Εθνικό **Μ**ετσόβιο **Π**ολυτεχνείο
Σχολή **Ε**φαρμοσμένων **Μ**αθηματικών και **Φ**υσικών **Ε**πιστημών

Όνομα : Κάραλης Νικόλας
Α/Μ: 09104042

Εργαστηριακή Άσκηση 35
Ροπή αδράνειας στερεών σωμάτων.

Συνεργάτες:
Καλαμαρά Αντιγόνη

Υπεύθυνος Εργαστηρίου:

Ημερομηνία Διεξαγωγής : 7/4/2005
Ημερομηνία Παράδοσης : /5/2005

Σκοπός της Άσκησης:

Σκοπός της άσκησης αυτής είναι ο πειραματικός προσδιορισμός της ροπής αδράνειας τεσσάρων στερεών σωμάτων : ενός συμπαγούς κυλίνδρου, ενός κυλινδρικού σωλήνα, μίας σφαίρας και ενός δίσκου.

Πειραματική Μέθοδος

Κατά τη διεξαγωγή του πειράματος, αρχικά χρησιμοποιούμε το δυναμόμετρο για να μετρήσουμε τη δύναμη που ασκεί το ελατήριο του στροφικού ταλαντωτή με τη στροφή του σε διάφορες γωνίες. Χρησιμοποιώντας τον πίνακα των μετρήσεων, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση F(φ) και υπολογίζοντας με τη γραφική μέθοδο την κλίση αυτής υπολογίζουμε την σταθερά επαναφοράς. Έπειτα, μετράμε το χρόνο που χρειάζονται τα τέσσερα στερεά για την εκτέλεση συγκεκριμένου αριθμού ταλαντώσεων, ούτως ώστε να υπολογίσουμε την περίοδο των ταλαντώσεων. Τέλος, με τη γνώση της σταθεράς επαναφοράς και της περιόδου, μπορούμε να υπολογίσουμε την ροπή αδράνειας των τεσσάρων στερεών.

Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη αποτελείται από ένα στροφικό ταλαντωτή, στον οποίο τα σώματα εκτελούν ταλαντώσεις γύρω από ένα κατακόρυφο άξονα, ενώ για τη δημιουργία ροπής επαναφοράς χρησιμοποιείται ένα σπειροειδές ελατήριο. Για τη μέτρηση της σταθεράς επαναφοράς του ελατηρίου χρησιμοποιείται ένα δυναμόμετρο και ένας μοχλοβραχίονας μήκους 6,00±0,03 cm (για την άσκηση μετρήσιμης ροπής στο ελατήριο). Επίσης έχουμε τέσσερα στερεά, την ροπή αδράνειας των οποίων θέλουμε να μετρήσουμε. Ακόμα χρησιμοποιούμε ένα ψηφιακό χρονόμετρο χειρός για τη μέτρηση των περιόδων περιστροφής των σωμάτων.

<u>Επεξεργασία Δεδομένων</u>

Τα χαρακτηριστικά των στερεών είναι :
<u>Κυκλικός δίσκος</u> : M = 252g ± 0,5g, R = 1,09mm ± 0,5mm,
d = 12mm ± 0,2mm
<u>Συμπαγής Κύλινδρος</u> : M = 378g ± 0,5g, R = 0,50mm ± 0,5mm
<u>Κυλινδρικός Σωλήνας</u> : M = 365g ± 0,5g, R = 50mm ± 0,5mm
<u>Σφαίρα</u> : M = 660g ± 0,5g, R = 69mm ± 0,5mm

<u>Έλεγχος της γραμμικότητας και βαθμονόμηση του ελατηρίου</u>

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι μετρήσεις της δύναμης που ασκεί το σπειροειδές ελατήριο στο δυναμόμετρο.

F (N)	*φ*

0,15	45
0,45	90
0,60	135
1,00	180
1,30	225
1,55	270
2,00	315
2,40	360

Από αυτές τις μετρήσεις, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση που δείχνει τη σχέση μεταξύ δύναμης του ελατήριου και γωνίας περιστροφής. Παρατηρούμε ότι η σχέση αυτή είναι γραμμική, οπότε υπολογίζουμε με τη γραφική μέθοδο την κλίση της ευθείας καθώς και το σφάλμα της. Για τον υπολογισμό της κλίσης και του σφάλματος επιλέγουμε τα σημεία Α(2π, 2.16), Β(0, -0.20),
Γ(2π, 2.12) Δ(0, -0.28), Ε(2π, 2.32), Ζ(0, -0.14)

Έτσι, υπολογίζουμε την κλίση ως β = y_β-y_α / x_β-x_α και προκύπτει
β = 0,375 ± 0,005 N/rad. Το σφάλμα προκύπτει από τη σχέση δβ = ½ (β2-β1), όπου β1 = y_δ-y_γ / x_δ-x_γ, β2 = y_ζ-y_ε / x_ζ-x_ε.
Όμως ισχύει ότι φ **=** $\frac{FL}{D}$. Οπότε η κλίση β που υπολογίσαμε αντιστοιχεί στο πηλίκο D/L. Συνεπώς D = β.L Άρα **D = 2,25 x 10^{-2} m.N/rad**.

Για το σφάλμα του D θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση

$$\delta D=\sqrt{\left(\frac{\theta D}{\theta \beta}\delta\beta\right)^2+\left(\frac{\theta D}{\theta L}\delta L\right)^2}=\sqrt{L^2\delta\beta^2+\beta^2\delta L^2}$$

οπότε θα έχουμε **δD = 0,17 x 10^{-2} m.N/rad**

Συνεπώς **D = (2,25 ± 0,17) x 10^{-2} m.N/rad**

<u>Υπολογισμός της ροπής αδράνειας των σωμάτων</u>

Κατά τη διεξαγωγή του πειράματος, μετρήθηκε ο χρόνος για 5 και 10 ταλαντώσεις κάθε σώματος. Από το χρόνο αυτό υπολογίσαμε την περίοδο ταλάντωσης κάθε σώματος. Από την παραδοχή ότι οι ταλαντώσεις κάθε σώματος είναι απλές αρμονικές και ότι οι απώλειες ενέργειας είναι μηδενικές, προκύπτει η σχέση η οποία συνδέει την περίοδο ταλάντωσης, την κατευθύνουσα ροπή και τη ροπή αδράνειας του κάθε σώματος, καθώς και η σχέση που δίνει το σφάλμα της ροπής αδράνειας.

$$I=\frac{T^2 D}{4\pi^2} \quad \delta I=\sqrt{\left(\frac{\theta I}{\theta T}\delta T\right)^2+\left(\frac{\theta I}{\theta D}\delta D\right)^2}=\frac{T}{4\pi^2}\sqrt{4D^2\delta T^2+T^2\delta D^2}$$

Κυκλικός Δίσκος
Για τον κυκλικό δίσκο γνωρίζουμε ότι Μ = 252g ± 0,5g , R=1,09mm ± 0,5mm,
d = 12mm ± 0,2mm.
Η θεωρητική ροπή αδράνειας δίνεται από τη σχέση $I_{δ-θ}$=1/2 M R^2 οπότε από με αντικατάσταση έχουμε $I_{δ-θ}$ = 0.00150 kg.m^2
Ακόμα δ$I_{δ-θ}$ = 10^{-5} kg.m^2 , οπότε **$I_{δ-θ}$ = 0.00150 ± 10^{-5} kg.m^2**.

Για να βρούμε την περίοδο και το σφάλμα της, παίρνουμε τον πίνακα των μετρήσεων, και υπολογίζουμε το μέσο όρο των τιμών της περιόδου.

t(sec)	*N*	*T(sec)*	*Ti - Tμ*	*(Ti-T)²*
14,02	10	1,402	0,067	0,004
13,94	10	1,394	-0,013	0,000
14,05	10	1,405	0,097	0,009
13,85	10	1,385	-0,103	0,011
13,98	10	1,398	0,027	0,001
13,88	10	1,388	-0,073	0,005

Έτσι, έχουμε **Tμ = 1,395 sec**
Για να υπολογίσουμε το σφάλμα, θα υπολογίσουμε την τυπική απόκλιση του συνολικού χρόνου για τις 10 μετρήσεις.
$σ = \sqrt{(Σ(Ti-T)^2/5)}$ = 0,07sec και καθώς $δT = σ/\sqrt{6}$, έχουμε **δΤ = 0,03sec**
Για την πειραματικά μετρούμενη ροπή αδράνειας του δίσκου ισχύει $I_{δ-π}$ = 0,0010 kg.m^2 και δ$I_{δ-π}$ = 0,00008 kg.m^2, συνεπώς **$I_{δ-π}$ = 0,0010 ± 0,00008 kg.m^2**

Συμπαγής Κύλινδρος
Για τον συμπαγή κύλινδρο γνωρίζουμε ότι R = 0,50 mm ± 0,5mm και
M =378g ± 0,5g

Η θεωρητική ροπή αδράνειας δίνεται από τη σχέση $I_{K-θ}$=1/2 M R^2
Με αντικατάσταση των δεδομένων σε αυτήν, έχουμε = 0.00047 kg.m^2
Για το σφάλμα έχουμε δ$I_{K-θ}$ = 10^{-5} kg.m^2 , οπότε **$I_{K-θ}$ = 0.00047 ± 10^{-5} kg.m^2**.

Για να βρούμε την περίοδο και το σφάλμα της, παίρνουμε τον πίνακα των μετρήσεων, και υπολογίζουμε το μέσο όρο των τιμών της περιόδου.

t(sec)	*N*	*T*	*Ti - Tμ*	*(Ti - Tμ)^2*
7,51	10	0,751	0,072	0,005
7,46	10	0,746	0,022	0,000
7,44	10	0,744	0,002	0,000
3,75	5	0,750	0,062	0,004
3,68	5	0,736	-0,078	0,006
3,68	5	0,736	-0,078	0,006

Έτσι, έχουμε **Tμ = 0,744 sec**
Για να υπολογίσουμε το σφάλμα, θα υπολογίσουμε την τυπική απόκλιση του συνολικού χρόνου για τις 10 μετρήσεις.
$\sigma = \sqrt{(\Sigma(Ti-T)^2/5)}$ = 0,06sec και καθώς $\delta T = \sigma/\sqrt{6}$, έχουμε **δT = 0,02sec**
Για την πειραματικά μετρούμενη ροπή αδράνειας του συμπαγούς κυλίνδρου ισχύει $I_{K\text{-}\pi}$ = 0,00042 kg.m^2 και $\delta I_{K\text{-}\pi}$ = 0,00004 kg.m^2, συνεπώς
$I_{K\text{-}\pi}$ = 0,00042 ± 0,00004 kg.m^2

<u>Κυλινδρικός Σωλήνας</u>
Για τον κυλινδρικό σωλήνα γνωρίζουμε ότι R = 50mm ± 0,5mm και
M = 365g ± 0,5g

Η θεωρητική ροπή αδράνειας δίνεται από τη σχέση $I_{\Sigma\text{-}\theta} = M R^2$ οπότε με αντικατάσταση έχουμε $I_{\Sigma\text{-}\theta}$ = 0.00091 kg.m^2
Για το σφάλμα έχουμε $\delta I_{\Sigma\text{-}\theta} = 2 \times 10^{-5}$ kg.m^2 , οπότε
$I_{\Sigma\text{-}\theta} = 0.00091 \pm 2 \times 10^{-5}$ kg.m^2.

Για να βρούμε την περίοδο και το σφάλμα της, παίρνουμε τον πίνακα των μετρήσεων, και υπολογίζουμε το μέσο όρο των τιμών της περιόδου.

t(sec)	*N*	*T*	*Ti - Tμ*	*(Ti - Tμ)^2*
10,85	10	1,085	0,050	0,002
5,29	5	1,058	-0,220	0,048
10,90	10	1,090	0,100	0,010
5,44	5	1,088	0,080	0,006
10,91	10	1,091	0,110	0,012
5,34	5	1,068	-0,120	0,014

Έτσι, έχουμε **Tμ = 1,080 sec**
Για να υπολογίσουμε το σφάλμα, θα υπολογίσουμε την τυπική απόκλιση του συνολικού χρόνου για τις 10 μετρήσεις.
$\sigma = \sqrt{(\Sigma(Ti-T)^2/5)}$ = 0,13sec και καθώς $\delta T = \sigma/\sqrt{6}$, έχουμε **δT = 0,05 sec**
Για την πειραματικά μετρούμενη ροπή αδράνειας του συμπαγούς κυλίνδρου ισχύει $I_{\Sigma\text{-}\pi}$ = 0,00066 kg.m^2 και $\delta I_{\Sigma\text{-}\pi}$ = 0,00008 kg.m^2, συνεπώς
$I_{\Sigma\text{-}\pi}$ = 0,00066 ± 0,00008 kg.m^2

<u>Σφαίρα</u>

Για τη σφαίρα γνωρίζουμε ότι R = 69mm ± 0,5mm και M = 660g ± 0,5g.
Η θεωρητική ροπή αδράνειας δίνεται από τη σχέση $I_{\Phi\text{-}\theta} = 2/5\ M R^2$ οπότε με αντικατάσταση έχουμε $I_{\Phi\text{-}\theta}$ = 0.0012 kg.m^2
Για το σφάλμα έχουμε $\delta I_{\Sigma\text{-}\theta} = 2 \times 10^{-5}$ kg.m^2 , οπότε **$I_{\Phi\text{-}\theta} = 0.0012 \pm 4 \times 10^{-6}$ kg.m^2**.

Για να βρούμε την περίοδο και το σφάλμα της, παίρνουμε τον πίνακα των μετρήσεων, και υπολογίζουμε το μέσο όρο των τιμών της περιόδου.

t(sec)	N	T	Ti - Tμ	(Ti - Tμ)^2
12,95	10	1,295	-0,002	0,000
6,35	5	1,270	-0,252	0,063
6,41	5	1,282	-0,132	0,017
13,01	10	1,301	0,058	0,003
13,13	10	1,313	0,178	0,032
6,55	5	1,310	0,148	0,022

Έτσι, έχουμε **Tμ = 1,295 sec**
Για να υπολογίσουμε το σφάλμα, θα υπολογίσουμε την τυπική απόκλιση του συνολικού χρόνου για τις 10 μετρήσεις.
$\sigma = \sqrt{(\Sigma(Ti-T)^2/5)}$ = 0,16sec και καθώς $\delta T = \sigma/\sqrt{6}$, έχουμε **δT = 0,67sec**
Για την πειραματικά μετρούμενη ροπή αδράνειας του συμπαγούς κυλίνδρου ισχύει $I_{\Phi\text{-}\pi}$ = 0,00095 kg.m^2 και $\delta I_{\Phi\text{-}\pi}$ = 0,00008 kg.m^2, συνεπώς **$I_{\Phi\text{-}\pi}$ = 0,0010 ± 0,0001 kg.m^2**

<u>Συμπεράσματα και σχολιασμός των αποτελεσμάτων</u>
Παρατηρούμε ότι σε όλους τους υπολογισμούς έχουμε μία σταθερή απόκλιση της πειραματικής από τη θεωρητικά αναμενόμενη τιμή της τάξης του 13%. Αυτό σημαίνει ότι κάποιο σταθερό σφάλμα υπεισέρχεται μονίμως στους υπολογισμούς μας. Αυτό πιθανόν να οφείλεται στη λάθος βαθμονόμηση του δυναμόμετρου κατά το 1^{o} σκέλος του πειράματος. Αυτό οφείλεται, αφ' ενός μεν στην παραδοχή μας ότι η δυναμική ενέργεια διατηρείται κατά την ταλάντωση (τα σώματα δηλαδή εκτελούν αμείωτη ταλάντωση) αλλά και στην παραδοχή μας της πλήρους γραμμικότητας της σχέσης μεταξύ δύναμης και γωνίας. Στα περισσότερα υλικά υπάρχει μία σχεδόν γραμμική σχέση μέχρι ένα σημείο κατά την θλίψη ή τον εφελκυσμό τους.