



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Όνομα : Κάραλης Νικόλας
A/M: 09104042

Εργαστηριακή Άσκηση 3
Μέτρηση της σταθεράς τα παγκόσμιας έλξης G με
τη μέθοδο του Cavendish.

Συνεργάτες:
Καλαμαρά Αντιγόνη
Ιντζέογλου

Υπεύθυνος Εργαστηρίου:

Ημερομηνία Διεξαγωγής : 19/4/2005
Ημερομηνία Παράδοσης : 10/5/2005

Σκοπός της Άσκησης:

Σκοπός της άσκησης αυτής είναι η μέτρηση της σταθεράς της παγκόσμιας έλξης με τη μέθοδο του στροφικού εκκρεμούς του Cavendish. Το αποτέλεσμα αυτό θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της μάζας και της μέσης πυκνότητας της Γης.

Θεωρία

Η μέθοδος του Cavendish για τη μέτρηση της σταθεράς της βαρύτητας G , συνίσταται στη χρήση ενός ζυγού στρέψης, στα άκρα της οριζόντιας ράβδου του οποίου βρίσκονται τοποθετημένες δύο σφαιρικές μάζες. Εξαιτίας της βαρυτικής δύναμης που ασκείται σε αυτές από δύο μεγαλύτερες μάζες, ο ζυγός στρέφεται, με αποτέλεσμα τη στροφή και ενός καθρέφτη. Η ανάκλαση μια ακτίνας φωτός από τον καθρέφτη σε μια κλίμακα, μας επιτρέπει να καταγράψουμε τη μετατόπιση συναρτήσει του χρόνου. Με χρήση αυτής της γραφικής παράστασης, μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες όπως οι θέσεις ισορροπίας καθώς και η περίοδος και έτσι να υπολογίσουμε τη σταθερά της βαρύτητας, τη μάζα και τη μέση πυκνότητα της Γης.

Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη αποτελείται από ένα ζυγό στρέψης Cavendish, μία πηγή φωτός, μία κλίμακα με υποδιαίρεσεις σε cm και mm και ένα χρονόμετρο. Ο ζυγός στρέψης αποτελείται από ένα λεπτό ορειχάλκινο νήμα μήκους 26cm, πλάτους 0,15cm και πάχους 0,01mm από το ένα άκρο του οποίου κρέμεται ελαφριά οριζόντια ράβδος. Στα άκρα της ράβδου βρίσκονται δύο μολύβδινες σφαίρες μάζας 15g και ακτίνας 6,9mm.

Τα κέντρα των σφαιρών απέχουν μεταξύ τους 10cm.

Σε μία βάση η οποία μπορεί να περιστραφεί γύρω από τον κατακόρυφο άξονα του ζυγού, έχουν τοποθετηθεί δύο μολύβδινες σφαίρες μάζας 1,5kg και ακτίνας 32mm. Η απόσταση s_0 είναι 46,5mm.

Το νήμα του ζυγού έχει συντελεστή στρέψης $D = 8,5 \times 10^{-9} \text{ N.m/rad}$

Η περίοδος ταλάντωσης του ζυγού είναι $T = 11 \text{ min}$. Η λογαριθμική μείωση του ζυγού είναι περίπου 0,7.

Επεξεργασία Δεδομένων

Δεδομένα

$$\begin{aligned} d &= (50,0 \pm 0,2) \cdot 10^{-3} \text{ m} & m_1 &= 1,500 \pm 0,001 \text{ kg} \\ L &= 1,74 \pm 0,01 \text{ m} & s_0 &= (46,5 \pm 0,2) \cdot 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

Προσδιορισμός των θέσεων ισορροπίας

Από τις γραφικές παραστάσεις, χρειάζεται να υπολογίσουμε τις θέσεις ισορροπίας καθώς και την περίοδο της ταλάντωσης.

Για να το κάνουμε αυτό, κάνουμε χρήση δύο μεγίστων H και H' και του μεταξύ τους ελάχιστου h κάθε γραφικής παράστασης. Από αυτά, με την ακόλουθη εξίσωση υπολογίζουμε τις θέσεις ισορροπίας.

$$X_1 = \frac{1}{4} \cdot (H + 2h + H') \pm \frac{1}{4} \cdot (H - H')$$

Συνεπώς έχουμε $X_1 = 8,275 \pm 0,225$ cm και $X_2 = 13,850 \pm 0,450$ cm.

Ακόμα, με την παρακάτω εξίσωση θα υπολογίσουμε τη διαφορά S .

$$S = |X_1 - X_2| \pm \sqrt{(\delta X_1)^2 + (\delta X_2)^2}$$

Έτσι έχουμε $S = 5,575 \pm 0,503$ cm

Υπολογισμός της περιόδου

Από τα σημεία τομής των ευθειών $\chi = X_1$ και $\chi = X_2$ με τις γραφικές παραστάσεις μπορούμε να υπολογίσουμε την περίοδο της ταλάντωσης.

Από την X_1 βρίσκουμε $T_1 = 618$ sec και από την X_2 βρίσκουμε $T_2 = 648$ sec

Έτσι έχουμε $T = 633 \pm 30$ sec

Υπολογισμός του G

Για να υπολογίσουμε το G αρκεί να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση

$$G = \frac{\pi^2 d S}{m_1 L T^2} \left(s_0 - \frac{d S}{4 L} \right)^2. \text{ Σε αυτή την εξίσωση μπορούμε να αντικαταστήσουμε}$$

προσεγγιστικά τον όρο $\left(s_0 - \frac{d S}{4 L} \right)$ με τον όρο s_0 . Έτσι έχουμε $G = 5,6881 \times 10^{11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

Για τον υπολογισμό του σφάλματος δG θα χρειαστεί να λάβουμε υπ'οψιν μας μόνο τα μεγέθη T, L, S . Για να καταλήξουμε στο συμπέρασμα αυτό, υπολογίζουμε τα σχετικά σφάλματα των 6 μεταβλητών μεγεθών που εμπεριέχονται στην εξίσωση του G που χρησιμοποιούμε, και επιλέγουμε αυτά τα μεγέθη που επηρεάζουν περισσότερο το τελικό σφάλμα.

Τα μεταβλητά μεγέθη είναι τα : d, S, m_1, L, T, s_0 .

Τα σχετικά σφάλματα (dx/x) των μεγεθών αυτών είναι :

$d = 0,004$	$L = 0,005$	$s_0 = 0,004$
$S = 0,090$	$T = 0,047$	$m_1 = 0,001$

$$\delta G = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial T} \delta T\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial L} \delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial S} \delta S\right)^2}$$

Οπότε, με χρήση της εξίσωσης
καταλήγουμε ότι $\delta G = 0,5805 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

Συνεπώς $G = 5,6881 \times 10^{-11} \pm 0,5805 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

Υπολογισμός της μάζας και της μέσης πυκνότητας της Γης

Για να υπολογίσουμε την μάζα της Γης χρησιμοποιούμε την έκφρασή της

$M = \frac{g}{G} R^2$ και αντικαθιστούμε τα γνωστά μεγέθη.

Έτσι, προκύπτει ότι $M = 7,008 \times 10^{24} \pm 0,073 \times 10^{24} \text{ kg}$

Για να υπολογίσουμε την μέση πυκνότητα της Γης, χρησιμοποιούμε την

έκφρασή της $\rho = \frac{3g}{4\pi GR}$ και αντικαθιστούμε τα γνωστά μεγέθη.

Οπότε, $\rho = 6,466 \pm 0,006 \text{ g/cm}^3$

Σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα ήδη γνωστά.

Για τη σταθερά G της βαρύτητας ισχύει : $G = 6,67259 \pm 0,00085 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

Για τη μάζα της Γης ισχύει $M = 5,97418 \pm 0,00075 \times 10^{24} \text{ kg}$

Για τη μέση πυκνότητα της Γης ισχύει $\rho = 5,5152 \pm 0,0012 \text{ g/cm}^3$

Όπως βλέπουμε, έχουμε μια διαφορά με τα μετρούμενα μεγέθη της τάξης του 15-17%. Αυτή διαφορά οφείλεται στην ευαισθησία της πειραματικής διάταξης κατά την εκτέλεση του πειράματος καθώς και στην χρήση της εποπτικής μεθόδου για τον υπολογισμό διαφόρων μεγεθών από τη γραφική παράσταση, η οποία προκαλεί πολύ μεγάλο σφάλμα.

Σχολιασμός των αποτελεσμάτων και της επιρροής της παρουσίας άλλων μαζών σε αυτά.

Για να ελέγξουμε αν και κατά πόσο η παρουσία μας κοντά στη συσκευή επηρέασε το πείραμα, θα υπολογίσουμε τη δύναμη που ασκεί σύμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα η μια σφαίρα πάνω στην άλλη, και τη δύναμη την οποία

$$F = -G \frac{m_1 m_2}{s_o^2}$$

ασκούμε εμείς. Έτσι, από την εξίσωση έχουμε $F = -6,94 \times 10^{-10} \text{ N}$,

ενώ η δύναμη που ασκεί μία μάζα 75kg σε απόσταση 0,5m από την πειραματική διάταξη σε κάθε μία από τις 2 σφαίρες, είναι $2,00 \times 10^{-10}$, δηλαδή λιγότερο από το 1/3 της παραπάνω δύναμης. Ακόμα, λόγω συμμετρικής εφαρμογής των δυνάμεων στις σφαίρες, η επιρροή είναι πολύ μικρή συγκριτικά με τα υπόλοιπα σφάλματα.