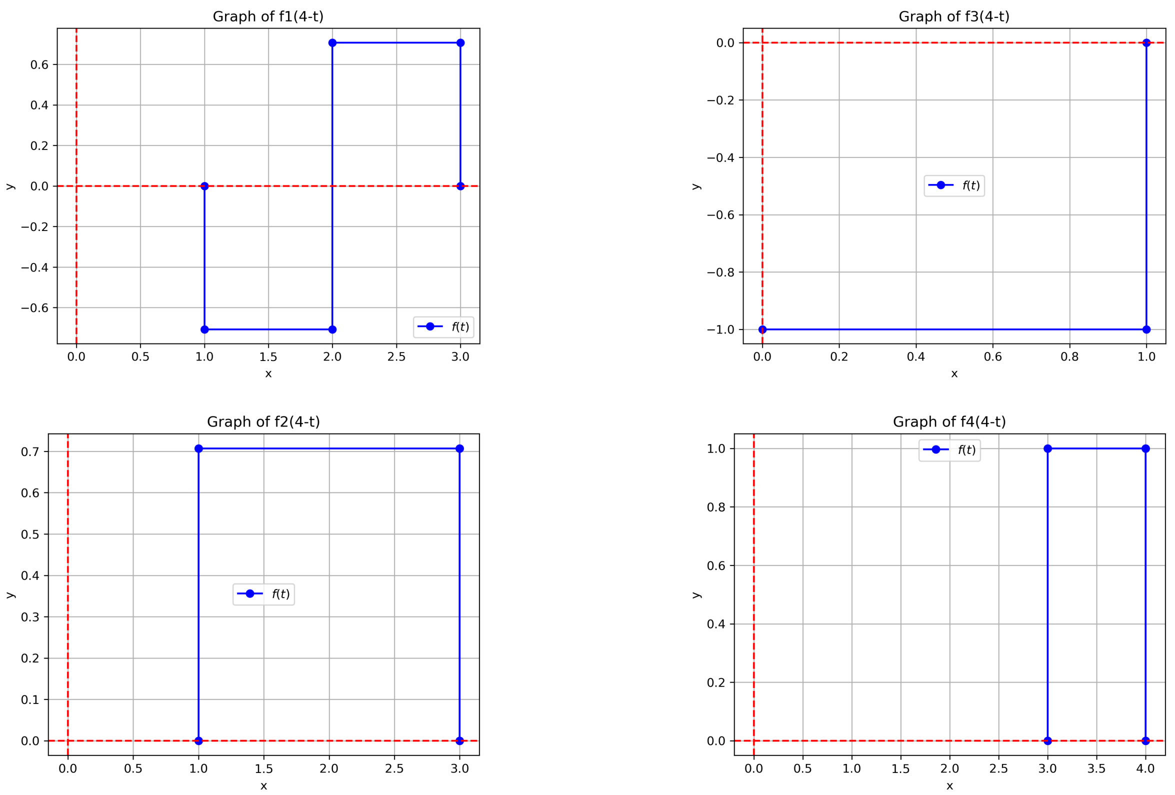
7. Να σχεδιαστεί ένας αποδιαμορφωτής προσαρμοσμένων φίλτρων.



$$\begin{aligned} h_1(t) &= f_1(4-t) \\ h_2(t) &= f_2(4-t) \\ h_3(t) &= f_3(4-t) \\ h_4(t) &= f_4(4-t) \end{aligned}$$

8 Να σχεδιαστούν οι κυματομορφές των συναρτήσεων μεταφοράς των προσαρμοσμένων φίλτρων.

8. Να σχεδιαστούν οι κυματομορφές των συναρτήσεων μεταφοράς των προσαρμοσμένων φίλτρων.

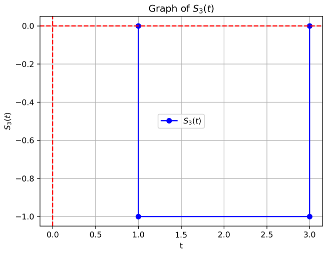


Έστω ο πομπός στέλνει το σήμα S3 και ότι ο θόρυβος στο κανάλι είναι μηδενικός.

9 Αν ο δέκτης χρησιμοποιεί αποδιαμορφωτή ετεροσυσχετιστών

9. Αν ο δέκτης χρησιμοποιεί αποδιαμορφωτή ετεροσυσχετιστών να βρεθεί αναλυτικά πως αυτός αποφασίζει ότι έχει σταλεί το S3.

Εχουμε το σημα S_3



Απο το ερωτημα 5 εχουμε τον εξης πινακα :

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

Οπότε το

$$S_3(t) = 0 \cdot f_1 - \sqrt{2} \cdot f_2 + 1 \cdot f_3 + 0 \cdot f_4$$

Απο την παραπανω σχεση μπορουμε να σημειωσουμε οτι το $r_1 = r_4 = 0$, $r_2 = -\sqrt{2}$ και $r_3 = 1$

$$r_2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_3(t) f_2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} -\sqrt{2} f_2(t) f_2(t)\,dt = \int_{1}^{3} -\sqrt{2} f_2^2(t)\,dt = \int_{1}^{3} -\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 dt = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$$

$$r_3 = \int_{-\infty}^{\infty} S_3(t) f_3(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot f_3(t) f_3(t)\,dt = \int_{3}^{4} 1 \cdot f_3^2(t)\,dt = \int_{3}^{4} 1 \cdot (-1)^2\,dt = 1$$

Οι ευκλείδιες αποστάσεις των σηματων απο το $r[0, 0\sqrt{2}, 1, 0]$

$$D_{13} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\right)^2 + (0-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{9}{2} + 1 + 1} = \sqrt{7}$$

$$D_{23} = \sqrt{(0-0)^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{2})^2 + (0-1)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$D_{33} = \sqrt{(0-0)^2 + (-\sqrt{2} + \sqrt{2})^2 + (0-1)^2 + (0-0)^2} = 0$$

$$D_{43} = \sqrt{(0-0)^2 + (-\sqrt{2} + \sqrt{2})^2 + (-1-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{13}$$

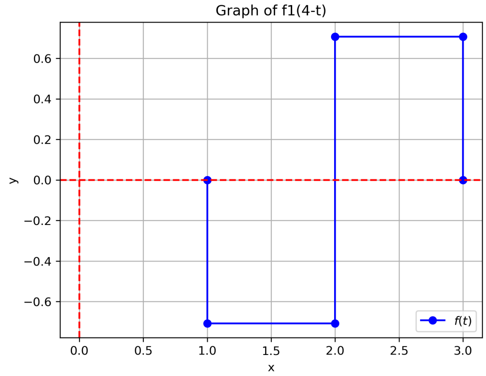
Απο τα αποτελεσματα η μικροτερη αποσταση ειναι η D_{33} , οποτε το S_3 ειναι αυτο που σταλθηκε πρωτο

10 Αν ο δέκτης χρησιμοποιεί αποδιαμορφωτή προσαρμοσμένων φίλτρων

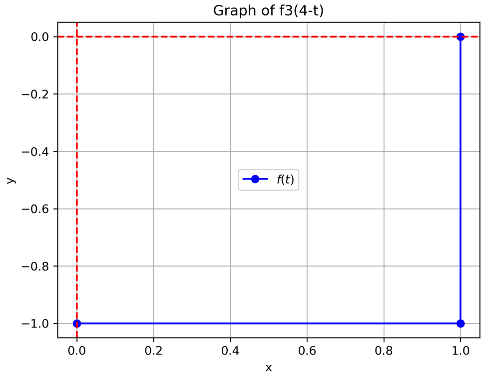
10. Αν ο δέκτης χρησιμοποιεί αποδιαμορφωτή προσαρμοσμένων φίλτρων να βρεθεί αναλυτικά πως αυτός αποφασίζει ότι έχει σταλεί το S3. (Θα πρέπει να υπολογιστούν αναλυτικά οι μαθηματικές εκφράσεις καθώς και να σχεδιαστούν οι απαραίτητες γραφικές παραστάσεις

Οι γραφικες παραστασεις που πηραμε απο το ερωτημα 8 :

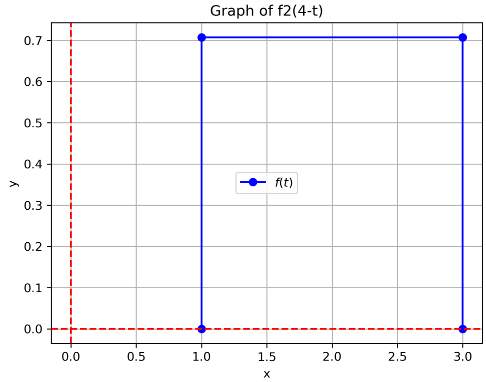
$h_1(t) = f_1(4-t)$



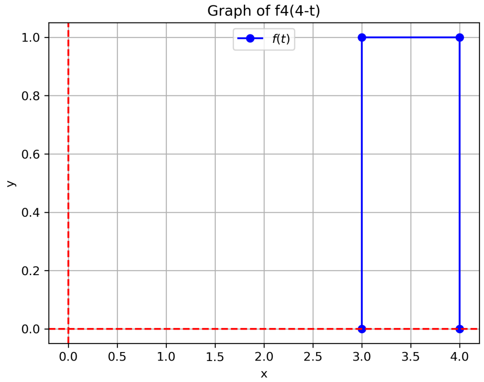
$h_3(t) = f_3(4-t)$



$h_2(t) = f_2(4-t)$



$h_4(t) = f_4(4-t)$



Θα υπολογισουμε την συνελιξη μεταξυ του $r(t)$ και των $h_1(t), h_2(t), h_3(t), h_4(t)$

$$r(t) * h_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) h_1(t-\tau)\, d\tau$$

Αρα για t = 4 :

$$r(t) * h_1(t) = (2-1)\left(\frac{\sqrt{2.}}{2}\right)(-1) + (3-2)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-1) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$r(t) * h_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) h_2(t-\tau)\, d\tau$$

Αρα για t = 4 :

$$r(t) * h_2(t) = (3-1)\frac{\sqrt{2}}{2}(-1) = -\sqrt{2}$$

$$r(t) * h_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) h_3(t-\tau)\, d\tau$$

Αρα για t = 4 :

$$r(t) * h_3(t) = [t - (t-1)] \cdot (-1)(-1) = 1$$

$$r(t) * h_4(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) h_4(t-\tau)\, d\tau$$

Αρα για t = 4 :

$$r(t) * h_4(t) = 0$$

Ψαχνουμε να βρουμε το σημα με την μεγαλυτερη τιμη, οποτε απο τις συνελιξεις μπορουμε να συμπερανουμε οτι στον πομπο εφτασε το 3ο σημα.