

Vysoká škola ekonomická v Praze
Fakulta informatiky a statistiky



Aplikace teorie extrémních hodnot na odhad vybraných měr rizika finančních časových řad

AUTOREFERÁT DIPLOMOVÉ PRÁCE

Studijní program: Statistika

Autor: Bc. Nikola Tomancová
Vedoucí práce: Ing. Adam Čabla, Ph.D.

Praha, květen 2025

Cíl práce

Hlavním tématem diplomové práce byla aplikace teorie extrémních hodnot (Extreme Value Theory, zkr. EVT) na odhad vybraných měr rizika finančních časových řad. Konkrétně byly v této diplomové práci zkoumány hodnota v riziku (Value at Risk, zkr. VaR) a očekávaná ztráta (Expected Shortfall, zkr. ES) finančních časových řad.

Cílem práce bylo porovnat tyto odhady rizikových měr získaných pomocí EVT s odhady získanými použitím jiných tradičních metod. Konkrétně byly odhady založené na EVT srovnány s výsledky historické simulace a s výsledky varianční–kovarianční metody za předpokladu normality dat. Finanční časové řady ale velmi často předpoklad normality nesplňují. Jedním z dílčích cílů diplomové práce bylo proto ukázat, jak moc špatné odhady varianční–kovarianční metoda s předpokladem normality dat ve srovnání s jinými metodami přináší.

Nejprve byla sestavena dvě různá portfolia. Portfolia byla sestavena tak, aby jedno bylo spíše konzervativní a druhé dynamické. Výběr aktiv do portfolií byl učiněn na základě obecně uznávaných doporučení. Za účelem minimalizace rizika ztráty hodnoty byla obě portfolia sestavena tak, aby byla co nejvíce diverzifikovaná.

Většinu zvolených aktiv tvořily burzovně obchodovatelné fondy (Exchange Traded Funds, zkr. ETF), které již samy o sobě zajišťují značnou diverzifikaci. Jednotlivá ETF byla navíc vybrána tak, aby bylo dosaženo co největší diverzifikace také například z geografického pohledu (ETF zaměřené na americký trh, japonský trh, evropský trh atd.), nebo z hlediska typu podkladového aktiva (akcie malých společností, akcie velkých společností, vládní a nebo firemní dluhopisy s různými dobami splatnosti, zlato atd.).

Záměrem bylo v rámci přípravy dat sestavit taková dvě portfolia, která by se zřetelně lišila svou volatilitou výnosů. Zatímco konzervativní portfolio s nižší volatilitou je vhodné především pro investory s větší averzí k riziku, dynamické portfolio vzhledem ke své vysoké volatilitě naznačuje příslib jak vyšších denních výnosů, tak i větších denních ztrát.

Pro obě zvolená portfolia byla odhadována hodnota v riziku a očekávaná ztráta, a to pro několik hladin pravděpodobnosti. Hlavním cílem práce bylo tyto odhady mezi sebou porovnat a otestovat hypotézu, že vzhledem k povaze finančních časových řad vykazují metody založené na teorii extrémních hodnot lepší výsledky odhadů rizikových měr oproti jiným metodám. Odhady hodnoty v riziku a očekávané ztráty byly navzájem srovnávány z pohledu metodiky odhadu, hladiny pravděpodobnosti a typu vstupních dat (konzervativní vs. dynamické).

Použité metody

Na odhad rizikových měr byly použity nejprve metody založené na teorii extrémních hodnot, a to metoda blokových maxim (Block Maxima Method, zkr. BM) a metoda špiček nad prahem (Peaks Over Threshold Method, zkr. POT). Pro obě portfolia byly zvoleny tři šířky bloků –

1 čtvrtletí, 1 měsíc a 1 týden. Pro metodu špiček nad prahem byla diskutována a analyzována problematika volby vhodné prahové hodnoty. Nakonec byly pro každé portfolium na základě grafické analýzy vybrány dvě potenciálně vhodné prahové hodnoty.

S využitím teorie extrémních hodnot byla tedy data modelována pomocí zobecněného rozdělení extrémních hodnot (Generalized Extreme Value Distribution, zkr. GEV) a zobecněného Paretova rozdělení (Generalized Pareto Distribution, zkr. GP), přičemž u zobecněného Paretova rozdělení byly odhadnuty také parametry příslušných declusterizovaných modelů. Na základě těchto modelů (celkem 7 modelů pro každé portfolio) byly získány bodové a intervalové odhady VaR a ES. Dále byly tyto míry rizika odhadnuty pomocí metody historické simulace a varianční–kovarianční metody s předpokladem normality dat. Obě míry rizika byly odhadovány na hladinách pravděpodobnosti 5 %, 2,5 %, 1 % a 0,5 %.

Výsledné odhady byly následně porovnávány z pohledu metodiky odhadu, hladiny pravděpodobnosti a typu portfolia. Odhady byly srovnávány na základě několika metod zpětného testování. Zatímco odhady parametrů modelů i samotné odhady rizikových měr byly získány na základě trénovací sady dat, tzn. na základě denních výnosů z portfolií v letech 2015–2021, pro účely zpětného testování byly použity denní výnosy z let 2022–2024.

Důležitým nástrojem pro ověřování kvality a spolehlivosti finančních modelů zaměřených na měření rizika je zpětné testování (backtesting). Cílem zpětného testování bylo porovnat získané odhady VaR a ES s reálnými daty (přesněji řečeno s testovací sadou dat), aby bylo možné posoudit kvalitu těchto odhadů. Metody zpětného testování umožňují identifikaci slabých a silných stránek jednotlivých modelů z hlediska přesnosti odhadů rizikových měr.

V diplomové práci byly metody zpětného testování vybrány tak, aby byly schopny co nejlépe a nejkompaktněji zhodnotit úspěšnost jednotlivých metod odhadů VaR a ES. V rámci zpětného testování byly do diplomové práce zahrnuty jak konkrétní statistické testy, jejichž úkolem bylo otestovat (ne)úspěšnost jednotlivých modelů, tak i metoda, s jejíž pomocí bylo možné porovnat jednotlivé modely mezi sebou. Vzhledem k hlavnímu cíli této diplomové práce byl kladen největší důraz právě na metodu zpětného testování, s jejímiž výsledky bylo možné provést vzájemné porovnání modelů mezi sebou.

Konkrétně byl v této diplomové práci ke zpětnému testování použit Kupiecův test pokrytí pro hodnotu v riziku, Costanzino–Curranův test pro očekávanou ztrátu a Fissler–Ziegel ztrátová funkce pro hodnotu v riziku a očekávanou ztrátu dohromady.

Kupiecův test pokrytí pro VaR je v praxi běžně používanou metodou zpětného testování VaR. Tento test zkoumá, zda podíl případů, kdy skutečné ztráty překročí modelovaný VaR, odpovídá předpokládané úrovni rizika (tzn. stanovené hladině pravděpodobnosti). Nulovou hypotézou tohoto testu je, že pozorovaný podíl překročení VaR je rovný stanovené hladině pravděpodobnosti. Alternativní hypotéza tvrdí, že tyto hodnoty jsou odlišné. Testová statistika má za platnosti nulové hypotézy asymptoticky chí-kvadrát rozdělení s jedním stupněm volnosti. Výhodou Kupiecova testu pokrytí je především jeho jednoduchost a snadná interpretace výsledků. Nevýhodou může být například jeho malá síla v případě příliš krátké testové

časové řady, což ale nebyl případ testované řady v této diplomové práci.

Costanzino–Curranův test je metoda zpětného testování zaměřená na schopnost modelů správně odhadnout hodnotu očekávané ztráty. Jedná se tedy o obdobu Kupiecova testu pokrytí. Testová statistika se za platnosti nulové hypotézy řídí asymptoticky normálním rozdělením. Tento test se soustředí na přesnost předpovědí ES, což jej činí vhodným nástrojem pro hodnocení modelů v situacích, kdy je potřeba věnovat zvláštní pozornost extrémním ztrátám. Nevýhodou Costanzino–Curranova testu je jeho obtížnější provedení. Výpočet testové statistiky Costanzino–Curranova testu je v porovnání s Kupiecovým testem složitější, jelikož pracuje mimo jiné s distribuční funkcí ztrát. Vzhledem k podobě nulové hypotézy je navíc podstatnou nevýhodou testu i obtížnější interpretace jeho výsledků.

Podobně jako Costanzino–Curranův test je i metoda testování pomocí Fissler–Ziegel ztrátové funkce vcelku nově vyvinutá metoda zpětného testování (v porovnání například s tradičnějším Kupiecovým testem). Jedná se o metodu, která zohledňuje současně obě zkoumané míry rizika, VaR i ES. Zároveň se jedná o postup, který umožňuje porovnat jednotlivé modely (z hlediska odhadů VaR a ES) mezi sebou. Platí, že model s nižší hodnotou ztrátové funkce lze z hlediska Fissler–Ziegel ztrátové funkce považovat za lepší než ostatní modely s vyššími hodnotami ztrátové funkce. Pro obě portfolia a pro všechny zkoumané hladiny pravděpodobnosti byla vypočtena hodnota této ztrátové funkce u všech devíti modelů. Následně bylo zkoumáno, které modely mívají v porovnání s ostatními obecně nižší hodnoty ztrátové funkce. Dále bylo zkoumáno, zda je možné nalézt model s nejnižší hodnotou ztrátové funkce bez ohledu na typ portfolia nebo hladinu pravděpodobnosti. Zároveň bylo zkoumáno, zda je možné ve výsledných hodnotách nalézt nějakou systematickост spojenou s typem portfolia nebo výší hladiny pravděpodobnosti. Bylo zmíněno úskalí Fissler–Ziegel ztrátové funkce, a to sice že nepenalizuje příliš konzervativní odhady. I přesto byl při testování odhadů měř rizika kladen hlavní důraz právě na Fissler–Ziegel ztrátovou funkci, jelikož pro srovnávání více modelů mezi sebou jsou ztrátové funkce vhodnou cestou.

Dosažené výsledky

Na základě výsledků zpětného testování nebylo potvrzeno, že metody založené na EVT obecně poskytují oproti jiným metodám lepší odhady VaR a ES nezávisle na volbě EVT metody. Na základě Fissler–Ziegel ztrátové funkce ale bylo zjištěno, že odhady získané pomocí ne-declusterizovaného GP modelu (při vhodné volbě prahové hodnoty) jsou obecně lepší (nebo alespoň přibližně stejně dobré) v porovnání s odhady získanými varianční–kovarianční metodou s předpokladem normality dat, a to bez ohledu na zvolenou hladinu pravděpodobnosti nebo na typu portfolia (ačkoliv u konzervativního portfolia nebyly rozdíly tolik znatelné). Na základě hodnot Fissler–Ziegel ztrátové funkce usuzujeme, že odhady VaR a ES získané na základě vhodně zvoleného modelu založeného na EVT poskytují lepší, nebo alespoň přibližně stejně dobré výsledky ve srovnání s odhady získanými varianční–kovarianční metodou s předpokladem normality dat.

U konzervativního portfolia byly pozorovány případy, kdy byl rozdíl hodnoty Fissler–Ziegel ztrátové funkce u varianční–kovarianční metody a vhodné EVT metody velmi nízký. Na základě této ztrátové funkce bylo prokázáno, že odhady rizikových měr konzervativního portfolia založené na EVT (tj. odhady získané pomocí GP modelu s vhodnou prahovou hodnotou a GEV modelu s vhodnou šířkou bloku) pro velmi nízké hladiny pravděpodobnosti jsou lepší než příslušné odhady založené na předpokladu normality vstupních dat. V případě vyšších hladin pravděpodobnosti byla ale naopak tato hypotéza vyvrácena, jelikož hodnoty ztrátové funkce byly v těchto případech přibližně stejně vysoké. Přestože tedy v obecném měřítku jsou odhady měr rizika založené na EVT lepší, lze najít případy, kdy je varianční–kovarianční metoda s předpokladem normality dat plně schopna metodám založeným na EVT konkurovat.

Na základě zpětného testování Fissler–Ziegel ztrátovou funkcí docházíme k závěru, že odhady VaR a ES založené na nedeclusterizovaném GP modelu s vhodně zvoleným prahem jsou přibližně stejně dobré nebo lepší než metoda historické simulace nebo varianční–kovarianční metoda s předpokladem normality dat.

Bylo zjištěno, že odhady VaR a ES založené na GEV modelech obvykle nejsou tak dobré jako příslušné odhady založené na vhodném nedeclusterizovaném GP modelu. Výjimkou jsou výsledky Costanzino–Curranova testu u dynamického portfolia, které naznačují velmi dobré výsledky odhadů ES pomocí GEV modelů.

Na základě poznatků získaných v této diplomové práci docházíme k závěru, že metoda odhadu VaR a ES vycházející z nedeclusterizovaného GP rozdělení s vhodně zvoleným prahem je nejrobustnější z testovaných metod, a to jak z hlediska výše hladiny pravděpodobnosti, tak i nezávisle na typu vstupních dat nebo konkrétní odhadované míře rizika.

Bylo poukázáno na obecnou problematiku odhadů očekávané ztráty pro nízké hladiny pravděpodobnosti, které byly získány varianční–kovarianční metodou s předpokladem normality dat. Odhady očekávané ztráty mají podobně jako odhady hodnoty v riziku přímý vliv na hodnotu Fissler–Ziegel ztrátové funkce, takže vysoké hodnoty ztrátové funkce u některých odhadů varianční–kovarianční metodou s předpokladem normality dat mohly být způsobeny právě těmito nevyhovujícími odhady očekávané ztráty.

V návaznosti na tuto diplomovou práci se nabízí zaměřit se dále na ztrátové funkce zohledňující odhady VaR i ES, které by zároveň do jisté míry penalizovaly i příliš konzervativní odhady. Jedná se o nepříliš prozkoumanou oblast, jejíž vývoj by ale mohl v budoucnu pozitivně ovlivnit proces zpětného testování těchto rizikových měr. Diplomovou práci je také možné rozšířit například o další metody odhadu hodnoty v riziku a očekávané ztráty.

Vlastní přínos autora

Byla provedena kritická analýza, v rámci níž byly porovnány modely založené na různých teoretických základech. Rozdílné přístupy k odhadu míry rizika, které byly částečně oko-

mentovány již v teoretické části práce, byly následně názorně demonstrovány na skutečných datech.

Byla analyzována dvě různá portfolia, konzervativní a dynamické. Obě portfolia byla sestavená pro účely této diplomové práce a zaměřují se na kryptoměny a burzovně obchodovatelné fondy. Rozdílnost těchto dvou sestavených portfolií umožnila komplexnější pohled na chování rizikových metrik v různých scénářích trhu. Pro každé portfolio byly odhadnuty VaR a ES celkem devíti způsoby, z nichž sedm bylo založeno na teorii extrémních hodnot. Každý odhad VaR a ES byl vypočten pro čtyři hladiny pravděpodobnosti.

V rámci analytické části práce byly na základě výsledků analýzy kriticky zhodnoceny rozdíly, přednosti a slabé stránky použitých přístupů. Byly otestovány konkrétní výzkumné hypotézy, které byly definovány v souladu s cílem diplomové práce, a které byly otestovány využitím odpovídajících statistických postupů.

Odhadnuté hodnoty byly řádně otestovány s využitím vybraných tradičních i modernějších metod zpětného testování. Vzhledem k provázanosti obou zkoumaných měř rizika (a k růstu významu ES v oblasti financí a investic, ke kterému v posledních letech došlo) byl kladen důraz na důležitost správného testování obou metrik. V rámci zpětného testování byl na testovací sadu dat aplikován Kupiecův test pro VaR, Costanzino–Curranův test pro ES a Fissler–Ziegel ztrátová funkce, přičemž byly brány v potaz výhody i limitace těchto metod.

Na základě sesbíraných teoretických poznatků a provedené analýzy na skutečných datech byly vyvozeny konkrétní závěry v souladu se stanoveným cílem práce. Byla prakticky ověřena užitečnost metod odhadu VaR a ES založených na EVT a posouzena hypotéza, zda metody založené na EVT poskytují lepší výsledky než jiné modely, například ty s předpokladem normality. Na základě empirických výsledků bylo poukázáno na možná úskalí odhadů VaR a ES založených na předpokladu normality dat. Na základě hodnot Fissler–Ziegel ztrátové funkce byla jakožto obecně nejrobustnější metoda (ze všech zkoumaných metod) odhadu VaR a ES označena metoda odhadu VaR a ES založeném na nedecclusterizovaném GP modelu s vhodně zvoleným prahem.

Diplomová práce zahrnuje také odhady VaR a ES založené na GEV modelech. GEV rozdělení je rozdělení, které není na odhady VaR a ES příliš často aplikováno. Jak bylo zjištěno v této diplomové práci, a to na základě zpětného testování ES pomocí Costanzino–Curranova testu, tak ale odhady založené právě na GEV modelech často přinášejí velmi uspokojivé odhady této míry rizika (obzvláště pro finanční časové řady s vysokou volatilitou).

Na základě vyvozených závěrů byly následně navrženy možné další kroky, kterými by bylo vhodné na diplomovou práci dále navázat. Diplomová práce celkově přispívá k pochopení užitečnosti teorie extrémních hodnot, moderních metod hodnocení rizik a novějších metod testování jejich odhadů, což může být přínosné nejen v akademické sféře, ale i pro praktické aplikace například v oblasti řízení rizik.