Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Όνομα : Κάραλης Νικόλας
Α/Μ: 09104042

Εργαστηριακή Άσκηση 2
Μέτρηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας με τη μέθοδο του φυσικού εκκρεμούς.

Συνεργάτες:
Καλαμαρά Αντιγόνη

Υπεύθηνος Εργαστηρίου:
Φετφατζής Πρόδρομος

Ημερομηνία Διεξαγωγής : 22/3/2005
Ημερομηνία Παράδοσης : 29/3/2005

Σκοπός της Άσκησης:

Σκοπός αυτής της εργαστηριακής άσκησης είναι ο πειραματικός προσδιορισμός της επιτάχυνσης της βαρύτητας με τη μέτρηση των ταλαντώσεων μιας μεταλλικής ράβδου συναρτήσει του άξονα περιστροφής της. Σκοπός μας είναι με τη χρήση της γραφικής μεθόδου είτε με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων να καταλήξουμε σε μία γραμμική σχέση μεταξύ της περιόδου της ταλάντωσης και της θέσης του άξονα περιστροφής της ράβδου. Η αντίστροφη κλίση της ευθείας εκφράζει την επιτάχυνση της βαρύτητας.

Θεωρία

Για ένα μαθηματικό εκκρεμές μάζας M και μήκους L, η περίοδος του οποίου είναι T, σε μικρές γωνίες αρχικής εκτροπής από τη θέση ισορροπίας, ισχύει :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Φυσικό εκκρεμές ονομάζεται κάθε σώμα το οποίο μπορεί να εκτελέσει ταλαντώσεις γύρω από κάποιον άξονα με τον οποίο είναι σταθερά συνδεδεμένο. Για ένα φυσικό εκκρεμές με τις παραπάνω προϋποθέσεις αναφορικά με τη γωνία ισχύει όπου Ip η ροπή αδράνειας ως προς άξονα P.

Οπότε με χρήση του θεωρήματος Steiner για παράλληλους άξονες έχουμε

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_c + ML^2}{MgL}}$$

Το μέγεθος $K_c = \sqrt{\frac{I_c}{M}}$ ονομάζεται ακτίνα αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας, συνεπώς καταλήγουμε ότι $T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{I_c}{M} + L^2}{gL}} = 2\pi\sqrt{\frac{K_c^2 + L^2}{gL}}$

Πειραματική Μέθοδος

Για να βρούμε το g, γραμμικοποιούμε την παραπάνω εξίσωση, ώστε με χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων και της γραφικής μεθόδου να βρούμε τη λύση. Οπότε έχουμε

$\frac{LT^2}{4\pi^2} = \frac{K_c^2}{g} + \frac{1}{g}L^2$ όταν $x = L^2, y = \frac{LT^2}{4\pi^2}, \alpha = \frac{K_c^2}{g}, \beta = \frac{1}{g}$

Θα καταλήξουμε σε μία ευθεία της μορφής y = a + βx, και θα ισχύει g = 1/b

Πειραματική διάταξη

Στο πείραμα θα χρησιμοποιηθεί μια κυλινδρική ορειχάλκινη ράβδος, με σημειωμένο το κέντρο μάζας της. Επίσης χρησιμοποιούμε ένα λεπτό μεταλλικό δακτύλιο για τη στήριξη της ράβδου στη βάση της και την μετακίνηση του άξονα περιστροφής στην εκάστοτε θέση του. Η μετρούμενη ποσότητα L είναι η απόσταση του δακτυλίου απ τον άξονα περιστροφής. Για την πρόκληση της ταλάντωσης απομακρύνουμε την ράβδο από τη θέση ισορροπίας της. Η απομάκρυνση από τη θέση αυτή είναι πολύ μικρή, καθώς οι χρησιμοποιούμενες εξισώσεις ισχύουν προσεγγιστικά μόνο για πολύ μικρές γωνίες. Για την μέτρηση των αποστάσεων χρησιμοποιούμε υποδεκάμετρο και για τη μέτρηση της χρονικής διάρκειας των ταλαντώσεων χρησιμοποιούμε ένα χρονόμετρο. Τέλος, για τη μέτρηση της αρχικής γωνίας, χρησιμοποιούμε ένα μοιρογνωμόνιο.

Επεξεργασία Δεδομένων

Στοιχεία Πειραματικής Διάταξης

Μήκος Ράβδου : l = 80,0 cm ± 0,1 cm
Ακτίνα Ράβδου : r = 0,95 cm ± 0,1cm

Υπολογισμός της τυπικής απόκλισης των μετρήσεων

Παρακάτω παρατίθεται ο πίνακας 10 μετρήσεων του χρόνου για μια πλήρη ταλάντωση της ράβδου, από αρχική γωνία 5 μοιρών και με τη θέση του άξονα περιστροφής 4 cm από το κέντρο μάζας.

A/A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T (s)	2,3	2,2	2,3	2,0	2,2	2,1	2,0	2,1	2,2	2,2

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{9}} = 0{,}107 \text{ s}$$

Άρα, στο εξής το σφάλμα της μέτρησης του χρόνου για την εκτέλεση N ταλαντώσεων θα είναι δt = (0,107 / N) s

Επιπλέον σφάλματα μέτρησης

Πλάτος (°)	t(s)	N	T(s)
5	27,6 ± 0,00891	12	2,3 ± 0,0007425
20	27,9 ± 0,00891	12	2,325 ± 0,0007425

Βλέπουμε ότι η διαφορά είναι λίγο μεγαλύτερη από αυτή που επιτρέπουν τα όρια. Αυτό συμβαίνει διότι κατά τη διάρκεια των 12 περιόδων υπάρχει απώλεια ενέργειας καθώς η ταλάντωση είναι φθίνουσα. Ακόμα, το σφάλμα στην ανάγνωση του πλάτους της ταλάντωσης είναι σημαντικό.

α) Με τη Γραφική Μέθοδο

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι μετρήσεις που έγιναν στο εργαστήριο χρησιμοποιώντας την πειραματική διάταξη, καθώς και τα x,y που χρειάζονται για την χάραξη της γραφικής παράστασης.

A/A	L(m)	N	t (s)	T (s)	$x = L^2$ (m^2)	$y = LT^2/4\pi^2$ (ms^2)
1	0,04	5	11,5	2,30	0,0016	0,005359947
2	0,08	5	8,6	1,72	0,0064	0,005995035
3	0,12	5	7,5	1,50	0,0144	0,006839252
4	0,16	5	6,9	1,38	0,0256	0,007718324
5	0,20	5	6,7	1,34	0,0400	0,009096712
6	0,24	5	6,8	1,36	0,0576	0,011244339
7	0,28	5	6,9	1,38	0,0784	0,013507067
8	0,32	5	6,7	1,34	0,1024	0,014554739
9	0,36	5	6,9	1,38	0,1296	0,017366229
10	0,40	5	6,9	1,38	0,1600	0,01929581

Εδώ παρουσιάζεται η γραφική παράσταση των μεγεθών L (m) και T (m) σχεδιασμένη σε mm χαρτί.

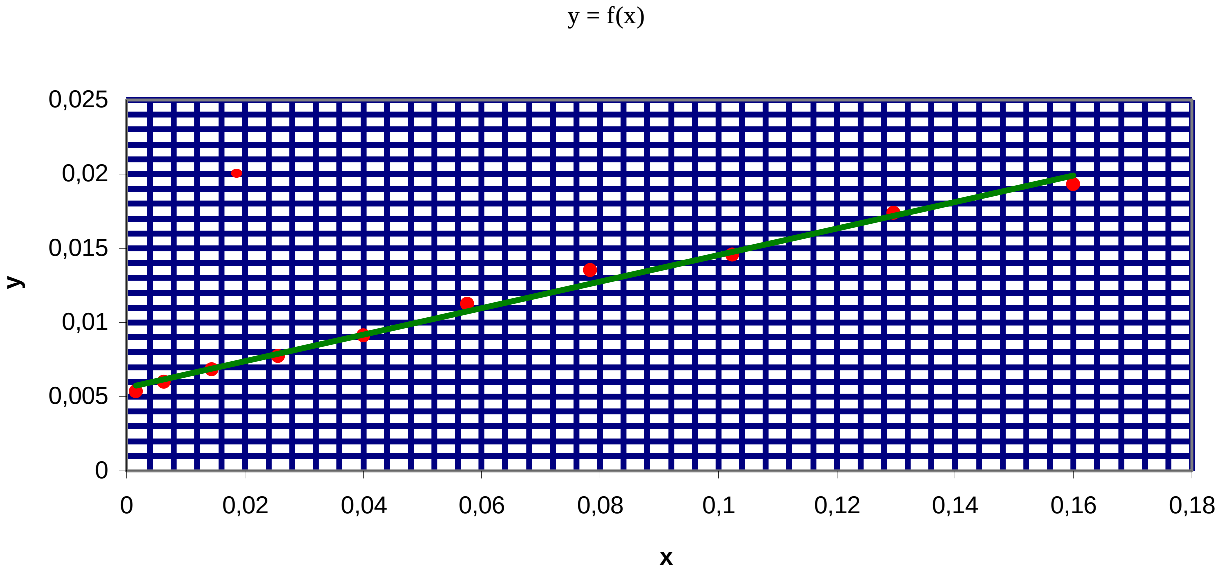
Επιλέγουμε 3 σημεία αριστερά του κατώτερου σημείου της γραφικής παράστασης

β) Με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων

A/A	x	y	xy	x^2	d	d^2
1	0,0016	0,0054	9*10^-6	3*10^-6	-4*10^-4	1*10^-7
2	0,0064	0,006	4*10^-5	4*10^-5	-2*10^-4	3*10^-8
3	0,0144	0,0068	10^-4	0,0002	-4*10^-5	1*10^-9
4	0,0256	0,0077	0,0002	0,0007	-2*10^-4	3*10^-8
5	0,04	0,0091	0,0004	0,0016	-7*10^-5	5*10^-9
6	0,0576	0,0112	0,0006	0,0033	0,0005	3*10^-7
7	0,0784	0,0135	0,0011	0,0061	0,0009	8*10^-7
8	0,1024	0,0146	0,0015	0,0105	-2*10^-4	4*10^-8
9	0,1296	0,0174	0,0023	0,0168	0,0002	4*10^-8
10	0,16	0,0193	0,0031	0,0256	-6*10^-4	4*10^-7

Με τα παραπάνω δεδομένα προκύπτει ότι : $\alpha = 0{,}0055902$, $\beta = 0{,}0894084$, $\delta\alpha = 0{,}0002269$, $\delta\beta = 0{,}0028174$
Άρα $\beta=(0{,}0894 \pm 0{,}00281)\ ms^2$

Οπότε η γραφική παράσταση είναι η ευθεία $y = 0{,}0894\ x + 0{,}00559$



Υπολογισμός της επιτάχυνσης της βαρύτητας

Όπως είδαμε παραπάνω, η επιτάχυνση g της βαρύτητας δίνεται από τη σχέση g = 1/β = 11,185 ± 0,21 m^2/s

Η ακτίνα αδράνειας Kc δίνεται από τη σχέση :

$$K_c = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{\frac{1}{\alpha\beta}}\delta\alpha\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta^3}}\delta\beta\right)^2}$$

Οπότε Kc = 0,250 ± 0,01284 m

Υπολογισμός της ακτίνας αδράνειας Kc με τη χρήση κυλίνδρου.

Η θεωρητικά αναμενόμενη τιμή για την Kc δίνεται από τη σχέση :

$$K_c = \sqrt{\frac{H^2}{12} + \frac{\alpha^2}{4}} \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{H^2}{3}}} \cdot \left[\left(\frac{\alpha}{2}\delta\alpha\right)^2 + \left(\frac{H}{6}\delta H\right)^2\right]}$$

Με αντικατάσταση των δεδομένων της ράβδου προκύπτει ότι :
Kc = 0,231 ± 0,00029 m

Σύγκριση μετρήσιμης τιμής με την πραγματική

Αν συγκρίνουμε την τιμή 11,185 ± 0,21 m^2/s με την πραγματική στην Αθήνα, που είναι 9,800 m^2/s βρίσκουμε ότι το σφάλμα είναι πολύ μεγαλύτερο του θεωρητικά αναμενόμενου.
Οι αιτίες γι'αυτό είναι πολλές.
Αφ'ενός μεν δεν μπορούμε να συγχρονιστούμε με το πείραμα και έτσι ο χρόνος που μετράμε δεν είναι ακριβής. Ακόμα, το μήκος καθώς και η γωνίες που μετράμε δεν είναι απολύτως ακριβή. Ένας επιπλέον και πολύ σημαντικός παράγοντας είναι το γεγονός ότι κατά τη διάρκεια των ταλαντώσεων και λόγω των τριβών η εκτελούμενη ταλάντωση δεν είναι ιδανική αλλά είναι φθίνουσα με αποτέλεσμα να χάνεται μεγάλο ποσό ενέργειας. Ακόμα, η ράβδος είναι σε ένα ποσοστό ανομοιογενής. Τέλος, ο υπολογισμός των εξισώσεων έχει γίνει με ορισμένες παραδοχές και

εξιδανικεύσεις, όπως στην περίπτωση υπολογισμού των τριγωνομετρικών αριθμών.