Linear Programming

Ονοματεπώνυμο : Νικόλας Φιλιππάτος
AM: 1072754
Εργασία: 1η
Ημερομηνία: March 25, 2024

Table Of Contents

Εκφωνήσεις

Exercise 1

Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$
\begin{array}{lll}
 & \min Z = 2x_1 - x_2 & \\
\text{όταν} & & \\
(\Pi 1) & x_1 + x_2 & \geq 10 \\
(\Pi 2) & -10x_1 + x_2 & \leq 10 \\
(\Pi 3) & -4x_1 + x_2 & \leq 20 \\
(\Pi 4) & x_1 + 4x_2 & \geq 20 \\
 & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

1. α) Να παραστήσετε γραφικά την εφικτή περιοχή του προβλήματος καθώς και όλες τις κορυφές της. Περιγράψτε τη μορφή της εφικτής περιοχής. Με γραφικό τρόπο βρείτε τη βέλτιστη κορυφή του προβλήματος, εάν υπάρχει.
2. (β) Ομοίως με γραφικό τρόπο βρείτε τη βέλτιστη λύση, αν υπάρχει, όταν η αντικειμενική συνάρτηση γίνει:

   $$min\ Z = 11x_1 - x_2$$

   και η εφικτή περιοχή παραμένει ίδια με το ερώτημα (α)
3. (γ) Αν η εφικτή περιοχή είναι όπως περιγράφεται στο ερώτημα (α) και η αντικειμενική συνάρτηση δίνεται ως:

   $$max\ Z = c_1 x_1 - x_2$$

   ποιά θα πρέπει να είναι η τιμή του c1 ώστε η βέλτιστη λύση να βρίσκεται στην τομή των ευθειών που ορίζονται από τους περιορισμούς Π1 και Π4;

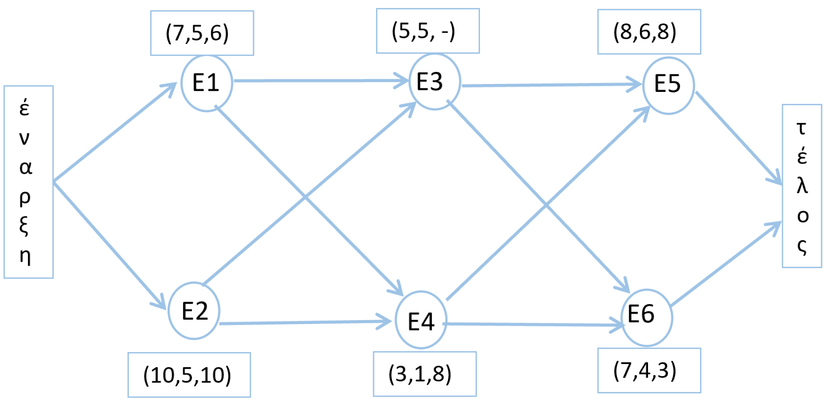
Exercise 2

΄Ενας φρουτοχυμός που παράγει η εταιρεία FRESH περιέχει το πολύ 3 μέρη χυμό πορτοκαλιού και τουλάχιστον 1 μέρος χυμό μήλου, σύμφωνα με τα αναγραφόμενα στη συσκευασία του. Η εβδομαδιαία δυναμικότητα της εταιρείας για το συγκεκριμένο προϊόν δεν ξεπερνάει τα 500 lit ενώ σύμφωνα με τα δεδομένα των πωλήσεων είναι σίγουρο ότι η αγορά μπορεί να απορροφήσει τουλάχιστον 400 lit κάθε εβδομάδα. Για την επόμενη εβδομάδα η εταιρεία μπορεί να διαθέσει μέχρι 250 lit χυμό μήλου και το τμήμα παραγωγής στοχεύει να παράξει φρουτοχυμό που θα περιέχει τουλάχιστον 40% χυμό πορτοκαλιού. Το κόστος για 1 lit χυμό πορτοκαλιού είναι 2 χ.μ. (χρηματικές μονάδες) και για 1 lit χυμό μήλου είναι 1 χ.μ. ενώ η εταιρεία πουλάει τον φρουτοχυμό (ανεξαρτήτου αναλογίας των δύο φρούτων) προς 5 χ.μ.

1. a) Βοηθήστε το τμήμα παραγωγής της εταιρείας FRESH να αποφασίσει για τις ποσότητες χυμού που θα πρέπει να παράγει την επόμενη εβδομάδα όταν αντικειμενικός στόχος είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους. Μοντελοποιήστε το παραπάνω σενάριο ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και λύστε το γραφικά. Περιγράψτε αναλυτικά τις μεταβλητές απόφασης, την αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς. Περιγράψτε τη βέλτιστη λύση αναφορικά με τους περιορισμούς, δηλ. ποιους ικανοποιεί οριακά (δεσμευτικοί περιορισμοί) και ποιους χαλαρά (μη δεσμευτικοί περιορισμοί).
2. b) Αν αντίθετα το τμήμα παραγωγής στοχεύσει να παράξει φρουτοχυμό που θα περιέχει τουλάχιστον 50%/60% χυμό πορτοκαλιού, τι επιπτώσεις θα έχει αυτή η απόφασή τους στη βέλτιστη λύση του προβλήματος;

Exercise 3

Θεωρήστε ένα έργο το οποίο για να ολοκληρωθεί απαιτεί την διεκπεραίωση 6 επί μέρους εργασίες (Ε1 - Ε6). Οι εργασίες είναι εξαρτημένες μεταξύ τους και οι εξαρτήσεις δίνονται με το παρακάτω σχήμα:



Σύμφωνα με το σχήμα οι εργασίες Ε1 και Ε2 μπορούν να εκτελεστούν παράλληλα, όμως για να εκτελεστεί η εργασία Ε3 θα πρέπει να έχουν ολοκληρωθεί οι εργασίες Ε1 και Ε2.
Ομοίως και για τις υπόλοιπες εργασίες. Το έργο ολοκληρώνεται όταν εκτελεστούν (παράλληλα) οι εργασίες Ε5 και Ε6. Για κάθε εργασία δίνονται ο κανονικός χρόνος διεκπεραίωσης της εργασίας (σε εβδομάδες), το απόλυτο ελάχιστο για τον χρόνο αυτό, και το κόστος που θα προκύψει αν προσπαθήσουμε να μειώσουμε τον κανονικό χρόνο κατά μία εβδομάδα.

Η εταιρεία που έχει αναλάβει το έργο ενδιαφέρεται να μειώσει τον συνολικό χρόνο διεκπεραίωσης του (αν είναι εφικτό) σε 19 εβδομάδες, επομένως η διάρκεια μίας ή περισσοτέρων εργασιών θα πρέπει να μειωθεί σε σχέση με την κανονική τους διάρκεια. Προφανώς ο στόχος αυτός θα πρέπει να επιτευχθεί με το μικρότερο δυνατό κόστος.

Μοντελοποιήστε το συγκεκριμένο σενάριο προγραμματισμού εργασιών ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Ορίστε κατάλληλες μεταβλητές απόφασης και διαμορφώστε τους περιορισμούς όπως περιγράφονται στο σχήμα. Περιγράψτε και μοντελοποιήστε τον αντικειμενικό στόχο της εταιρείας. Δώστε την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. (Σημ. Η άσκηση δεν ζητάει τη λύση του προβλήματος, μόνο τη μοντελοποίησή του.)

Exercise 4

- (Π1) Η τομή X δύο κυρτών συνόλων X1 και X2 είναι κυρτό σύνολο. Ισχύει το ίδιο για την ένωση των κυρτών συνόλων;
- (Π2) Το σύνολο $M = \{(x, y) \in R^2_{++} | xy \geq k,\ k \in\ R\}$ είναι κυρτό σύνολο. (Υπόδειξη. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ως γνωστό το Λήμμα ότι για θετικούς αριθμούς a και b ισχύει πάντα: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

Exercise 5

Ασκηση 5. Θεωρήστε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max\ Z = -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4$$

$$\text{όταν}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\leq 4 \\ x_1 - x_3 + x_4 &\leq 2 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

(α) Θεωρήστε το πολύτοπο των εφικτών λύσεων του παραπάνω προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. Βρείτε όλες τις κορυφές που δημιουργούνται από τις τομές των υπερεπιπέδων του και ξεχωρίστε ποιες από αυτές είναι κορυφές του πολύτοπου των εφικτών λύσεων. Εντοπίστε, αν υπάρχουν, τις εκφυλισμένες κορυφές.
(β) Προσθέστε μεταβλητές χαλάρωσης στο σύστημα ανισώσεων και βρείτε όλες τις βασικές (εφικτές και μη-εφικτές) λύσεις για το μη ομογενές σύστημα εξισώσεων που δημιουργείται. Εντοπίστε (αν υπάρχουν) τις εκφυλισμένες βασικές λύσεις.
(γ) Αντιστοιχίστε τις βασικές λύσεις που βρήκατε στο (β) ερώτημα με τις κορυφές του ερωτήματος (α) και τέλος υποδείξτε τη βέλτιστη λύση και βέλτιστη κορυφή του προβλήματος.

Exercise 6

Θεωρήστε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$max\ Z = 5x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4$$

όταν

$$\begin{gathered} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 24 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 36 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{gathered}$$

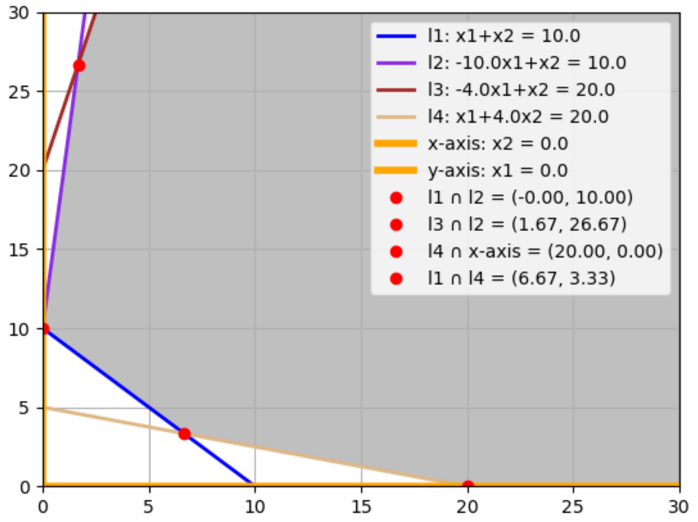
1. (α) Εφαρμόστε τον αλγόριθμο Simplex για να βρείτε τη βέλτιστη λύση του, αν υπάρχει. Σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου περιγράψτε συνοπτικά τα βήματα που ακολουθείτε και τις αποφάσεις που παίρνετε μέχρι το επόμενο βήμα.
2. (β) Εφαρμόστε όλες τις εναλλακτικές επιλογές που μπορεί να έχετε σε κάθε βήμα επιλογής της εισερχόμενης ή εξερχόμενης μεταβλητής στις επαναλήψεις του αλγορίθμου και δημιουργήστε έναν γράφο με τα βήματα (κορυφές) του αλγορίθμου μέχρι τη βέλτιστη λύση.

Solutions

Solution Exercise 01

1a

> 1. α) Να παραστήσετε γραφικά την εφικτή περιοχή του προβλήματος καθώς και όλες τις κορυφές της. Περιγράψτε τη μορφή της εφικτής περιοχής. Με γραφικό τρόπο βρείτε τη βέλτιστη κορυφή του προβλήματος, εάν υπάρχει.



Θα σχεδιάσουμε τις ευθειες

$$
\begin{gathered}
y = -x + 10 \\
y = 10x + 20 \\
y = 4x + 20 \\
y = -\frac{1}{4}x + 5
\end{gathered}
$$

Με βάση τους περιορισμους Π1-Π4 και $x_1, x_2 \geq 0$ η εφικτή περιοχή περιγράφεται από την γραμμοσκιασμένη περιοχή του σχήματος.

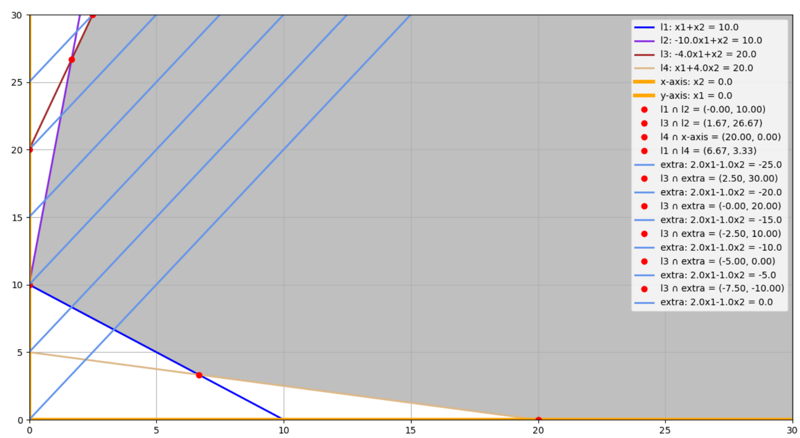
Κορυφές της εφικτής περιοχής :

- Σημειο Τομής του Π2 και Π3 [1.67, 26.67]
- Σημείο Τομής του Π1 και Π2 [0, 10]
- Σημείο Τομής του Π1 και Π4 [6,67, 3.33]
- Σημείο Τομής του Π4 και του άξονα x [20, 0]

Παρατηρουμε η εφικτή περιοχή
Ειναι bounded απο τα αριστερα λογω των περιορισμων Π3,Π2,Π1,Π4, αλλά απο τα δεξία οσο αυξάνονται τα x βλέπουμε ότι εχουμε μονο ενα κάτω όριο (ευθεια x2 =0 και ο Π4)

Για να βρουμε την βελτιστη κορυφη, σχηματιζουμε τις ευθειες $2x_1 - x_2 = c$, όπου c=[0,-5,-10,-15,-20,-25] και κοιταζουμε εαν συμπιπτει με καποια κορυφη

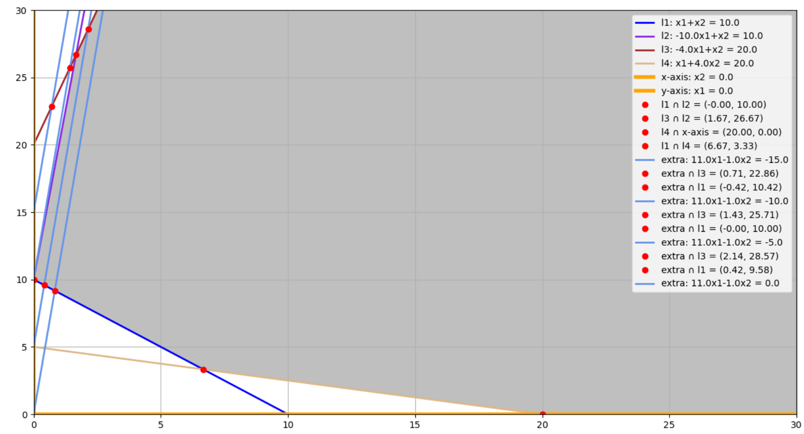
Βλέπουμε ότι μειώνοντας το c η αντικειμενική συνάρτηση παραμενει μεσα στην εφικτή περιοχη χωρις να βρισκει καποιο ανω οριο, οποτε δνε υπαρχει η βελτιστη κορυφη



1b

> 2. (β) Ομοίως με γραφικό τρόπο βρείτε τη βέλτιστη λύση, αν υπάρχει, όταν η αντικειμενική συνάρτηση γίνει:
>
> $$min\ Z = 11x_1 - x_2$$
>
> και η εφικτή περιοχή παραμένει ίδια με το ερώτημα (α)

Φτιαχνουμε παλι τις ευθειες $2x_1 - x_2 = c$, όπου c=[0,-5,-10,-15,-20,-25]



Παρατηρουμε οτι μετα το c=-10 η αντικειμενικη συναρτηση βγαινει εκτος της εφικτης περιοχης. Επομενως η βελτιστη κορυφη είναι η (0,10) Τομη του περιορισμου Π1 και Π2

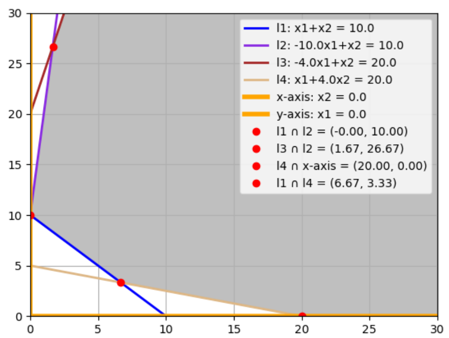
1γ

> 3. (γ) Αν η εφικτή περιοχή είναι όπως περιγράφεται στο ερώτημα (α) και η αντικειμενική συνάρτηση δίνεται ως:
>
> $$max\ Z = c_1x_1 - x_2$$
>
> ποιά θα πρέπει να είναι η τιμή του c1 ώστε η βέλτιστη λύση να βρίσκεται στην τομή των ευθειών που ορίζονται από τους περιορισμούς Π1 και Π4;

Η κορυφη των περιορισμων Π1, Π2

$$y = -x + 10$$
$$y = -\frac{1}{4}x + 5$$

- Σημείο Τομής του Π1 και Π4 [6,67, 3.33]



> $$\min\ Z = 2x_1 - x_2$$
>
> όταν
>
> $$\begin{array}{lll} (\Pi1) & x_1 + x_2 & \geq 10 \\ (\Pi2) & -10x_1 + x_2 & \leq 10 \\ (\Pi3) & -4x_1 + x_2 & \leq 20 \\ (\Pi4) & x_1 + 4x_2 & \geq 20 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Η αντικειμενικη συναρτηση του ερωτηματος γ ειναι $min\ Z = c_1x_1 - x_2$. Αν λυσουμε ως προς x_2: $$
x{2} = c{1}x_{1}-Z

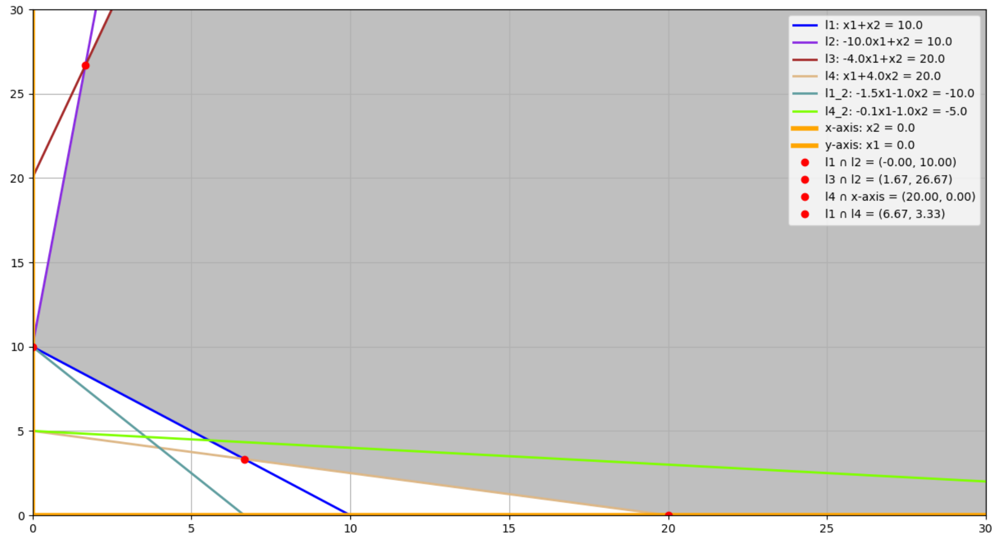
$Πρεπειναβρουμετοευροςτιμωντου\$c_1\$ετσιωστεηβελτιστηλυσηναειναιητομητωνπεριορισμωνΠ1καιΠ2: -ΣημείοΤομήςτουΠ1καιΠ4[6,67,3.33]Μπορουμεναγραψ$

\begin{matrix}
-x{1}-x{2}\leq -10 \

- \frac{1}{4} - x_{2} \leq -5
  \end{matrix}
  $$

Χωρις να επηρεασει το σχημα.

Βλεπουμε οτι με το $c_1 = -1, c_2 - \frac{1}{4}$ η αντικειμενικη συναρτηση ταυτιζεται με τις ευθειες των περιορισμων Π1 και Π4 αντιστοιχα



Βλεπουμε οτι αμα αυξησουμε το c1 απο -0.25 σε -0.1 αποκταει περισσοτερες λυσεις και σταματαει η τομη [6.67, 3.33] να ειναι η βελτιστη κορυφη. Αντιστοιχα αμα μειωσουμε το c1 απο -1 σε -1.5 η αντικειμενικη συναρτηση βγαινει εκτος περιοχης.

Επομενως το c_1 θα ανηκει :

$$-1 < c_1 < -\frac{1}{4}$$

Δεν περιλαμβανουμε το -1 και -0.25 γιατι τοτε δνε θα ειχαμε μονο το σημειο [6.67,3.33] ως βελτιστη λυση

Solution Exercise 2

Exercise 2

Ενας φρουτοχυμός που παράγει η εταιρεία FRESH περιέχει το πολύ 3 μέρη χυμό πορτοκαλιού και τουλάχιστον 1 μέρος χυμό μήλου, σύμφωνα με τα αναγραφόμενα στη συσκευασία του. Η εβδομαδιαία δυναμικότητα της εταιρείας για το συγκεκριμένο προϊόν δεν ξεπερνάει τα 500 lit ενώ σύμφωνα με τα δεδομένα των πωλήσεων είναι σίγουρο ότι η αγορά μπορεί να απορροφήσει τουλάχιστον 400 lit κάθε εβδομάδα. Για την επόμενη εβδομάδα η εταιρεία μπορεί να διαθέσει μέχρι 250 lit χυμό μήλου και το τμήμα παραγωγής στοχεύει να παράξει φρουτοχυμό που θα περιέχει τουλάχιστον 40% χυμό πορτοκαλιού. Το κόστος για 1 lit χυμό πορτοκαλιού είναι 2 χ.μ. (χρηματικές μονάδες) και για 1 lit χυμό μήλου είναι 1 χ.μ. ενώ η εταιρεία πουλάει τον φρουτοχυμό (ανεξαρτήτου αναλογίας των δύο φρούτων) προς 5 χ.μ.

1. a) Βοηθήστε το τμήμα παραγωγής της εταιρείας FRESH να αποφασίσει για τις ποσότητες χυμού που θα πρέπει να παράγει την επόμενη εβδομάδα όταν αντικειμενικός στόχος είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους. Μοντελοποιήστε το παραπάνω σενάριο ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και λύστε το γραφικά. Περιγράψτε αναλυτικά τις μεταβλητές απόφασης, την αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς. Περιγράψτε τη βέλτιστη λύση αναφορικά με τους περιορισμούς, δηλ. ποιους ικανοποιεί οριακά (δεσμευτικοί περιορισμοί) και ποιους χαλαρά (μη δεσμευτικοί περιορισμοί).
2. b) Αν αντίθετα το τμήμα παραγωγής στοχεύσει να παράξει φρουτοχυμό που θα περιέχει τουλάχιστον 50%/60% χυμό πορτοκαλιού, τι επιπτώσεις θα έχει αυτή η απόφασή τους στη βέλτιστη λύση του προβλήματος;

Έστω `x` η ποσότητα πορτοκαλιου στον Χυμο και `y` η ποσοτητα μηλου στον Χυμο

Το κόστος για την παραγωγη τους εκφραζεται απο την σχεση :

$$2 \cdot x + y$$

καθώς 1l χυμο πορτοκαλι κοστιζει 2 χ.μ. και 1l χυμος μηλου κοστιζει 1 χμ

Απο τον εβδομαδιαιο περιορισμο παραγωγης, βγαζουμε οτι

$$x + y \leq 500$$

Επισης βλεπουμε οτι εφοσον το υποστηριζει η αγορα, πρεπει να παραξουμε τουλαχιστον 400l αρα :

$$x + y \geq 400$$

Τα εσοδα απο τον χυμο ειναι 5 χ.μ. επι την ποσοτητα του χυμου που παραγουμε, αρα

$$5 \cdot (x + y)$$

Θελουμε να μεγιστοποιησουμε το κερδος, το οποιο ειναι η διαφορα των εσοδων απο τα εξοδα :

$$5(x + y) - (2x + y) = 3x + 4y$$

Ακομη γραφει οτι η ο φρουτοχυμος πρεπει να περιεχει το πολυ 3 μερη χυμο πορτοκαλιου και τουλαχιστον 1 μερος χυμο μηλου

Για να βρουμε το ποσοστο του χυμου πορτοκαλιου χρησιμοποιουμε τον τυπο :

$$\frac{x}{x + y}$$

Οποτε :

$$\frac{x}{x + y} \leq \frac{3}{4} \implies x - 3y \leq 0$$

Και για το μηλο :

$$\frac{y}{x + y} \geq \frac{1}{4} \implies x - 3y \leq 0$$

το μηλο για την επομενη εβδομαδα μπορει να ειναι μεχρι 250l

$$y \leq 250$$

Τελος μας δινει οτι εχουν στοχο το φρουτοποτο να περιεχει τουλαχιστον 40% χυμο πορτοκαλι :

$$\frac{x}{x + y} \geq 0.4 \implies 0.6x - 0.4y \geq 0 \implies 6x - 4y \geq 0 \implies 3x - 2y \geq 0$$

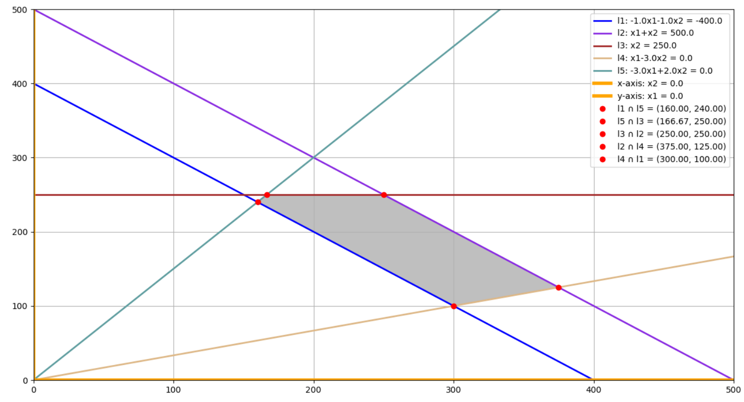
Εκφραζουμε το προβλημα :

$$\begin{array}{lllll} max\ Z: & 3x & + & 4y & \\ st & & & & \\ & x & + & y & \geq 400 \\ & x & + & y & \leq 500 \\ & & & y & \leq 250 \\ & x & & -3y & \leq 0 \\ & 3x & & -2y & \geq 0 \end{array}$$

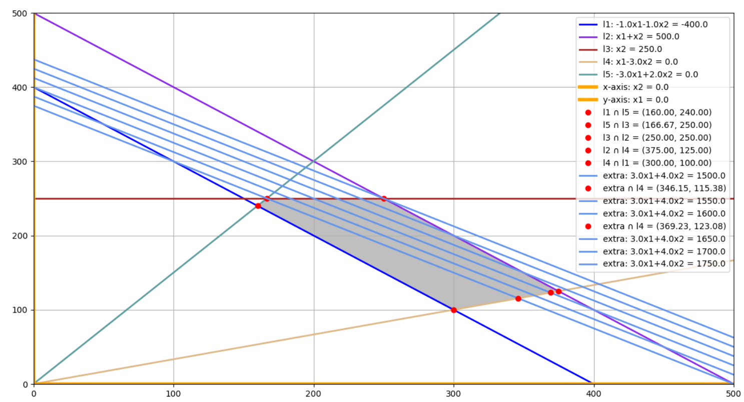
Το οποιο το μετατρεπουμε σε :

$$
\begin{array}{lll}
max\ Z: & 3x+4y & \\
st & & \\
 & -x-y & \leq 400 \\
 & x+y & \leq 500 \\
 & y & \leq 250 \\
 & x-3y & \leq 0 \\
 & -3x+2y & \leq 0
\end{array}
$$

Παιρνουμε την εφικτη περιοχη :



Ψαχνοντας να το λυσουμε γραφικα :



Βλεπουμε οτι η βελτιστη κορυφη ειναι το σημειο τομης του Π3 και Π2 [250,250]

Επομενως το μεγαλυτερο κερδος που μπορει να εχει η βιομηχανια εκεινη την εβδομαδα ειναι 1750

Exercise 4

> - (Π1) Η τομή X δύο κυρτών συνόλων X1 και X2 είναι κυρτό σύνολο. Ισχύει το ίδιο για την ένωση των κυρτών συνόλων;

Από την θεωρία γνωρίζουμε οτι ενα συνολο X ειναι κυρτο εαν και μονο αν για $\forall\, x, y$ και $\lambda\ \in [0,1]$ ισχύει οτι :

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in X$$

Θελουμε το ευθυγραμμο τμημα που ενωνει δυο οποιαδηποτε σημεια του X να βρισκεται ολοκληρο μεσα στο X

Για να δειξουμε οτι η ενωση δυο κυρτων συνολων ειναι κυρτο συνολο, πρεπει να δειξουμε οτι οποιοδηποτε ευθυγραμμο τμημα μεταξυ δυο σημειων ανηκει και αυτο στην ενωση

> - (Π2) Το σύνολο $M = \{(x,y) \in R^2_{++} | xy \geq k,\ k \in\ R\}$ είναι κυρτό σύνολο. (Υπόδειξη. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ως γνωστό το Λήμμα ότι για θετικούς αριθμούς a και b ισχύει πάντα: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

Εχουμε το συνολο $M = \{(x,y) \in R^2_{++} | xy \geq k,\ k \in\ R\}$

Θα παρουμε δυο σημεια $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ τα οποια ανηκουν στο συνολο M, δηλαδη $x_1 y_1 \geq k, x_2 y_2 \geq k$

Για να δειξουμε οτι το συνολο M ειναι κυρτο θα πρεπει και τα $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in M,\ \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in M$

Οποτε θελουμε να ισχυει για $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,\ y = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 :\ xy \geq k$

Exercise 6

assignment-1-6-gpt