Linear Programming

Ονοματεπώνυμο : Νικόλας Φιλιππάτος
AM: 1072754
Εργασία: 1η
Ημερομηνία: March 25, 2024

Table Of Contents

Exercises

Exercise 1

Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\begin{aligned} &\min\ Z = 2x_1 - x_2 \\ \text{όταν} & \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} (\Pi 1) & x_1 + x_2 & \geq 10 \\ (\Pi 2) & -10x_1 + x_2 & \leq 10 \\ (\Pi 3) & -4x_1 + x_2 & \leq 20 \\ (\Pi 4) & x_1 + 4x_2 & \geq 20 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

1. α) Να παραστήσετε γραφικά την εφικτή περιοχή του προβλήματος καθώς και όλες τις κορυφές της. Περιγράψτε τη μορφή της εφικτής περιοχής. Με γραφικό τρόπο βρείτε τη βέλτιστη κορυφή του προβλήματος, εάν υπάρχει.
2. (β) Ομοίως με γραφικό τρόπο βρείτε τη βέλτιστη λύση, αν υπάρχει, όταν η αντικειμενική συνάρτηση γίνει:

   $$min\ Z = 11x_1 - x_2$$

   και η εφικτή περιοχή παραμένει ίδια με το ερώτημα (α)
3. (γ) Αν η εφικτή περιοχή είναι όπως περιγράφεται στο ερώτημα (α) και η αντικειμενική συνάρτηση δίνεται ως:

   $$min\ Z = c_1x_1 - x_2$$

   ποιά θα πρέπει να είναι η τιμή του c1 ώστε η βέλτιστη λύση να βρίσκεται στην τομή των ευθειών που ορίζονται από τους περιορισμούς Π1 και Π4;

Exercise 5

Ασκηση 5. Θεωρήστε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\begin{aligned} &\max\ Z = -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 \\ \text{όταν} & \end{aligned}$$

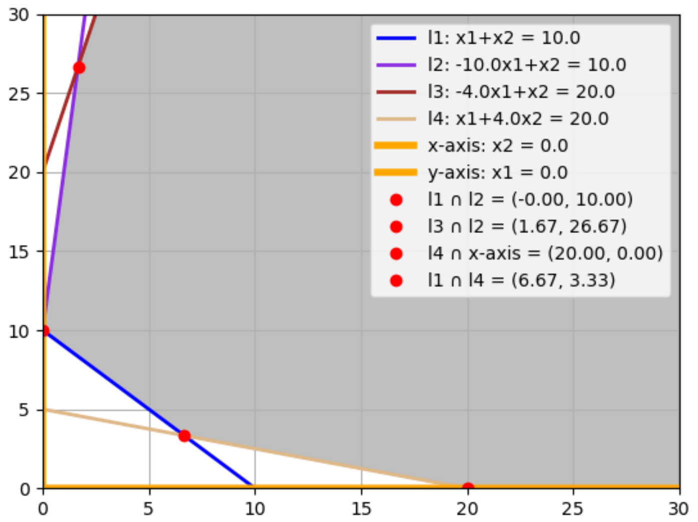
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\leq 4 \\ x_1 - x_3 + x_4 &\leq 2 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

(α) Θεωρήστε το πολύτοπο των εφικτών λύσεων του παραπάνω προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. Βρείτε όλες τις κορυφές που δημιουργούνται από τις τομές των υπερεπιπέδων του και ξεχωρίστε ποιες από αυτές είναι κορυφές του πολύτοπου των εφικτών λύσεων. Εντοπίστε, αν υπάρχουν, τις εκφυλισμένες κορυφές.
(β) Προσθέστε μεταβλητές χαλάρωσης στο σύστημα ανισώσεων και βρείτε όλες τις βασικές (εφικτές και μη-εφικτές) λύσεις για το μη ομογενές σύστημα εξισώσεων που δημιουργείται. Εντοπίστε (αν υπάρχουν) τις εκφυλισμένες βασικές λύσεις.
(γ) Αντιστοιχίστε τις βασικές λύσεις που βρήκατε στο (β) ερώτημα με τις κορυφές του ερωτήματος (α) και τέλος υποδείξτε τη βέλτιστη λύση και βέλτιστη κορυφή του προβλήματος.

Solutions

1a

> 1. α) Να παραστήσετε γραφικά την εφικτή περιοχή του προβλήματος καθώς και όλες τις κορυφές της. Περιγράψτε τη μορφή της εφικτής περιοχής. Με γραφικό τρόπο βρείτε τη βέλτιστη κορυφή του προβλήματος, εάν υπάρχει.



Θα σχεδιάσουμε τις ευθειες

$$
\begin{gathered}
y = -x + 10 \\
y = 10x + 20 \\
y = 4x + 20 \\
y = -\frac{1}{4}x + 5
\end{gathered}
$$

Με βάση τους περιορισμους Π1-Π4 και $x_1, x_2 \geq 0$ η εφικτή περιοχή περιγράφεται από την γραμμοσκιασμένη περιοχή του σχήματος.

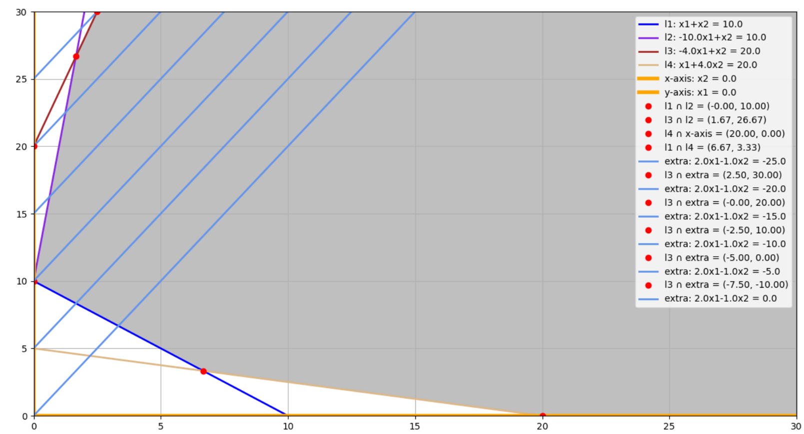
Κορυφές της εφικτής περιοχής :

- Σημειο Τομής του Π2 και Π3 [1.67, 26.67]
- Σημείο Τομής του Π1 και Π2 [0, 10]
- Σημείο Τομής του Π1 και Π4 [6,67, 3.33]
- Σημείο Τομής του Π4 και του άξονα x [20, 0]

Παρατηρουμε η εφικτή περιοχή
Ειναι bounded απο τα αριστερα λογω των περιορισμων Π3,Π2,Π1,Π4, αλλά απο τα δεξία οσο αυξάνονται τα x βλέπουμε ότι εχουμε μονο ενα κάτω όριο (ευθεια x2 =0 και ο Π4)

Για να βρουμε την βελτιστη κορυφη, σχηματιζουμε τις ευθειες $2x_1 - x_2 = c$, όπου c=[0,-5,-10,-15,-20,-25] και κοιταζουμε εαν συμπιπτει με καποια κορυφη

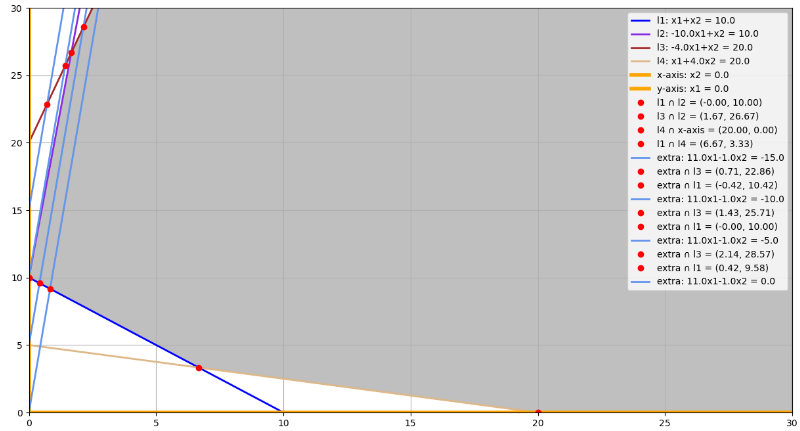
Βλέπουμε ότι μειώνοντας το c η αντικειμενική συνάρτηση παραμενει μεσα στην εφικτή περιοχη χωρις να βρισκει καποιο ανω οριο, οποτε δνε υπαρχει η βελτιστη κορυφη



1b

> 2. (β) Ομοίως με γραφικό τρόπο βρείτε τη βέλτιστη λύση, αν υπάρχει, όταν η αντικειμενική συνάρτηση γίνει:
>
> $$min\ Z = 11x_1 - x_2$$
>
> και η εφικτή περιοχή παραμένει ίδια με το ερώτημα (α)

Φτιαχνουμε παλι τις ευθειες $2x_1 - x_2 = c$, όπου c=[0,-5,-10,-15,-20,-25]



Παρατηρουμε οτι μετα το c=-10 η αντικειμενικη συναρτηση βγαινει εκτος της εφικτης περιοχης. Επομενως η βελτιστη κορυφη είναι η (0,10) Τομη του περιορισμου Π1 και Π2

--- %%

Theory

- Εφικτή περιοχή
- κορυφες
- Περιγραφη της εφικτής περιοχης
- Βελτιστη κορυφη

Βασικές Μεταβλητες ;

slide Κυρτοτητα 2

--- %%

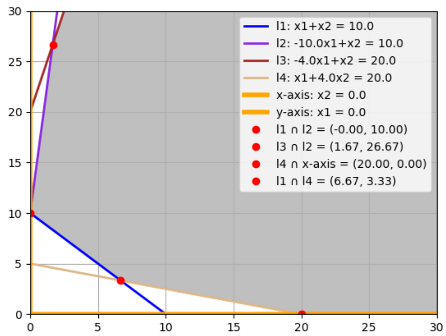
1γ

> 3. (γ) Αν η εφικτή περιοχή είναι όπως περιγράφεται στο ερώτημα (α) και η αντικειμενική συνάρτηση δίνεται ως:
>
> $$min\ Z = c_1 x_1 - x_2$$
>
> ποιά θα πρέπει να είναι η τιμή του c1 ώστε η βέλτιστη λύση να βρίσκεται στην τομή των ευθειών που ορίζονται από τους περιορισμούς Π1 και Π4;

Η κορυφη των περιορισμων Π1, Π2

$$y = -x + 10$$
$$y = -\frac{1}{4}x + 5$$

- Σημείο Τομής του Π1 και Π4 [6,67, 3.33]



$$
\begin{array}{ll}
 & \min\ Z = 2x_1 - x_2 \\
\text{όταν} & \\
(\Pi 1) & x_1 + x_2 \geq 10 \\
(\Pi 2) & -10x_1 + x_2 \leq 10 \\
(\Pi 3) & -4x_1 + x_2 \leq 20 \\
(\Pi 4) & x_1 + 4x_2 \geq 20 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Η αντικειμενικη συναρτηση του ερωτηματος γ ειναι $min\ Z = c_1 x_1 - x_2$. Αν λυσουμε ως προς x_2: $$
x*{2}* = c{1}x_{1}-Z

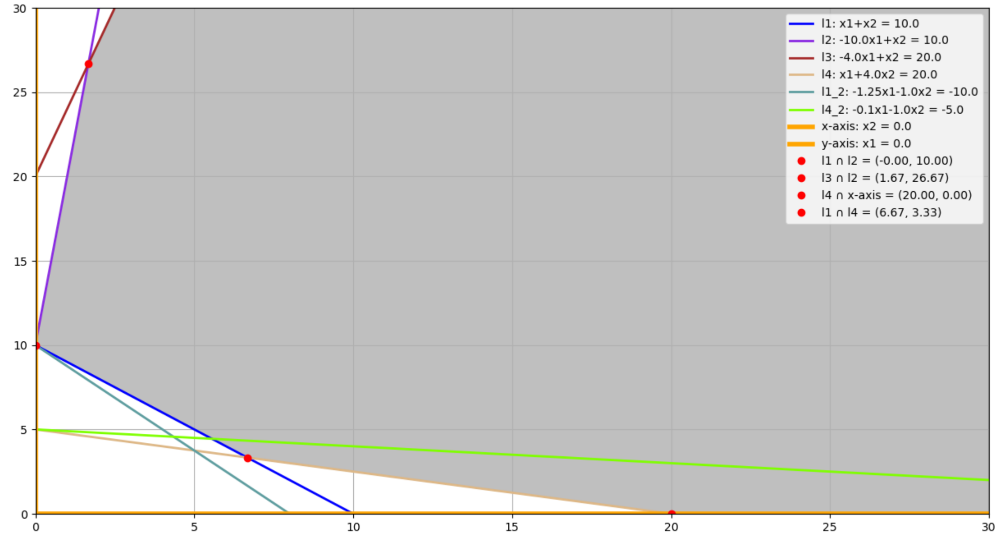
$Πρεπειναβρουμετοευροςτιμωντου\$c_1\$ετσιωστεηβελτιστηλυσηναειναιητομητωνπεριορισμωνΠ1καιΠ2 : -ΣημείοΤομήςτουΠ1καιΠ4[6,67,3.33]Μπορουμεναγραψ$

\begin{matrix}
-x*{1}*-x*{2}\leq -10 \

- \frac{1}{4} - x_{2} \leq -5
  \end{matrix}
  $$

Χωρις να επηρεασει το σχημα.

Βλεπουμε οτι με το $c_1 = -1, c_2 - \frac{1}{4}$ η αντικειμενικη συναρτηση ταυτιζεται με τις ευθειες των περιορισμων Π1 και Π4 αντιστοιχα



Βλεπουμε οτι αμα αυξησουμε το c1 απο -0.25 σε -0.1 αποκταει περισσοτερες λυσεις και σταματαει η τομη [6.67, 3.33] να ειναι η βελτιστη κορυφη. Αντιστοιχα αμα μειωσουμε το c1 απο -1 σε -1.5 η αντικειμενικη συναρτηση βγαινει εκτος περιοχης.

Επομενως το c_1 θα ανηκει :

$$-1 < c_1 < -\frac{1}{4}$$

Δεν περιλαμβανουμε το -1 και -0.25 γιατι τοτε δνε θα ειχαμε μονο το σημειο [6.67,3.33] ως βελτιστη λυση

Exercise 6

[assignment-1-6-gpt]