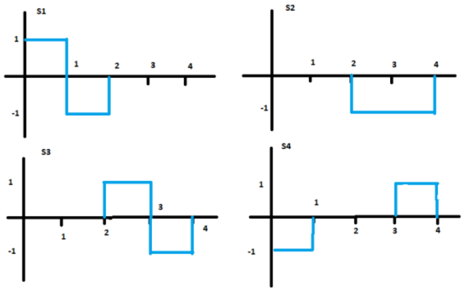
Ψηφιακές Επικοινωνίες 1

Ονοματεπώνυμο : Νικόλας Φιλιππάτος
ΑΜ: 1072754
Εργασία: 4η

Ερωτημα 1

α Διανυσματικος χωρος και Διανυσματικες εκφρασεις των σηματων.

1. Με χρηση της διαδικασια Gram Schmidt να βρεθει ο διανυσματικος χωρος των παρακατω τεσσαρων σηματων και οι διανυσματικες εκφρασεις των σηματων.



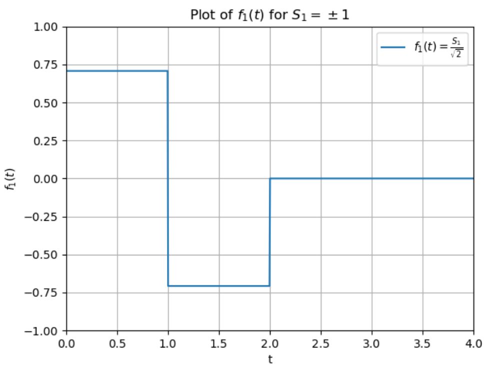
Με βάση το $S_1(t)$ ως βάση

$$f_1 = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}}$$

Όπου εχουμε το

$$E_1 = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_1(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} (s_1(t))^2dt = \int_0^1 (1)^2dt + \int_1^2 (-1)^2dt = 2$$

Επομένως έχουμε το f1 : $f_1(t) = \frac{s_1}{\sqrt{2}}$



Για το S2 :

$$f_2'(t) = s_2(t) - c_{21} \cdot f_1(t)$$

Ξερουμε οτι c_{21} :

$$c_{21} = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t) \cdot f_1(t)dt = \int_0^2 0 \cdot f_1(t)dt = 0$$

Επομένως το $\overrightarrow{s_2}$ ειναι $\perp$ στο $\overrightarrow{f_1}$

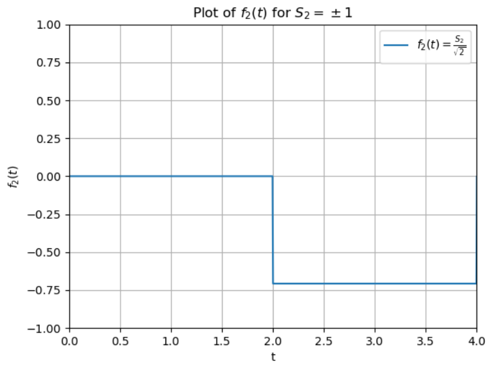
$$f_2'(t) = s_2 \implies f_2(t) = \frac{f_2'(t)}{\sqrt{E_2'}}$$

$$E_2' = \int_{-\infty}^{\infty} (f_2'(t))^2dt = \int_2^4 (-1)^2dt = 2$$

Άρα το

$$f_2(t) = \frac{f_2'(t)}{\sqrt{E_2'}} = \frac{s_2}{\sqrt{2}}$$

$f_2(t) = \frac{s_2}{\sqrt{2}}$



Για το s_3 :

$$f_3' = s_3 - C_{32} \cdot f_2 - c_{31} \cdot f_1$$

Οπου

$$c_{32} = \int_{-\infty}^{\infty} s_3(t) \cdot f_2(t) dt =$$
$$\int_0^2 0 \cdot 0 dt + \int_2^3 1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) dt + \int_3^4 -1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) dt =$$
$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot [3-2] + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot [4-3] = 0$$

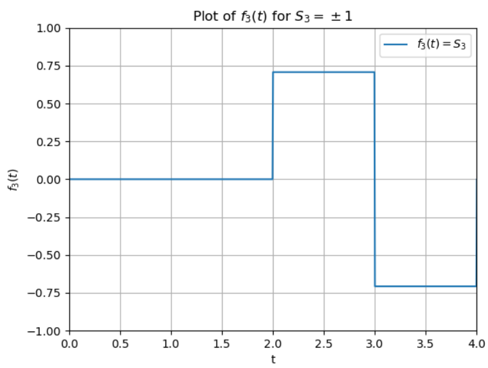
Απο αυτό συμπεραίνουμε οτι το S3 και το f2 ειναι κάθετα μεταξυ τους

Επομένως το $\overrightarrow{s_3}$ ειναι $\perp$ στο $\overrightarrow{f_2}$

$$c_{31} = \int_{-\infty}^{\infty} s_3(t) \cdot f_1(t) dt =$$
$$\int_0^2 0 \cdot f_1(t) dt + \int_2^4 s_3(t) \cdot 0 dt = 0$$

Επομένως το f_3
$f_3' = s_3$ και $f_3 = \frac{f_3'}{\sqrt{E_3'}}$

$$E_3' = \int_{-\infty}^{\infty} s_3(t) \cdot s_3(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (s_3(t))^2 dt =$$
$$\int_2^3 (1)^{2\,dt} + \int_3^4 (-1)^2 \, dt = 2$$



Για το f_4'

$$f_4' = s_4 - c_{43} \cdot f_3 - c_{42} \cdot f_2 - c_{41} \cdot f_1$$

Βρισκουμε τα c_{43}, c_{42}, c_{41}

$$c_{43} = \int_{-\infty}^{\infty} s_4(t) \cdot f_3(t) \, dt = \int_0^1 (-1) \cdot 0 \, dt + \int_1^2 0 \cdot 0 \, dt +$$
$$\int_2^3 0 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) dt + \int_3^4 1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) dt = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c_{42} = \int_{-\infty}^{\infty} s_4(t) \cdot f_2(t)\, dt =$$
$$\int_0^1 (-1) \cdot 0\, dt + \int_1^2 0 \cdot 0\, dt +$$
$$\int_2^3 0 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) dt + \int_3^4 1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) dt = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c_{41} = \int_{-\infty}^{\infty} s_4(t) \cdot f_1(t)\, dt = \int_0^1 (-1) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) dt + \int_1^2 0 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) dt +$$
$$\int_2^3 0 \cdot 0\, dt + \int_3^4 1 \cdot 0\, dt = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα

$$f_4' = s_4 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot f_3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot f_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot f_1$$
$$E_4' = \int_{-\infty}^{\infty} f_4'(t) \cdot f_4'(t) dt =$$
$$\int_0^1 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 dt + \int_1^2 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 dt +$$
$$\int_2^3 0\, dt + \int_3^4 0\, dt = \frac{1}{2}$$

Όπου $E_4' = \frac{1}{2}$

$$f_4 = \frac{f_4'}{\sqrt{E_4'}}$$

$$s_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} f_4 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot f_3 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot f_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot f_1$$

Άρα $f_4 = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

Εχουμε βρει μεχρι τωρα οτι

$$f_1 = \frac{f_1'}{\sqrt{2}} = \frac{s_1}{\sqrt{2}} \implies s_1 = \sqrt{2} f_1 \implies$$
$$s_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

$$f_2 = \frac{f_2'}{\sqrt{2}} = \frac{s_2}{\sqrt{2}} \implies s_2 = \sqrt{2} f_2 \implies$$
$$s_2 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

$$f_3 = \frac{f_3'}{\sqrt{2}} = \frac{s_3}{\sqrt{2}} \implies s_3 = \sqrt{2} f_3 \implies$$
$$s_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

$$f_4 = \sqrt{2} \cdot f_4' \implies f_4' = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot f_4 \implies$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot f_4 = s_4 + \frac{\sqrt{2}}{2} f_3 + \frac{\sqrt{2}}{2} f_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} f_1 \implies$$
$$= s_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} f_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} f_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} f_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} f_4$$

$$s_4 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

Οπότε συνολικά δημιουργουμε τον πινακα :

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

β. Αρχη με αλλο σημα

2. Επαναλαβετε το παραπανω ερωτημα ξεκινωντας τη διαδικασια με διαφορετικο σημα απο αυτο του ερωτηματος α.

Με βάση το σημα s_2 ,ξερουμε $E_2 = 2$, αρα $f_1(t) = \frac{s_2(t)}{\sqrt{2}} \leftrightarrow s_2(t) = \sqrt{2} \cdot f_1(t)$

Για το s_1:

$$f_2'(t) = s_1(t) - c_{12} f_1(t) = s_1(t) - 0 \cdot f_1(t) = s_1(t)$$

$E_1' = 2$

$$f_2(t) = \frac{f_2'(t)}{\sqrt{E_1'}} = \frac{s_1(t)}{\sqrt{2}} \iff s_1(t) = \sqrt{2} \cdot f_2(t)$$

Για το s_3:

εχουμε $c_{31} = 0$, $c_{32} = 0$ οποτε

$$f_3'(t) = s_3(t) - c_{31} f_1(t) - c_{32} f_2(t) = s_3(t)$$

$E_3' = 2$

$$f_3(t) = \frac{f_3'}{\sqrt{E_3'}} = \frac{s_3(t)}{\sqrt{2}} \iff s_3(t) = \sqrt{2} f_3(t)$$

Για το s_4 :

Εχουμε τα $c_{43} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, c_{42} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, c_{41} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$f_4' = s_4 - c_{43} \cdot f_3 - c_{42} \cdot f_2 - c_{41} \cdot f_1$$

$E_4' = \frac{1}{2}$

$$f_4 = \frac{f_4'}{\sqrt{E_4'}} \iff s_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} f_4 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot f_3 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot f_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot f_1$$

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

γ αποδείξετε ιδιες ιδιοτητες

3. Χρησιμοποιώντας τις διανυσματικές εκφράσεις που έχετε υπολογίσει στα ερωτήματα α και β να αποδείξετε ότι τα διανύσματα που προκύπτουν έχουν τις ίδιες ιδιότητες (ενέργεια, ευκλείδεια απόσταση) όταν εκφράζουμε τα σήματα με τη βοήθεια διαφορετικών βάσεων.

Από το ερωτημα 1α εχουμε :

$$E_1 = \sum_{n=1}^{4} S_{1n}^2 = \sqrt{2}^2 = 2$$
$$E_2 = \sum_{n=1}^{4} S_{2n}^2 = \sqrt{2}^2 = 2$$
$$E_3 = \sum_{n=1}^{4} S_{3n}^2 = \sqrt{2}^2 = 2$$
$$E_4 = \sum_{n=1}^{4} S_{4n}^2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2$$

Απο το ερωτημα 1β

$$E_1 = \sum_{n=1}^{4} S_{1n}^2 = \sqrt{2}^2 = 2$$
$$E_2 = \sum_{n=1}^{4} S_{2n}^2 = \sqrt{2}^2 = 2$$
$$E_3 = \sum_{n=1}^{4} S_{3n}^2 = \sqrt{2}^2 = 2$$
$$E_4 = \sum_{n=1}^{4} S_{4n}^2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2$$

Βλεπουμε οτι οι ενεργειες των σηματων ειναι ιδιες.

Για την ευκλειδια αποσταση :

Α ερωτημα :

$$d_{12} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2 + 0 + 0} = \sqrt{2}$$

$$d_{23} = \sqrt{0 + (\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2 + 0} = \sqrt{2}$$

$$d_{34} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{6}$$

$$d_{41} = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{6}$$

Β ερωτημα :

$$d_{12} = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 + 0 + 0} = \sqrt{2}$$

$$d_{23} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 0 + (-\sqrt{2})^2 + 0} = \sqrt{2}$$

$$d_{34} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{6}$$

$$d_{41} = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{6}$$

Δεδομενου οτι οι ευκλειδιες αποστασεις των σηματων ειναι ίδιες, μπορουμε να πουμε οτι τα διανυσματα εχουν ιδιες ιδιοτητες

Ερώτημα 2

a Αποδειξτε τις ιδιοτητες

Χωρις βλαβη γενικοτητας υποθετουμε οτι επιλεγουμε τα σηματα S1,S2, οπως φαινεται παρακατω.

$$f_1 = \frac{s_1}{\sqrt{E_1}}$$

$$f_2 = s_2 - c_{21} f_1 = s_2 - \int_{-\infty}^{\infty} s_2 \cdot f_1 \, dt$$

Άρα

$$< f_1, f_2 >= \int_{-\infty}^{\infty} f_1 \cdot f_2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1 \cdot \left[s_2 - \int_{-\infty}^{\infty} s_2 \cdot f_1 \, dt \ \cdot f_1 \right] dt = \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_1 \cdot s_2 \, dt - \int_{-\infty}^{\infty} f_1 \cdot f_1 \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} s_2 \cdot f_1 \, dt \right] dt = \\ I - \int_{-\infty}^{\infty} f_1^2 \cdot I \, dx$$

Όπου θεωρουμε :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1 \cdot s_2 \, dt$$

Οπότε Το εσωτερικο γινομενο $< f_1, f_2 >$ που ψαχνουμε :

$$< f_1, f_2 >= I - I \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_1^2 \, dt = I - I \cdot 1 = 0$$

άρα ειναι ορθογώνια

β) Εφαρμοστε την αποδειξη του (α) για τα σηματα του ερωτηματος 1.

Εστω οτι ψαχνουμε το εσωτερικο γινομενο μεταξυ $< f_1, f_4 >$

$$f_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right\}$$

$$f_4 = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, 0, 0 \right\}$$

Αρα απο το εσωτερικο γινομενο :

$$< f_1, f_2 >= \int_{-\infty}^{\infty} f_1 f_4 \, dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \, dt + \int_0^1 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \, dt + 0 + 0 = 0$$