Εθνικό **Μ**ετσόβιο **Π**ολυτεχνείο
Σχολή **Ε**φαρμοσμένων **Μ**αθηματικών και **Φ**υσικών **Ε**πιστημών

Όνομα : Κάραλης Νικόλας
Α/Μ: 09104042

Εργαστηριακή Άσκηση 4
Προσδιορισμός του μέτρου στρέψης υλικού με τη μέθοδο του στροφικού εκκρεμούς.

Συνεργάτες:
Καλούδης Μιχάλης

Υπεύθυνος Εργαστηρίου:

Ημερομηνία Διεξαγωγής : 15/3/2005
Ημερομηνία Παράδοσης : 22/3/2005

Σκοπός της Άσκησης:

Σκοπός αυτής της εργαστηριακής άσκησης είναι ο πειραματικός προσδιορισμός του μέτρου στρέψης ενός υλικού, από το οποίο αποτελούνται 2 λεπτά μεταλλικά σύρματα. Αυτό είναι χρήσιμο για τον υπολογισμό και την πρόβλεψη της παραμόρφωσης που προκαλείται σε ένα φορέα υπό την επίδραση στρεπτικής ροπής. Ακόμα, είναι χρήσιμο για την επίλυση προβλημάτων μηχανικής όπου ο αριθμός των αγνώστων υπερβαίνει τον αριθμό των δοθέντων εξισώσεων (υπερστατικώς ορισμένα προβλήματα).

Θεωρία

Η παραμόρφωση ενός σώματος υπό την επίδραση μιας δύναμης ονομάζεται ελαστική όταν το σώμα επανέρχεται στην αρχική του θέση μόλις η δύναμη πάψει να εφαρμόζεται.
Η ελαστικότητα ενός σώματος εμφανίζεται :
α) κατά τον εφελκυσμό και τη θλίψη
β) κατά τη διάτμηση και τη στρέψη
γ) κατά την ομοιόμορφη συμπίεση από όλες τις διευθύνσεις

Εδώ θα ασχοληθούμε με την περίπτωση β.

Κατά τη διάτμηση σύμφωνα με το νόμο του Hooke έχουμε : $\varphi = \beta F/s$ όπου φ η γωνία διάτμησης, β ο συντελεστής διάτμησης ή στρέψης του υλικού και $G = 1/\beta$ το μέτρο διάτμησης ή στρέψης.
Για ένα λεπτό σύρμα μήκους l πακτωμένο στο ένα άκρο και όταν στο άλλο άκρο ασκείται ροπή στρέψης M, ισχύει $M = D\varphi$ όπου D είναι η κατευθύνουσα ροπή του σύρματος.
Το D εξαρτάται από το υλικό και τις διαστάσεις του σύρματος.

Έπειτα από πράξεις, προκύπτει ότι η κατευθύνουσα ροπή του σύρματος ισούται με :

$$D = G\frac{\pi r^4}{2}\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right)$$

(1) καθώς στην πειραματική διάταξη έχουμε 2 σύρματα, οπότε παίρνουμε το άθροισμα των 2 κατευθυνουσών ροπών.

Πειραματική Μέθοδος

Σκοπός της άσκησης όπως προαναφέρθηκε είναι ο υπολογισμός του G.

Λύνοντας όμως την *(1)* ως προς G προκύπτει :

$$G = D\frac{2}{\pi r^4}\frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2}$$

Αρκεί λοιπόν να βρούμε το D.
Χρησιμοποιώντας λοιπόν την πειραματική διάταξη που περιγράφεται αναλυτικά παρακάτω, και με χρήση του θεωρήματος των παραλλήλων αξόνων, καταλήγουμε στη σχέση : $\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{I'}{D} + \frac{M}{D}R^2$ όπου $M = M_1 + M_2$ όταν $M_1 = M_2$ και $I' = I_o + I_1 + I_2$

Συνεπώς η γραφική παράσταση του μεγέθους $y = T^2/4\pi^2$ ως συνάρτηση του $x = R^2$ είναι ευθεία της μορφής $y = \alpha + \beta x$ με κλίση M/D, που τέμνει τον άξονα των y στο σημείο y=I'/D.

Επομένως, μετά την επεξεργασία των μετρήσεων και την εύρεση της κλίσης β της ευθείας, μπορούμε να υπολογίσουμε το D.

Προκειμένου να μειωθεί κατά το δυνατόν το σφάλμα κατά τη μέτρηση της περιόδου, μετράμε τη διάρκεια 10 πλήρων ταλαντώσεων της ράβδου (10 περιόδων) και έπειτα υπολογίζουμε το χρόνο για μια περίοδο.

Ακόμα, επειδή είναι πολύ δύσκολος ο υπολογισμός της ροπής αδράνειας I του συστήματος, χρησιμοποιούμε στους υπολογισμούς μας το άθροισμα των δύο σχεδόν ίδιων μαζών M_1 και M_2.

Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη αποτελείται από 2 όμοια σύρματα, των οποίων το G θέλουμε να βρούμε και από μία οριζόντια ράβδο στερεωμένη συμμετρικά στα σύρματα. Δύο κατά το δυνατόν όμοιες μάζες M_1 και M_2 στερεώνονται στη ράβδο σε διάφορες αποστάσεις και μετράμε τις εκάστοτε περιόδους των στροφικών ταλαντώσεων με τη βοήθεια χρονομέτρου.

Επεξεργασία Δεδομένων

Στοιχεία Πειραματικής Διάταξης

l_1 : 29,1 cm ± 0,1 cm
l_2 : 27,2 cm ± 0,1 cm
l = 56,3 ± 0,1 cm
$M = M_1 + M_2$ = 199,3 ± 0,01 gr
Ακτίνα Ράβδου R = 16,4 ± 0,1 cm
Διάμετρος σύρματος 2r = 0,59 cm ± 0,01cm

α) Με τη Γραφική Μέθοδο

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι μετρήσεις που έγιναν στο εργαστήριο χρησιμοποιώντας την πειραματική διάταξη, καθώς και τα x,y που χρειάζονται για την χάραξη της γραφικής παράστασης.

A/A	R(m)	10T(s)	T(s)	$x = R^2$ (m^2)	$y = T^2/4\pi^2$(s^2)
1	0,164	47,88	4,788	0,026	0,580
2	0,151	44,16	4,416	0,022	0,494
3	0,136	40,84	4,084	0,018	0,422
4	0,12	37,22	3,722	0,014	0,350
5	0,105	33,29	3,329	0,011	0,280
6	0,09	29,69	2,969	0,008	0,223
7	0,07	26,48	2,648	0,004	0,177
8	0,06	23,56	2,356	0,003	0,140
9	0,042	20,34	2,034	0,001	0,104
10	0,021	18,07	1,807	0,000	0,082

Εδώ παρουσιάζεται η γραφική παράσταση των μεγεθών $x = R^2$ (m^2) και $y = T^2/4\pi^2$(s^2) σχεδιασμένη σε mm χαρτί.

Με   συμβολίζονται τα σημεία που προκύπτουν από τις πειραματικές μετρήσεις ενώ με   συμβολίζονται τα σημεία που επιλέγονται για τον υπολογισμό της κλίσης της ευθείας.

Από τα σημεία λοιπόν Α(24,550) και Β(6,200) υπολογίζουμε την κλίση της ευθείας. β = (550-200)/(24-6) ↔ β = 13,88

β) Με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων

A/A	x =R^2 (m^2)	y =$T^2/4\pi^2$(s^2)	xy	x^2	d	d^2
1	0,026	0,580	0,015080	0,000676	0,007223	5,22E-05
2	0,022	0,494	0,010868	0,000484	-0,00359	1,29E-05
3	0,018	0,422	0,007596	0,000324	-0,00041	1,68E-07
4	0,014	0,350	0,004900	0,000196	0,002774	7,69E-06
5	0,011	0,280	0,003080	0,000121	-0,01084	0,000117
6	0,008	0,223	0,001784	0,000064	-0,01145	0,000131
7	0,004	0,177	0,000708	0,000016	0,017732	0,000314
8	0,003	0,140	0,000420	0,000009	-0,00047	2,23E-07
9	0,001	0,104	0,000104	0,000001	0,00112	1,25E-06
10	0,000	0,082	0,000000	0,000000	-0,00208	4,34E-06
Σ	0,107	2,852	0,04454	0,001891		0,000642

Με τα παραπάνω δεδομένα προκύπτει ότι : α = 0,084 , β = 18,795 ,
δα = 0,004, δβ = 0,327 Άρα β=(18,795 ± 0,327) s^2/m^2

Οπότε η γραφική παράσταση είναι η ευθεία y = 18,795x + 0,084

Υπολογισμός της ροπής στρέψης

$$D=\frac{M}{b} \quad => \quad \delta D=\sqrt{(\frac{\partial D}{b}\delta D)^2+(\frac{\partial D}{M}\delta M)^2}=\frac{M}{b}\sqrt{\frac{\delta M^2}{M^2}+\frac{\delta b^2}{b^2}}$$

$$\delta M=\sqrt{\delta M_1^2 \quad \delta M_2^2}=0{,}01\,gr=0{,}01\,x10^{-3}\,kg$$

Οπότε, με αντικατάσταση προκύπτει : D = (10,603 ± 0,067) Nm/rad

Υπολογισμός του μέτρου στρέψης :

$$\delta G=\sqrt{(\frac{\partial G}{D}\delta D)^2+(\frac{\partial G}{l_1}\delta l_1)^2+(\frac{\partial G}{l_2}\delta l_2)^2}$$

$$\frac{\partial G}{D}=\frac{2}{\pi r^4}\frac{l_1 l_2}{l_1+l_2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial l_1}=D\frac{2}{\pi r^4}\frac{l_2}{(l_1+l_2)^2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial l_2}=D\frac{2}{\pi r^4}\frac{l_1}{(l_1+l_2)^2}$$

$$=> \quad \delta G=D\frac{2}{\pi r^4}\frac{l_1 l_2}{l_1+l_2}\sqrt{\frac{\delta D^2}{D^2}+\frac{\delta\ l_1^2}{l_1^2(l_1+l_2)^2}+\frac{\delta\ l_2^2}{l_2^2(l_1+l_2)^2}}=$$

ενώ $G=D\frac{2}{\pi r^4}\frac{l_1 l_2}{l_1+l_2}$

Με αντικατάσταση στις παραπάνω εξισώσεις έχουμε :
G = (125,30 ±0,250) GPa