

# Γραμμική & Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

## Εργασία #1

Ημερομηνία Παράδοσης: 5 Απριλίου 2024

**Οδηγίες:** Η εργασία είναι ατομική και δεν θα πρέπει να συνεργάζεστε μεταξύ σας για τη λύση των ασκήσεων, μπορείτε όμως να ζητήσετε βοήθεια από τους διδάσκοντες. Οι απαντήσεις σας να είναι γραμμένες σε κειμενογράφο και να είναι πλήρεις. Όπου απαιτείται κώδικας θα πρέπει να περιλαμβάνεται στο κείμενο σας μαζί με τα αποτελέσματα ή σχήματα και όλα αυτά σε ευανάγνωστη μορφή. Ο κώδικας σας να περιλαμβάνει και συνοπτικά σχόλια έτσι ώστε να είναι κατανοητή η λογική που εφαρμόζετε κάθε φορά. Επιπλέον του .pdf αρχείου παρακαλώ να υποβάλλεται και τους κώδικες σε ξεχωριστά αρχεία οι οποίοι θα πρέπει να παράγουν τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στην εργασία σας. Όλα μαζί τα αρχεία να συμπίεζονται και να υποβάλλονται σε ένα αρχείο με το ονοματεπώνυμο και τον ΑΜ σας. Η εργασία θα πρέπει να παραδοθεί ηλεκτρονικά στο eclass, κατά προτίμηση σε μορφή .pdf, μέχρι την ημερομηνία παράδοσης στις 23:59.

Η άσκηση 1 ζητάει γραφική επίλυση του προβλήματος. Χρησιμοποιήστε τα γραφικά και υπολογιστικά εργαλεία της Python για την επίλυση τους. Στις απαντήσεις εδώ θα πρέπει να ενσωματώσετε τον κώδικά σας, τα παραγόμενα σχήματα και μια συνοπτική περιγραφή της λογικής που εφαρμόσατε. Οι ασκήσεις 2 και 3 απαιτούν μοντελοποίηση. Εδώ θα πρέπει να ορίσετε καθαρά τις μεταβλητές απόφασης, την αντικειμενική συνάρτηση και όλους τους περιορισμούς του προβλήματος. Δικαιολογήστε πλήρως (σύντομα αλλά περιεκτικά) τις επιλογές σας. Η άσκηση 4 είναι θεωρητική και απαιτεί μαθηματικές αποδείξεις. Η άσκηση 5 θα πρέπει να λυθεί με τη βοήθεια της Python. Γράψτε κώδικα που θα δημιουργεί τις πιθανές βασικές λύσεις και έναν άλλον για τις πιθανές κορυφές σε κάθε τέτοιο πρόβλημα. Συνοψίστε τα τελικά σας αποτελέσματα και συμπεράσματα. Η άσκηση 6 απαιτεί την εφαρμογή του αλγορίθμου Simplex. Θα πρέπει να λύσετε το πρόβλημα ακολουθώντας όλες τις εναλλακτικές διαδρομές που δημιουργούνται από τις κορυφές του πολύτοπου των εφικτών λύσεων. Απεικονίστε τις εναλλακτικές αυτές διαδρομές μέχρι τη βέλτιστη λύση με έναν γράφο, τον Simplex adjacency graph (π.χ. δες την Εικόνα 3.5 στο βιβλίο των Sierksma/Zwols). Για να διευκολυνθείτε σε αυτήν την άσκηση θα πρέπει να αναπτύξετε κώδικα Python για να κάνει τις αλγεβρικές πράξεις σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου.

**Άσκηση 1.** Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\begin{aligned} \min Z &= 2x_1 - x_2 \\ \text{όταν} \\ (\text{Π1}) \quad x_1 + x_2 &\geq 10 \\ (\text{Π2}) \quad -10x_1 + x_2 &\leq 10 \\ (\text{Π3}) \quad -4x_1 + x_2 &\leq 20 \\ (\text{Π4}) \quad x_1 + 4x_2 &\geq 20 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(α) Να παραστήσετε γραφικά την εφικτή περιοχή του προβλήματος καθώς και όλες τις κορυφές της. Περιγράψτε τη μορφή της εφικτής περιοχής. Με γραφικό τρόπο βρείτε τη βέλτιστη κορυφή του προβλήματος, εάν υπάρχει.

(β) Ομοίως με γραφικό τρόπο βρείτε τη βέλτιστη λύση, αν υπάρχει, όταν η αντικειμενική συνάρτηση γίνει:

$$\min Z = 11x_1 - x_2$$

και η εφικτή περιοχή παραμένει η ίδια με το ερώτημα (α)

(γ) Αν η εφικτή περιοχή είναι όπως περιγράφεται στο ερώτημα (α) και η αντικειμενική συνάρτηση δίνεται ως:

$$\min Z = c_1x_1 - x_2$$

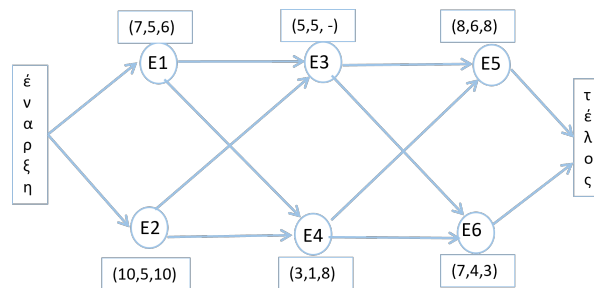
ποιά θα πρέπει να είναι η τιμή του  $c_1$  ώστε η βέλτιστη λύση να βρίσκεται στην τομή των ευθειών που ορίζονται από τους περιορισμούς Π1 και Π4;

**Άσκηση 2.** Ένας φρουτοχυμός που παράγει η εταιρεία FRESH περιέχει το πολύ 3 μέρη χυμό πορτοκαλιού και τουλάχιστον 1 μέρος χυμό μήλου, σύμφωνα με τα αναγραφόμενα στη συσκευασία του. Η εβδομαδιαία δυναμικότητα της εταιρείας για το συγκεκριμένο προϊόν δεν ξεπερνάει τα 500 *lit* ενώ σύμφωνα με τα δεδομένα των πωλήσεων είναι σίγουρο ότι η αγορά μπορεί να απορροφήσει τουλάχιστον 400 *lit* κάθε εβδομάδα. Για την επόμενη εβδομάδα η εταιρεία μπορεί να διαθέσει μέχρι 250 *lit* χυμό μήλου και το τμήμα παραγωγής στοχεύει να παράξει φρουτοχυμό που θα περιέχει τουλάχιστον 40% χυμό πορτοκαλιού. Το κόστος για 1 *lit* χυμό πορτοκαλιού είναι 2 χ.μ. (χρηματικές μονάδες) και για 1 *lit* χυμό μήλου είναι 1 χ.μ. ενώ η εταιρεία πουλάει τον φρουτοχυμό (ανεξαρτήτου αναλογίας των δύο φρούτων) προς 5 χ.μ.

(α) Βοηθήστε το τμήμα παραγωγής της εταιρείας FRESH να αποφασίσει για τις ποσότητες χυμού που θα πρέπει να παράγει την επόμενη εβδομάδα όταν αντικειμενικός στόχος είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους. Μοντελοποιήστε το παραπάνω σενάριο ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και λύστε το γραφικά. Περιγράψτε αναλυτικά τις μεταβλητές απόφασης, την αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς. Περιγράψτε τη βέλτιστη λύση αναφορικά με τους περιορισμούς, δηλ. ποιους ικανοποιεί οριακά (δεσμευτικοί περιορισμοί) και ποιους χαλαρά (μη δεσμευτικοί περιορισμοί).

(β) Αν αντίθετα το τμήμα παραγωγής στοχεύει να παράξει φρουτοχυμό που θα περιέχει τουλάχιστον 50%/60% χυμό πορτοκαλιού, τι επιπτώσεις θα έχει αυτή η απόφασή τους στη βέλτιστη λύση του προβλήματος;

**Άσκηση 3.** Θεωρήστε ένα έργο το οποίο για να ολοκληρωθεί απαιτεί την διεκπεραίωση 6 επί μέρους εργασίες (E1 - E6). Οι εργασίες είναι εξαρτημένες μεταξύ τους και οι εξαρτήσεις δίνονται με το παρακάτω σχήμα:



Σύμφωνα με το σχήμα οι εργασίες E1 και E2 μπορούν να εκτελεστούν παράλληλα, όμως για να εκτελεστεί η εργασία E3 θα πρέπει να έχουν ολοκληρωθεί οι εργασίες E1 και E2. Ομοίως και για τις υπόλοιπες εργασίες. Το έργο ολοκληρώνεται όταν εκτελεστούν (παράλληλα) οι εργασίες E5 και E6. Για κάθε εργασία δίνονται ο κανονικός χρόνος διεκπεραίωσης της εργασίας (σε εβδομάδες), το απόλυτο ελάχιστο για τον χρόνο αυτό, και το κόστος που θα προκύψει αν προσπαθήσουμε να μειώσουμε τον κανονικό χρόνο κατά μία εβδομάδα.

Η εταιρεία που έχει αναλάβει το έργο ενδιαφέρεται να μειώσει τον συνολικό χρόνο διεκπεραίωσης του (αν είναι εφικτό) σε 19 εβδομάδες, επομένως η διάρκεια μίας ή περισσότερων εργασιών θα πρέπει να μειωθεί σε σχέση με την κανονική τους διάρκεια. Προφανώς ο στόχος αυτός θα πρέπει να επιτευχθεί με το μικρότερο δυνατό κόστος.

Μοντελοποιήστε το συγκεκριμένο σενάριο προγραμματισμού εργασιών ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Ορίστε κατάλληλες μεταβλητές απόφασης και διαμορφώστε τους περιορισμούς όπως περιγράφονται στο σχήμα. Περιγράψτε και μοντελοποιήστε τον αντικειμενικό στόχο της εταιρείας. Δώστε την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. (**Σημ.** Η άσκηση δεν ζητάει τη λύση του προβλήματος, μόνο τη μοντελοποίησή του.)

**Άσκηση 4.** Αποδείξτε τις παρακάτω προτάσεις.

(Π1) Η τομή  $X$  δύο κυρτών συνόλων  $X_1$  και  $X_2$  είναι κυρτό σύνολο. Ισχύει το ίδιο για την ένωση των κυρτών συνόλων;

(Π2) Το σύνολο  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}_{++}^2 \mid x_1 + x_2 \geq k, k \in \mathbb{R}\}$  είναι κυρτό σύνολο. (**Υπόδειξη.** Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ως γνωστό το Λήμμα ότι για θετικούς αριθμούς  $a$  και  $b$  ισχύει πάντα:  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ )

**Άσκηση 5.** Θεωρήστε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max Z = -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4$$

όταν

$$x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 4$$

$$x_1 - x_3 + x_4 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

(α) Θεωρήστε το πολύτοπο των εφικτών λύσεων του παραπάνω προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. Βρείτε όλες τις κορυφές που δημιουργούνται από τις τομές των υπερεπιπέδων του και ξεχωρίστε ποιες από αυτές είναι κορυφές του πολύτοπου των εφικτών λύσεων. Εντοπίστε, αν υπάρχουν, τις εκφυλισμένες κορυφές.

(β) Προσθέστε μεταβλητές χαλάρωσης στο σύστημα ανισώσεων και βρείτε όλες τις βασικές (εφικτές και μη-εφικτές) λύσεις για το μη ομογενές σύστημα εξισώσεων που δημιουργείται. Εντοπίστε (αν υπάρχουν) τις εκφυλισμένες βασικές λύσεις.

(γ) Αντιστοιχίστε τις βασικές λύσεις που βρήκατε στο (β) ερώτημα με τις κορυφές του ερωτήματος (α) και τέλος υποδείξτε τη βέλτιστη λύση και βέλτιστη κορυφή του προβλήματος.

**Άσκηση 6.** Θεωρήστε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max Z = 5x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4$$

όταν

$$3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 24$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 36$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

(α) Εφαρμόστε τον αλγόριθμο Simplex για να βρείτε τη βέλτιστη λύση του, αν υπάρχει. Σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου περιγράψτε συνοπτικά τα βήματα που ακολουθείτε και τις αποφάσεις που παίρνετε μέχρι το επόμενο βήμα.

(β) Εφαρμόστε όλες τις εναλλακτικές επιλογές που μπορεί να έχετε σε κάθε βήμα επιλογής της εισερχόμενης ή εξερχόμενης μεταβλητής στις επαναλήψεις του αλγορίθμου και δημιουργήστε έναν γράφο με τα βήματα (κορυφές) του αλγορίθμου μέχρι τη βέλτιστη λύση.