Μελέτη στις αριστερές και δεξιές ιδιοτιμές πινάκων με στοιχεία quaternions

Νικόλας Κάραλης
Α/Μ : 09104042

1 Εισαγωγή στα quaternions

Τα κουατέρνια είναι ένα αριθμητικό σύστημα που επεκτείνει τους μιγαδικούς αριθμούς. Εισήχθησαν απο τον W.R.Hamilton το 1843 για να χρησιμοποιηθούν στη μηχανική του τρισδιάστατου χώρου.

Ένα απο τα βασικά χαρακτηριστικά των κουατέρνιων είναι ο μη αντιμεταθετικός πολλαπλασιασμός των στοιχείων.

Τα κουατέρνια σχηματίζουν μια τετραδιάσταση διαιρετική άλγεβρα με νόρμα πάνω στους πραγματικούς αριθμούς.

Το σύνολο H είναι ισοδύναμο με τον R^4 και έχει τρείς πράξεις : Πρόσθεση, βαθμωτό πολλαπλασιασμό και πολλαπλασιασμό κουατέρνιων.

Οι πρώτες δύο πράξεις ορίζονται κατά αναλογία με τις αντίστοιχες πράξεις στον R^4. Για τον πολλαπλασιασμό κουατέρνιων, ορίζουμε μια βάση στον R^4 με στοιχεία $1, i, j, k$. Κάθε στοιχείο του H γράφεται κατα μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός στοιχείων αυτής της βάσης ($a1+bi+cj+dk, a, b, c, d \in R$). Το 1 είναι το ταυτοτικό στοιχείο.

1.1 Πολλαπλασιασμός των στοιχείων της βάσης

Ξεκινώντας απο τις εξισώσεις $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ πέρνουμε τον παρακάτω πίνακα :

x	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

1.2 Πολλαπλασιασμός στοιχείων

Ο πολλαπλασιασμός των στοιχείων γίνεται με χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας και με βάση των πολλαπλασιασμό των στοιχείων της βάσης.

2 Ιδιοτιμές πινάκων με στοιχεία quaternions

Δεδομένης της μη αντιμεταθετικότητας του πολλαπασιασμού των πινάκων με στοιχεία κουατέρνια, πρέπει να αντιμετωπίσουμε διαφορετικά τις εξισώσεις $Ax = \lambda x$ και $Ax = x\lambda$ για να βρούμε τις αριστερές και δεξιές ιδιοτιμές αντίστοιχα.

Το κουατέρνιο λ είναι αριστερή ιδιοτιμή όταν $Ax = \lambda x$. Το σύνολο $\{\lambda \in H|Ax = \lambda x,\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\alpha\pi o\iota o\ x \neq 0\}$ είναι το αριστερό φάσμα του Α και γράφεται $\sigma_l(A)$.

Αντίστοιχα, το κουατέρνιο λ είναι αριστερή ιδιοτιμή όταν $Ax = x\lambda$. Το σύνολο $\{\lambda \in H|Ax = x\lambda,\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\alpha\pi o\iota o\ x \neq 0\}$ είναι το αριστερό φάσμα του Α και γράφεται $\sigma_r(A)$.

Παραδείγμα 1

Αν $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ j & 0 \end{pmatrix}$ οι αριστερές ιδιοτιμές του Α είναι 1 και i και οι δεξιές ιδιοτιμές του Α είναι το 1 και όλα τα κουατέρνια στο [i].

Παραδείγμα 2

Αν $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -\iota & 0 \end{pmatrix}$ το Α έχει για αριστερή ιδιοτιμή το k και δεν έχει δεξιά ιδιοτιμή. Επίσης παρατηρούμε οτι το Α είναι ερμιτιανός πίνακας.

2.1 Βασικά θεωρήματα

Αν ο A είναι πραγματικός n x n πίνακας, τότε οι αριστερές και οι δεξιές ιδιοτιμές του A συμπίπτουν, δηλαδή $\sigma_l(A) = \sigma_r(A)$.

$\mathbf{Θεωρημα 1 (Wood, 1985)}$ Κάθε n x n πίνακας κουατέρνιων έχει τουλάχιστον μία αριστερή ιδιοτιμή στο H.

Αποδειξη

Γράφουμε το $Ax = \lambda x$ σαν $(\lambda I - A)x = 0$ και υποθέτουμε ότι ο $\lambda I - A$ αντιστρέφεται για κάθε $\lambda \in H$. Θα χρησιμοποιήσουμε το γενική γραμμική ομάδα $GL(n,Q)$, τη συλλογή δηλαδή όλων των αντιστρεπτών n x n πινάκων με στοιχεία κουατέρνια. Θεωρούμε $f(t,\lambda) = f_t(\lambda) = t\lambda I - A, 0 <= t <= 1, |\lambda| = 1$ και $f(t,\lambda) = f_t(\lambda) = t\lambda I - A, 0 <= t <= 1, |\lambda| = 1$ Τότε τα f και g είναι ομοτοπίες στην GL(n,Q). Παρατηρούμε ότι $f_0(\lambda) = -A$ και $f_1(\lambda) = \lambda I - A = g_1(\lambda)$ καθώς και ότι $g_0(\lambda) = \lambda I$. Οπότε το g_0 είναι ομοτοπικό με το f_0. Αντίθετα, τα f_0 και g_0 αν τα δούμε σαν απεικονίσεις απο την 3-σφαίρα S^3 στο GL(n,Q), αντιστοιχούν στους ακέραιους 0 και n αντίστοιχα, στην $\pi_3 GL(n,Q)$, την τρίτη ομάδα ομοτοπίας της GL(n,Q), το οποίο και είναι άτοπο.

Λημμα1 Αν ισχύει $A \in M_{mxn}(H), m < n$, τότε η $Ax = 0$ έχει μη μηδενική λύση.

Λημμα2 Αν το u_1 είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα αποτελούμενο απο n κουατέρνια, υπάρχουν n-1 μοναδιαία διανύσματα $u_2, ..., u_n$ αποτελούμενα απο n κουατέρνια τέτοια ώστε $\{u_1, u_2, ...u_n\}$ να είναι ένα ορθογώνιο σύνολο, δηλαδή $u_s^* u_t = 0$ για $s \neq t$

Θεωρημα2(Brenner, 1951; Lee, 1949) Κάθε n x n πίνακας κουατέρνιων έχει ακριβώς n δεξιές ιδιοτιμές οι οποίες είναι μιγαδικοί με μη αρνητικό φανταστικό μέρος. Αυτές λέγονται οι κανονικές ιδιοτιμές του πίνακα.

Αποδειξη Γράφουμε το A και το x σαν $A = A_1 + A_2 j$, $x = x_1 + x_2 j$, όπου τα A_1, A_2 είναι nxn πίνκακες μιγαδικών και τα x_1, x_2 είναι διανύσματα στήλες με στοιχεία μιγαδικούς. Τότε το $Ax = x\lambda$ είναι ισοδύναμο με το :

$$(\frac{A_1}{-A_2}\frac{A_2}{A_1})(\frac{x_1}{-x_2}) = \lambda(\frac{x_1}{x_2}) \tag{1}$$

ή το

$$(\frac{A_1}{-A_2}\frac{A_2}{A_1})(\frac{x_2}{x_1}) = \overline{\lambda}(\frac{x_2}{x_1}) \tag{2}$$

όπου λ είναι μιγαδικός αριθμός.

Αφού το

$$x_A = \frac{A_1}{-A_2}\frac{A_2}{A_1})$$

είναι ένας 2n x 2n μιγαδικός πίνακας, έχει ακριβώς 2n μιγαδικές ιδιοτιμές.

Παρατηρούμε οτι αν ένας μιγαδικός πίνακας X μοιάζει με τον συζυγή του, τότε οι μη πραγματικές ιδιοτιμές του X εμφανίζονται σε ζεύγη συζυγών. Ο χ_A μοιάζει με τον $\overline{\chi_A}$ οπότε οι μη πραγματικές ιδιοτιμές του εμφανίζονται σε ζευγάρια συζυγών. Για τις πραγματικές ιδιοτιμές θα δείξουμε με επαγωγή οτι εμφανίζονται άρτιο αριθμό φορών. Για n=1 είναι προφανές. Για $n > 1$ έχουμε :

Υποθέτουμε οτι $Ax = x\lambda = \lambda x$, όπου λ είναι πραγματικός και $x \neq 0$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα. Έστω $u_2, ..., u_n$ τέτοια ώστε το U=() είναι μοναδιαίος πίνακας και έστω

$$U^* A U = \left(\begin{array}{cc} \lambda & \alpha \\ 0 & B \end{array} \right) \tag{3}$$

όπου B είναι ένας $(n-1)x(n-1)$ πίνακας κουατερνίων και α είναι ένα διάνυσμα γραμμή με n-1 στοιχεία κουατέρνια. Είναι εύκολο να δούμε ότι υπάρχει ένας 2n x 2n αντιστέψιμος πίνακας T τέτοιος ώστε :

$$T^{-1}\chi_U \cdot \chi_A \chi_U T = (\chi_U T)^{-1}\chi_A(\chi_U T) = \left(\begin{array}{cc} \chi_\lambda & \chi_\alpha \\ 0 & \chi_B \end{array} \right) \tag{4}$$

ἤΜε επαγωγή, κάθε πραγματική ιδιοτιμή του χ_B ἤεμφανίζεται άρτιο αριθμό φορών. Επομένως ο χ_A έχει ακριβώς 2n ιδιοτιμές συμμετρικά κατανεμημένες στο μιγαδικό επίπεδο, και ο A έχει ακριβώς n μιγαδικές ιδιοτιμές στο πάνω μισό του μιγαδικού επιπέδου.