# Γραμμική & Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
# Εργασία #1

**Ημερομηνία Παράδοσης:** *14 Απριλίου 2022*

**Οδηγίες:** Θα πρέπει να δουλέψετε όλες τις ασκήσεις του φυλλαδίου. Η εργασία είναι ατομική και δεν θα πρέπει να συνεργάζεστε μεταξύ σας για τη λύση των ασκήσεων, ωστόσο μπορείτε να ζητήσετε βοήθεια από μένα ή τον κ. Βαλουξή. Θα πρέπει να είναι δακτυλογραφημένη και να περιέχει τον κώδικα που γράψατε, όπου αυτό απαιτείται, καθώς και τα αποτελέσματα ή σχήματα σε αναγνώσιμη μορφή.Η εργασία θα πρέπει να παραδοθεί ηλεκτρονικά στο eclass, κατά προτίμηση σε μορφή .pdf, μέχρι την ημερομηνία παράδοσης στις 23:59.

Η άσκηση 1 ζητάει γραφική επίλυση του προβλήματος. Χρησιμοποιήστε τα γραφικά εργαλεία της Python για την επίλυση τους. Στις απαντήσεις εδώ θα πρέπει να ενσωματώσετε τον κώδικά σας, τα παραγόμενα σχήματα και μια συνοπτική περιγραφή της λογικής που εφαρμόσατε. Οι ασκήσεις 2και 3 απαιτούν μοντελοποίηση. Εδώ θα πρέπει να ορίσετε καθαρά τις μεταβλητές απόφασης, της αντικειμενικής συνάρτησης και όλων των περιορισμών του προβλήματος. Δικαιολογήστε πλήρως (σύντομα αλλά περιεκτικά) τις επιλογές σας. Η άσκηση 4 είναι θεωρητική και απαιτεί είτε λογικές είτε αλγεβρικές αποδείξεις Η άσκηση 5 θα πρέπει να λυθεί με τη βοήθεια της Python. Γράψτε έναν κώδικα που θα δημιουργεί αφ΄ ενός τις πιθανές βασικές λύσεις και αφ΄ ετέρου τις πιθανές κορυφές για κάθε τέτοιο πρόβλημα. Η άσκηση 6 απαιτεί την εφαρμογή του αλγορίθμου Simplex. Θα πρέπει να λύσετε το πρόβλημα ακολουθώντας όλες τις εναλλακτικές διαδρομές που δημιουργούνται από τις κορυφές του πολύτοπου των εφικτών λύσεων. Απεικονίστε τις εναλλακτικές αυτές διαδρομές μέχρι τη βέλτιστη λύση με έναν γράφο, τον Simplex adjacency graph (π.χ. δες την Εικόνα 3.5 στο βιβλίο των Sierksma/Zwols). Για να διευκολυνθείτε σε αυτήν την άσκηση θα πρέπει να αναπτύξετε κώδικα Python για να κάνει τις αλγεβρικές πράξεις σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου.

**Άσκηση 1.** Θεωρήστε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max Z = 3x_1 + x_2$$

όταν

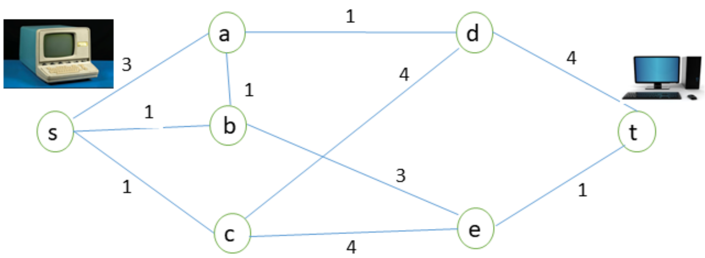
$$\begin{aligned} &(\Pi 1) & 6x_1 + 3x_2 &\geq 12 \\ &(\Pi 2) & 4x_1 + 8x_2 &\geq 16 \\ &(\Pi 3) & 6x_1 + 5x_2 &\leq 30 \\ &(\Pi 4) & 6x_1 + 7x_2 &\leq 36 \\ & & x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(α) Λύστε το παραπάνω πρόβλημα με γραφικό τρόπο.

(β) Αν η αντικειμενική συνάρτηση του παραπάνω προβλήματος είναι $\min Z = x_1 + c_2 x_2$, ποιο είναι το εύρος τιμών που θα μπορούσε να πάρει το $c_2$ έτσι ώστε η βέλτιστη λύση να βρίσκεται στην τομή των ευθειών που ορίζουν οι περιορισμοί Π1 και Π2;

(γ) Αν στο παραπάνω πρόβλημα μεγιστοποίησης η αντικειμενική συνάρτηση ήταν $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2$ βρείτε τις σχετικές τιμές των $c_1$ και $c_2$ έτσι ώστε η βέλτιστη λύση να βρίσκεται στην τομή των ευθειών που ορίζουν οι περιορισμοί Π3 και Π4.

**Άσκηση 2.** Θεωρήστε το παρακάτω τοπικό δίκτυο, το οποίο πρόκειται να χρησιμοποιήσει κάποιος για να μεταφέρει τη μουσική συλλογή που διατηρεί σε έναν παλιό υπολογιστή (κόμβος $s$) στον καινούργιο υπολογιστή (κόμβος $t$).




Οι αριθμοί δίπλα σε κάθε σύνδεσμο μεταξύ κόμβων δηλώνουν την μέγιστη δυνατή ροή δεδομένων πάνω στον σύνδεσμο. Η ροή σε κάθε σύνδεσμο μπορεί να γίνει είτε προς τη μία είτε προς την άλλη κατεύθυνση, αλλά ποτέ και στις δύο ταυτόχρονα. Έτσι για παράδειγμα, διά μέσου του συνδέσμου $(a, b)$ θα μπορούσαμε να στείλουμε δεδομένα μέχρι $1 Mbit/s$ είτε από τον $a$ στον $b$ είτε από τον $b$ στον $a$. Οι κόμβοι $a, b, c, d, e$ δεν είναι σχεδιασμένοι για να αποθηκεύουν δεδομένα κι επομένως όλα τα δεδομένα που εισέρχονται σε αυτούς θα πρέπει να προωθηθούν αμέσως παρακάτω. Ο στόχος είναι να βρεθεί η βέλτιστη ροή δεδομένων που μπορούμε να έχουμε πάνω σε κάθε σύνδεσμο του δικτύου έτσι ώστε η συνολική ροή να είναι η μέγιστη. Μοντελοποιήστε το πρόβλημα που περιγράψαμε ώς πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

[**Υπόδειξη.** Για οικονομία στις μεταβλητές χρησιμοποιήστε μία μεταβλητή για κάθε σύνδεσμο, η οποία μπορεί να πάρει θετικές ή αρνητικές τιμές. Έτσι στη λύση μία θετική τιμή θα δηλώνει την μία κατεύθυνση ενώ μία αρνητική την αντίθετη της]

**Άσκηση 3.** Επιχείρηση παραγωγής ενός εποχιακού και ευαίσθητου προϊόντος (π.χ. παγωτού ή αναψυκτικών) επιθυμεί να συντάξει ένα πρόγραμμα παραγωγής για τον επόμενο χρόνο. Το τμήμα πωλήσεων μετά από ενδελεχή έρευνα και λεπτομερή ιστορικά δεδομένα που έχει συλλέξει από προηγούμενα χρόνια προβλέπει ότι για τον επόμενο χρόνο η ζήτηση για κάθε μήνα $i$ θα είναι $d_i$, $i = 1, 2, \ldots, 12$. Θεωρήστε τις μεταβλητές $x_i$ να είναι οι ποσότητες (σε $kg$) που θα παραχθούν κατά τη διάρκεια του μήνα $i$ όπως επίσης και τις μεταβλητές $s_i$ να είναι οι ποσότητες (σε $kg$) του αδιάθετου προϊόντος στο τέλος του μήνα $i$. Για ευκολία θα υποθέσουμε ότι $s_0 = 0$ (δεν υπάρχει αδιάθετο προϊόν από την προηγούμενη χρονιά) και $s_{12} = 0$ (δεν θα μείνει αδιάθετο προϊόν στο τέλος της χρονιάς). Προφανώς η παραγωγή του προϊόντος θα παρουσιάζει αυξομειώσεις από μήνα σε μήνα και η επιχείρηση υπολογίζει ότι οι διαφορές στο ύψος της παραγωγής κάθε μήνα σε σχέση με τον προηγούμενο επιφέρει ένα κόστος 50 ευρώ ανά $kg$, ενώ το κόστος για την αποθήκευση των αδιάθετων προϊόντων από τον προηγούμενο μήνα κοστίζει 20 ευρώ ανά $kg$.

Μοντελοποιήστε τα παραπάνω ώς πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με αντικειμενικό σκοπό την ελαχιστοποίηση του συνολικού (ετήσιου) κόστους της επιχείρησης για την εκτέλεση του προγράμματος παραγωγής.

**Άσκηση 4.** Εξετάστε ως προς την κυρτότητα τα σύνολα:

(α) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2^2 \geq x_1\}$

(β) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1^2 + 4x_2^2 \geq 5\}$

(γ) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 3, x_2 \leq 4\}$

(δ) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n\}$

Για κάθε σύνολο είτε αποδείξτε ότι είναι κυρτό είτε δώστε αντιπαράδειγμα για να δείξετε ότι δεν είναι κυρτό.

**Άσκηση 5.** Θεωρήστε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max\ 4x_1 + 2x_2 + x_3$$

όταν

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 5 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 25 \\ 8x_1 + 4x_2 + x_3 &\leq 125 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(α) Προσθέστε μεταβλητές χαλάρωσης στο σύστημα ανισώσεων και βρείτε όλες τις βασικές (εφικτές και μη-εφικτές) λύσεις για το μη ομογενές σύστημα εξισώσεων που δημιουργείται. Εντοπίστε (αν υπάρχουν) τις εκφυλισμένες βασικές λύσεις.

(β) Βρείτε όλες τις κορυφές που δημιουργούνται από τις τομές των υπερεπιπέδων που αντιστοιχούν στις ανισώσεις/εξισώσεις του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού και ξεχωρίστε ποιες από αυτές είναι κορυφές του πολύτοπου των εφικτών λύσεών του. Εντοπίστε, αν υπάρχουν, τις εκφυλισμένες κορυφές.

(γ) Βρείτε την αντιστοίχιση μεταξύ βασικών λύσεων και κορυφών και τέλος υποδείξτε τη βέλτιστη λύση και βέλτιστη κορυφή του προβλήματος.

**Άσκηση 6.** Θεωρήστε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max\ 4x_1 + 2x_2 + x_3$$

όταν

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 5 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 25 \\ 8x_1 + 4x_2 + x_3 &\leq 125 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(α) Εφαρμόστε τον αλγόριθμο Simplex για να βρείτε τη βέλτιστη λύση του, αν υπάρχει. Σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου θα πρέπει να περιγράφετε συνοπτικά τα βήματα που ακολουθείτε και τις αποφάσεις που παίρνετε μέχρι το επόμενο βήμα.

(β) Εφαρμόστε όλες τις εναλλακτικές επιλογές που μπορεί να έχετε σε κάθε βήμα επιλογής της εισερχόμενης ή εξερχόμενης μεταβλητής σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου και δημιουργήστε έναν γράφο με τα βήματα (κορυφές) του αλγορίθμου μέχρι τη βέλτιστη λύση.