

Vysoká škola ekonomická v Praze
Fakulta informatiky a statistiky



**Aplikace teorie extrémních hodnot na
odhad vybraných měr rizika finančních
časových řad**

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Studijní program: Statistika

Autor: Bc. Nikola Tomancová

Vedoucí práce: Ing. Adam Čabla, Ph.D.

Praha, květen 2025

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucímu mé diplomové práce Ing. Adamu Čablovi, Ph. D. za jeho náměty, rady a cenné připomínky. Dále bych chtěla poděkovat všem, kteří mě během mých studií podporovali a byli mi oporou, zejména své rodině a přátelům.

Abstrakt

Diplomová práce je zaměřena na aplikaci teorie extrémních hodnot (Extreme Value Theory, EVT) na odhad hodnoty v riziku (Value at Risk, VaR) a očekávané ztráty (Expected Shortfall, ES) konzervativního a dynamického investičního portfolia. K odhadům rizikových měr byly využity metoda blokových maxim a metoda špiček nad prahem. Hlavním cílem diplomové práce bylo porovnat výsledné odhady s výsledky získanými metodou historické simulace a varianční–kovarianční metodou s předpokladem normality dat. Jednotlivé odhady byly vyhodnoceny a porovnány v rámci zpětného testování. V práci byl na získané odhady použit Kupiecův test pokrytí pro VaR, Costanzino–Curranův test pro ES a Fissler–Ziegel ztrátová funkce, která zohledňuje obě rizikové míry dohromady. Hlavní důraz byl kladen na výsledné hodnoty Fissler–Ziegel ztrátové funkce. Na základě zkoumání hodnot Fissler–Ziegel ztrátové funkce bylo zjištěno, že nedeklusterizované modely zobecněného Paretova rozdělení s vhodně zvolenou prahovou hodnotou poskytují přibližně stejně dobré nebo lepší odhady než ostatní zkoumané metody. Nedeklusterizované modely zobecněného Paretova rozdělení s vhodně zvoleným prahem byly proto vyhodnoceny jako nejvhodnější metoda odhadu zkoumaných rizikových měr.

Klíčová slova

teorie extrémních hodnot, hodnota v riziku, očekávaná ztráta, metoda blokových maxim, metoda špiček nad prahem, Fissler–Ziegel ztrátová funkce

Abstract

The master thesis focuses on the application of Extreme Value Theory (EVT) to the estimation of Value at Risk (VaR) and Expected Shortfall (ES) of a conservative and dynamic investment portfolio. The block maxima method and the peak over threshold method were used to estimate the risk measures. The main objective of the thesis was to compare the resulting estimates with the results obtained by the historical simulation method and the variance–covariance method with the assumption of normality of the data. The individual estimates were evaluated and compared in backtesting. The paper applied the Kupiec's coverage test for VaR, the Costanzino–Curran test for ES and the Fissler–Ziegel loss function, which considers both risk measures together, to the estimates obtained. The main focus was on the resulting values of the Fissler–Ziegel loss function. By examining the values of the Fissler–Ziegel loss function, it was found that the non-declustered General Pareto models with an appropriately chosen threshold provide approximately as good or better estimates than the other methods examined. Therefore, non-declustered General Pareto models with an

appropriately chosen threshold were evaluated as the most appropriate method for estimating the risk measures examined.

Keywords

Extreme Value Theory, Value at Risk, Expected Shortfall, Block-Maxima Method, Peaks Over Threshold Method, Fissler–Ziegel Loss Function

Obsah

| | |
|--|-----------|
| Úvod | 13 |
| 1 Value at Risk | 15 |
| 1.1 Historie VaR | 16 |
| 1.2 Metody výpočtu VaR | 18 |
| 1.3 Výhody a kritika VaR | 21 |
| 1.4 Očekávaná ztráta | 22 |
| 2 Teorie extrémních hodnot | 27 |
| 2.1 Identifikace extrémních hodnot v datech | 29 |
| 2.2 Metoda blokových maxim | 30 |
| 2.3 Metoda špiček nad prahem | 38 |
| 3 Zpětné testování | 48 |
| 3.1 Kupiecův test | 48 |
| 3.2 Costanzino–Curranův test pro ES | 49 |
| 3.3 Fissler–Ziegel ztrátová funkce | 51 |
| 4 Analýza dat | 53 |
| 4.1 Výběr dat | 53 |
| 4.1.1 Burzovně obchodované fondy | 53 |
| 4.1.2 Složení konzervativního portfolia | 54 |
| 4.1.3 Složení dynamického portfolia | 54 |
| 4.2 Příprava dat | 56 |
| 4.2.1 Výpočet (denní) výnosnosti pro jednotlivá aktiva | 56 |
| 4.2.2 Explorační analýza dat | 59 |
| 4.3 Modelování dat | 61 |
| 4.3.1 GEV rozdělení | 61 |
| 4.3.2 GP rozdělení | 67 |
| 4.4 Odhad VaR a ES | 78 |
| 4.4.1 Konzervativní portfolio | 78 |
| 4.4.2 Dynamické portfolio | 78 |
| 4.5 Zpětné testování | 80 |
| 4.5.1 Konzervativní portfolio | 80 |
| 4.5.2 Dynamické portfolio | 81 |
| 4.6 Srovnání výsledků | 85 |
| 4.6.1 Konzervativní portfolio | 85 |
| 4.6.2 Dynamické portfolio | 90 |
| 4.6.3 Konzervativní a dynamické portfolio – srovnání | 92 |
| Závěr | 94 |

| | |
|---------------------------|------------|
| Použitá literatura | 96 |
| A Grafy | 101 |
| B Tabulky | 108 |

Seznam obrázků

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Grafická ukázka významu VaR – hypotetický příklad, vlastní zdroj. | 16 |
| 1.2 | Grafické srovnání ES pro dvě různá rozdělení pravděpodobnosti se stejným VaR – hypotetický příklad, vlastní zdroj. | 24 |
| 2.1 | Grafická ukázka identifikace extrémních hodnot u metody blokových maxim – hypotetický příklad, vlastní zdroj. | 29 |
| 2.2 | Grafická ukázka identifikace extrémních hodnot u metody špiček nad prahem – hypotetický příklad, vlastní zdroj. | 30 |
| 2.3 | Graf hustoty Fréchetova rozdělení pro různé volby parametru ξ (hypotetický příklad, vlastní zdroj). | 33 |
| 2.4 | Graf hustoty Weibullova rozdělení pro různé volby parametru ξ (hypotetický příklad, vlastní zdroj). | 34 |
| 2.5 | Graf hustoty Gumbelova rozdělení a porovnání s hustotami Fréchetova a Weibulova rozdělení (hypotetický příklad, vlastní zdroj). | 34 |
| 2.6 | Vztah mezi distribučními funkcemi $F(x)$ a $F_u(y)$ (hypotetický příklad, vlastní zdroj). | 39 |
| 2.7 | Graf hustoty zobecněného Paretova rozdělení pro různé volby parametru ξ (hypotetický příklad, vlastní zdroj). | 40 |
| 2.8 | Jádrový odhad hustoty dat generovaných z lognormálního rozdělení $LN(0,1)$ (hypotetický příklad, vlastní zdroj). | 42 |
| 2.9 | Graf střední hodnoty excesů (mean excess plot) včetně 95% intervalů spolehlivosti a příslušných hodnot n_u (hypotetický příklad, vlastní zdroj). | 43 |
| 2.10 | Grafy závislosti prahu u na odhadu parametrů tvaru ξ a reparametrizovaného měřítka σ^* , včetně intervalů spolehlivosti (hypotetický příklad, vlastní zdroj). | 45 |
| 4.1 | Grafy logaritmických denních výnosů konzervativního (vlevo) a dynamického (vpravo) portfolia v letech 2015 až 2024. Červenou přerušovanou čarou jsou oddělena trénovací a testovací data. | 59 |
| 4.2 | Histogram logaritmických výnosů konzervativního portfolia z let 2015–2021, včetně jádrového odhadu hustoty (červeně) a hustoty příslušného normálního rozdělení (modře přerušované). | 60 |
| 4.3 | Histogram logaritmických výnosů dynamického portfolia z let 2015–2021, včetně jádrového odhadu hustoty (červeně) a hustoty příslušného normálního rozdělení (modře přerušované). | 61 |
| 4.4 | Q-Q Plot konzervativního (vlevo) a dynamického (vpravo) portfolia z let 2015–2021. | 62 |
| 4.5 | Diagnostické grafy GEV modelu čtvrtletních maxim ztrát konzervativního portfolia. | 63 |
| 4.6 | Diagnostické grafy GEV modelu měsíčních maxim ztrát konzervativního portfolia. | 63 |
| 4.7 | Diagnostické grafy GEV modelu týdenních maxim ztrát konzervativního portfolia. | 64 |
| 4.8 | Diagnostické grafy GEV modelu čtvrtletních maxim ztrát dynamického portfolia. | 65 |
| 4.9 | Diagnostické grafy GEV modelu měsíčních maxim ztrát dynamického portfolia. | 66 |

| | | |
|------|--|-----|
| 4.10 | Diagnostické grafy GEV modelu týdenních maxim ztrát dynamického portfolia. | 66 |
| 4.11 | Graf střední hodnoty excesů pro konzervativní portfolio, včetně 95% intervalů spolehlivosti a příslušných hodnot n_u . Červenou přesušovanou čarou znázorněny hodnoty $u = 0,35$, $u = 0,65$ a $u = 0,85$. | 67 |
| 4.12 | Graf závislosti prahu u na odhadu parametrů ξ a σ^* GP rozdělení ztrát konzervativního portfolia, včetně 95% intervalů spolehlivosti. Červenou přesušovanou čarou znázorněny hodnoty $u = 0,35$, $u = 0,65$ a $u = 0,85$. | 68 |
| 4.13 | L-Moments Plot pro různé volby prahu u (vlevo pro $u \in (0; 1,6)$, vpravo pro $u \in (0,35; 0,85)$), konzervativní portfolio. | 69 |
| 4.14 | Diagnostické grafy GP modelu ztrát konzervativního portfolia přesahujících práh $u_1 = 0,65$. | 70 |
| 4.15 | Diagnostické grafy declusterizovaného GP modelu ztrát konzervativního portfolia přesahujících práh $u_1 = 0,65$. | 71 |
| 4.16 | Diagnostické grafy GP modelu ztrát konzervativního portfolia přesahujících práh $u_2 = 0,85$. | 72 |
| 4.17 | Diagnostické grafy declusterizovaného GP modelu ztrát konzervativního portfolia přesahujících práh $u_2 = 0,85$. | 72 |
| 4.18 | Graf střední hodnoty excesů pro dynamické portfolio, včetně 95% intervalů spolehlivosti a příslušných hodnot n_u . Červenou přesušovanou čarou znázorněny hodnoty $u = 1,9$, $u = 2,35$ a $u = 3,05$. | 73 |
| 4.19 | Graf závislosti prahu u na odhadu parametrů ξ a σ^* GP rozdělení ztrát konzervativního portfolia, včetně 95% intervalů spolehlivosti. Červenou přesušovanou čarou znázorněny hodnoty $u = 1,9$, $u = 2,35$ a $u = 3,05$. | 74 |
| 4.20 | L-Moments Plot pro různé volby prahu u (vlevo pro $u \in (0; 4,25)$, vpravo pro $u \in (2,35; 3,35)$), dynamické portfolio. | 75 |
| 4.21 | Diagnostické grafy GP modelu ztrát dynamického portfolia přesahujících práh $u_1 = 2,35$. | 76 |
| 4.22 | Diagnostické grafy declusterizovaného GP modelu ztrát dynamického portfolia přesahujících práh $u_1 = 2,35$. | 77 |
| 4.23 | Diagnostické grafy GP modelu ztrát dynamického portfolia přesahujících práh $u_2 = 3,05$. | 77 |
| 4.24 | Diagnostické grafy declusterizovaného GP modelu ztrát dynamického portfolia přesahujících práh $u_2 = 3,05$. | 78 |
| A.1 | Graf závislosti odhadů parametrů GP rozdělení konzervativního portfolia na volbě prahu, zvolen delší interval $u \in (0; 1,6)$. | 101 |
| A.2 | Graf závislosti odhadů parametrů GP rozdělení dynamického portfolia na volbě prahu, zvolen delší interval $u \in (0; 4,25)$. | 101 |
| A.5 | Grafy empirických distribučních funkcí GEV rozdělení proložené teoretickou křivkou. Uspořádáno pod sebou pro čtvrtletní, měsíční a týdenní bloky, vlevo pro konzervativní a vpravo pro dynamické portfolio. | 102 |
| A.6 | Grafy empirických distribučních funkcí GP rozdělení pro $u_1 = 0,65$ pro konzervativní portfolio, vpravo declusterizovaný model, proložené teoretickou křivkou. | 103 |

| | | |
|------|--|-----|
| A.7 | Grafy empirických distribučních funkcí GP rozdělení pro $u_2 = 0,85$ pro konzervativní portfolio, vpravo declusterizovaný model, proložené teoretickou křivkou. . . | 103 |
| A.8 | Grafy empirických distribučních funkcí GP rozdělení pro $u_1 = 2,35$ pro dynamické portfolio, vpravo declusterizovaný model, proložené teoretickou křivkou. | 104 |
| A.9 | Grafy empirických distribučních funkcí GP rozdělení pro $u_2 = 3,05$ pro dynamické portfolio, vpravo declusterizovaný model, proložené teoretickou křivkou. | 104 |
| A.10 | Histogramy rozdělení logaritmických denních výnosů jednotlivých aktiv v letech 2015 až 2024. Červenou čarou jádrový odhad, modrou přerušovanou čarou odpovídající křivka normálního rozdělení. | 105 |
| A.11 | Scatterplot denních výnosů aktiv v konzervativním portfoliu. | 106 |
| A.12 | Scatterplot denních výnosů aktiv v dynamickém portfoliu. | 107 |

Seznam tabulek

| | | |
|------|--|----|
| 4.1 | Základní popisné statistiky pro výnosy konzervativního a dynamického portfolia z let 2015–2021 | 60 |
| 4.2 | Odhady parametrů GEV modelu ztrát konzervativního portfolia a jejich 95% intervaly spolehlivosti pro různé šířky bloků | 62 |
| 4.3 | Odhady parametrů GEV modelu ztrát dynamického portfolia a jejich 95% intervaly spolehlivosti pro různé šířky bloků | 65 |
| 4.4 | Bodové a intervalové (95%) odhady parametrů GP modelu ztrát konzervativního portfolia a jeho declusterizované varianty, pro $u_1 = 0,65$ a $u_2 = 0,85$ | 70 |
| 4.5 | Bodové a intervalové (95%) odhady parametrů GP modelu ztrát dynamického portfolia a jeho declusterizované varianty, pro $u_1 = 2,35$ a $u_2 = 3,05$ | 75 |
| 4.6 | Bodové odhadы VaR konzervativního portfolia při různých hladinách pravděpodobnosti | 79 |
| 4.7 | Bodové odhadы ES konzervativního portfolia při různých hladinách pravděpodobnosti | 79 |
| 4.8 | Bodové odhadы VaR dynamického portfolia při různých hladinách pravděpodobnosti | 80 |
| 4.9 | Bodové odhadы ES dynamického portfolia při různých hladinách pravděpodobnosti | 80 |
| 4.10 | Výsledky Kupiecova testu pokrytí pro konzervativní portfolio. Tučným písmem jsou vyznačeny p-hodnoty vyšší než hladina významnosti 5 %. Ve sloupci Překročení jsou uvedeny počty hodnoty v testovaných datech, které přesáhly hranici příslušného \widehat{VaR} | 82 |
| 4.11 | Výsledky Costanzino-Curranova testu pro konzervativní portfolio. Tučným písmem jsou vyznačeny p-hodnoty vyšší než hladina významnosti 5 % | 83 |
| 4.12 | Hodnoty FZ ztrátové funkce pro konzervativní portfolio. Uspořádané v rámci jednotlivých hladin pravděpodobnosti vzestupně podle hodnoty ztrátové funkce | 84 |
| 4.13 | Výsledky Kupiecova testu pokrytí pro dynamické portfolio. Tučným písmem jsou vyznačeny p-hodnoty vyšší než hladina významnosti 5 %. Ve sloupci Překročení jsou uvedeny počty hodnoty v testovaných datech, které přesáhly hranici příslušného \widehat{VaR} | 86 |
| 4.14 | Výsledky Costanzino-Curranova testu pro dynamické portfolio. Tučným písmem jsou vyznačeny p-hodnoty vyšší než hladina významnosti 5 % | 87 |
| 4.15 | Hodnoty FZ ztrátové funkce pro dynamické portfolio. Uspořádané v rámci jednotlivých hladin pravděpodobnosti vzestupně podle hodnoty ztrátové funkce | 88 |
| 4.16 | Průměrné pořadí metod odhadů VaR a ES dle hodnoty FZ ztrátové funkce pro konzervativní portfolio. Poslední dva sloupce uvádějí nejnižší hladinu pravděpodobnosti $1 - \alpha$, u níž již docházelo k nezamítnutí nulové hypotézy Kupiecova a Costanzino-Curranova testu | 90 |

| | |
|--|-----|
| 4.17 Průměrné pořadí metod odhadů VaR a ES dle hodnoty FZ ztrátové funkce pro dynamické portfolio. Poslední dva sloupce uvádějí nejnižší hladinu pravděpodobnosti $1 - \alpha$, u níž již docházelo k nezamítnutí nulové hypotézy Kupiecova a Costanzino–Curranova testu. | 91 |
| B.1 Odhady 95% VaR konzervativního portfolia. | 108 |
| B.2 Odhady 95% ES konzervativního portfolia. | 108 |
| B.3 Odhady 97,5% VaR konzervativního portfolia. | 109 |
| B.4 Odhady 97,5% ES konzervativního portfolia. | 109 |
| B.5 Odhady 99% VaR konzervativního portfolia. | 109 |
| B.6 Odhady 99% ES konzervativního portfolia. | 110 |
| B.7 Odhady 99,5% VaR konzervativního portfolia. | 110 |
| B.8 Odhady 99,5% ES konzervativního portfolia. | 110 |
| B.9 Odhady 95% VaR dynamického portfolia. | 111 |
| B.10 Odhady 95% ES dynamického portfolia. | 111 |
| B.11 Odhady 97,5% VaR dynamického portfolia. | 111 |
| B.12 Odhady 97,5% ES dynamického portfolia. | 112 |
| B.13 Odhady 99% VaR dynamického portfolia. | 112 |
| B.14 Odhady 99% ES dynamického portfolia. | 112 |
| B.15 Odhady 99,5% VaR dynamického portfolia. | 113 |
| B.16 Odhady 99,5% ES dynamického portfolia. | 113 |

Seznam použitých zkratek

| | |
|----------------------|--|
| VaR | Hodnota v riziku (Value at Risk) |
| ES | Očekávaná ztráta (Expected Shortfall) |
| CVaR | Podmíněná hodnota v riziku (Conditional Value at Risk) |
| BCBS | Basilejský výbor pro bankovní dohled |
| EVT | Teorie extrémních hodnot (Extreme Value Theory) |
| BMM | Metoda blokových maxim (Block Maxima Method) |
| GEVD | Zobecněné rozdělení extrémních hodnot |
| GEV rozdělení | Zobecněné rozdělení extrémních hodnot |
| POT | Metoda špiček nad prahem (Peaks Over Threshold Method) |
| GPD | Zobecněné Paretovo rozdělení |
| GP rozdělení | Zobecněné Paretovo rozdělení |
| POF | Proportion of Failure |
| FZ | Fissler-Ziegel |
| IUSE.L | iShares S & P 500 EUR Hedged UCITS ETF (Acc) |
| SXRQ.DE | iShares VII PLC – iShares € Govt Bond 7-10yr ETF EUR Acc |
| ITPS.SW | iShares \$ TIPS UCITS ETF USD (Acc) |
| D5BG.DE | Xtrackers II EUR Corporate Bond UCITS ETF 1C Acc |
| VEU | Vanguard FTSE All-World ex-US Index Fund ETF Shares |
| XAD5.MI | Xtrackers Physical Gold ETC (EUR) Acc |
| XREA.DE | Xtrackers FTSE Developed Europe ex UK Real Estate UCITS ETF 1C |
| IUSK.DE | iShares MSCI Europe SRI UCITS ETF (Acc) |
| CUSS.L | iShares VII PLC – MSCI USA Small Cap ESG Enhanced UCITS ETF |
| IJPA.AS | iShares Core MSCI Japan IMI UCITS ETF USD (Acc) |
| EIMI.L | iShares Core MSCI EM IMI UCITS ETF USD (Acc) |
| CSPX.L | iShares VII PLC – iShares Core S & P 500 UCITS ETF (Acc) |
| BTC-EUR | Kurz Bitcoin – Euro |
| PPC-EUR | Kurz Peercoin – Euro |
| CRSP | Centrum pro výzkum cen cenných papířů |
| ETF | Burzovně obchodovatelné fondy (Exchange Traded Funds) |
| LOCF | Last Observation Carried Forward |
| HS | Historická simulace |
| Var.-Kovar. | Varianční–Kovarianční metoda |
| Declust. GP | Declusterizovaný model zobecněného Paretova rozdělení |

Úvod

V posledních letech se investování stalo stále dostupnější a populárnější činností, kterou může díky rozmachu moderních technologií a uživatelsky přívětivým aplikacím vyzkoušet téměř každý. Tento trend přinesl nejen nové příležitosti, ale také zvýšené povědomí o nutnosti sledování a řízení rizik. Mezi klíčové nástroje, které investoři i instituce využívají k měření a řízení finančních rizik, patří ukazatele jako hodnota v riziku (Value at Risk, zkr. VaR) a očekávaná ztráta (Expected Shortfall, ES).

Hodnota v riziku je jednou z nejrozšířenějších metrik, která umožňuje kvantifikovat potenciální ztráty při dané hladině pravděpodobnosti a časovém horizontu. Její využití však zdaleka nekončí pouze u jednotlivých investorů. Hodnota v riziku totiž hraje klíčovou roli v širším kontextu risk managementu, například při alokaci kapitálu, řízení portfolií nebo regulaci finančních institucí. Na druhé straně ale bylo prokázáno několik nedostatků, které s sebou tato riziková míra nese. V současnosti je proto nejčastěji prezentována společně s očekávanou ztrátou, metrikou, která bere v úvahu i extrémní ztráty přesahující hranici definovanou VaR. Tím poskytuje hlubší vhled do rizikových scénářů a jedná se o zvláště užitečný nástroj v prostředích s vysokou mírou nejistoty. Basilejský výbor pro bankovní dohled implementoval očekávanou ztrátu do poslední Basilejské dohody Basel III jakožto nástroj pro stanovení minimálních kapitálových požadavků finančních institucí, viz Basel Committee on Banking Supervision (2023).

Existuje celá řada metod pro odhad těchto měr rizika, některé z nich jsou popsány například v Manganelli a Engle (2001), Adamko et al. (2015), Leippold (2015), Calmon et al. (2021) nebo Prakash et al. (2021). Mezi velmi časté metody se řadí například historická simulace, metody založené na předpokladech o normálním nebo Studentově rozdělení výnosů nebo přístupy zahrnující modely volatility. Každý z těchto přístupů má své výhody i omezení, zejména pokud jde o schopnost zachytit extrémní události v datech.

Právě v tomto kontextu hraje důležitou roli teorie extrémních hodnot (Extreme Value Theory, EVT). Teorie extrémních hodnot se zaměřuje na modelování a analýzu chování dat v jejich extrémních hodnotách, což z nich činí vhodný nástroj pro aplikace v oblasti měření rizika. Teorie extrémních hodnot umožňuje odhadnout rizikové míry, jako je VaR a ES, s využitím dvou klíčových přístupů – metodou blokových maxim (Block Maxima, BM) a metodou špiček nad prahem (Peaks Over Threshold, POT). Tyto přístupy umožňují zachytit extrémní ztráty, které by mohly být u tradičních metod podhodnoceny. Teorie extrémních hodnot je podrobnejší popsána v Coles (2001). Odhad měr rizika na ní založené jsou popsány například v Szubzda a Chlebus (2019). Srovnání s několika jinými metodami proběhlo již například v Calmon et al. (2021), kde bylo mimo jiné poukázáno na dobré výsledky odhadů získaných pomocí EVT.

Hlavním cílem této práce je aplikovat teorii extrémních hodnot na odhad vybraných měr rizika finančních časových řad a porovnat výsledky s jinými metodami odhadu. Výsledky

budou porovnány pomocí vybraných postupů zpětného testování. Konkrétně bude na odhady rizikových měr aplikován Kupiecův test pokrytí pro VaR, Costanzino–Curranův test pro ES, a Fissler–Ziegel ztrátová funkce, která pracuje s oběma rizikovými mírami dohromady. Hlavní důraz bude kladen právě na srovnání odhadů pomocí Fissler–Ziegel funkce, která byla popsána například v Fissler et al. (2015).

V následujících kapitolách jsou nejprve představeny teoretické základy VaR, ES a EVT (Kapitoly 1 a 2), dále jsou v Kapitole 3 stručně popsány vybrané metody zpětného testování. Poté jsou tyto teoretické poznatky aplikovány na reálná data finančních časových řad, aby bylo možné zhodnotit přínosy a omezení těchto přístupů.

V praktické části diplomové práci (Kapitola 4) je nejprve zdůvodněn výběr aktiv (převážně burzovně obchodovatelných fondů, ETF), z nichž jsou sestavena dvě investiční portfolia, konzervativní a dynamické. Z historických cen použitých aktiv jsou vytvořeny dvě časové řady denních výnosů konzervativního a dynamického portfolia. Pro obě portfolia je na základě těchto historických údajů odhadována různými metodami hodnota v riziku a očekávaná ztráta, a to pro několik hladin pravděpodobnosti. Diplomová práce se pokusí pomocí zpětného testování prokázat hypotézu, že odhady získané aplikací teorie extrémních hodnot jsou vzhledem k povaze finančních časových řad lepší než odhady postavené na metodě historické simulace nebo varianční–kovarianční metodě s předpokladem normality dat. Dílčím cílem diplomové práce je zároveň ukázat, jak moc špatné odhady v porovnání s jinými metodami dává varianční–kovarianční metoda při porušení předpokladu normality.

Odhady hodnoty v riziku a očekávané ztráty jsou navzájem srovnávány z pohledu metody odhadu, hladiny pravděpodobnosti a typu vstupních dat (konzervativní vs. dynamické portfolio).

V závěru diplomové práce jsou zachyceny hlavní poznatky získané v její praktické části. Na základě výsledků zpětného testování nebyla potvrzena hypotéza, že metody založené na teorii extrémních hodnot obecně poskytují oproti jiným metodám lepší odhady hodnoty v riziku a očekávané ztráty nezávisle na volbě hladiny pravděpodobnosti nebo na typu portfolia. Nicméně odhady založené na nedecclusterizovaném modelu zobecněného Paretova rozdelení s vhodně zvoleným prahem poskytují přibližně stejně dobré nebo lepší výsledky ve srovnání s ostatními zkoumanými metodami. Bylo prokázáno, že metoda odhadu VaR a ES vycházející z nedecclusterizovaného modelu zobecněného Paretova rozdelení s vhodně zvoleným prahem je nejrobustnější metodou ze všech srovnávaných metod.

1. Value at Risk

Hodnota v riziku (anglicky Value at Risk, zkráceně VaR) je pojem označující maximální potenciální ztrátu (resp. minimální potenciální výnos) plynoucí z držení investičního aktiva. (Manganelli & Engle, 2001)

Ze statistického pohledu je $100(1 - \alpha)\%$ VaR definován jako $100 \cdot \alpha\%$ kvantil z pravděpodobnostního rozdělení výnosů z dané investice v časovém horizontu t . Jinými slovy, VaR je určena pomocí pravděpodobnosti, kterou lze zapsat jako

$$P(X \leq \text{VaR}_\alpha(X)) = \alpha, \quad (1.1)$$

kde X je v tomto případě náhodná veličina označující výnos z investice získaný za daný časový horizont t , α je hladina pravděpodobnosti. Ze vztahu (1.1) je zřejmé, že

$$F(\text{VaR}_\alpha(X)) = \alpha,$$

kde $F(\text{VaR}_\alpha(X))$ je distribuční funkce rozdělení, kterým se výnosy z příslušné investice řídí. Z (1.1) rovněž vyplývá, že Value at Risk na hladině α lze vyjádřit jako

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \inf \{x \in \mathbb{R} : P(X \leq x) > \alpha\},$$

viz například Galichon (2010).

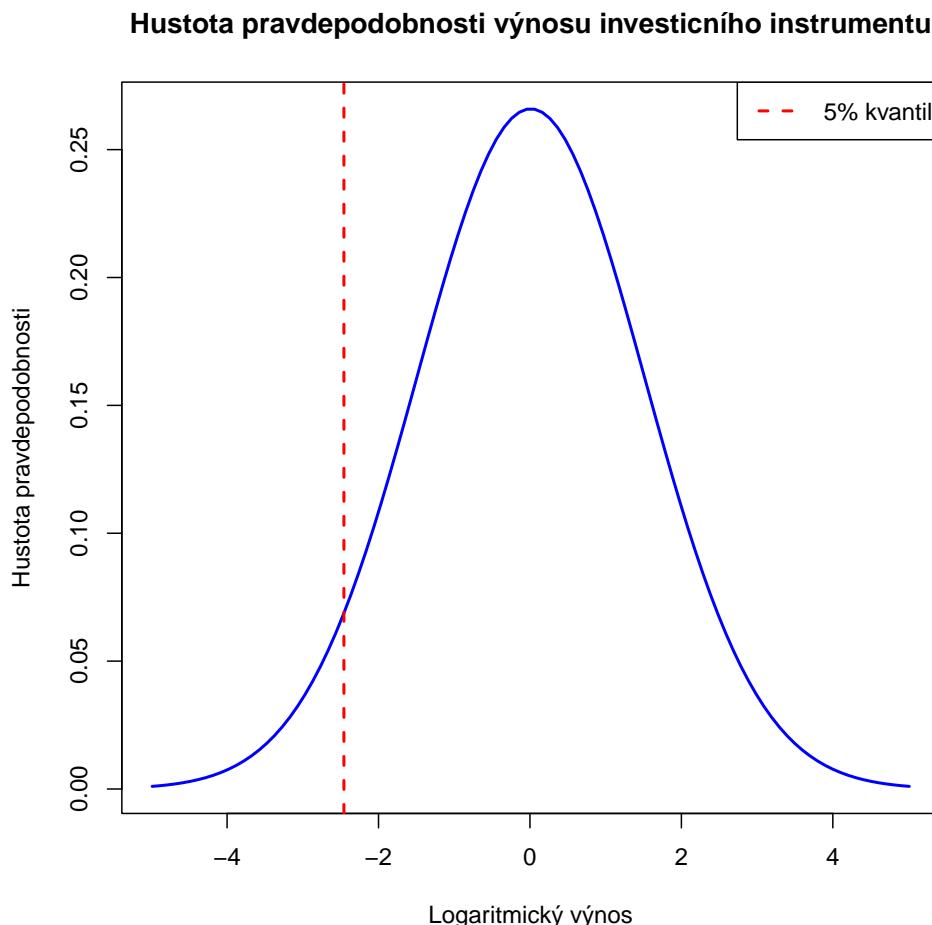
S pravděpodobností α a dobou držby t dnů je VaR (v kontextu zisků a ztrát z investic) ztráta, u níž se očekává, že bude překročena pouze s danou nízkou pravděpodobností $100 \cdot \alpha\%$ během příští t -denní doby držení. Pro určení VaR je podstatná vhodná volba jak hladiny pravděpodobnosti α , tak i časového horizontu t . Typické hodnoty pro pravděpodobnost α jsou například 0,005, 0,01, 0,025 nebo 0,05. To znamená, že se jedná o 99,5%, 99%, 97,5% nebo 95% VaR. Běžné časové horizonty doby držení bývají nejčastěji 1, 2 nebo 10 (pracovních) dnů či 1 měsíc.

Ačkoli je volba obou parametrů α i t při výpočtu VaR zásadní, jelikož pro různé hodnoty těchto parametrů lze dojít k velmi rozdílným hodnotám VaR, neexistuje obecné pravidlo či metodika, jakým způsobem tuto volbu provést. Před volbou hladiny pravděpodobnosti je nutné se zamyslet, jek vysoké ztráty jsou ještě „běžné“ (ve smyslu snesitelné pro investora). Některé společnosti považují za „abnormální“ ztrátu již tu s pravděpodobností 5 %, jiné například až při hladině pravděpodobnosti 0,3 %. Rovněž volba časového horizontu t je velmi subjektivní a záleží na preferencích investora. Společnosti aktivně obchodující se svými portfolii obvykle volí kratší délku časového horizontu, například 1 den, méně aktivní investoři ale mohou pracovat i s mnohonásobně vyššími hodnotami t . (Linsmeier & Pearson, 2000)

Na Obrázku 1.1 je grafické znázornění výše 95 % VaR (červenou přerušovanou čarou) pro denní logaritmické výnosy hypotetického investičního instrumentu (například akcie nějaké společnosti).¹ Výnosy se v tomto případě řídí normálním rozdělením se střední hodnotou

¹K vytvoření všech grafů v této diplomové práci byl použit jazyk R (R Core Team, 2023) a vývojové prostředí Rstudio (RStudio Team, 2023), pokud není řečeno jinak.

0,01 a směrodatnou odchylkou 1,5. Vzhledem k normalitě výnosů lze snadno dopočítat, že 95 % VaR je rovna přibližně 2,46. To znamená, že s pravděpodobností 95 % nebudou následující obchodní den logaritmické ztráty plynoucí z držení akcií této fiktivní společnosti vyšší než 2,46.



Obrázek 1.1: Grafická ukázka významu VaR – hypotetický příklad, vlastní zdroj.

1.1 Historie VaR

Ačkoli lze riziko definovat různými způsoby, v kontextu investování je význam všech definic rizika velmi podobný. Riziko je obvykle definováno jako míra nejistoty ohledně budoucích výnosů. (Manganelli & Engle, 2001)

Investoři jsou vystaveni riziku, že výnos z jejich investic bude výrazně menší, než původně očekávali, a především jsou vystaveni riziku záporného výnosu, tedy že dojde ke ztrátě z dané investice. Riziko a nejistota výnosu jsou s investováním úzce spjaty, hodnota investic se totiž v čase mění, ať už se jedná o změny pozitivní či negativní. Před zavedením a rozšířením povědomí o VaR byla hlavní mírou pro měření rizika investic směrodatná odchylka. Hlav-

ním problémem směrodatné odchylky jakožto ukazatele rizika je skutečnost, že směrodatná odchylka sleduje jak negativní, tak i pozitivní výkyvy od očekávaného výnosu. Je zřejmé, že kladná odchylka od očekávaného výnosu, tzn. výnos vyšší oproti očekávání, je z pohledu investora nikoliv problém, ale naopak vítaná skutečnost.

S rostoucím významem investování jak u finančních institucí, tak i u ostatních společností či domácností, vzrostla také potřeba nalezení relevantnější míry rizika. Takové míry, která by zohledňovala pouze záporné odchylky výnosů. Jinými slovy vznikla potřeba najít míru, jež by byla zaměřena pouze na levý chvost rozdělení pravděpodobnosti výnosů. Ukazatel rizika, který by tuto podmínku splňoval, je například již zmíněná hodnota v riziku. (Krause, 2003)

Ukazatel VaR byl definován během druhé poloviny 20. století, rovněž byly v té době vyvíjeny první metody k jeho určení (ačkoli často byla zpočátku tato míra rizika popisována pod jiným názvem než hodnota v riziku). Hodnota v riziku jakožto poměrně snadno pochopitelný a interpretovatelný ukazatel rizika v průběhu druhé poloviny 20. století postupně nabýval na popularitě. Do širokého povědomí investorů se tato míra rizika dostala v 80. a 90. letech 20. století, za což nese zásluhu mimo jiné americká investiční banka J. P. Morgan & Co. (dnes známá jako JPMorgan Chase & Co.). Cílem jejího tehdejšího předsedy Dennise Weatherstona bylo najít a popsat metodu sloužící k nalezení jednoduchého, ale komplexního ukazatele, který by byl schopen obsáhnout všechna rizika, jímž musí banka čelit, a vyhodnotit jejich velikost na následujících 24 hodin. To se této finanční instituci pod vedením Dennise Weatherstona podařilo a v roce 1994 byl bankou publikován dokument popisující tento nově vzniklý systém. (Adamko et al., 2015)

Kontrolní orgány začaly v 90. letech rovněž pracovat s hodnotou v riziku jakožto mírou rizika. Basilejský výbor pro bankovní dohled (Basle Committee on Banking Supervision – BCBS) navrhl, aby byla hodnota v riziku využívána jakožto základ pro výpočet minimálních kapitálových rezerv. Vzhledem ke snadné uchopitelnosti hodnoty v riziku si postupně i další velké finanční instituce nacházely vlastní systémy pro výpočet VaR a hodnotu začali využívat například pro hlášení rizik managementu, investorům či akcionářům. (Khindanova & Rachev, 2019)

Hodnota v riziku našla velmi rychle své uplatnění v praxi stala se z ní velmi rozšířená a často používaná míra rizika pro řízení rizik, pro regulační účely nebo například pro hodnocení výkonnosti osob, které riziko podstupují. Jak význam hodnoty v riziku rostl, vznikaly další metodiky k jejímu určení ve snaze o co nejpřesnější odhad. Nesprávný odhad hodnoty v riziku jakožto míry rizika by mohla vést k neoptimální alokaci kapitálu, což by mohlo přivodit negativní důsledky pro ziskovost nebo finanční stabilitu institucí. (Manganelli & Engle, 2001)

S rostoucí úlohou hodnoty v riziku v řízení rizik či investování obecně se začaly projevovat některé podstatné nedostatky této míry rizika (viz Kapitola 1.3). Basilejský výbor pro bankovní dohled proto od hodnoty v riziku začal v posledních letech postupně upouštět a jako alternativní míru rizika doporučuje očekávanou ztrátu (Expected Shortfall – ES). Očekávaná ztráta udává podmíněnou střední hodnotu překročení hodnoty v riziku. Očekávaná ztráta tudíž podává lepší informaci o rozložení ztrát za hranicí určenou hodnotou v riziku. Na rozdíl

od hodnoty v riziku splňuje očekávaná ztráta vlastnost subadditivity, jejíž absence u hodnoty v riziku se často stává předmětem kritiky (viz Kapitola 1.3). Podobně jako s hodnotou v riziku jsou i s určením očekávané ztráty spojeny určité problémy, ovšem i přesto je očekávané ztrátě jakožto míře rizika v posledních letech věnována stále větší pozornost. Vzhledem k rostoucí úloze očekávané ztráty v risk managementu je očekávaná ztráta další mírou rizika, jíž se bude tato diplomová práce zabývat, podrobněji je očekávaná ztráta popsána v Kapitole 1.4. (Taylor, 2020)

Basilejský výbor pro bankovní dohled vydává soubory regulačních opatření, které slouží jako mezinárodní regulační rámec pro banky. V této souvislosti byly v minulosti vydány postupně tři tzv. Basilejské dohody (Basel I, Basel II a Basel III). Podnětem k sepsání souboru regulačních opatření Basel III byla finanční krize, která nastala v roce 2008. Záměrem vydání Basel III byla tedy snaha předejít ztrátám, které banky utrpěly během této finanční krize. Implementace Basel III jakožto náhrady za dosavadní Basel II proběhla na začátku roku 2023 a vedla k výraznému navýšení kapitálových požadavků. Součástí Basel III je mimo jiné zavedení již zmíněné očekávané ztráty jako míry rizika sloužící k určení kapitálových požadavků. Očekávaná ztráta tak nahradila dosavadní aplikovanou míru rizika VaR. (Basel Committee on Banking Supervision, 2019)

1.2 Metody výpočtu VaR

Existuje mnoho metod k určení hodnoty v riziku. Obvykle jsou tyto metody děleny do tří základních skupin, kterými jsou

- **parametrické** metody (např. varianční – kovarianční metoda),
- **neparametrické** metody (např. historické simulace),
- **semiparametrické** metody (např. metody využívající teorii extrémních hodnot).

Každá metoda má své předpoklady, které by výnosy z dané investice měly splňovat, aby byly výsledky dané metody odpovídající skutečnosti. Proto je nutné volit metodu na základě dat, ze kterých bude hodnotu v riziku počítat. Použití různých metod na jedna data může vést k velmi rozdílným výsledkům odhadů hodnoty v riziku. (Manganelli & Engle, 2001)

Historické simulace

Historické simulace patří mezi neparametrické metody odhadu hodnoty v riziku a jejich nezvratnou výhodou je skutečnost, že nejsou kladený žádné požadavky na pravděpodobnostní rozdělení výnosů, na rozdíl od jiných metod. Historická simulace je navíc vcelku snadno implementovatelnou metodou. I přes mnohé nedostatky se proto jedná o často používanou metodu odhadu hodnoty v riziku. (Adamko et al., 2015)

Metoda historické simulace spočívá v simulaci budoucího výnosu (resp. ztráty) v čase $N+1$ na

základě známých historických výnosů (resp. ztrát) v čase $n = 1, 2, \dots, N$. Metoda není simulací v pravém slova smyslu, je postavena na aplikaci historických výnosů a ztrát na aktuální cenu investice. Tato metoda předpokládá, že se historie opakuje a proto lze na základě historických dat předpovídat budoucí vývoj. Z historických dat je sestaveno celkem N scénářů popisujících možný vývoj hodnoty investice mezi dvěma časovými okamžiky n_i a n_j ($i \neq j$). Všechny tyto scénáře jsou následně aplikovány na poslední známou hodnotu investice P_N . Tímto způsobem jsou vypočteny možné hodnoty P_{N+1} odpovídající N uvažovaným scénářům. (Hull, 2015)

Odhad procentuálního VaR metodou historické simulace spočívá v seřazení těchto N možných scénářů (tj. historických zisků a ztrát) podle jejich velikosti, tedy od nejvyšších ztrát až po nejvyšší zisky. Následně se určí požadovaný výběrový kvantil jakožto odhad hodnoty v riziku. Matematicky lze procentuální odhad hodnoty v riziku pro N pozorování a při hladině pravděpodobnosti α zapsat jako

$$\widehat{\text{VaR}}_\alpha(X) = X_{(\lfloor N\alpha \rfloor)},$$

kde $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(N)}$ jsou vzestupně uspořádané historické výnosy. (Leippold, 2015)

Značnou nevýhodou metod založených na historických datech je fakt, že historie se nikdy přesně neopakuje. Vždy se může objevit skutečnost, která doposud nenastala, a nelze ji tudíž na základě historických dat předpovědět.

Zásadní otázkou u všech metod výpočtu hodnoty v riziku založených na historických datech je vždy délka časové řady, s níž bude metoda pracovat. Vždy je nutné zvážit, jak dlouhé historické období je vhodné k určení hodnoty v riziku použít. Použijeme-li data sahající až hluboko do historie, nebudou tak spolehlivě odrážet podmínky na trhu platné v posledních letech. (Adamko et al., 2015)

Navíc spousta investičních instrumentů ani tak dlouhou historii k dispozici nemá, jelikož se jedná o novější investiční instrumenty. Určení hodnoty v riziku takovýchto investic často kvůli nedostatečně velkému rozsahu historických dat ani není možné, především pro velmi nízké hladiny α . (Strnad, 2009)

Naopak použití příliš krátkých časových řad může vést k tomu, že v datech nebude obsažené podstatné historické období vývoje této investice. Extrémní propady výnosů jsou velmi podstatnou součástí dat při odhadování hodnoty v riziku. Extrémní propady se ale v těchto časových řadách vyskytují pouze výjimečně, je tudíž pravděpodobné, že nebudou v použitých historických datech zahrnuty. (Krause, 2003)

Problémy spojené s krátkými časovými řadami, které nezahrnují dostatek extrémních událostí, lze řešit například zátěžovým testováním (stress testing), tj. simulacemi konkrétních katastrofických scénářů. Dalším řešením může být například použití bootstrapu za účelem navýšení rozsahu datového souboru. (Adamko et al., 2015)

Varianční – kovarianční metoda

Mezi typické parametrické metody patří varianční – kovarianční metoda. Předpokládejme portfolio složené z n aktiv s denními výnosy $X = w_1X_1 + w_2X_2 + \dots + w_nX_n$, kde w_i jsou pevně dané váhy jednotlivých aktiv v portfoliu, jejichž součet je roven jedné, tj.

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1.$$

Nechť se denní výnos takového portfolia řídí normálním rozdelením $N(\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}, \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w})$, kde $\boldsymbol{\mu}$ je vektor středních hodnot výnosů jednotlivých aktiv a $\boldsymbol{\Sigma}$ příslušná kovarianční matice výnosů jednotlivých aktiv.² (Leippold, 2015)

Pak pro hladinu pravděpodobnosti α a jednodenní časový horizont platí, že

$$\widehat{\text{VaR}}_\alpha(X) = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}}, \quad (1.2)$$

kde $\Phi^{-1}(\alpha) = z_\alpha$ je $100 \cdot \alpha\%$ kvantil standardizovaného normálního rozdelení. (Prakash et al., 2021)

Někdy je vztah 1.2 upraven a zjednodušen pro potřeby risk managementu předpokladem $\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} \simeq 0$, tudíž

$$\widehat{\text{VaR}}_\alpha(X) = \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}}, \quad (1.3)$$

viz například Kamdem (2005).

Vztah 1.3 je možné rozšířit na odhad hodnoty v riziku pro hladinu pravděpodobnosti α a libovolně dlouhý časový horizont t vynásobením celého výrazu druhou odmocninou t , tzn.

$$\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,t}(X) = \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{t} \sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}},$$

viz například Adamko et al. (2015).

Výhodou varianční – kovarianční metody je podobně jako u metody historické simulace jednoduchost aplikování metody. Naopak zásadní nevýhodou varianční – kovarianční metody odhadu hodnoty v riziku je nutnost splnění předpokladů kladených na pravděpodobnostní rozdelení výnosů (v tomto případě kromě normality často i nulová střední hodnota výnosů). Výnosy z portfolia mívají často těžké chvosti, což vede k porušení předpokladu normality rozdelení výnosů z portfolia (pravděpodobnost extrémně velkých kladných i extrémně velkých záporných hodnot je vyšší než v normálním rozdelení). (Adamko et al., 2015)

Varianční – kovarianční metoda předpokládá také linearitu výnosů z portfolia. Linearita je splněna například v portfoliu, které je složené výhradně z akcií a dluhopisů. Naopak portfolio zahrnující mimo jiné opce je příkladem nelineárního portfolia, pro které není vhodné varianční – kovarianční metodu popsanou vztahem 1.2 použít. (Britten-Jones & Schaefer, 1999)

²Případně lze rozšířit na předpoklad jakéhokoliv spojitého eliptického rozdělení pravděpodobnosti, viz Kamdem (2005).

Teorie extrémních hodnot

Mezi semiparametrické metody odhadu hodnoty v riziku patří mimo jiné i metody založené na teorii extrémních hodnot. Teorie extrémních hodnot se zabývá pravděpodobnostními rozděleními, které mají tzv. těžké chvosty. (Bilan et al., 2020)

Teorie extrémních hodnot včetně jejích pozitivních i negativních aspektů je podrobněji popsána v Kapitole 2. Zároveň jsou v Kapitole 2 popsány i vybrané metody založené na teorii extrémních hodnot. Nakonec jsou tyto metody v Kapitole 4 aplikovány na odhad hodnoty v riziku a výsledky jsou porovnány s hodnotami získanými metodou historické simulace a varianční – kovarianční metodou.

1.3 Výhody a kritika VaR

Jednoznačnou výhodou hodnoty v riziku je skutečnost, že se jedná o jedno souhrnné číslo, které popisuje míru vystavení se tržnímu riziku. Tržní riziko je jedním z rizik, kterým je každý investor vystaven. Tržní riziko je označením pro nejistotu budoucích výnosů způsobené změnami tržních podmínek. Jedná se tedy o riziko potenciální finanční ztráty v důsledku poklesu tržní hodnoty investice. (Manganelli & Engle, 2001)

Tato výhoda umožňuje snadnou interpretaci hodnoty v riziku a hodnotu v riziku proto lze využít například při komunikaci s managementem či akcionáři. Jednoduchost výkladu této míry rizika s sebou ale nese i negativní aspekty, kvůli kterým se hodnota v riziku stává čas-tým terčem kritiky. Především nenese hodnota v riziku žádnou informaci o tom, jaký je vývoj rozdělení pravděpodobnosti výnosů dané investice za touto hranicí. To znamená, že hodnota v riziku nevypovídá o maximálních možných ztrátách, kterým je investice vystavena. Pokud není investor (manažer, akcionář apod.) dostatečně obeznámen s touto skutečností, hrozí, že získá zkreslenou představu o rizikovosti jednotlivých investic. Pokud bychom například měli dvě hypotetická portfolia se stejně vysokou hodnotou v riziku pro danou hladinu pravděpodobnosti α a stejný časový horizont, zdánlivě by tato portfolia působila jako stejně riziková (a tudíž by se jako vhodnejší jevilo to s vyššími očekávanými výnosy). Je-li k dispozici hodnota v riziku pouze pro jednu danou hladinu α u obou investic, není možné rozpoznat případnou rozdílnost rizikových profilů těchto dvou investic pro nižší hladiny pravděpodobnosti než je zvolená α .

Jedním z možných řešení tohoto problému je například výpočet očekávané ztráty, zmíněné v Kapitole 1.1, která určí podmíněnou střední hodnotu při překročení hodnoty v riziku na hladině pravděpodobnosti α . Čím vyšší je hodnota očekávané ztráty, tím těžší je levý chvost rozdělení pravděpodobnosti výnosů z dané investice. Další možností je určení hodnoty v riziku pro více různých hladin pravděpodobnosti $\alpha_i, i \in \mathbb{N}$, například pro 2,5%, 1% a 0,5% hladiny pravděpodobnosti. Těmito způsoby lze získat určitý přehled o chování rozdělení pravděpodobnosti výnosů na levém chvostu rozdělení. Je tudíž možné takto lépe porovnat jednotlivé

investice mezi sebou. (Strnad, 2009)

Podstatným negativním aspektem hodnoty v riziku je také fakt, že se jedná o nekoherentní míru rizika. Koherentní míra rizika je definována jako míra rizika splňující několik vlastností:

- monotónnost,
- translační invariance,
- pozitivní homogenita,
- subaditivita.

Všechny tyto vlastnosti jsou blíže popsány v Artzner et al. (1999). Autoři se v tomto článku dále zabývali otázkou, zda VaR všechny tyto potřebné vlastnosti splňuje. Prokázali, že hodnota v riziku nesplňuje podmínu subadditivity. Pro koherentní míru rizika ρ a dvě investice X, Y platí, že

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y). \quad (1.4)$$

Jedná-li se o míru rizika, která není subadditivní, pak vztah 1.4 neplatí. Bylo zjištěno, že hodnota v riziku není subadditivní mírou rizika. Tento fakt může vést k rozdělování portfolií do vhodných subportfolií za účelem umělého snížení hodnoty v riziku. Důsledkem může být závažné podhodnocení skutečného rizika. (Wirch, 1999)

Očekávané riziko je mírou rizika, která je na rozdíl od hodnoty v riziku koherentní mírou rizika. Splnění vlastnosti subadditivity je jeden z hlavních důvodů, proč bývá v posledních letech stále častěji upřednostňována očekávaná ztráta namísto hodnoty v riziku. (Taylor, 2020)

Rovněž je nutné věnovat pozornost zvolené výši hladiny α a délce časového horizontu t . Hodnoty v riziku dvou různých investic při rozdílně vysokých hladinách α nebo při různých časových horizontech t nejsou mezi sebou srovnatelné, takové dvě investice proto nelze tímto způsobem mezi sebou porovnat. Hodnota v riziku jednoho portfolia je pro nižší hladinu pravděpodobnosti vždy větší než pro vyšší hodnoty α . Rovněž délka horizontu t je při určení výše hodnoty v riziku rozhodující, jelikož hodnota v riziku pro vícedenní dobu držení je vyšší než například pro jednodenní dobu držení dané investice. Další z možných nevýhod použití hodnoty v riziku jakožto míry rizika investic je tedy fakt, že porovnávat rizikovost různých investic pomocí hodnoty v riziku je možné pouze při stejných hladinách α a při stejně dlouhých časových horizontech t . (Linsmeier & Pearson, 2000)

1.4 Očekávaná ztráta

Jak již bylo zmíněno v Kapitole 1.1, mezi další míry rizika patří také očekávaná ztráta (anglicky Expected Shortfall, zkráceně ES). V současné době se jedná v porovnání s hodnotou v riziku o upřednostňovanou míru rizika. Kapitola 1.1 zmiňuje, že pozice očekávané ztráty jakožto klíčového ukazatele v oblasti risk managementu byla upevněna vydáním nejnovější

Basilejské dohody (Basel III) Basilejským výborem pro bankovní dohled (BCBS). Ve snaze předejít v budoucnu ztrátám podobným těm, které byly v minulosti způsobeny použitím ne příliš vhodné míry rizika (tj. hodnoty v riziku) ke stanovení kapitálových požadavků, BCBS stanovil jakožto hlavní míru rizika při určování výše kapitálových požadavků očekávanou ztrátu. Tím definitivně určil nový směr, kterým se bude tato oblast risk managementu nadále ubírat.

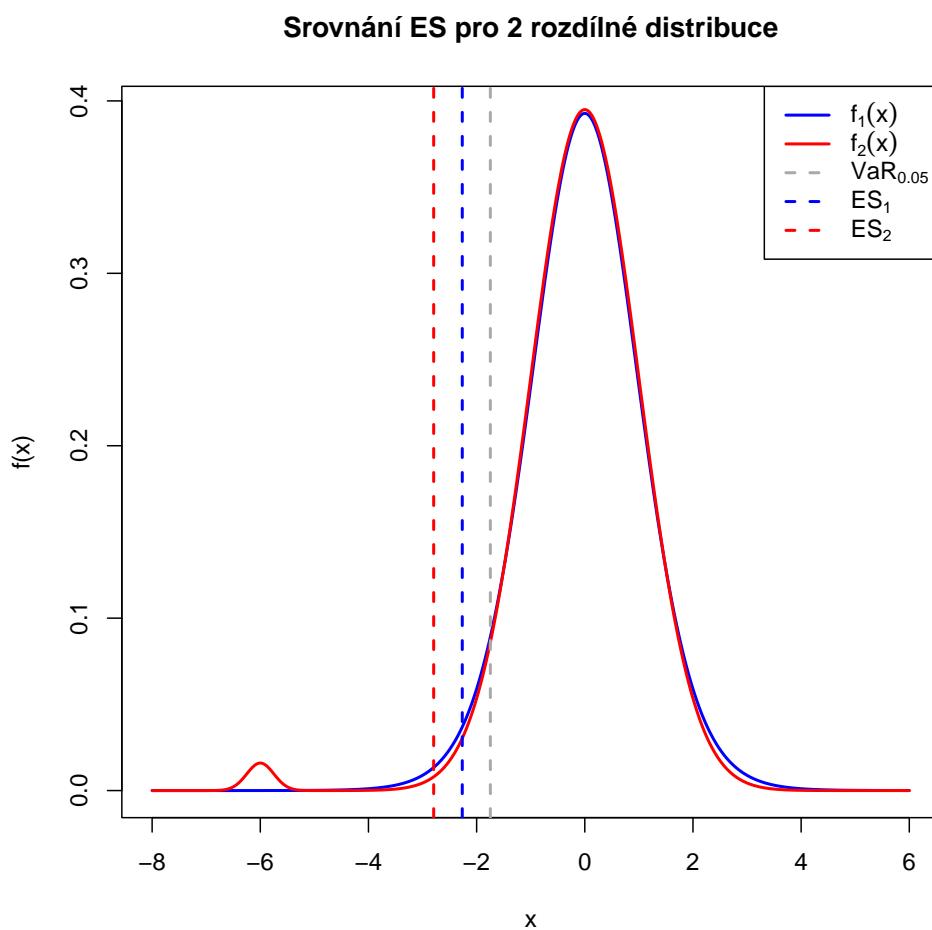
Hlavní důvody, proč se očekávaná ztráta ukázala jako vhodnější alternativa pro hodnotu v riziku, byly popsán již v Kapitole 1.3. Podobně jako v případě hodnoty v riziku se jedná o jedno souhrnné číslo, které popisuje míru vystavení se tržnímu riziku. Očekávaná ztráta je tudíž rovněž v praxi vcelku snadno použitelnou a interpretovatelnou mírou rizika. Na rozdíl od hodnoty v riziku ale očekávaná ztráta podává informaci o chování dané investice za hranicí určenou při odhadu hodnoty v riziku.

Rozdíl mezi očekávanou ztrátou a hodnotou v riziku popsaný v předchozím odstavci lze pozorovat například na Obrázku 1.2. V grafu na Obrázku 1.2 jsou vykresleny hustoty dvou různých rozdělení pravděpodobnosti. První je hustota Studentova rozdělení s 16 stupni volnosti a v grafu je zobrazena plnou modrou čarou. Druhé použité rozdělení je směsí dvou normálních rozdělení ($f(x) = 0,99 \cdot f_1(x) + 0,01 \cdot f_2(x)$, kde $f_1(x)$ je hustotou rozdělení $N(0,1)$ a $f_2(x)$ je hustotou pro $N(-6,0,25)$) a v grafu je zobrazeno plnou červenou čarou.³ Můžeme pozorovat, že chování těchto dvou rozdělení v levém chvostu se zásadně liší. I přesto je 95% hodnota v riziku obou dvou rozdělení téměř shodná ($-1,7459$ pro Studentovo rozdělení a $-1,7460$ v případě směsi normálních rozdělení, v grafu je VaR znázorněna šedou přerušovanou svislou čarou). Pokud by se tedy jednalo například o grafy výnosů akcií dvou různých společností a investor by se měl rozhodnout, do které akcie investovat, a to pouze na základě průměrných výnosů a 95% VaR, pak by z hlediska rizikovosti nepoznal mezi akcemi rozdíl. Volil by tudíž akcie s vyšším očekávaným výnosem. Pokud by měl ale investor k dispozici rovněž hodnotu očekávané ztráty u obou akcií, získal by lepší představu o extrémních ztrátách jednotlivých aktiv, což by mohlo jeho konečné rozhodnutí výrazně ovlivnit. Hodnoty očekávané ztráty se totiž i přes shodné VaR velmi liší. Červená přerušovaná svislá čára představující očekávanou ztrátu při překročení 95% VaR u směsi rozdělení zohledňuje vyšší pravděpodobnost ztráty kolem hodnoty -6 , která výrazně zvyšuje (ve smyslu zvýšení ztrát, tzn. snížení výnosů) hodnotu výsledného ES na $-3,1557$. Při vzájemném srovnání obou hypotetických akcií je proto očekávaná ztráta v případě Studentova rozdělení o něco nižší (tzn. blíže hodnotě v riziku), a to $-2,1965$.

Očekávaná ztráta (někdy označované jako podmíněná hodnota v riziku – Conditional Value at Risk, CVaR) je definováno jako očekávaná (tj. střední) hodnota výnosů (resp. ztrát) investičního portfolia v případě překročení nějaké dané prahové hodnoty. Obvykle je tato prahová hodnota určena jako $100 \cdot \alpha\%$ kvantil z pravděpodobnostního rozdělení výnosů z daného portfolia v časovém horizontu t , tedy jako $\text{VaR}_{\alpha,t}(X)$. (Manganelli & Engle, 2001)

Překročení prahové hodnoty je chápáno jako překročení ve směru levého chvostu hustoty da-

³K vytvoření směsi dvou rozdělení byl v RStudiu použit balík EnvStats, viz Millard (2013).



Obrázek 1.2: Grafické srovnání ES pro dvě různá rozdělení pravděpodobnosti se stejným VaR – hypotetický příklad, vlastní zdroj.

ného rozdělení výnosů z portfolia X , tzn. uvažujeme výnosy menší než ty stanovené hodnotou v riziku (resp. ztráty větší než ty stanovené hodnotou v riziku). Očekávané riziko je v této diplomové práci definováno v souladu s definicí z předchozího odstavce, tedy jako očekávaná hodnota ztráty v případě překročení hodnoty v riziku.

Matematicky lze tuto definici očekávaného rizika zapsat jako

$$\text{ES}_{\alpha,t}(X) = \mathbb{E}(X \mid X < \text{VaR}_{\alpha,t}(X)),$$

kde X je náhodná veličina představující t -denní výnos z investice (z investičního portfolia) a $\text{VaR}_{\alpha,t}(X)$ je hodnota v riziku této investice při hladině pravděpodobnosti α a časovém horizontu výnosů t . (Gilli & Kellezi, 2006)

Očekávané riziko je oproti hodnotě v riziku konzervativnější mírou rizika, jelikož

$$\text{ES}_{\alpha,t}(X) \leq \text{VaR}_{\alpha,t}(X), \quad (1.5)$$

a to pro libovolný α -kvantil i pro všechna $t > 0$ (hodnoty α i t musí ale samozřejmě být pro ES a VaR stejné, viz poslední odstavec v Kapitole 1.3). Nerovnost 1.5 je graficky znázorněna na Obrázku 1.2.

Očekávané riziko bere v potaz celý levý chvost rozdělení výnosů z investice. Zatímco hodnota v riziku je pouze $100 \cdot \alpha\%$ kvantilem takového rozdělení, očekávaná ztráta dokáže vzít v úvahu i velké výjimečné ztráty, které hranici hodnoty v riziku vysoce překračují (viz Obrázek 1.2). Očekávaná ztráta proto nese oproti hodnotě v riziku více informací o rozdělení výnosů, jelikož mnohem více zohledňuje výskyt velkých a málo častých ztrát. Na druhou stranu čím je levý chvost rozdělení výnosů těžší, tím je volatilita odhadu očekávané ztráty větší, což znamená i větší chybu odhadu očekávané ztráty oproti chybě odhadu odpovídající hodnoty v riziku. (Leippold, 2015)

Dalším, velmi podstatným rozdílem mezi hodnotou v riziku a očekávanou ztrátou je splnění podmínky subadditivity v případě očekávané ztráty. Očekávaná ztráta splňuje všechny nutné podmínky k tomu, aby byla na rozdíl od hodnoty v riziku koherentní mírou rizika (více v Kapitole 1.3). Právě subadditivita očekávané ztráty patří mezi hlavní důvody, proč byla Basilejským výborem pro bankovní dohled očekávaná ztráta upřednostněna před hodnotou v riziku jakožto vhodnější míra rizika k určení kapitálových požadavků. (Taylor, 2020)

Vzhledem k výhodám a nevýhodám, které byly diskutovány v průběhu celé Kapitoly 1, bývá často doporučováno pracovat s oběma mírami rizika současně, tedy s hodnotou v riziku společně s očekávanou ztrátou, a brát v potaz limity každé z těchto měr. (Leippold, 2015)

Hodnota odhadu očekávané ztráty závisí podobně jako u odhadu VaR na metodě, jaká je na odhad aplikována. V případě historické simulace je odhad očekávané ztráty určen jako

$$\widehat{\text{ES}}_{\alpha}(X) = \frac{\sum_{i=1}^{\lfloor N\alpha \rfloor} X_{(i)}}{\lfloor N\alpha \rfloor},$$

kde $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(\lfloor N\alpha \rfloor)}$ jsou vzestupně uspořádané historické výnosy.

Za předpokladu n-rozměrné normality výnosů investičního portfolia je možné pro varianční–kovarianční metodu na základě vztahu 1.2 zapsat odhad očekávané ztráty jako

$$\begin{aligned}\widehat{\text{ES}}_{\alpha}(X) &= \text{E} \left(X \mid X < \widehat{\text{VaR}}_{\alpha}(X) \right) \\ &= \frac{\varphi(z_{\alpha})}{\alpha} \sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}} - \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu},\end{aligned}$$

kde $\varphi(z_{\alpha})$ je funkční hodnota hustoty pravděpodobnosti standardizovaného normálního rozdělení v bodě $z_{\alpha} = \Phi^{-1}(\alpha)$, $\sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}}$ je směrodatná odchylka výnosů portfolia a $\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}$ je jejich střední hodnota. (Leippold, 2015)

Způsob, jakým lze odhadnout očekávanou ztrátu při použití teorie extrémních hodnot, bude popsán v Kapitole 2.

2. Teorie extrémních hodnot

Těžké chvosty

Tato diplomová práce operuje s pojmem těžký chvost (označován také jako těžký konec, anglicky heavy tail), je proto vhodné tento pojem nejprve stručně zasadit do kontextu. Obecně lze pravděpodobnostní rozdělení dělit na základě tloušťky jejich konců, od extrémně hubených konců, až po extrémně tlusté (těžké) konce. Graficky lze tlusté konce rozpoznat pomalým klesáním křivky hustoty k nule (např. oproti normálnímu rozdělení). Přesná terminologie v této problematice není zcela ustálena. Někdy jsou v literatuře označována všechna rozdělení s pomalu klesající hustotou jako rozdělení s tlustým koncem, bez ohledu na to, o jak moc pomalý pokles hustoty se jedná. Někdy bývají tlusté konce rozděleny do více podkategorií, na základě míry jejich tloušťky.

Například Taleb (2020) rozlišuje několik úrovní tlustých konců. První je thick tail¹, za ním následuje skupina subexponenciálních konců, a nejextrémnější jsou pak rozdělení s Power-Law konci. Čím tlustší konec dané rozdělení má, tím méně pravděpodobný je výskyt konečných momentů. Power-Law konce často mívají konečné pouze první dva momenty, rozdělení s extrémně tlustými konci nemají ani konečný rozptyl. V souvislosti s tlustými konci je zaveden také pojem extremální index, neboli hodnota, která vyjadřuje míru tloušťky chvostu rozdělení. Extremální index značíme α , v této kapitole bude uveden jako parametr tvaru rozdělení. Pro $\alpha \leq 3$ jsou konečné momenty pouze průměr a rozptyl, pro $\alpha \leq 2$ již ani rozptyl není konečný.

V rámci této diplomové práce budou rozdělení s vyšším extremálním indexem souhrnně označována jako rozdělení s těžkými chvosty, bez podrobnější klasifikace. Jako těžký chvost bude v této práci označen každý konec rozdělení, který Taleb (2020) označuje souhrnně jako „fat tail“.

Úvod do teorie extrémních hodnot

Jak již bylo naznačeno v Kapitole 1, teorie extrémních hodnot (anglicky Extreme Value Theory, zkráceně EVT) je zaměřena na chvosty pravděpodobnostních rozdělení, tzn. na limitní chování výběrových maxim (resp. výběrových minim). Svou podstatou se zásadně liší od statistických metod založených na centrální limitní větě, jež se zabývá limitním chováním součtů náhodných veličin. (Gilli & Kellezi, 2006)

Teorie extrémních hodnot předpokládá, že máme posloupnost nezávislých a stejně rozdělených náhodných veličin X_1, X_2, \dots, X_n . V teorii extrémních hodnot je zkoumáno chování

¹Je obtížné tento pojem přeložit do češtiny, jelikož anglický jazyk rozlišuje slova „fat“ a „thick“, která jsou ale do českého jazyka obě překládána jako „tlustý“.

výběrového maxima $\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ (resp. minima $\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$) této posloupnosti pro $n \rightarrow \infty$. (Özari et al., 2019)

Zkoumání extrémních hodnot a velmi vysokých nebo naopak nízkých kvantilů se ukázalo jako velmi užitečné při předpovídání rizik. Teorie extrémních hodnot tak našla své uplatnění v různých oborech, nejčastěji v meteorologii (srážky, rychlosť větru apod.), v pojišťovnictví (modelování vzniku výjimečných, ale enormních škod, např. v důsledku přírodních katastrof), ale například i v průmyslu (při modelování výskytu neobvyklých, ale velkých poruch přístrojů). Podstatné uplatnění nalezla teorie extrémních hodnot rovněž v oboru financí, a to například v již zmiňovaném řízení rizik. (Garrido & Lezaud, 2013)

Za první průkopníky v oblasti teorie extrémních hodnot jsou považováni Sir Ronald Aylmer Fisher a Leonard Henry Caleb Tippett, kteří v roce 1928 publikovali svou odbornou práci zabývající se limitním chováním maxim. Na základy teorie extrémních hodnot, které ve své práci Fisher a Tippet popsal, následně navázal například Boris Gnedenko v roce 1943 nebo Emil Julius Gumbel, jehož publikace s názvem „Statistics of Extremes“ vydaná v roce 1958 významně přispěla k aplikaci teorie extrémních hodnot v praxi. Od druhé poloviny 20. století pak vnikaly další odborné práce, v nichž byly dále rozvíjeny metody na teorii extrémních hodnot založené. (Gomes & Guillou, 2015)

V případě teorie extrémních hodnot je nutné dbát na několik zásad. Jednou z nich je fakt, že teorie extrémních hodnot funguje korektně pouze pro nízké úrovně pravděpodobnosti. To vyhází ze samotné podstaty teorie extrémních hodnot, jelikož se zabývá chováním ve chvostech distribuce, nikoliv uprostřed, na rozdíl od jiných statistických přístupů. Z tohoto důvodu čím více se při odhadování vzdalujeme od chvostů pravděpodobnostního rozdělení, tím se tyto odhady zkreslují. Nelze ovšem jednoznačně označit, jaká úroveň pravděpodobnosti už je pro aplikaci teorie extrémních hodnot příliš vysoká. Na tuto problematiku narází například metoda špiček nad prahem, ve které je často obtížné korektně určit prahovou hodnotu u , od níž jsou realizace náhodné veličiny považovány za extrémní. Pokud je zvolena příliš nízká prahová hodnota, vede to ke zkreslenému odhadu, jelikož asymptotické vlastnosti využívané v teorii extrémních hodnot již při takto nízkém prahu nefungují. Nelze ale tyto prahové hodnoty u volit ani příliš vysoké, protože pak je pouze velmi malé množství realizací náhodné veličiny označeno jako extrémní hodnota, což vede k vysoké hodnotě odhadovaného rozptylu odhadu. Vzhledem k tomu, že nelze jednoznačně určit ideální výši prahové hodnoty u , volba tudíž záleží zcela na autorovi dané analýzy, jehož rozhodnutí vychází ze simulací nebo grafů. Podrobněji na tuto problematiku navazuje Kapitola 2.3.

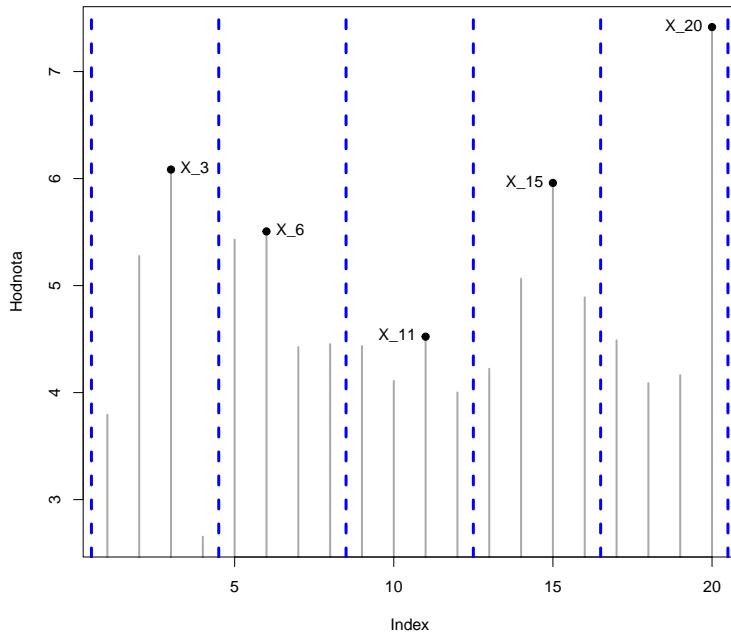
V neposlední řadě je nutné mít na paměti již zmiňovaný předpoklad nezávislosti a stejněho rozdělení posloupnosti náhodných veličin X_1, X_2, \dots, X_n . Splnění tohoto předpokladu bývá při aplikaci teorie extrémních hodnot často nereálné a v rozporu s charakterem analyzované časové řady. Například v meteorologii nebývají hodnoty množství denních srážek navzájem nezávislé (období s malým množstvím srážek střídají naopak období, kdy dojde k velkému úhrnu srážek několik dní po sobě). Podobně jako v meteorologii narází na problémy s porušením předpokladu nezávislosti také finanční časové řady (např. vývoj kurzu akcie je alespoň

částečně závislý na dnech předchozích, jelikož finanční časové řady podléhají střídajícím se rostoucím a klesajícím trendům). Existují ale způsoby, jakými je možné se závislou časovou řadou při aplikaci teorie extrémních hodnot pracovat. Těmito možnostmi se bude práce dále zabývat v průběhu dalších kapitol. (Manganelli & Engle, 2001)

2.1 Identifikace extrémních hodnot v datech

Existují dvě základní varianty, jakými můžeme v teorii extrémních hodnot identifikovat extrémní hodnoty v časové řadě.

První z nich spočívá v rozdelení časové řady na stejně velké bloky (např. o délce 1 měsíc, 1 čtvrtletí nebo 1 rok). V každém bloku je následně určeno blokové maximum, tedy nejvyšší hodnota v daném bloku.



Obrázek 2.1: Grafická ukázka identifikace extrémních hodnot u metody blokových maxim – hypotetický příklad, vlastní zdroj.

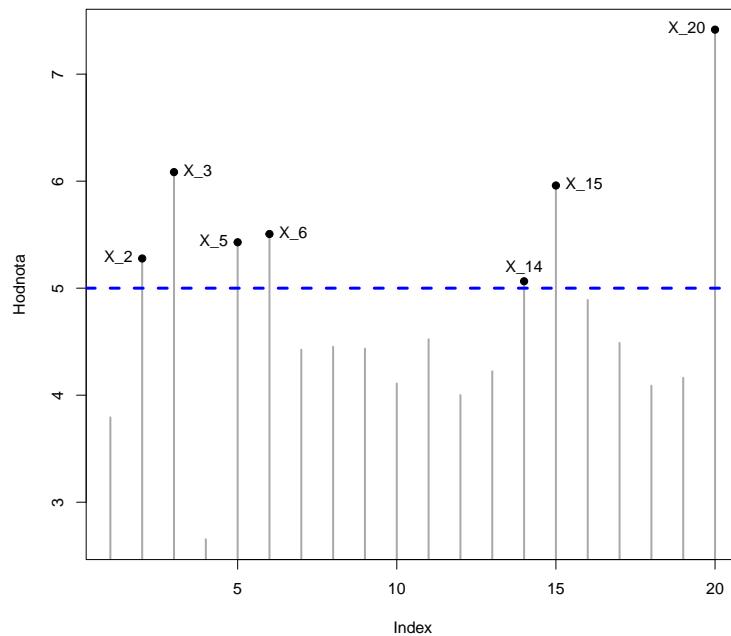
Postup identifikace extrémních hodnot metodou blokových maxim je znázorněn na Obrázku 2.1. Náhodný výběr tvořený z 20 pozorování je v tomto případě rozdělen do 5 bloků, v každém bloku jsou vždy 4 pozorování (bloky jsou na Obrázku 2.1 zobrazeny modrými přerušovanými čarami). V prvním bloku má maximální hodnotu pozorování X_3 , v dalších blocích to jsou popořadě pozorování X_6 , X_{11} , X_{15} a X_{20} .

Bloková maxima se řídí zobecněným rozdelením extrémních hodnot a modelování datového souboru pomocí tohoto rozdělení pravděpodobnosti se nazývá metoda blokových maxim, více

v Kapitole 2.2.

Druhá možnost, jak identifikovat v datovém souboru extrémní hodnoty, je zobrazena na Obrázku 2.2. Nejprve je pevně stanovena prahová hodnota u (na Obrázku 2.2 znázorněna modrou přerušovanou čarou). Následně jsou z dat vybrána všechna pozorování, jejichž hodnota zvoleným prahem přesahuje. Na Obrázku 2.2 se jedná o pozorování $X_2, X_3, X_5, X_6, X_{14}, X_{15}$ a X_{20} .

Tato pozorování jsou následně modelována pomocí zobecněného Paretova rozdělení pravděpodobnosti a celá metoda se nazývá metoda špiček nad prahem, viz Kapitola 2.3. (Gilli & Kellezi, 2006)



Obrázek 2.2: Grafická ukázka identifikace extrémních hodnot u metody špiček nad prahem – hypotetický příklad, vlastní zdroj.

2.2 Metoda blokových maxim

Bloková maxima, popsaná v Kapitole 2.1, jsou v teorii extrémních hodnot značena M_n , kde n je velikost bloku (v příkladu zobrazenému na Obrázku 2.1 je $n = 4$). Formálně lze definici blokového maxima zapsat jako

$$M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\},$$

kde X_1, X_2, \dots, X_n jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny (zkráceně *iid*, independent and identically distributed) s distribuční funkcí F , které nálezejí do jednoho bloku o velikosti n ($n \in \mathbb{N}$). Pro distribuční funkci blokového maxima M_n platí, že

$$\begin{aligned}
 P(M_n \leq x) &= P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) \stackrel{\text{iid}}{=} \\
 &\stackrel{\text{iid}}{=} P(X_1 \leq x) \cdot P(X_2 \leq x) \cdot \dots \cdot P(X_n \leq x) \stackrel{\text{iid}}{=} \\
 &\stackrel{\text{iid}}{=} F^n(x),
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

kde $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Distribuční funkce F ale v praxi není známá. Je sice možné její podobu odhadnout na základě pozorovaného datového souboru, nicméně vzhledem k faktu, že se jedná o pouhý odhad distribuční funkce, je nutné v tomto případě brát v potaz i chybu odhadu. Vztah 2.1 pracuje s n -tou mocninou distribuční funkce F , takže i sebemenší rozdíl v odhadu této distribuční funkce vede s rostoucím n k velkým rozdílům ve výsledné distribuční funkci blokového maxima M_n . Z tohoto důvodu není odhad distribuční funkce F z pozorovaných dat vhodnou cestou k získání informací o rozdělení blokových maxim. Jako vhodnější alternativa pro metodu blokových maxim se ukázalo zkoumání limitního chování $P(M_n \leq x)$ pro $n \rightarrow \infty$.

Pro porozumění limitnímu chování blokových maxim je nutné definovat pravý koncový bod distribuční funkce F . Pravý koncový bod je značen x_F a je definován jako

$$x_F = \sup \{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}.$$

Při $n \rightarrow \infty$ platí pro všechna $x < x_F$, že

$$P(M_n \leq x) = F^n(x) \rightarrow 0. \tag{2.2}$$

Ze vztahu 2.2 lze odvodit i limitní chování blokového maxima M_n . Pro $n \rightarrow \infty$ platí, že

$$M_n \xrightarrow{\text{s.j.}} x_F, \tag{2.3}$$

tedy pro $n \rightarrow \infty$ konverguje blokové maximum skoro jistě k pravému koncovému bodu příslušné distribuční funkce F . Z konvergence popsané v 2.3 vyplývá, že distribuční funkce blokového maxima M_n degeneruje k pravému koncovému bodu x_F (degenerované rozdělení je takové rozdělení, jež nabývá pouze konstantní hodnoty x_F s pravděpodobností $P(M_n = x_F) = 1$ a pro všechna $x \neq x_F$ je $P(M_n = x) = 0$).

Rozdělení pravděpodobnosti M_n je tedy v limitním případě rozdělením degenerovaným. S pomocí Fisher-Tippettovy věty z roku 1928 (dále zpracované Gnedenkem v roce 1943) je ale možné toto degenerované rozdělení drobnou transformací převést na rozdělení nedegenerované, viz Věta 2.1. (Embrechts et al., 1997)

Věta 2.1 (Fisher-Tippettova). *Nechť (X_n) je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin. Pokud existují konstanty $c_n > 0$ a $d_n \in \mathbb{R}$ takové, že*

$$P\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x\right) \xrightarrow{d} H(x),$$

pro $n \rightarrow \infty$ a pro nějakou nedegenerovanou distribuční funkci H , potom je tato distribuční funkce H jedním z následujících tří rozdělení extrémních hodnot:

$$\begin{aligned} \text{Fréchet: } \Phi_\alpha(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ e^{-x^{-\alpha}}, & x > 0, \end{cases} \quad \alpha > 0, \\ \text{Weibull: } \Psi_\alpha(x) &= \begin{cases} e^{-(x)^{\alpha}}, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad \alpha > 0, \\ \text{Gumbel: } \Lambda(x) &= e^{-e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Důkaz pro Větu 2.1 je možné dohledat například v Embrechts et al. (1997). Distribuční funkce vypsané ve Větě 2.1 bývají v kontextu teorie extrémních hodnot často pro zjednodušení zobecněny a sloučeny do jednoho souhrnného rozdělení, které se nazývá zobecněné rozdělení extrémních hodnot (Generalized Extreme Value Distribution, zkráceně GEV). V tomto rozdělení je původní parametr tvaru (angl. shape parameter) α odpovídajícími transformacemi nahrazen obecnějším parametrem tvaru, které je značeno ξ . (Gilli & Kellezi, 2006)

Distribuční funkce zobecněného rozdělení extrémních hodnot je tedy definována jako

$$H_\xi(x) = \begin{cases} e^{-(1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}}}, & \xi \neq 0, \\ e^{-e^{-x}}, & \xi = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

s podmínkou

$$1 + \xi x > 0. \quad (2.5)$$

Fréchetovo, Weibullovo a Gumbelovo rozdělení jsou tudíž speciálními případy zobecněného rozdělení extrémních hodnot pro konkrétní volby parametru ξ . Při volbě $\xi = \alpha^{-1}$ je získána distribuční funkce Fréchetova rozdělení, pro $\xi = -\alpha^{-1}$ vzniká předpis pro distribuční funkci Weibullovova rozdělení a distribuční funkce Gumbelova rozdělení je ve vztahu 2.4 popsána limitním rozdělením s $\xi = 0$. Obecně lze rozdělení pocházející z GEV rodiny pravděpodobnostních rozdělení podle parametru ξ rozlišit na

$$\begin{aligned} \text{Fréchet: } \xi &> 0, \\ \text{Weibull: } \xi &< 0, \\ \text{Gumbel: } \xi &= 0, \end{aligned}$$

což z hlediska podmínky 2.5 znamená, že

$$\begin{aligned} \text{Fréchet: } x &> -\xi^{-1}, \\ \text{Weibull: } x &< -\xi^{-1}, \\ \text{Gumbel: } x &\in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

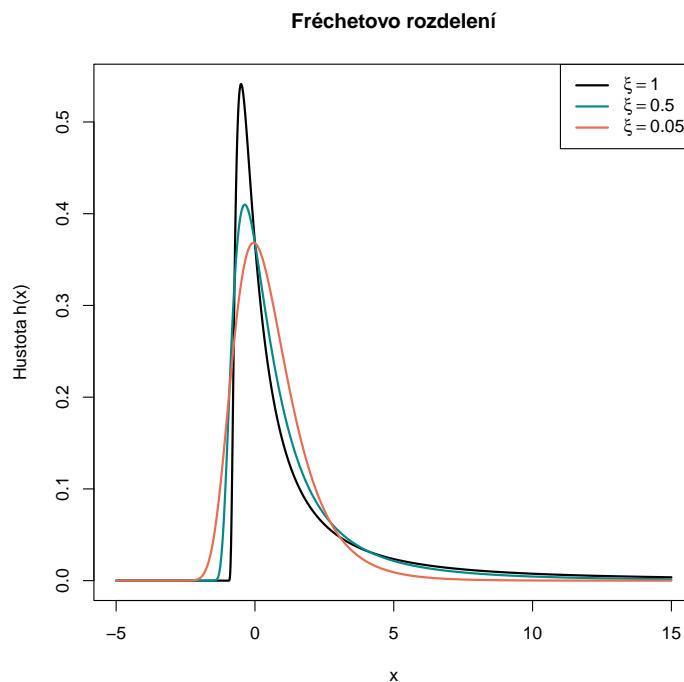
viz například Embrechts et al. (1997).

Vzhledem k faktu, že skutečné rozdělení blokových maxim reálných dat není dopředu známé, se ukázalo modelování blokových maxim pomocí zobecněného rozdělení extrémních hodnot jako efektivnější cesta.

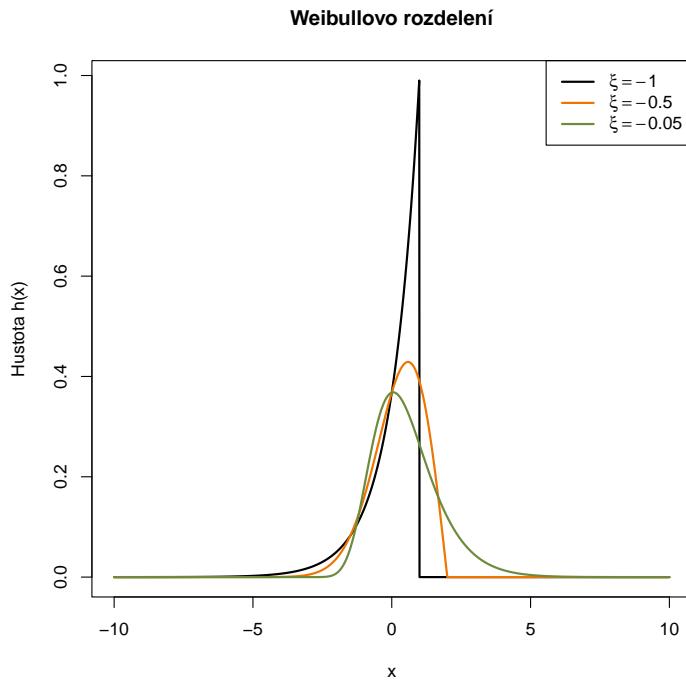
Existuje více způsobů, jakými je možné distribuční funkci zobecněného rozdělení extrémních hodnot zapsat. Alternativa k zápisu 2.4 vychází z faktu, že zobecněné rozdělení extrémních hodnot není rozdělením přímo blokových maxim, nýbrž se jedná o limitní rozdělení blokových maxim normalizovaných pomocí konstant c_n, d_n . V praxi hodnoty normalizujících konstant c_n a d_n nejsou přímo známý. Řešením tohoto problému je právě již zmíněný alternativní zápis distribuční funkce zobecněného rozdělení extrémních hodnot, a to

$$H_{\xi, \sigma, \mu}(x) = H_\xi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad x \in \mathcal{D}, \quad \mathcal{D} = \begin{cases} \left(-\infty, \mu - \frac{\sigma}{\xi}\right) & \xi < 0, \\ (-\infty, \infty) & \xi = 0, \\ \left(\mu - \frac{\sigma}{\xi}, \infty\right) & \xi > 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

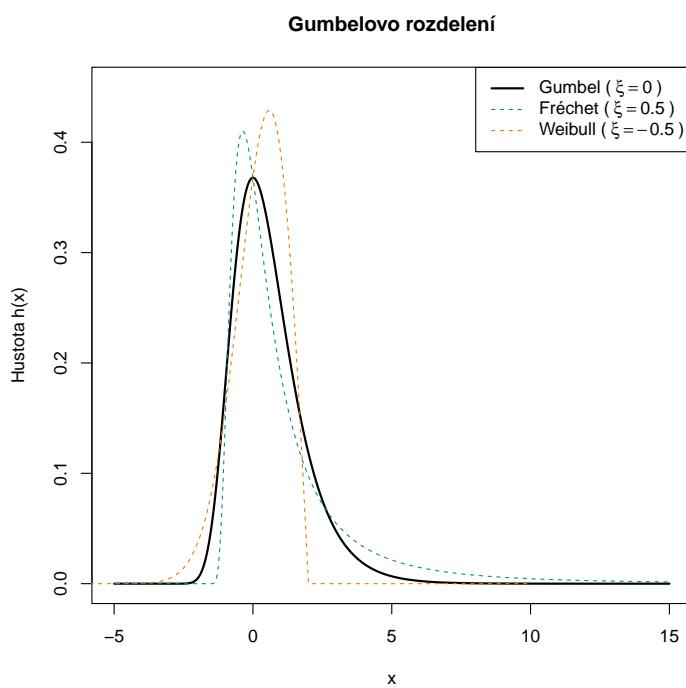
kde podmínka $x \in \mathcal{D}$ opět vychází ze vztahu 2.5. Jedná se o tříparametrovou variantu zápisu distribuční funkce $H(x)$, ve které parametry $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma > 0$ zastupují neznámé normalizující konstanty d_n a c_n . Forma zápisu GEV rozdělení popsaná v 2.6 je tedy limitním rozdělením denormalizovaných blokových maxim. Parametr μ je parametrem polohy (angl. location parameter) a σ je parametrem měřítka (angl. scale parameter). (Gilli & Kellezi, 2006)



Obrázek 2.3: Graf hustoty Fréchetova rozdělení pro různé volby parametru ξ (hypotetický příklad, vlastní zdroj).



Obrázek 2.4: Graf hustoty Weibullova rozdělení pro různé volby parametru ξ (hypotetický příklad, vlastní zdroj).



Obrázek 2.5: Graf hustoty Gumbelova rozdělení a porovnání s hustotami Fréchetova a Weibullova rozdělení (hypotetický příklad, vlastní zdroj).

Obrázek 2.3 je ukázkou tvaru křivky hustoty pravděpodobnosti Fréchetova rozdělení pro různé volby parametru ξ (hodnoty parametru byly zvoleny 1, 0,5 a 0,05). Je zřejmé, že s rostoucím ξ se stává pravý chrost Fréchetova rozdělení stále těžší. Na Obrázku 2.4 jsou znázorněny hustoty pravděpodobnosti Weibullovova rozdělení pro různé volby parametru ξ (hodnoty parametru byly zvoleny -1, -0,5 a -0,05). Třetí graf (na Obrázku 2.5) vykresluje hustotu Gumbelova rozdělení ($\xi = 0$, černá křivka), pro srovnání je zobrazen společně s Fréchetovým rozdělením pro $\xi = 0,5$ a Weibullovým rozdělením pro $\xi = -0,5$ (barevné přerušované křivky). Ze srovnání Gumbelova a Fréchetova rozdělení vyplývá, že Gumbelovo rozdělení je vhodnější volbou, chceme-li modelovat data s méně těžkým pravým chrostem. U Weibullovova rozdělení je na rozdíl od Fréchetova a Gumbelova rozdělení pravý koncový bod konečný.² (Coles, 2001)

Často zkoumanou oblastí u metody blokových maxim je problematika ideální volby šírky bloku. Zvolení příliš malé velikosti bloků může vést ke zkreslení odhadů. Naopak volba příliš velkých bloků vede ke vzniku příliš malého počtu bloků. Rovněž výsledný počet výběrových maxim bude tudíž v tomto případě příliš malý, což způsobí velký rozptyl odhadu. Problematicka metodiky pro stanovení vhodné velikosti bloku se stala předmětem mnoha článků z posledních let. Jako příklad odborných článků, jejichž cílem bylo nalézt algoritmus vhodný pro stanovení velikosti bloku při modelování dat metodou blokových maxim, můžeme uvést například Coles (2001), Wang et al. (2016) nebo Dkengne Sielenou et al. (2020).

Přestože již v dnešní době existuje několik odborných publikací, které se problematikou šírky bloku u metody blokových maxim zabývají, stále nebyl definován žádný jednotný algoritmus pro tuto volbu. Volba šírky bloku tedy v konečném důsledku závisí na osobě, která danou analýzu provádí. Obvykle je šírka bloku stanovena buď pomocí některého z již vyvinutých algoritmů, nebo jsou data do bloků v případě časových řad rozčleněna přirozeně pomocí klasického dělení času. Přirozené dělení do bloků bývá v praxi často používáno, přičemž velikost bloku bývá stanovena například 1 den, týden, měsíc, čtvrtletí či rok.

Již bylo prokázáno, že výsledky analýzy dat metodou blokových maxim jsou vysoce citlivé na volbu šírky bloku. Neexistuje jednotná ideální šírka bloku vhodná pro všechna data. Naopak, pro každý investiční instrument je nutné volit šírku bloku individuálně. Zároveň má metoda blokových maxim sklon k nadhodnocování rizika v případě odhadu očekávané ztráty. (Cervantes et al., 2024)

Maximálně věrohodný odhad parametrů GEV rozdělení

Parametry zobecněného rozdělení extrémních hodnot lze odhadnout například metodou vážených momentů nebo metodou maximální věrohodnosti. V této práci budou parametry GEV rozdělení odhadovány metodou maximální věrohodnosti.

²Pravý koncový bod Weibullovova rozdělení je konečný vždy, přestože to pro volby ξ blízké nule není z grafů na první pohled zřejmé. Pro $\xi \rightarrow 0^-$ se totiž hodnota pravého koncového bodu Weibullovova rozdělení blíží k $+\infty$.

Pro získání maximálně věrohodného odhadu (zkráceně z anglického jazyka MLE) je nutné nejprve definovat funkční předpis pro hustotu GEV rozdělení. Hustotu zobecněného rozdělení extrémních hodnot můžeme zapsat jako

$$h_{\mu,\sigma,\xi}(x) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1} \exp\left(-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right) \quad \xi \neq 0, \quad (2.7)$$

kde $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma > 0$. Pro speciální případ, kdy $\xi = 0$, je předpis hustoty GEV rozdělení ve tvaru

$$h_{\mu,\sigma,0}(x) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \exp\left(-\exp\left(-\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right) \quad \xi = 0, \quad (2.8)$$

kde opět $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma > 0$. Vzhledem k nulové hodnotě parametru ξ je funkce popsána vztahem 2.8 hustotou Gumbelova rozdělení. V případě hustoty 2.7 se jedná o společný funkční předpis hustoty pro Fréchetovo a Weibullovo rozdělení. (Markose & Alentorn, 2005)

Nechť M_1, M_2, \dots, M_m jsou nezávislé veličiny pocházející ze zobecněného rozdělení extrémních hodnot (v tomto případě se jedná o bloková maxima z náhodného výběru X_1, X_2, \dots, X_m rozděleného do m bloků). Vycházíme-li ze vztahu 2.7, pak je logaritmická věrohodnostní funkce, kterou je potřeba v rámci odhadu metodou maximální věrohodnosti maximalizovat, ve tvaru

$$\ell(\mu, \sigma, \xi) = -m \log \sigma - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^m \log \left(1 + \xi \frac{m_i - \mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi \frac{m_i - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}},$$

kde $\xi \neq 0, \mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma > 0$. Obdobně lze definovat logaritmickou věrohodnostní funkci pro $\xi = 0$ ze vztahu 2.8 jako

$$\ell(\mu, \sigma) = -m \log \sigma - \sum_{i=1}^m \frac{x_i - \mu}{\sigma} - \sum_{i=1}^m \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right).$$

Připomeňme, že stále platí nutnost splnění podmínky 2.5, tzn.

$$1 + \xi \left(\frac{m_i - \mu}{\sigma}\right) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Maximálně věrohodné odhady parametrů GEV rozdělení nelze získat analyticky, k odhadu parametrů bývají proto využívány numerické optimalizační algoritmy.

Zároveň bylo prokázáno, že pro $\xi \leq -0,5$ nastávají problémy s MLE odhady, které buď nelze vůbec nalézt, nebo nemají své obvyklé asymptotické vlastnosti. Vzhledem k tvaru křivky hustoty GEV rozdělení pro $\xi \leq -0,5$ je zřejmé, že se ale jedná o případy, které obvykle nebývají modelovány pomocí teorie extrémních hodnot, jelikož se nejedná o rozdělení s těžkým pravým chvostem. Při volbě $\xi \leq -0,5$ hovoříme o Weibullově rozdělení s velmi krátkým

pravým chvostem, viz Obrázek 2.4. V praxi se tudíž s tímto problémem v případě teorie extrémních hodnot obvykle nesetkáváme. (Coles, 2001)

Pro získání odhadu $100(1 - \alpha)\%$ VaR metodou blokových maxim je nutné se vrátit zpět ke vztahu 2.1. Kvántil původního rozdělení můžeme pomocí metody blokových maxim odhadnout jako inverzní funkci n-té odmocniny distribuční funkce zobecněného rozdělení extrémních hodnot. Odhad $100(1 - \alpha)\%$ VaR bude proto určen jako

$$\widehat{\text{VaR}}_\alpha = \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left[1 - (-n \cdot \ln(1 - \alpha))^{-\hat{\xi}} \right],$$

pro $\hat{\xi} \in (-0,5; 0) \cup (0, \infty)$, kde n je šířka jednoho bloku (tzn. počet pozorování v jednom bloku). V případě, že $\hat{\xi} = 0$, bude odhad $100(1 - \alpha)\%$ VaR určen jako

$$\widehat{\text{VaR}}_\alpha = \hat{\mu} - \hat{\sigma} \ln(-n \cdot \ln(1 - \alpha)),$$

viz například Szubzda a Chlebus (2019).

Pomocí odhadu hodnoty v riziku lze následně získat i příslušný odhad očekávané ztráty $\widehat{\text{ES}}_\alpha$. Odvození vztahu pro odhad ES vychází z obecné definice podmíněné střední hodnoty. Vezmeme-li náhodnou veličinu \tilde{X} jakožto denní ztráty z investice, jejichž maxima lze modelovat pomocí GEV rozdělení, pak je očekávaná ztráta určena jako

$$\text{ES}_\alpha = \text{E}(\tilde{X} | \tilde{X} > \text{VaR}) = \frac{\int_{\text{VaR}}^{\infty} x \cdot f(x) dx}{1 - F(\text{VaR})},$$

kde $F(\text{VaR}) = 1 - \alpha$. Funkce $f(x)$ je hustota rozdělení náhodné veličiny \tilde{X} a je odvozena pomocí vztahu 2.1 a předpisu hustoty GEV rozdělení. Potom je například pro $\xi \neq 0$ odhad $100(1 - \alpha)\%$ ES určen jako

$$\begin{aligned} \widehat{\text{ES}}_\alpha &= \frac{1}{\alpha} \int_{\text{VaR}}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \\ &= \frac{1}{\alpha \cdot n \cdot \sigma} \int_{\text{VaR}}^{\infty} x \cdot \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{-(1+1/\xi)} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{n} \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{-1/\xi} \right\} dx, \end{aligned}$$

kde n je šířka jednoho bloku a μ, σ, ξ jsou parametry příslušného GEV rozdělení, jehož hustota je dána předpisem 2.7. Podobně je možné odvodit i alternativu pro $\xi = 0$. (Cervantes et al., 2024)

V praxi ale není metoda blokových maxim k odhadu hodnoty v riziku příliš využívána. Mnohem častější metodou k odhadu hodnoty v riziku (a tedy i k odhadu očekávané ztráty) je metoda špiček nad prahem, která je popsána v Kapitole 2.3.

2.3 Metoda špiček nad prahem

Metoda špiček nad prahem (anglicky Peaks Over Threshold Method, zkratka POT) je možnou alternativou k metodě blokových maxim popsané v Kapitole 2.2. Opět jsou dány nezávislé stejně rozdelené náhodné veličiny X_1, X_2, \dots, X_n , $n \in \mathbb{N}$, s distribuční funkcí $F(x)$. Jak již bylo zmíněno v úvodu Kapitoly 2, metoda špiček nad prahem spočívá ve stanovení prahové hodnoty u a následném modelování přesahů Y_i , které definujeme pro $i = 1, 2, \dots, n$ jako

$$Y_i = X_i - u,$$

přičemž $X_i > u$.

Obrázek 2.6 ukazuje vztah mezi distribuční funkcí původních nezávislých stejně rozdelených náhodných veličin $F(x)$ a podmíněnou distribuční funkcí přesahů přes prah, která se značí $F_u(y)$. Matematicky lze podmíněnou distribuční funkci přesahů přes prah zapsat jako

$$F_u(y) = P(X - u \leq y \mid X > u), \quad y \geq 0.$$

S využitím definice podmíněné pravděpodobnosti pak lze matematicky vyjádřit vztah mezi distribučními funkcemi $F(x)$ a $F_u(y)$ jako

$$\begin{aligned} F_u(y) &= \frac{P((X \leq u + y) \cap (X > u))}{P(X > u)} = \\ &= \frac{P(u < X \leq u + y)}{1 - P(X \leq u)} = \frac{F(u + y) - F(u)}{1 - F(u)} = \\ &= \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

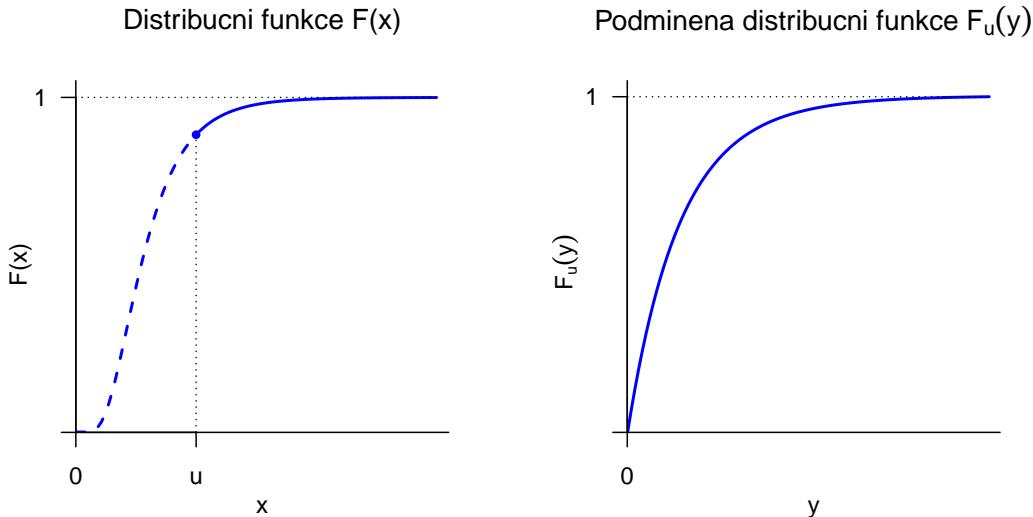
Vzhledem k tomu, že distribuční funkce $F(x)$ v praxi obvykle není předem známá, rovněž i distribuční funkce přesahů $F_u(y)$ zůstává neznámá. Podobně jako tomu bylo u metody blokových maxim, je proto nutné i v případě metody špiček nad prahem distribuční funkci přesahů approximovat. Approximace distribuční funkce $F_u(y)$ byla formulována do Balkema-de Haan-Pickandsovy věty, viz Věta 2.2. (Coles, 2001)

Věta 2.2 (Balkema, de Haan, Pickands). *Nechť (X_n) je posloupnost nezávislých stejně rozdelených náhodných veličin se společnou distribuční funkcí $F(x)$ a pravým koncovým bodem x_F . $F_u(y)$ je podmíněná distribuční funkce taková, že platí*

$$F_u(y) = P(X - u \leq y \mid X > u), \quad y \geq 0.$$

Pak pro dostatečně velké $u < x_F$ existuje approximace této podmíněné distribuční funkce

$$F_u(y) \approx G_{\xi, \sigma}(y), \quad u \rightarrow x_F^-$$



Obrázek 2.6: Vztah mezi distribučními funkcemi $F(x)$ a $F_u(y)$ (hypotetický příklad, vlastní zdroj).

která je ve tvaru

$$G_{\xi,\sigma}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\sigma}y\right)^{-1/\xi} & \xi \neq 0, \sigma > 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\sigma}\right) & \xi = 0, \sigma > 0, \end{cases}$$

a to pro $y \in [0, x_F - u]$, pokud $\xi \geq 0$, a pro $y \in [0, -\sigma/\xi]$, když $\xi < 0$.

Rozdelení definované distribuční funkcí $G_{\xi,\sigma}(y)$ se nazývá zákonem Pareto rozdělení (generalized Pareto distribution, GPD).

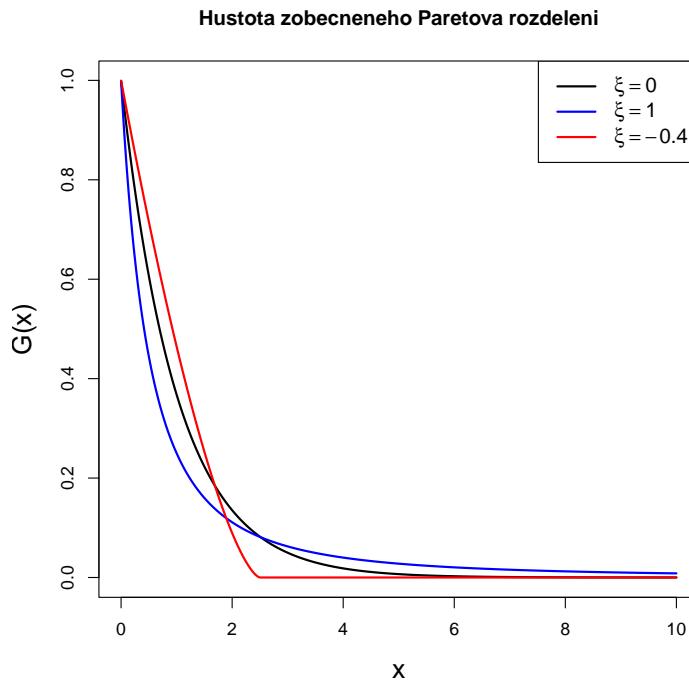
Parametr σ je parametrem měřítka (scale parameter), parametr ξ parametrem tvaru (shape parameter nebo tail index). Čím větší je hodnota parametru ξ , tím těžší je pravý chvost rozdělení. Jedním ze speciálních případů zákonu Pareto rozdělení je například exponenciální rozdělení, když $\sigma = \lambda^{-1}$.

Parametr σ zákonu Pareto rozdělení lze vyjádřit také jako

$$\sigma = \tilde{\sigma} + \xi(u - \mu), \quad (2.10)$$

kde $\tilde{\sigma}$ a μ odpovídají parametry měřítka a polohy zákonu Pareto rozdělení extrémních hodnot definované distribuční funkci $H_{\xi,\sigma,\mu}(x)$, viz vztah 2.6. Tímto způsobem je možné poukázat na vzájemnou propojenosť mezi zákonem Pareto rozdělením (GPD) a zákonem extrémních hodnot (GEVD). Zároveň ze vztahu 2.10 vyplývá, že s výjimkou situace, kdy je $\xi = 0$, je hodnota parametru σ zákonu Pareto rozdělení závislá na volbě prahu u . (Coles, 2001)

Na Obrázku 2.7 je ukázka vlivu parametru ξ na výslednou podobu pravého konce rozdělení (parametr σ je ve všech třech příkladech roven jedné).



Obrázek 2.7: Graf hustoty zobecněného Paretova rozdělení pro různé volby parametru ξ (hypotetický příklad, vlastní zdroj).

Pro účely analýzy extrémních hodnot u finančních dat bude podobně jako v případě GEV rozdělení bráno v potaz pouze GPD pro $\xi \geq 0$, jelikož pro $\xi < 0$ je pravý koncový bod rozdělení konečný ($x_F = -\sigma/\xi$), viz Obrázek 2.7. (Gilli & Kellezi, 2006)

Distribuční funkci zobecněného Paretova rozdělení popsanou ve Větě 2.2 lze vyjádřit také přímo pomocí původní náhodné veličiny $X = Y + u$ jako

$$G_{\xi,\sigma}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi(x-u)}{\sigma}\right)^{-1/\xi} & \xi \neq 0, \sigma > 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x-u}{\sigma}\right) & \xi = 0, \sigma > 0, \end{cases}$$

viz například Gilli a Kellezi (2006).

V Kapitole 2.2 věnované metodě blokových maxim byla diskutována otázka vhodné volby šířky bloku a s tím související bilancování mezi chybou a vychýlením odhadu. Na podobný problém naráží také metoda špiček nad prahem, a to při volbě vhodné výšky prahové hodnoty u . Příliš nízký prah u vede k vychýleným odhadům, vysoké hodnoty prahové hodnoty zase povedou k příliš malému množství dat tuto hodnotu přesahující, a tudíž k vysoké chybě

odhadu parametrů GPD. Opět bude cílem nalézt takový prah u , který bude co nejlepším kompromisem mezi těmito dvěma úskalími.

Existuje více metod, jak vhodnou hodnotu prahové hodnoty u nalézt. Jedna z možných metod vychází ze střední hodnoty zobecněného Paretova rozdělení, tzn. ze vztahu

$$E(Y) = E(X - u \mid X > u) = \frac{\sigma}{1 - \xi},$$

kde $\sigma > 0$ a $\xi > 1$ jsou parametry zobecněného Paretova rozdělení. Je-li $\xi \geq 1$, pak střední hodnota GPD není konečná. Pochází-li hodnoty nad nějakým prahem u_0 ze zobecněného Paretova rozdělení (parametr tvaru ξ , parametr měřítka σ_{u_0}), pak se rovněž přesahy přes libovolný prah $u > u_0$ řídí GPD rozdělením³, přičemž

$$\sigma_u = \sigma_{u_0} + \xi u, \quad (2.11)$$

a proto

$$E(X - u \mid X > u) = \frac{\sigma_u}{1 - \xi} = \frac{\sigma_{u_0} + \xi u}{1 - \xi}. \quad (2.12)$$

Funkce popsaná v rovnici 2.12 se nazývá střední hodnota excesů (nebo střední hodnota přesahů, angl. mean excess function) a obvykle bývá značena jako $e(u)$. Jedná se o lineární funkci prahu u . Podrobněji je odvození střední hodnoty excesů popsáno například v Coles (2001).

V praxi je střední hodnota ze vztahu 2.12 nahrazena empirickým odhadem, tedy výběrovým průměrem přesahů přes prah $u_0 < u < x_F$. Označme počet pozorování přesahujících prahovou hodnotu jako n_u , pozorování přesahující prahovou hodnotu jako $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n_u)}$. Potom je empirický odhad střední hodnoty excesů určen jako

$$\widehat{e(u)} = \frac{1}{n_u} \sum_{i=1}^{n_u} (x_{(i)} - u).$$

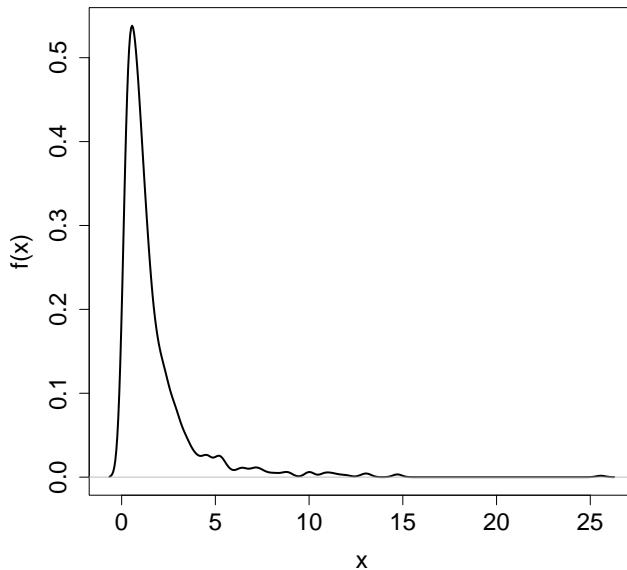
Graf, jehož osu x tvoří prahové hodnoty u a na ose y jsou vyneseny příslušné odhady střední hodnoty excesů, se nazývá graf střední hodnoty excesů (angl. mean excess plot⁴).

Pokud přesahy přes prah pocházejí z GPD rozdělení, pak je funkce $e(u)$ funkcí lineární. Rovněž její empirické odhady se pak mění přibližně lineárně ve vztahu k prahu u . Pokud je tedy křivka v grafu střední hodnoty excesů od určitého bodu u_0 přibližně lineární, pak se jedná o data s těžkým chvostem, které lze modelovat pomocí zobecněného Paretova rozdělení pro libovolné $u > u_0$ ($u < x_{max}$, kde x_{max} je pozorování s nejvyšší hodnotou). Graf střední hodnoty excesů je tudíž velmi užitečným nástrojem při aplikování teorie extrémních hodnot, především pak pro metodu špiček nad prahem. Jedná se o graf, s jehož pomocí lze nejen identifikovat těžké chvosti, ale zároveň je možné z něj vyčíst vhodné hodnoty prahu u . (Coles, 2001)

³Stále musí platit, že prahová hodnota je menší než pravý koncový bod rozdělení, tzn. $u < x_F$.

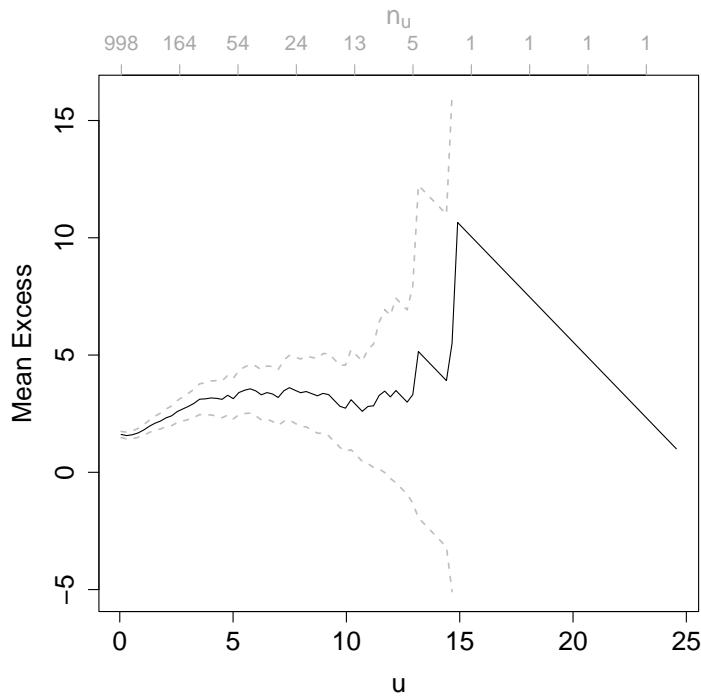
⁴Někdy se tento graf vyskytuje v literatuře pod názvem mean residual life plot.

Volba vhodného prahu u na základě grafu střední hodnoty excesů je demonstrována v následujícím hypotetickém příkladu. Byly vygenerovány hodnoty z lognormálního rozdělení $LN(0,1)$. Jak je možné pozorovat na Obrázku 2.8, jedná se zcela zjevně o data s těžkým chvostem. Tento fakt rovněž potvrzuje i následující graf střední hodnoty excesů znázorněný na Obrázku 2.9. Na Obrázku 2.9 jsou na ose x vyneseny všechny potenciální prahové hodnoty vygenerovaného datového souboru, na ose y jsou příslušné hodnoty empirických odhadů střední hodnoty excesů. Tyto empirické odhady jsou v grafu vykresleny černou plnou čarou. Světlejší přerušovanou čarou jsou zobrazeny 95% intervaly spolehlivosti (za předpokladu přibližné normality výběrových průměrů). Cílem je nalézt co nejmenší prahovou hodnotu u_0 takovou, že pro všechny prahy $u > u_0$ bude černá křivka výběrových průměrů přibližně lineární. (Gilleland & Katz, 2016)



Obrázek 2.8: Jádrový odhad hustoty dat generovaných z lognormálního rozdělení $LN(0,1)$ (hypotetický příklad, vlastní zdroj).

Z Obrázku 2.9 je patrná zásadní nevýhoda grafických metod při posuzování vhodné volby prahové hodnoty, a to sice jejich subjektivita. Nelze jednoznačně rozhodnout, který práh u je nevhodnější, volba záleží na našem subjektivním posouzení. Černá křivka výběrových průměrů vykazuje přibližnou linearitu nejprve přibližně na intervalu od 0 do 3,5. Poté následuje mírný zlom a výrazné zpomalení růstu výběrových průměrů. Pro hodnoty prahu přibližně od 3,5 do 13 je pak černá křivka opět přibližně lineární (témař konstantní), ačkoli už jsou patrné výraznější výkyvy. Pro prahové hodnoty vyšší než 13 už je chování křivky výběrových průměrů velmi proměnlivé. Tuto proměnlivost pro vysoké prahy u je možné vysvětlit pomocí horní osy znázorněné v grafu. Na této pomocné ose jsou vyneseny hodnoty n_u pro příslušné prahové hodnoty u . Z definice metody špiček nad prahem vyplývá, že mezi u a n_u platí neprímá úměra. Klesající počty pozorování n_u přesahujících daný práh u jsou také důvodem



Obrázek 2.9: Graf střední hodnoty excesů (mean excess plot) včetně 95% intervalů spolehlivosti a příslušných hodnot n_u (hypotetický příklad, vlastní zdroj).

rozšířování intervalů spolehlivosti odhadů středních hodnot excesů. Čím méně pozorování přesáhne prahovou hodnotu, tím větší nejistota ohledně odhadu střední hodnoty excesů vzniká. Pro hodnoty $u > 13$ se počty n_u pohybují kolem 5 a méně pozorování. Intervaly spolehlivosti v pravé části grafu jsou tudíž velmi široké, empirickým odhadům střední hodnoty excesů již nelze příliš důvěrovat. Jako nevhodnější variantou se proto jeví volba $u \doteq 3,5$.

Jak již bylo řečeno v předchozích odstavcích, volba vhodného prahu u je subjektivní a je nutné volit kompromis mezi zkreslením a chybou odhadu. Při nízkých prahových hodnotách u zůstává dostatečný počet pozorování, které tento práh přesahují. Nízké hodnoty prahu jsou ale spojené s rizikem vychýlení odhadu, jelikož hrozí, že budou do následného modelování pomocí GPD zahrnuta i pozorování, která by neměla být identifikována jako extrémní. Vysoké prahy u sice minimalizují riziko, že budou do modelování zahrnuty i jiné hodnoty než ty extrémní, nicméně jak lze pozorovat například na Obrázku 2.9, s vysokými prahy je také spojena větší nejistota v odhadování. Tento problém by ale při volbě prahu $u = 3,5$ (tzn. $\widehat{e(3,5)} \doteq 3,111$) neměl hrozit, jelikož je počet n_u stále vcelku vysoký ($n_{3,5} = 101$, tj. přibližně 10 % pozorování). Příslušný interval spolehlivosti odhadu střední hodnoty excesů pro $u = 3,5$ tudíž ještě není příliš široký, jedná se o interval od 2,459 do 3,764.

Další grafická metoda, s jejíž pomocí lze stanovit vhodnou hodnotu prahu u , spočívá v odhadu parametrů GP modelu pro různé prahové hodnoty z předem daného intervalu. Připomeňme, že mají-li přesahy přes práh u_0 zobecněné Paretovo rozdělení, pak rovněž přesahy přes libovolný práh $u > u_0$ (ale musí být $u < x_F$) pochází ze zobecněného Paretova rozdělení, a to se

stejným parametrem tvaru ξ . Je-li $\xi \neq 0$, parametr měřítka σ_u se mění v závislosti na prahu u podle vztahu 2.11. Pro účely této grafické metody je parametr škály σ_u reparametrisován tak, aby byl stejně jako parametr ξ invariantní vůči výši prahu u . Místo původního parametru škály je tedy odhadován parametr

$$\sigma^* = \sigma_u - \xi u. \quad (2.13)$$

Pokud přesahy přes nějaký práh u_0 pochází z GP rozdělení, pak by pro všechny prahové hodnoty $u > u_0$ měly být odhady parametrů ξ a σ^* přibližně konstantní. V grafu, který má na horizontální ose vynesený prahy u a vertikální osu tvoří příslušné odhady parametru ξ nebo σ^* , je proto cílem nalézt co nejmenší práh u_0 takový, že pro všechna $u > u_0$ budou odhady parametrů σ^* a ξ GP modelu přibližně konstantní. Opět platí, že u velmi vysokých prahových hodnot (a tedy velmi nízkého počtu n_u) v pravé části grafů se intervaly spolehlivosti stávají extrémně širokými, což naznačuje zvýšenou nejistotu odhadů parametrů GPD modelu. Z tohoto důvodu ani v této grafické metodě nebude přikládána významná důležitost odhadů spojeným s vysokými prahovými hodnotami. (Coles, 2001)

Grafická metoda popsaná v předchozím odstavci je znázorněna na Obrázku 2.10. S pomocí balíku extRemes (Gilleland & Katz, 2016) byly metodou maximální věrohodnosti odhadnuty parametry σ^* a ξ zobecněného Paretova modelu pro 100 různých prahových hodnot z intervalu od 0 do 9. Pro $u > 9$ je $n_u < 20$, takže prahy přesahující hodnotu 9 nebyly z důvodu nestability brány v potaz. Odhady parametrů byly vykresleny společně s odpovídajícími 95% intervaly spolehlivosti. Horní graf zobrazuje odhady parametru σ^* , spodní graf odhady parametru ξ . Pozorujeme, že přibližná stabilita odhadů v tomto ukázkovém příkladu nastává opět zhruba od prahu $u = 3,5$ dál. Výsledky této grafické metody tudíž potvrzily závěry získané z grafu střední hodnoty excesů. Nicméně je znovu nutné připomenout subjektivitu obou grafických metod.

Maximálně věrohodný odhad parametrů GP rozdělení

Logaritmická věrohodnostní funkce pro odhad parametrů zobecněného Paretova rozdělení je v případě, že $\xi \neq 0$, ve tvaru

$$\ell(\sigma, \xi) = -k \log \sigma - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^k \log \left(1 + \frac{\xi}{\sigma} y_i\right),$$

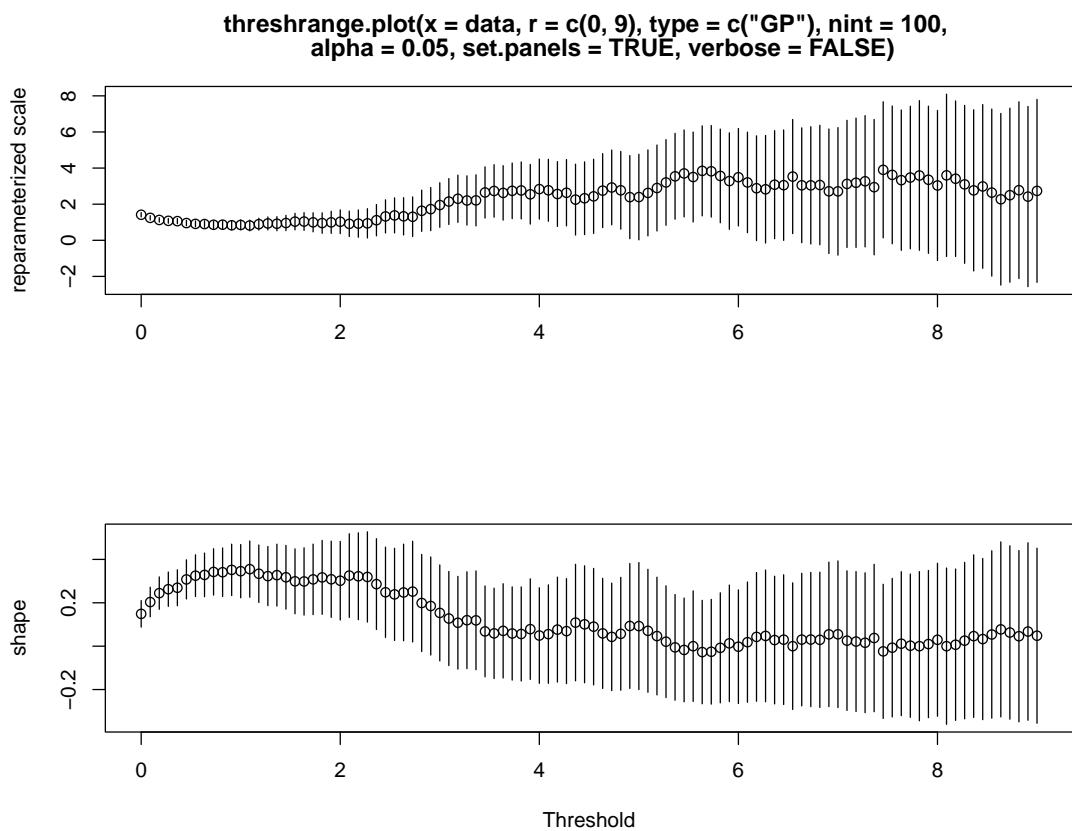
kde y_1, y_2, \dots, y_k jsou přesahy přes zvolený práh u . Aby byla hodnota maximálně věrohodné funkce konečná, musí platit, že

$$1 + \frac{\xi}{\sigma} y_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (2.14)$$

Není-li podmínka 2.14 splněna, pak je $\ell(\sigma, \xi) = -\infty$.

Logaritmická věrohodnostní funkce pro $\xi = 0$ je ve tvaru

$$\ell(\sigma, 0) = -k \log \sigma - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^k y_i$$



Obrázek 2.10: Grafy závislosti prahu u na odhadu parametrů tvaru ξ a reparametrisovaného měřítka σ^* , včetně intervalů spolehlivosti (hypotetický příklad, vlastní zdroj).

Podobně jako v Kapitole 2.2 ani v případě metody špiček nad prahem nelze maximálně věrohodné odhady získat analyticky, nýbrž pomocí numerických metod. (Coles, 2001)

S využitím vztahu 2.9 a odhadů $\hat{\xi}$ a $\hat{\sigma}$ je možné získat empirickou distribuční funkci $\hat{F}(x)$, a to jako

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{n_u}{n} \left(1 + \frac{\hat{\xi}}{\hat{\sigma}} (x - u) \right)^{-1/\hat{\xi}},$$

kde n je celkový počet pozorování v původním datovém souboru a n_u označuje počet pozorování přesahujících zvolený práh u .

Po získání empirické distribuční funkce původního datového souboru již lze snadno určit také výpočetní vztah pro odhad samotné hodnoty v riziku. Odhad $100(1 - \alpha)\%$ hodnoty v riziku získaný metodou špiček nad prahem je ve tvaru

$$\widehat{\text{VaR}}_\alpha = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left[\left(\frac{n}{n_u} \alpha \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right]. \quad (2.15)$$

Příslušný odhad očekávané ztráty je pak s pomocí vztahu 2.12 určen jako

$$\begin{aligned} \widehat{\text{ES}}_\alpha &= \widehat{\text{VaR}}_\alpha + \mathbb{E}(X - \widehat{\text{VaR}}_\alpha \mid X > \widehat{\text{VaR}}_\alpha) = \\ &= \widehat{\text{VaR}}_\alpha + \frac{\hat{\sigma} + \hat{\xi}(\widehat{\text{VaR}}_\alpha - u)}{1 - \hat{\xi}} = \\ &= \frac{\widehat{\text{VaR}}_\alpha}{1 - \hat{\xi}} + \frac{\hat{\sigma} - \hat{\xi}u}{1 - \hat{\xi}}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

viz například Gilli a Kellezi (2006). Vztahy 2.15 a 2.16 platí pro $\hat{\xi} \neq 0$. Obdobným způsobem je možné odvodit i odhad hodnoty v riziku a očekávané ztráty pro GPD s nulovým odhadem parametru ξ .

Možnou alternativou k maximálně věrohodným odhadům parametru ξ je například Hillův estimátor, vychází z něj rovněž alternativní přístup ke stanovení vhodného prahu u . V porovnání s metodou maximální věrohodnosti se jedná o výpočetně méně náročnou metodu, ovšem funguje pouze pro data s těžkým chvostem. Více o této metodě například Embrechts et al. (1997).

Vzájemné srovnání metody blokových maxim a metody špiček nad prahem

Oba přístupy, tj. metoda blokových maxim i metoda špiček nad prahem, mají své pozitivní i negativní aspekty. Jednoznačným negativem obou metod je závislost odhadů parametrů GEV modelu na šířce bloků (BM metoda), resp. závislost na volbě prahu u GPD modelu (POT metoda). Pro obě zmiňované metody je určení vhodné šířky bloku (resp. prahové hodnoty) zásadní. Zároveň neexistuje jednoznačný postup pro optimální volbu těchto hodnot, vždy je nutné volit kompromis mezi zkreslením a chybou odhadu.

Výhodou u POT metody ale může být například fakt, že bereme v potaz všechny hodnoty, které považujeme za extrémní. Na proti tomu BM metoda vezme pouze jednu nejvyšší hodnotu z každého bloku, bez ohledu na to, jak vysoké jsou ostatní hodnoty v blocích. Způsob identifikace maximálních hodnot u metody blokových maxim proto může vést k výrazné ztrátě informace z datového souboru a snížení přesnosti odhadů. Příkladem jsou Obrázky 2.1 a 2.2 v úvodu této kapitoly. Pozorujeme, že v prvních dvou blocích jsou přehlíženy vcelku vysoké hodnoty u pozorování x_2 a x_5 , naopak ve třetím bloku je maximální hodnota u pozorování x_{11} , která je ale ve srovnání s x_2 a x_5 mnohem nižší. Na druhou stranu tím metoda blokových maxim částečně eliminuje riziko závislosti dat. Právě závislost finančních časových řad je velmi častý problém, který při aplikaci teorie extrémních hodnot nelze zanedbat.

Častou praxí na eliminaci závislosti dat u metody špiček nad prahem je declusterizace. Jedná se o postup, kdy je se u hodnot přesahujících prah u zkoumá, jestli se tyto přesahy v čase neshlukují. Nejprve je definována minimální nutná vzdálenost mezi dvěma přesahy, která je obvykle značena jako $r \in \mathbb{R}$. Pokud je skutečná vzdálenost mezi dvěma přesahy menší než hodnota r , jedná se o shluk přesahů. Z každého takto identifikovaného shluku je vybrána pouze maximální hodnota. Declusterizovaný model špiček nad prahem je pak založený pouze na těchto declusterizovaných maximech. U hydrologických dat již existují obecně uznávané metody a algoritmy, na jejichž základě je možné zjistit hodnotu r . V případě aplikace na finanční časové řady ale bývá volba r subjektivní. Hovoříme-li o časových řadách s denní frekvencí dat, nejčastěji je v praxi hodnota r stanovena na jeden týden, tzn. $r = 7$. Opět se jedná o volbu kompromisu mezi rozptylem a vychýlením. Pokud je r zvoleno příliš nízké, hrozí nebezpečí zachování některých závislostí v datech. Naopak při příliš vysokém r je možné, že budou dva shluky, které jsou ve skutečnosti nezávislé, spojeny do jednoho většího shluku, čímž přijdeme o další nezávislé hodnoty k modelování. (Coles, 2001)

3. Zpětné testování

Zpětné testování (angl. backtesting) je proces ověření získaných odhadů. Zpětné testování odhadů VaR a ES spočívá v porovnání předpovídáné hodnoty se skutečnými výnosy z investice. (Halilbegovic & Vehabovic, 2016)

Existuje mnoho způsobů, jak lze tímto způsobem úspěšnost odhadu VaR a ES prověřit. V této kapitole bude představeno několik z nich.

3.1 Kupiecův test

Kupiecův test (angl. Kupiec's Proportion of Failures test, zkr. POF test) patří do skupiny testů pokrytí a je určen pro testování odhadů VaR. Nechť $\{X_t\}_{t=1}^T$ je posloupnost výnosů z investice v čase t za testované období o délce T . Kupiecův test zkoumá, zda podíl zaznamenaných ztrát přesahujících odhadnuté VaR_α odpovídá stanovené výši α . Nulová hypotéza je ve tvaru

$$H_0 : \alpha = \hat{\alpha}$$

kde $\hat{\alpha}$ je skutečně pozorovaný podíl překročení VaR_α během testovaného období. Pozorovaný podíl $\hat{\alpha}$ je určen jako

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{T} \mathbb{I}_\alpha = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{I}\{X_t \leq \text{VaR}_\alpha\},$$

kde T je počet dní v testovaném období a \mathbb{I}_α značí počet překročení VaR_α za dobu T , tudíž

$$\mathbb{I}\{X_t \leq \text{VaR}_\alpha\} = \begin{cases} 0, & X_t > \text{VaR}_\alpha \\ 1, & X_t \leq \text{VaR}_\alpha \end{cases} \quad (3.1)$$

je indikátor překročení ztráty definované hodnotou v riziku. (Campbell, 2005)

Testová statistika Kupiecova testu je ve tvaru

$$POF = -2 \ln \left(\left(\frac{1-\alpha}{1-\hat{\alpha}} \right)^{T-\mathbb{I}_\alpha} \left(\frac{\alpha}{\hat{\alpha}} \right)^{\mathbb{I}_\alpha} \right).$$

Za platnosti nulové hypotézy má testová statistika POF asymptoticky $\chi^2(1)$ rozdělení.

Překročí-li hodnota POF statistiky kritickou hodnotu $\chi^2(1)$ rozdělení, nulovou hypotézu na hladině významnosti zamítáme ve prospěch alternativní hypotézy

$$H_1 : \alpha \neq \hat{\alpha}$$

tedy ve prospěch hypotézy, že model je pro predikci VaR nevhodný. (Jorion, 2007)

Zásadní nevýhodou je malá síla testu pro příliš nízká T (např. pro období 1 rok). Campbell (2005) ale zmiňuje, že dvouleté testovací období bylo prokázáno z hlediska síly Kupiecova testu jako uspokojivé.

3.2 Costanzino–Curranův test pro ES

Testování odhadu očekávané ztráty je ve srovnání s VaR obtížnější disciplína. S rostoucím významem ES v řízení rizik ale vzrostla i potřeba nějaké způsoby zpětného testování ES vyvinout. Příkladem je Costanzino–Curranův test, který je obdobou testu pokrytí pro VaR.

Jak popisují Clift et al. (2016), Costanzino–Curranův test vychází z definice ES v podobě

$$\text{ES}_\alpha = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}_p dp,$$

což je možné approximovat například jako

$$\text{ES}_\alpha \approx \frac{1}{4} \left(\text{VaR}_{\alpha/4} + \text{VaR}_{\alpha/2} + \text{VaR}_{3\alpha/4} + \text{VaR}_\alpha \right). \quad (3.2)$$

V případě testů pokrytí u VaR hrál klíčovou roli indikátor přesahů, tedy diskrétní funkce nabývající hodnoty $\{0,1\}$, popsaná v 3.1. Costanzino–Curranův test ale bere v potaz i velikost překročení hodnoty v riziku. (Costanzino & Curran, 2015)

Costanzino–Curranův test je založen na spojité funkci, která je limitním případem 3.2. Tato funkce nabývá hodnoty z intervalu $[0,1]$ a je ve tvaru

$$\begin{aligned} H_{\text{ES}}^{(t)}(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \mathbb{I}\{X_t \leq \text{VaR}_p\} dp = \\ &= \left(1 - \frac{F_X(X_t)}{\alpha}\right) \mathbb{I}\{X_t \leq \text{VaR}_\alpha\}, \end{aligned}$$

kde $\{X_t\}_{t=1}^T$ je posloupnost výnosů z investice v čase t za testované období o délce T , a $F_X(x)$ je distribuční funkce těchto výnosů. V praxi je častější testovat transformovanou veličinu $Y = -X$, tedy ztráty místo výnosů. Pak je nutné nahradit distribuční funkci $F_X(x)$ výrazem

$$1 - G_Y(y),$$

kde $G_Y(y)$ je distribuční funkce rozdělení ztrát.

Míra selhání ES za testovaný časový úsek o délce T je definována jako

$$\begin{aligned} H_{\text{ES}}^{(T)}(\alpha) &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \mathbb{I}\{X_t \leq \text{VaR}_p\} dp. = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{1}{\alpha} \mathbb{I}\{X_t \leq \text{VaR}_\alpha\} (\alpha - F_X(X_t)) = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{1}{\alpha} \mathbb{I}\{Y_t \geq \text{VaR}_\alpha^Y\} (\alpha + G_Y(Y_t) - 1) \end{aligned}$$

Na základě takto definované míry selhání lze sestavit nulovou hypotézu

$$\begin{aligned} H_0 : \quad &\left\{H_{\text{ES}}^{(t)}(\alpha)\right\}_{t=1}^T \quad \text{jsou IID} \\ &\& \quad \text{VaR}_p = \widehat{\text{VaR}}_p \quad \forall p \in (0, \alpha]. \end{aligned}$$

Alternativní hypotéza H_1 říká, že došlo k porušení IID u $\left\{H_{\text{ES}}^{(t)}(\alpha)\right\}_{t=1}^T$, nebo k porušení rovnosti $\text{VaR}_p = \widehat{\text{VaR}}_p$ pro nějaké $p \in (0, \alpha]$, nebo k obojímu. Zamítnutím H_0 nejsme schopni rozhodnout, z jakého z těchto tří možných důvodů k zamítnutí došlo. (Clift et al., 2016)

Costanzino a Curran (2015) dokazují, že za platnosti nulové hypotézy H_0 a pro libovolnou $\alpha \in (0; 1)$ má míra selhání $H_{\text{ES}}^{(T)}(\alpha)$ asymptoticky normální rozdělení, a je možné aplikovat Z-test. Pro potřeby Z-testu byly ještě odvozeny výpočetní vztahy pro průměr $\mu_{\text{ES}}(\alpha)$ a rozptyl $\sigma_{\text{ES}}^2(\alpha)$ míry selhání $H_{\text{ES}}^{(T)}(\alpha)$. Platí, že

$$\mu_{\text{ES}}(\alpha) = \frac{\alpha}{2}$$

a

$$\sigma_{\text{ES}}^2(\alpha) = \frac{\alpha}{T} \left(\frac{4 - 3\alpha}{12} \right).$$

Testová statistika $Z_{\text{ES}}^T(\alpha)$ je pak ve tvaru

$$\begin{aligned} Z_{\text{ES}}^T(\alpha) &= \frac{H_{\text{ES}}^{(T)}(\alpha) - \mu_{\text{ES}}(\alpha)}{\sigma_{\text{ES}}(\alpha)} = \\ &= \sqrt{3T} \left(\frac{2H_{\text{ES}}^{(T)}(\alpha) - \alpha}{\sqrt{\alpha(4 - 3\alpha)}} \right). \end{aligned}$$

Hodnota testové statistiky $Z_{\text{ES}}^T(\alpha)$ roste s růstem počtu a velikostí přesahů přes VaR. Nulovou hypotézu zamítáme, je-li $\Phi(Z_{\text{ES}}^T(\alpha)) \geq (1 - \eta)$, kde $\Phi(\cdot)$ je distribuční funkce pro $N(0, 1)$ a η je hladina významnosti tohoto Z-testu.¹ (Clift et al., 2016)

¹Značení hladiny významnosti testu řeckým písmenem η zde nahradilo obvyklé značení α kvůli využití písmene α jakožto označení kvantilu v kontextu VaR_α

3.3 Fissler–Ziegel ztrátová funkce

Jedním z pojmu, které jsou s backtestingem měr rizika úzce spjaty, je také elicitabilita míry rizika. Elicitabilita je jedna z možných vlastností, kterou může míra rizika mít. Riziková míra ρ je elicitabilní, když existuje striktně konzistentní skórová (resp. ztrátová) funkce $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že

$$\rho^*(X) = \arg \min_{\rho \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[S(\rho, X)],$$

kde X je náhodná veličina s konečným průměrem a $\rho^*(X)$ je optimální predikovaná hodnota této míry rizika. (Fissler et al., 2015)

Elicitabilita míry rizika tedy říká, že předpověď dané míry rizika je možné získat optimalizací očekávané hodnoty skórové funkce. He et al. (2022) dále zmiňují, že elicitabilita je z hlediska možnosti srovnání více modelů mezi sebou velmi užitečnou vlastností odhadované míry rizika. Různé modely je pak totiž možné mezi sebou porovnat právě pomocí této skórové funkce.

Hodnota v riziku je elicitabilní mírou rizika, ale bylo dokázáno, že očekávaná ztráta vlastnost elicibility nesplňuje. (Gneiting, 2011)

Aby bylo možné modely z pohledu úspěšnosti předpovědí ES srovnávat, bylo nutné nalézt skórovou funkci, která by byla funkcí hodnoty v riziku i očekávané ztráty zároveň. S takovým návrhem skórové funkce přišli ve své publikaci Fissler a Ziegel (2016), když definovali třídu skórových funkcí $S(x, y)$. Dále se zaměřili na aplikování $S(x, y)$ na backtesting odhadů VaR a ES. Podle Fissler et al. (2015) je

$$(\text{VaR}_\alpha(X), \text{ES}_\alpha(X)) = \arg \min_{(v, e) \in \mathbb{R}^2} \mathbb{E}[S_{V, E}(v, e, X)],$$

kde $S_{V, E}(v, e, x)$ je skórovací funkce, která porovnává skutečné ztráty x v testovacím období s těmi odhadnutými, které jsou ve skórové funkci zastoupeny odhady $v = \widehat{\text{VaR}}, e = \widehat{\text{ES}}$. Funkce $S_{V, E}(v, e, x)$ je ve tvaru

$$\begin{aligned} S_{V, E}(v, e, x) = & (\mathbb{I}\{x \leq v\} - \alpha)(G_1(v) - G_1(x)) + \\ & + \frac{1}{\alpha}G_2(e)\mathbb{I}\{x \leq v\}(v - x) + G_2(e)(e - v) - \mathcal{G}_2(e), \end{aligned}$$

kde $\mathcal{G}'_2(e) = G_2'(e)$ a G_1, G_2 jsou volitelné funkce, které musí splňovat několik podmínek, které jsou podrobněji rozepsány například v Fissler et al. (2015). Jako vhodnou volbu funkcí G_1 a G_2 uvádí Patton et al. (2019) funkce

$$\begin{aligned} G_1(x) &= 0, \\ G_2(x) &= -\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Výsledná skórová funkce, která se obvykle nazývá Fissler-Ziegel (FZ) ztrátová funkce $L_{FZ}(X, v, e, \alpha)$, je pak ve tvaru

$$L_{FZ}(X, v, e; \alpha) = -\frac{1}{\alpha e} \mathbb{I}\{X \leq v\}(v - X) + \frac{v}{e} + \ln(-e) - 1. \quad (3.3)$$

Nechť $\{X_t\}_{t=1}^T$ je posloupnost výnosů z investice v čase t za testované období o délce T . Chceme-li použít FZ ztrátovou funkci k porovnání více metod odhadů VaR a ES, určíme na základě funkce 3.3 průměrnou ztrátu \bar{L}_{FZ} za dobu T jako

$$\begin{aligned} \bar{L}_{FZ} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T L_{FZ}(X_t, v, e; \alpha) = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T -\frac{1}{\alpha e} \mathbb{I}\{X_t \leq v\}(v - X_t) + \frac{v}{e} + \ln(-e) - 1. \end{aligned}$$

Ztrátová funkce penalizuje chybné odhady, a proto je cílem nalézt model s co nejnižší hodnotou LZ ztrátové funkce. (Patton et al., 2019)

Výhodnou zpětného testování pomocí LZ ztrátové funkce je fakt, že testování nevyžaduje znalost distribuční funkce výnosů. Jediné, co je k testování pomocí FZ ztrátové funkce potřeba, jsou odhady $\widehat{\text{VaR}}_\alpha$, $\widehat{\text{ES}}_\alpha$ a skutečné výnosy z investice během testovaného období $\{X_t\}_{t=1}^T$. Na rozdíl od předchozích testů pokrytí se nejedná o test, jehož cílem je vyhodnotit (ne)úspěšnost modelů jako takových. Rovněž z funkce \bar{L}_{FZ} nevyčteme, jestli model nenadhodnocuje nebo naopak nepodhodnocuje skutečné riziko. Tento typ testu slouží pouze ke srovnání několika modelů navzájem a k výběru nejlepšího modelu z pohledu ztrátové funkce. (Acerbi & Szekely, 2017)

Výběr testu u zpětného testování závisí na účelu, s jakým analýzu provádíme. Pokud bylo naším cílem vyhodnotit, které modely například významně podhodnocují riziko, byly by vhodnější například již zmíněné testy pokrytí. Cílem této diplomové práce je ale srovnání různých přístupů k odhadu VaR a ES, a proto bude zpětné testování v analytické části této práce zaměřeno především na FZ ztrátovou funkci \bar{L}_{FZ} .

4. Analýza dat

4.1 Výběr dat

V této kapitole se zaměříme na analýzu dvou portfolií, která reprezentují různé investiční strategie: dynamické portfolio a konzervativní portfolio. Dynamické portfolio klade důraz na růstový potenciál investic s vyšší mírou rizika a vyšší očekávanou výnosností. Naopak konzervativní portfolio preferuje stabilitu, nižší riziko a předvídatelnější vývoj výnosů, čehož je dosaženo volbou aktiv s nižší volatilitou a větším zaměřením na ochranu kapitálu. Rozdíly mezi těmito dvěma přístupy spočívají v rizikovosti, kde dynamické portfolio obsahuje aktiva s vyšší volatilitou, zatímco konzervativní portfolio je složeno z aktiv, která přispívají k nižšímu rizikovému profilu. Dále se liší očekávanou výnosností – dynamické portfolio nabízí vyšší potenciální výnosy, zatímco konzervativní portfolio sází na stabilitu a ochranu hodnoty. Obě portfolia jsou diverzifikována napříč regiony a sektory. Dynamické portfolio je orientováno na růst kapitálu, zatímco konzervativní sleduje především stabilitu.

4.1.1 Burzovně obchodované fondy

Zásadní roli v současných investičních portfoliích hrají burzovně obchodované fondy (ETF). ETF (Exchange Traded Fund) je typ investičního fondu, který se obchoduje na burze stejně jako akcie. Tento fond může obsahovat širokou škálu podkladových aktiv, jako jsou akcie, dluhopisy, komodity nebo jiné cenné papíry, což umožňuje investorům snadno diverzifikovat své portfolio. ETF jsou navrženy tak, aby co nejpřesněji sledovaly výkonnost určitého indexu, sektoru nebo třídy aktiv, což je zajištěno pasivním investováním. To znamená, že ETF ne-kupují jednotlivé akcie či jiná aktiva na základě aktivního výběru manažera fondu, ale podle předem definovaných pravidel, která jsou založena na výkonnosti určitého indexu. Důsledkem je transparentnost těchto fondů. Cena ETF se mění v reálném čase během obchodování na burze, podobně jako ceny akcií, což poskytuje investorům flexibilitu a likviditu. Hlavní výhodou investování do ETF je přístup k širokému spektru aktiv pomocí jediné transakce, navíc za nízké náklady. Díky těmto výhodám jsou ETF populární jak mezi drobnými, tak institucionálními investory.

Díky diverzifikované povaze ETF umožňují snadnou expozici vůči celému trhu nebo specifickému sektoru, což velmi oceňují právě drobní investoři s menším kapitálem. Drobný investor často nemá dostatek finančních prostředků na nákup většího množství aktiv za účelem diverzifikace svého portfolia. Investor nákupem jedné jednotky ETF teoreticky získá poměrnou část všech podkladových aktiv obsažených v indexu, který daný ETF sleduje. ETF jsou tak vhodné pro různé investiční strategie a jejich oblíbenost roste napříč tržními segmenty. Právě burzovně obchodované fondy proto budou tvořit většinu analyzovaných portfolií v této diplomové práci. Kromě ETF budou v dynamickém portfoliu zahrnuty ještě dvě kryptoměny. (Dvořák, 2022)

4.1.2 Složení konzervativního portfolia

Konzervativní portfolio je sestaveno z aktiv s nižší volatilitou a zaměřuje se na stabilitu. Jeho složení dle váhy v sestupném pořadí:

- **iShares S & P 500 EUR Hedged UCITS ETF (Acc) (IUSE.L)** (20 %): Sleduje index S & P 500 s měnovým zajištěním, což eliminuje vliv kurzových změn vůči euru. Obchodováno na londýnské burze cenných papírů v eurech.
- **iShares VII PLC – iShares € Govt Bond 7-10yr ETF EUR Acc (SXRQ.DE)** (20 %): Investuje do vládních dluhopisů eurozóny se střední dobou splatnosti, což zajišťuje portfoliu stabilní a konzervativní výnos. Obchodováno na frankfurtské burze cenných papírů Xetra v eurech.
- **iShares \$ TIPS UCITS ETF USD (Acc) (ITPS.SW)** (20 %): Poskytuje expozici na americké státní dluhopisy chráněné proti inflaci, což opět zajišťuje portfoliu stabilní a konzervativní výnos. Aktivum je obchodováno na švýcarské burze cenných papírů v amerických dolarech.
- **Xtrackers II EUR Corporate Bond UCITS ETF 1C Acc (D5BG.DE)** (10 %): Zaměřuje se na korporátní dluhopisy denominované v euru, obchodováno na frankfurtské burze cenných papírů Xetra v eurech.
- **Vanguard FTSE All-World ex-US Index Fund ETF Shares (VEU)** (10 %): Zaměřeno na akcie společností se sídlem mimo USA, nabízí tedy diverzifikaci mimo USA s expozicí na světové trhy. Je obchodován na burzovním trhu NYSE Arca v amerických dolarech.
- **Xtrackers Physical Gold ETC (EUR) Acc (XAD5.MI)** (10 %): Sleduje cenu zlata, které slouží jako ochrana proti inflaci a ekonomickým nejistotám. Je obchodován na burze cenných papírů v Miláně v eurech.
- **Xtrackers FTSE Developed Europe ex UK Real Estate UCITS ETF 1C (Acc) (XREA.DE)** (10 %): Investuje do nemovitostního sektoru v rozvinutých zemích Evropy (kromě Velké Británie). Přestože realitní trh bývá obvykle v krátkodobém časovém horizontu volatilní, z hlediska dlouhodobého výnosu může ale takové aktivum zajistit lepší výnosy díky diverzifikaci portfolia. Obchodováno na frankfurtské burze cenných papírů Xetra v eurech.

4.1.3 Složení dynamického portfolia

Dynamické portfolio zahrnuje aktiva s vyšším růstovým potenciálem a vyšší mírou rizika. Do dynamického portfolia bylo zvoleno celkem 5 různých ETF a 2 kryptoměny, konkrétně:

- **iShares MSCI Europe SRI UCITS ETF (Acc) (IUSK.DE)** (20 %): Zaměřuje se na akcie evropských společností splňující kritéria sociálně odpovědného investování (SRI), obchodován je v eurech na frankfurtské burze cenných papírů Xetra.
- **iShares VII PLC – iShares MSCI USA Small Cap ESG Enhanced UCITS ETF USD (Acc) (CUSS.L)** (20 %): Investuje do malých amerických společností s dů-

razem na environmentální, sociální a správní (ESG) faktory, obchodováno na londýnské burze cenných papírů v amerických dolarech.

- **iShares Core MSCI Japan IMI UCITS ETF USD (Acc) (IJPA.AS)** (20 %): Zaměřeno na akcie klíčových společností na japonském trhu, který je známý svým technologickým sektorem a stabilní ekonomikou. Jedná se o akcie velkých, středních i malých společností, je obchodováno na amsterodamské burze cenných papírů v eurech.
- **Bitcoin (BTC–EUR** (15 %): Jedná se o dominantní kryptoměnu, nabízí vysoký potenciál výnosů, ale také značnou volatilitu. Vývoj Bitcoinu uveden v eurech.
- **iShares Core MSCI EM IMI UCITS ETF USD (Acc) (EIMI.L)** (10 %): Zaměřuje se akcie klíčových společností různých velikostí, které fungují na rozvíjejících se trzích s vyšší volatilitou, ale také s růstovým potenciálem.
- **iShares VII PLC – iShares Core S & P 500 UCITS ETF (Acc) (CSPX.L)** (10 %): Sleduje výkonnost amerického indexu S & P 500, což zajišťuje stabilní růstové jádro portfolia. Obchodováno na londýnské burze cenných papírů v amerických dolarech.
- **Peercoin (PPC–EUR)** (5 %): Reprezentuje specifická aktiva z kryptomenového trhu, funguje na jiném principu než například Bitcoin. Vývoj Peercoinu uveden v eurech.

Tento výběr dat a složení portfolií reflektují snahu o zachycení dvou odlišných investičních přístupů a jejich dopadů na výkonnost v průběhu času. Zároveň byla sestavena tak, aby bylo v rámci dané investiční strategie co nejlépe diverzifikováno riziko. Jednotlivá aktiva proto byla do portfolií zvolena nejen na základě dělení na konzervativní vs. dynamická investiční strategie, ale také byla volba konkrétních aktiv založena na obecných radách, které se týkají minimalizace rizika při sestavování investičního portfolia. Základním pravidlem pro minimalizaci rizika je jeho diverzifikace. Riziko je možné diverzifikovat více způsoby. Příkladem diverzifikace je volba aktiv různého typu (akcie velkých společností, akcie malých společností, státní dluhopisy, korporátní dluhopisy, komodity, kryptoměny atd.) nebo orientace na různé sektory trhu (technologie, farmacie, gastronomie atd.). Další možností je například diverzifikace geografická, a proto byla do obou portfolií zahrnuta aktiva s různou geografickou působností (Evropa, Asie, USA, rozvojové země atd.). Zároveň byla zvolena aktiva s minimálně desetiletou historií na trhu cenných papírů. Navíc samotný fakt, že se portfolia z naprosté většiny skládají z ETF, je příslibem dobré diverzifikace, která plyne ze samotné podstaty ETF, viz 4.1.1. Do portfolií tedy byla vybrána aktiva různých typů a s různou geografickou působností za účelem dosažení co největší diverzifikace rizika v rámci zvolené investiční strategie. (Dvořák, 2022)

Většina ETF je akumulačního typu, což znamená, že dividendy nejsou vypláceny, nýbrž reinvestovány zpět do ETF.¹ Na obě vybraná portfolia budou postupně aplikovány metody pro odhad VaR. Budou tudíž sledovány nejen rozdíly mezi jednotlivými metodami odhadu VaR, ale rovněž i úspěšnost odhadu v závislosti na typu portfolia.

¹Jedinou výjimkou je VEU, u kterého nebylo nalezeno vhodné alternativní akumulační ETF stejného druhu s dostatečně dlouhou historií. V případě VEU se jedná o distibuční ETF s výplatou dividend. Pro účely této diplomové práce budeme předpokládat, že získané dividendy jsou ihned reinvestovány a na náklady spojené s výplatou dividend nebude brán zřetel. (justETF, 2025)

Pro analýzu portfolií byla použita data z období od 1. 1. 2015 do 31. 12. 2024. Data byla získána ze stránek Yahoo Finance (Yahoo, 2025) pomocí balíku `quantmod`. (Ryan & Ulrich, 2024a)

Z původního datasetu byla vybrána časová řada obsahující pouze adjustované ceny aktiv, které odrázejí skutečnou hodnotu včetně úprav o dividendy a štěpení akcií. Jak je uvedeno přímo na stránkách Yahoo (2025), zavírací ceny aktiv jsou adjustovány pomocí multiplikátorů sestavených na základě standardů Centra pro výzkum cen cenných papírů (Center for Research in Security Prices, zkr. CRSP).

4.2 Příprava dat

Pro odhad hodnoty v riziku a očekávané ztráty portfolia je nezbytné nejprve připravit a prozkoumat data, ze kterých budou tyto míry rizika odhadovány. K dispozici jsou historické měnové kurzy a cenové pohyby jednotlivých aktiv v portfoliu. S pomocí těchto historických dat budou určeny denní výnosnosti jednotlivých aktiv. Denní výnosnosti aktiv poté poslouží k samotnému odhadu vybraných ukazatelů rizika (VaR, ES). Použitá aktiva jsou denominována v různých měnách, a to v EUR a USD. Tento fakt bude nutné při výpočtu denních výnosností rovněž zohlednit. Jakožto domácí měna bylo zvoleno euro. V Kapitole 4.2.1 je stručně shrnut postup pro určení výnosnosti aktiv v portfoliu.

4.2.1 Výpočet (denní) výnosnosti pro jednotlivá aktiva

Pro každé aktivum je nutné spočítat (denní) výnosnost, která bude vycházet z historických cen (případně také kurzu, pokud se aktivum nachází v jiné měně než domácí měna EUR). Denní výnosnost se obvykle vypočítá podle následujícího vzorce:

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}, \quad (4.1)$$

kde r_t je výnos v čase t , P_t je cena aktiva v čase t a P_{t-1} je cena aktiva v čase $t-1$. (Tsay, 2005)

Pokud je aktivum denominováno v jiné měně než EUR (např. USD), je nutné také vzít v úvahu měnový kurz mezi EUR a danou měnou. Pro aktiva v USD je tedy třeba přepočítat cenu do EUR pomocí aktuálního měnového kurzu vztahem

$$P_t^{EUR} = P_t^{USD} \cdot S_t,$$

kde S_t je měnový kurz mezi EUR a USD v čase t . Odhad míry rizika získaný z takto upravených historických dat bude tudíž zahrnovat nejen cenové, ale i měnové riziko. (Baeriswyl

et al., 2023)

Logaritmické výnosy, často označované jako geometrické výnosy, jsou definovány jako přirozený logaritmus poměru cen aktiva mezi dvěma časovými body, formálně lze zapsat jako

$$r_t^L = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right),$$

kde r_t^L je logaritmický výnos v čase t , P_t je cena aktiva v čase t a P_{t-1} je cena aktiva v čase $t - 1$. Vztah mezi logaritmickými výnosy a aritmetickými výnosy popsanými vztahem 4.1 lze zapsat jako

$$r_t^L = \ln(1 + r_t),$$

kde r_t je aritmetický výnos v čase t . (Tsay, 2005)

Logaritmické výnosy umožňují zachytit relativní změny cen v logaritmickém měřítku, což má v rámci analýzy rizika investic několik významných výhod oproti běžně používaným aritmetickým výnosům.

Finanční časová řada tvořená logaritmickými výnosy má oproti řadě z aritmetických výnosů blíže ke stacionaritě. Zajištění stacionarity časové řady je další nezbytnou podmínkou při aplikaci teorie extrémních hodnot. Jak potvrzuje například Coles (2001), modelování logaritmických denních výnosů místo aritmetických se tak stalo v oblasti finančních časových řad běžnou praxí. Zároveň bývá v praxi zvykem tyto logaritmické výnosy ještě přeskálovat do finální podoby

$$\tilde{r}_t = 100 \cdot r_t^L.$$

Logaritmické výnosy jsou navíc časově aditivní, což znamená, že výnos za více časových období lze jednoduše získat součtem jednotlivých výnosů pro jednotlivé časové periody. Tato vlastnost zjednodušuje analýzu kumulativních výnosů a umožňuje lepší práci s modely založenými na časových řadách. (Hudson & Gregoriou, 2015)

Jelikož cílem této diplomové práce je modelování rizika extrémních ztrát (a nikoliv modelování extrémních výnosů), je nezbytná ještě transformace

$$\tilde{r}_t = -r_t^L. \quad (4.2)$$

U takto transformované náhodné veličiny lze modelovat extrémní ztráty pomocí teorie extrémních hodnot tak, jak byla popsána v Kapitole 2.

Tato diplomová práce se zabývá odhadem rizikových měr nikoliv u jednotlivých aktiv, ale u celých portfolií. Všechny metody proto byly aplikovány na časovou řadu výnosů celého portfolia. Jak je určeno v Kapitole 4.1, každé portfolio je složené ze sedmi aktiv. Nechť jsou

denní výnosy jednotlivých aktiv v portfoliu v čase t označeny jako r_{it} pro $i = 1, 2, \dots, 7$. Výnos portfolia P v čase t je definován jako

$$r_t^P = \sum_{i=1}^7 w_i r_{it}, \quad (4.3)$$

kde w_i jsou váhy jednotlivých aktiv v portfoliu, které jsou uvedeny v Kapitole 4.1 v závorkách vždy za názvem a zkratkou aktiva (psáno v procentech, ale použity budou odpovídající hodnoty vydělené 100). Váhy musely být stanoveny tak, aby jejich součet v portfoliu byl roven jedné, tzn.

$$\sum_{i=1}^7 w_i = 1.$$

V případě logaritmických výnosů ve vztahu 4.3 neplatí přímo rovnost, ale je splněna alespoň přibližně, tzn.

$$r_t^P \approx \sum_{i=1}^7 w_i r_{it}^L. \quad (4.4)$$

Tato approximace pro studium logaritmických výnosů v portfoliu se stala běžnou praxí. (Tsay, 2005)

Všechna data sice pocházejí z jednoho zdroje, nicméně jednotlivá aktiva jsou obchodována na různých burzách se sídlem v různých zemích. S tím se úzce váže problém státních svátků. Jelikož každá země má různé státní svátky, liší se také dny, kdy se na kterých burzách obchoduje. Aby bylo možné určit pro každý zkoumaný den výnos portfolia, bylo nutné tyto chybějící hodnoty nějakým způsobem ošetřit. Byla zvolena metoda Last Observation Carried Forward (LOCF), která by se dala přeložit jako „poslední pozorování přeneseno vpřed“. Metoda spočívá v imputaci chybějících hodnot v časových řadách, kdy se pro chybějící hodnotu použije poslední známá hodnota. Přestože má tato metoda svá úskalí, jedná se o velmi rozšířený postup.² (Cao et al., 2016)

Z takto zpracovaných časových řad byly v souladu s postupy popsanými v této kapitole následně vypočítány logaritmické denní výnosy (včetně případného ošetření měnového kurzu a vynásobení stem). Výsledné časové řady denních logaritmických výnosů byly u obou portfolií approximovány vztahem 4.4. Pro účely teorie extrémních hodnot byly navíc ještě transformovány dle 4.2. Nakonec byla data kvůli zpětnému testování ještě rozdělena na trénovací a testovací sadu dat, a to přibližně v poměru 70:30. Hodnoty z let 2015 až 2021 byly určeny jako testovací a byly na nich provedeny všechny odhady rizikových měr. Správnost těchto odhadů byla následně zkoumána pomocí zpětného testování na údajích z let 2022 až 2024.

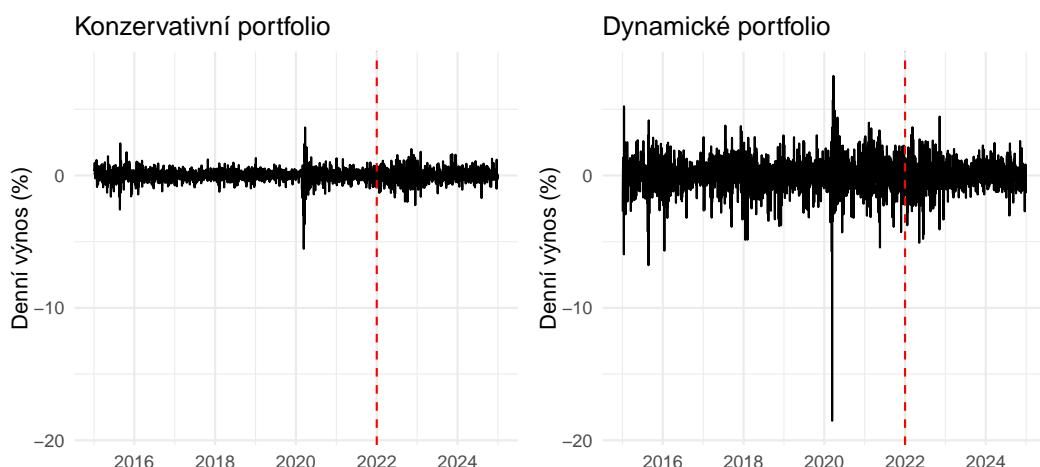
²LOCF metoda byla aplikována na celý rozsah časových řad, tedy včetně víkendů, a to pomocí balíku `xts`. (Ryan & Ulrich, 2024b)

4.2.2 Explorační analýza dat

V rámci praktické části diplomové práce byly opět všechny grafy vytvořeny vlastním kódem v jazyce R (R Core Team, 2023) a k jejich zobrazení bylo použito vývojové prostředí RStudio (RStudio Team, 2023). U grafů byly navíc často použity balíky `ggplot2` a `gridExtra`, viz Wickham (2016) a Auguie (2017). Tabulky byly vygenerovány pomocí balíku `xtable`, viz Dahl et al. (2019). Veškerý obsah obrázků a tabulek pochází z vlastního zdroje, není-li v popisku uvedeno jinak.

Pro práci s časovými řadami byly kromě zmínovaného balíku `quantmod` použity také balíky `xts`, `tseries` a `dplyr`, viz Ryan a Ulrich (2024b), Trapletti a Hornik (2024) a Wickham et al. (2023). Pro aplikování teorie extrémních hodnot byl použit především balík `extRemes`, viz Gilleland a Katz (2016). Pro vykreslení L-Moments grafu byl použit balík `POT`, viz Ribatet a Dutang (2024). V rámci zpětného testování byl pro výpočet Fissler-Ziegel ztrátové funkce použit balík `GAS`, viz Ardia et al. (2019). Všechny použité kódy jsou přiloženy k diplomové práci.

Na Obrázku 4.1 je znázorněn graf vývoje logaritmických denních výnosů obou portfolií v čase. V obou případech pozorujeme vysokou volatilitu na počátku roku 2020. Vysoká volatilita byla v tomto období způsobena pravděpodobně nejistotou spojenou s příchodem pandemické krize. Z grafů zároveň vyplývá, že volatilita dynamického portfolia je výrazně větší než volatilita portfolia konzervativního. Vysoká volatilita dynamického portfolia je ale v souladu s očekáváním, viz Kapitola 4.1.3. V Tabulce 4.1 jsou shrnutý základní popisné statistiky trénovacích dat obou portfolií.³



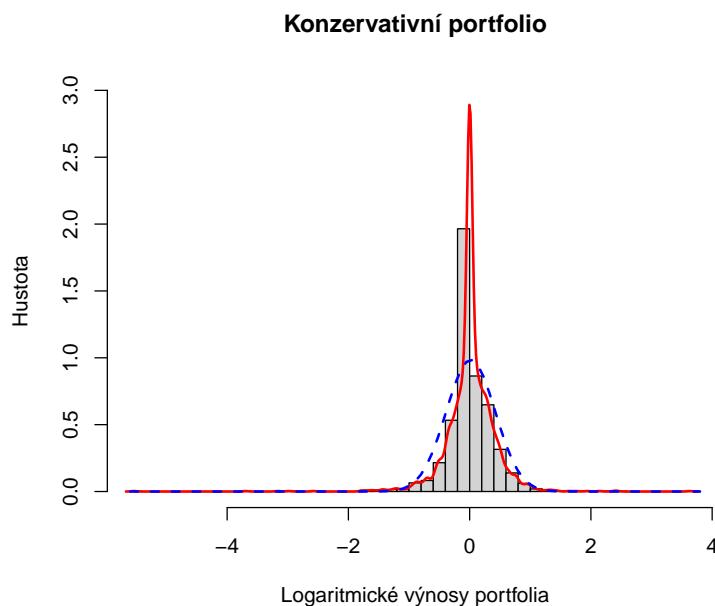
Obrázek 4.1: Grafy logaritmických denních výnosů konzervativního (vlevo) a dynamického (vpravo) portfolia v letech 2015 až 2024. Červenou přerušovanou čarou jsou oddělena trénovací a testovací data.

³Grafy a tabulky v Kapitole 4.2.2 znázorňují výnosy portfolií, grafy a tabulky v dalších kapitolách ale zobrazují ztráty (tzn. po transformaci původních dat), pokud není řečeno jinak.

Tabulka 4.1: Základní popisné statistiky pro výnosy konzervativního a dynamického portfolia z let 2015–2021.

| | Konzervativní portfolio | Dynamické portfolio |
|---------------------|-------------------------|---------------------|
| Počet pozorování | 2552 | 2555 |
| Minimální hodnota | -5.54002 | -18.52301 |
| 1. kvartil | -0.12117 | -0.44430 |
| Medián | 0.00000 | 0.08641 |
| Průměr | 0.01740 | 0.05225 |
| 3. kvartil | 0.18772 | 0.60280 |
| Maximální hodnota | 3.62954 | 7.52176 |
| Směrodatná odchylka | 0.40519 | 1.15910 |

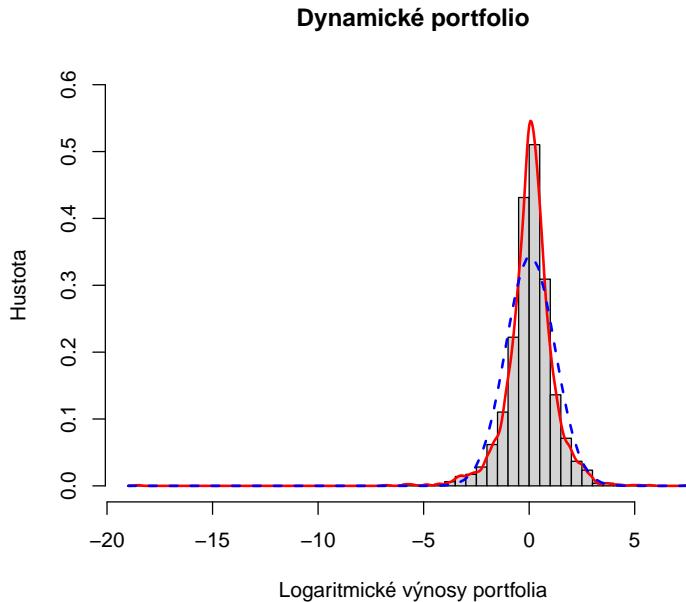
Vzhledem k tomu, že varianční–kovarianční metoda předpokládá normalitu výnosů, byla trénovací data následně zkoumána právě z pohledu jejich normality. Už z grafů 4.2 a 4.3 je patrné porušení tohoto předpokladu. Červená křivka jádrového odhadu hustoty je výrazně špičatější (především v případě konzervativního portfolia), hodnoty jsou oproti normálnímu rozdělení (modrá přerušovaná křivka) více koncentrovány kolem nuly. Zároveň jsou z grafů patrné i těžší chvosty oproti normálnímu rozdělení, což může indikovat vhodnost aplikování teorie extrémních hodnot.



Obrázek 4.2: Histogram logaritmických výnosů konzervativního portfolia z let 2015–2021, včetně jádrového odhadu hustoty (červeně) a hustoty příslušného normálnímu rozdělení (modře přerušované).

Další pohled na ověření normality dat nabízí Q-Q Ploty na Obrázku 4.4. Z Q-Q Plotů je opět zřejmé porušení normality u trénovacích dat. Body neleží na přímce $y = x$, naopak jejich

esovité zakřivení podporuje závěry získané z histogramů ohledně špičatosti dat.



Obrázek 4.3: Histogram logaritmických výnosů dynamického portfolia z let 2015–2021, včetně jádrového odhadu hustoty (červeně) a hustoty příslušného normálního rozdělení (modře přešroubované).

Grafy popsané v této kapitole odpovídají obvyklé povaze finančních dat výnosů. Již v této fázi práce se použití varianční–kovarianční metody (v takové podobě, která je popsána v Kapitole 1.2) jeví jako velmi nevhodné. Tato metoda je ovšem v praxi stále využívanou metodou na odhad rizikových měr investic. Dílčím cílem této diplomové práce bude proto mimo jiné ukázat, jak špatné výsledky (v porovnání s jinými přístupy) tato metoda přináší.

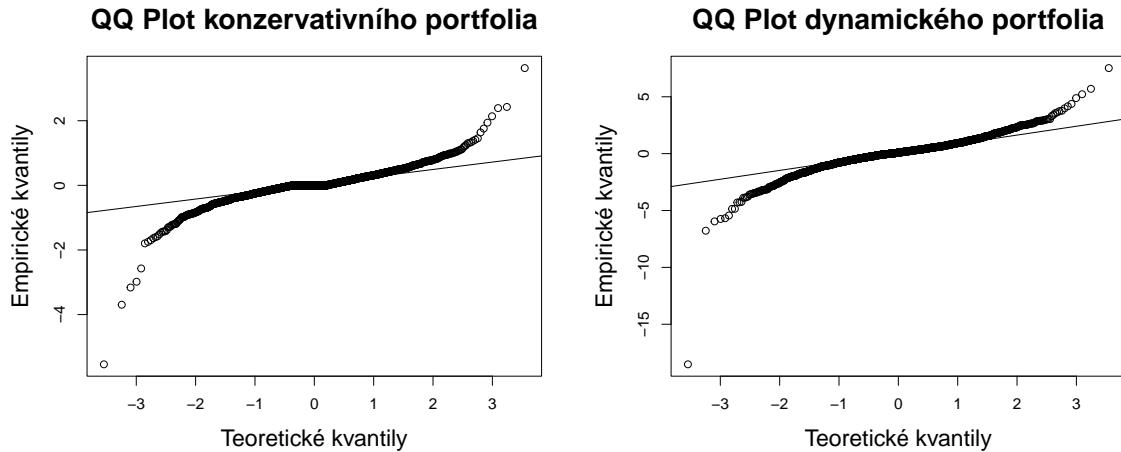
4.3 Modelování dat

Ztráty konzervativního i dynamického portfolia budou postupně modelovány na trénovací sadě dat pomocí zobecněného rozdělení extrémních hodnot a zobecněného Paretova rozdělení.

4.3.1 GEV rozdělení

Nejprve byla na trénovací data obou portfolií aplikována metoda blokových maxim. Pro každé portfolio byly zvoleny tři šířky bloku – 1 kvartál, 1 měsíc a 1 týden.

Z časové řady ztrát konzervativního portfolia byla vybrána čtvrtletní maxima. Trénovací data zahrnují ztráty z let 2015 až 2021. Jedná se o 7 let, a tedy 28 maxim, na jejichž základě bude



Obrázek 4.4: Q-Q Plot konzervativního (vlevo) a dynamického (vpravo) portfolia z let 2015–2021.

GEV model sestaven. Odhad parametrů všech modelů v této diplomové práci byly získány metodou maximální věrohodnosti, pokud není řečeno jinak.

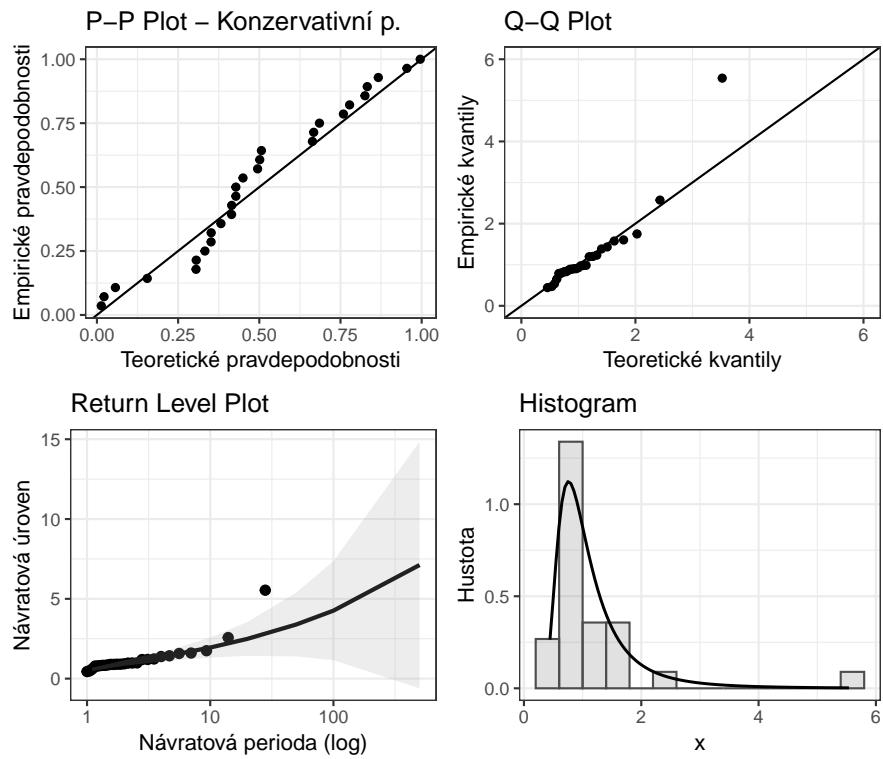
Následně byla modelována i měsíční a týdenní maxima konzervativního portfolia. Bodové odhady parametrů modelů včetně příslušných 95% intervalů spolehlivosti jsou sepsány v Tabulce 4.2. Jednotlivé modely byly mezi sebou porovnány pomocí diagnostických grafů na Obrázku 4.5, Obrázku 4.6 a Obrázku 4.7.

Tabulka 4.2: Odhad parametrů GEV modelu ztrát konzervativního portfolia a jejich 95% intervaly spolehlivosti pro různé šířky bloků.

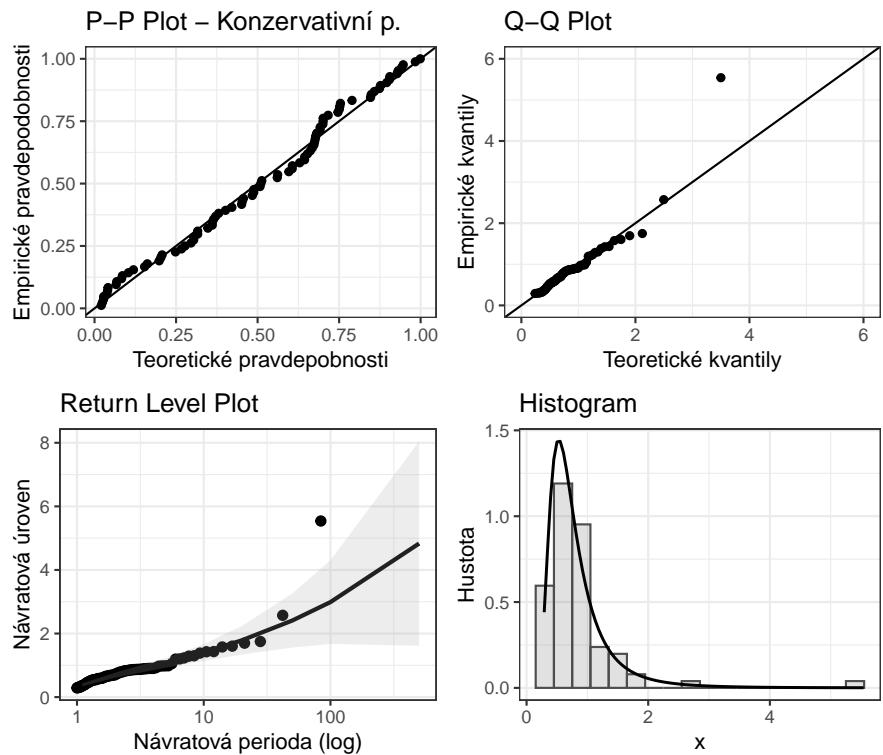
| Parametr | Šířka bloku | Bodový odhad | Intervalový odhad |
|----------------|-------------|--------------|--------------------|
| $\hat{\mu}$ | 1 čtvrtletí | 0,84605 | (0,70498; 0,98712) |
| | 1 měsíc | 0,58884 | (0,52420; 0,65348) |
| | 1 týden | 0,26798 | (0,24167; 0,29430) |
| $\hat{\sigma}$ | 1 čtvrtletí | 0,34138 | (0,22377; 0,45899) |
| | 1 měsíc | 0,26326 | (0,20993; 0,31659) |
| | 1 týden | 0,22564 | (0,20457; 0,24671) |
| $\hat{\xi}$ | 1 čtvrtletí | 0,30284 | (0,01953; 0,58615) |
| | 1 měsíc | 0,26990 | (0,08086; 0,45895) |
| | 1 týden | 0,21780 | (0,13330; 0,30229) |

U modelů extrémních hodnot P-P Ploty nedovedou ukázat úspěšnost modelu tak dobře jako jiné grafy, v diagnostice modelů extrémních hodnot jsou proto před nimi upřednostňovány Q-Q Ploty znázorňující kvantily místo pravděpodobností.

Čtvrtletní a měsíční modely vycházejí z pohledu Q-Q Plotu vcelku uspokojivě. V obou Q-Q Plotech je vždy jeden nejextrémnejší kvantil, u kterého je rozdíl mezi empirickou a očekávanou hodnotou velký. U čtvrtletního i měsíčního modelu ale zbylé body leží přibližně na zobrazené

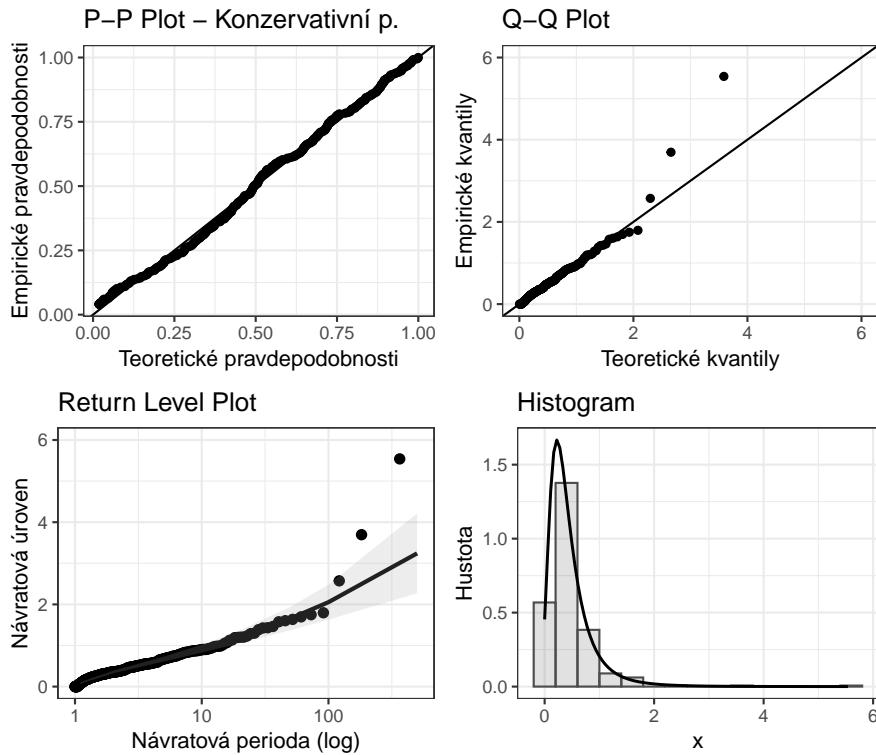


Obrázek 4.5: Diagnostické grafy GEV modelu čtvrtletních maxim ztrát konzervativního portfolia.



Obrázek 4.6: Diagnostické grafy GEV modelu měsíčních maxim ztrát konzervativního portfolia.

přímce. U Q–Q Plotu týdenních maxim je poloha bodů nevyhovující především v případě dvou nejextrémnějších kvantilů, viz Obrázek 4.7.



Obrázek 4.7: Diagnostické grafy GEV modelu týdenních maxim ztrát konzervativního portfolia.

Zmíněné vybočující body se týkají období velmi vysoké volatility na jaře 2020. Volatilita na jaře roku 2020 byla způsobena především pandemií COVID-19 a nejistotou, která byla s tímto obdobím spojená.

Tento závěr podporují i zbývající dva diagnostické grafy na obrázcích, tj. histogram i graf návratové úrovni (return level plot). Je-li model správný, pak by měly body v return level plotu přibližně opisovat znázorněnou křivku. (Coles, 2001)

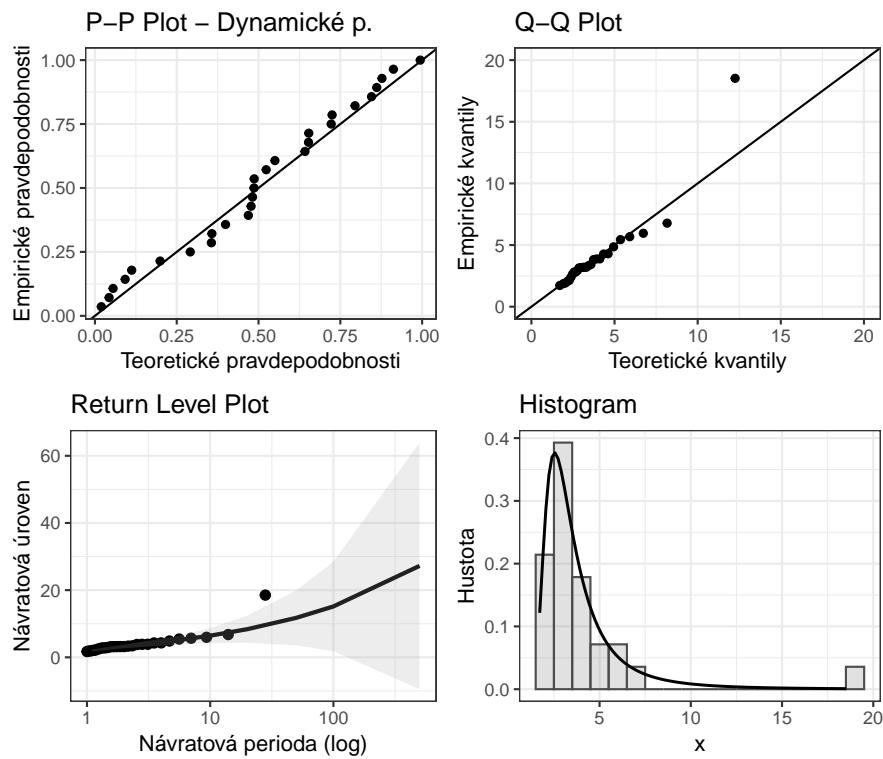
Jako nejhorší model se zatím z pohledu diagnostiky jeví model s týdenními maximy, především při porovnání Q–Q Plotů a grafů návratové úrovni. Model čtvrtletních i měsíčních blokových maxim konzervativního portfolia vychází podobně uspokojivě. Model týdenních maxim vykazuje užší intervaly spolehlivosti parametrů (nižší nejistotu odhadů parametrů modelu), což však může být spojeno s vyšším zkreslením odhadů, viz Kapitola 2.2.

Odhady parametrů pro dynamické portfolio jsou shrnutý v Tabulce 4.3. Jednotlivé modely byly následně hodnoceny z pohledu diagnostických grafů na Obrázku 4.8, 4.9 a 4.10.

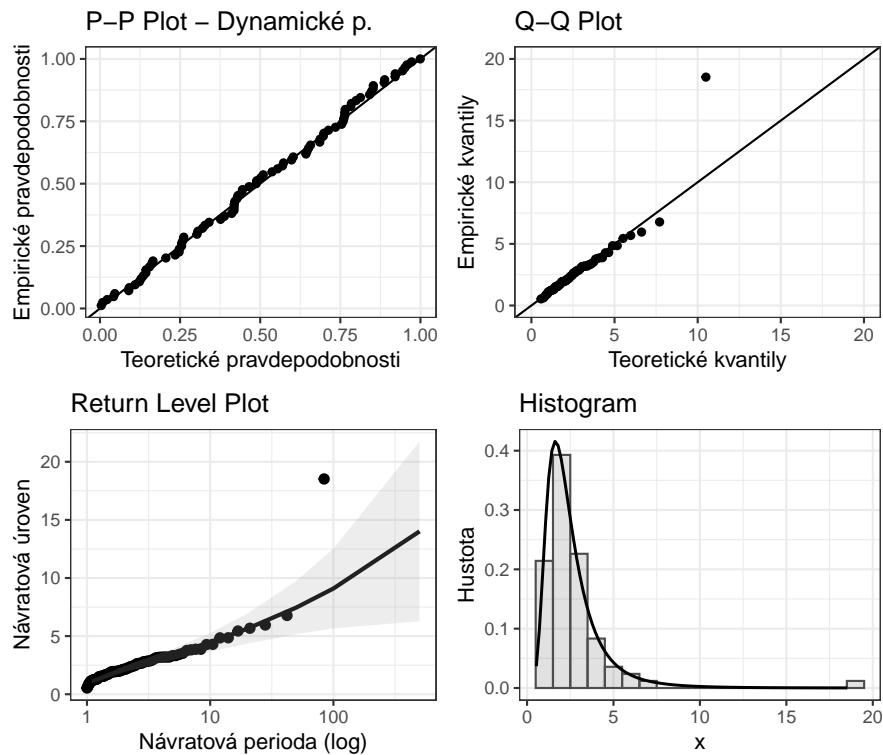
Všechny tři modely dynamického portfolia jsou na tom z pohledu grafické diagnostiky vcelku podobně. Diagnostické grafy u dynamického portfolia opět poukazují na vybočující pozorování (viz například Q–Q Ploty, ale i histogramy nebo return level ploty). Jako u konzerva-

Tabulka 4.3: Odhad parametrů GEV modelu ztrát dynamického portfolia a jejich 95% intervaly spolehlivosti pro různé šířky bloků.

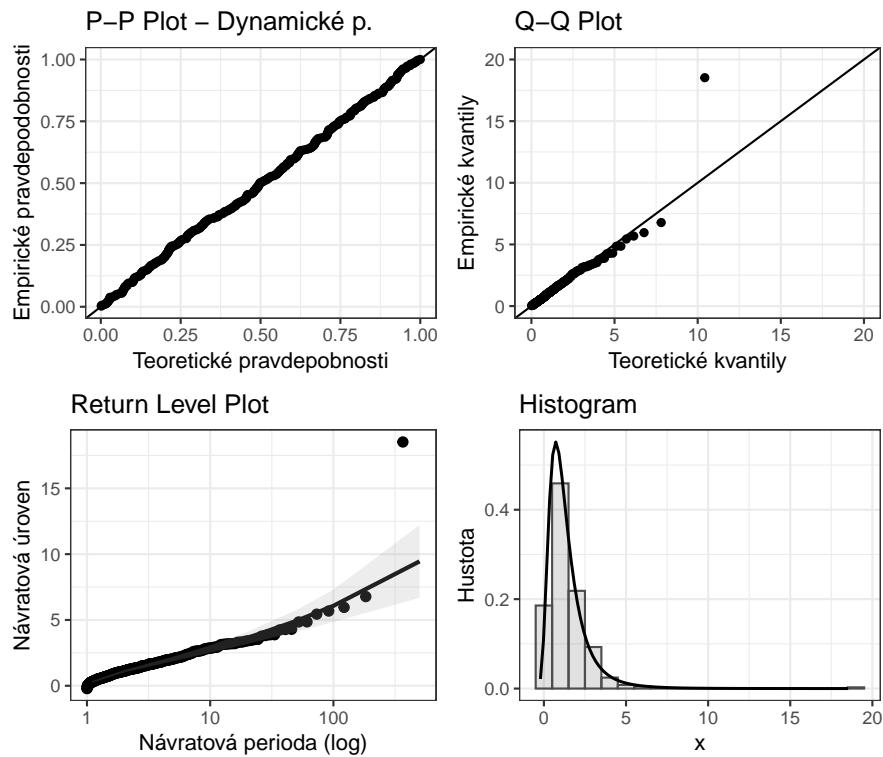
| Parametr | Šířka bloku | Bodový odhad | Intervalový odhad |
|----------------|-------------|--------------|--------------------|
| $\hat{\mu}$ | 1 čtvrtletí | 2,83992 | (2,39835; 3,28148) |
| | 1 měsíc | 1,81934 | (1,60273; 2,03596) |
| | 1 týden | 0,84251 | (0,76335; 0,92167) |
| $\hat{\sigma}$ | 1 čtvrtletí | 1,03615 | (0,65176; 1,42053) |
| | 1 měsíc | 0,90550 | (0,73242; 1,07858) |
| | 1 týden | 0,68043 | (0,61719; 0,74368) |
| $\hat{\xi}$ | 1 čtvrtletí | 0,36305 | (0,01565; 0,71044) |
| | 1 měsíc | 0,22352 | (0,06520; 0,38184) |
| | 1 týden | 0,20695 | (0,12275; 0,29115) |



Obrázek 4.8: Diagnostické grafy GEV modelu čtvrtletních maxim ztrát dynamického portfolia.



Obrázek 4.9: Diagnostické grafy GEV modelu měsíčních maxim ztrát dynamického portfolia.

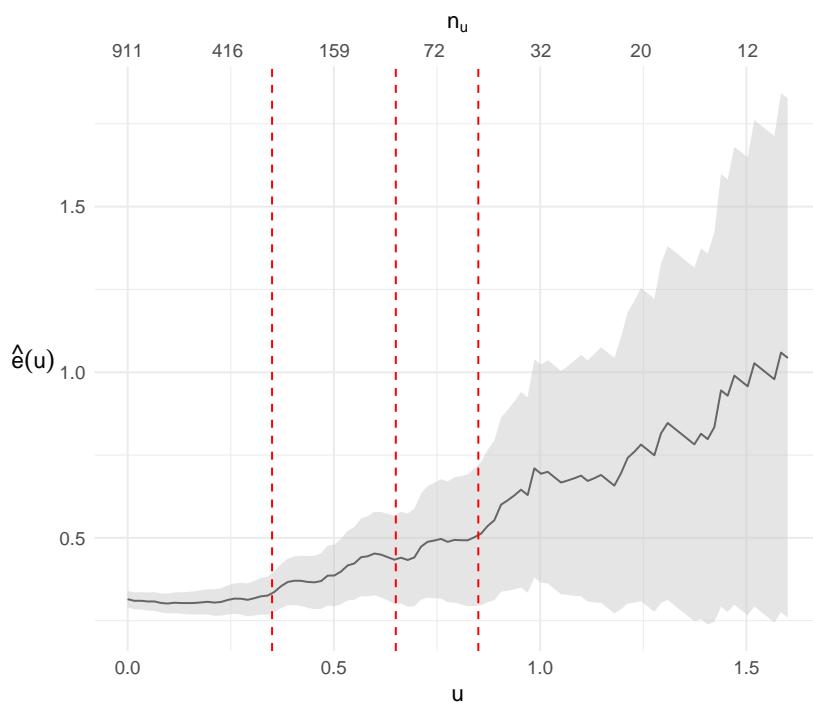


Obrázek 4.10: Diagnostické grafy GEV modelu týdenních maxim ztrát dynamického portfolia.

tivního portfolia bude i zde rozhodnutí o výběru nevhodnějšího modelu úzce souviseť mimojiné s kompromisem mezi rozptylem a zkreslením odhadu.

4.3.2 GP rozdělení

Před samotným odhadem parametrů zobecněného Paretova rozdělení je nutné se zaměřit na volbu prahové hodnoty u . Na Obrázku 4.11 je zobrazen graf střední hodnoty excesů (mean excess plot) pro konzervativní portfolio. Graf je vykreslen včetně 95% intervalů spolehlivosti a příslušných hodnot n_u , tedy počtu hodnot přesahujících daný práh u . Zároveň jsou v grafu 3 přesušované červené svislé čáry, které představují možné kandidáty na práh u z pohledu grafu střední hodnoty excesů. Tyto možné volby jsou $u = 0,35$, $u = 0,65$ a $u = 0,85$.

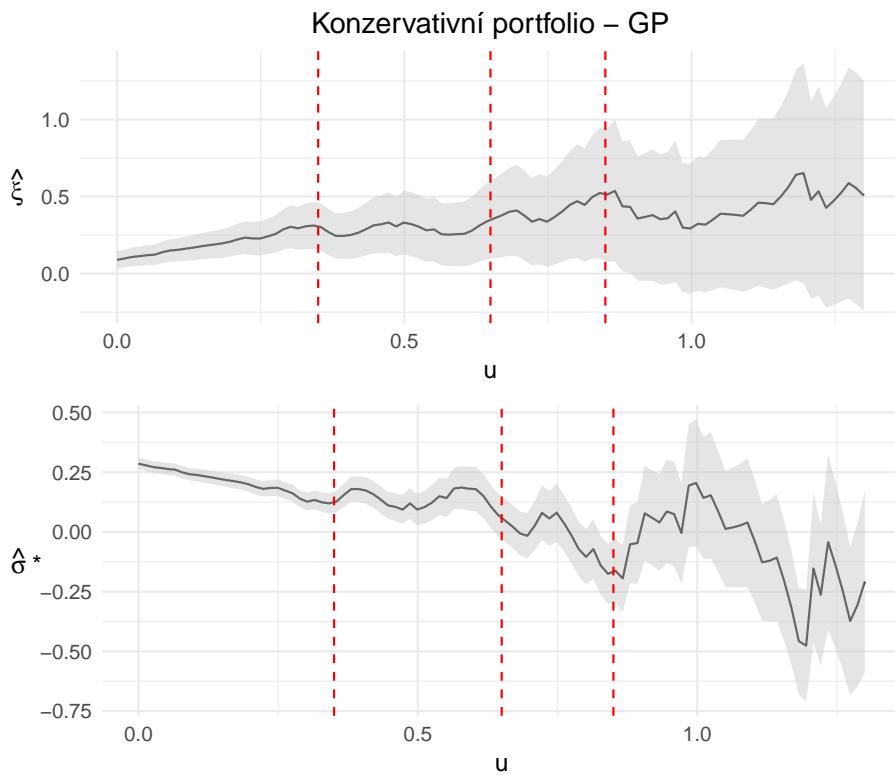


Obrázek 4.11: Graf střední hodnoty excesů pro konzervativní portfolio, včetně 95% intervalů spolehlivosti a příslušných hodnot n_u . Červenou přesušovanou čarou znázorněny hodnoty $u = 0,35$, $u = 0,65$ a $u = 0,85$.

Konečná volba zatím pouze na základě grafu střední hodnoty excesů není jednoznačná. Všechny 3 volby u byly zvoleny tak, aby odpovídající n_u nebylo pokud možno ani příliš nízké, ale ani příliš vysoké (viz Kapitola 2.3). Zároveň hledáme takové u , od něhož bude křivka empirického odhadu střední hodnoty odhadů $e(u)$ přibližně lineární. Pro $u > 1,6$ už je n_u velmi nízké. Přestože původně rostoucí trend křivky přibližně v tomto bodě $u \approx 1,6$ končí, z důvodu velmi nízkého n_u již na tvar křivky pro $u \gtrsim 1,6$ nebude brán zřetel. Pro lepší náhled na graf střední hodnoty excesů proto byly na Obrázku 4.11 zobrazeny pouze $u \in [0; 1,6]$. Zaměříme-li se tedy pouze na rostoucí trend křivky $e(u)$ na intervalu přibližně od 0 do 1,6, jeví se jako dobrá volba například $u \approx 0,85$, nicméně ani hodnoty $u \in [0,5; 0,85]$ nemůžeme na základě

tohoto grafu vyloučit. Pro $u = 0,35$ už pozorujeme spíše konvexní tvar křivky na sledovaném intervalu. Naopak pro $u = 0,85$ už o přibližné linearitě křivky $e(u)$ pro $u \in (0,85; 1,6)$ není pochyb. Na druhou stranu je pro $u = 0,85$ v datech pouze 56 hodnot přesahujících tento práh. Vezmeme-li v potaz ještě následnou declusterizaci, která modelovaná data ještě více zredukuje, jedná se o vcelku nízkou hodnotu n_u . Takto malé n_u by se mohlo projevit na kvalitě výsledného modelu. Z tohoto důvodu budou pro modelování vybrány 2 různé prahy, přičemž druhý z nich bude znamenat větší n_u . Podobně jako v případě GEV modelu se bude jednat o kompromis mezi rozptylem a zkreslením.

Volba prahu u pro rozdělení ztrát konzervativního portfolia byla dále provedena na základě dvojice grafů na Obrázku 4.12. Hledáme takové u , od kterého jsou odhady $\hat{\xi}$ a $\hat{\sigma}^*$ (viz vztah 2.13) přibližně konstantní. Opět nebereme v potaz výsledky odhadů pro $u \gtrsim 1,6$, jelikož pro $u > 1,6$ je $n_u \leq 10$.



Obrázek 4.12: Graf závislosti prahu u na odhadu parametrů ξ a σ^* GP rozdělení ztrát konzervativního portfolia, včetně 95% intervalů spolehlivosti. Červenou přesušovanou čarou znázorněny hodnoty $u = 0,35$, $u = 0,65$ a $u = 0,85$.

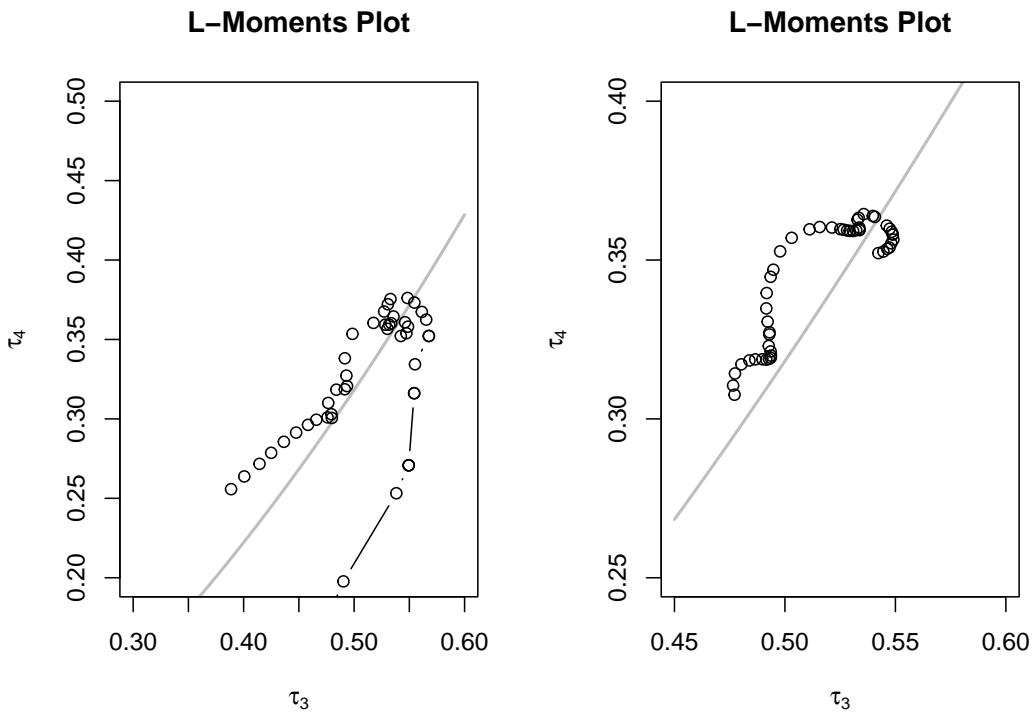
Intervaly spolehlivosti se podobně jako u grafu střední hodnoty excesů rozšiřují s klesajícím n_u , zároveň jsou bodové odhady opět s rostoucí nejistotou odhadů proměnlivější. Ani tato dvojice grafů nenabízí žádné jednoznačné řešení. Odhady $\hat{\xi}$ mají jednoznačně rostoucí trend na intervalu $(0; 0,35)$. Poté růst značně zpomaluje a nadále už spíše osciluje kolem hodnoty 0,5. Pro $u \gtrsim 0,65$ už všechny intervaly spolehlivosti hodnotu $\hat{\xi} = 0,5$ pokrývají, což je důležitý argument pro volbu prahové hodnoty. V bodě $u \approx 0,85$ se hodnota $\hat{\xi}$ téměř shoduje s již zmínovanou hodnotou 0,5, k čemuž bude při výsledné volbě prahu u rovněž přihlédnuto.

Další pohled na volbu vhodné prahové hodnoty nabízejí také grafy, které se nazývají L-Moments Ploty. Jedná se o graf, ve kterém jsou proti sobě vykresleny L-síkmost a L-špičatost, v grafech značené jako τ_3 a τ_4 . Graf je navíc proložen křivkou, která je dána vztahem

$$\tau_4 = \frac{\tau_3(1 + 5\tau_3)}{5 + \tau_3}. \quad (4.5)$$

Pocházejí-li data z GP rozdělení, pak by se body v grafu měly pohybovat přibližně po této křivce, viz Hosking a Wallis (1997), aplikováno například v Beguería (2005).

V grafech na Obrázku 4.13 tudíž hledáme takové prahy u , které podmínu 4.5 splňují. V levém grafu jsou zobrazeny body pro $u \in (0; 1,6)$. Pozorujeme, že směrem doprava se body nejprve přiblížují křivce, chvíli kolem ní oscilují, načež se nakonec začnou zase rychle vzdalovat. Bohužel z grafů nelze přímo vyčíst, jaký bod nalezní které hodnotě u . Pravý graf proto ukazuje pouze body pro $u \in (0,35; 0,85)$, aby bylo vidět, že právě tyto volby u se zdají být z pohledu L-Moments Plotu vyhovující. Po bližším zkoumání bylo zjištěno, že nejbliže křivce se nacházejí body pro $u \in (0,35; 0,5)$ a $u \in (0,6; 0,85)$.



Obrázek 4.13: L-Moments Plot pro různé volby prahu u (vlevo pro $u \in (0; 1,6)$, vpravo pro $u \in (0,35; 0,85)$), konzervativní portfolio.

Na základě všechny výše popsánych grafických metod byly pro následné modelování zvoleny jako nejvhodnější prahové hodnoty $u_1 = 0,65$ a $u_2 = 0,85$.

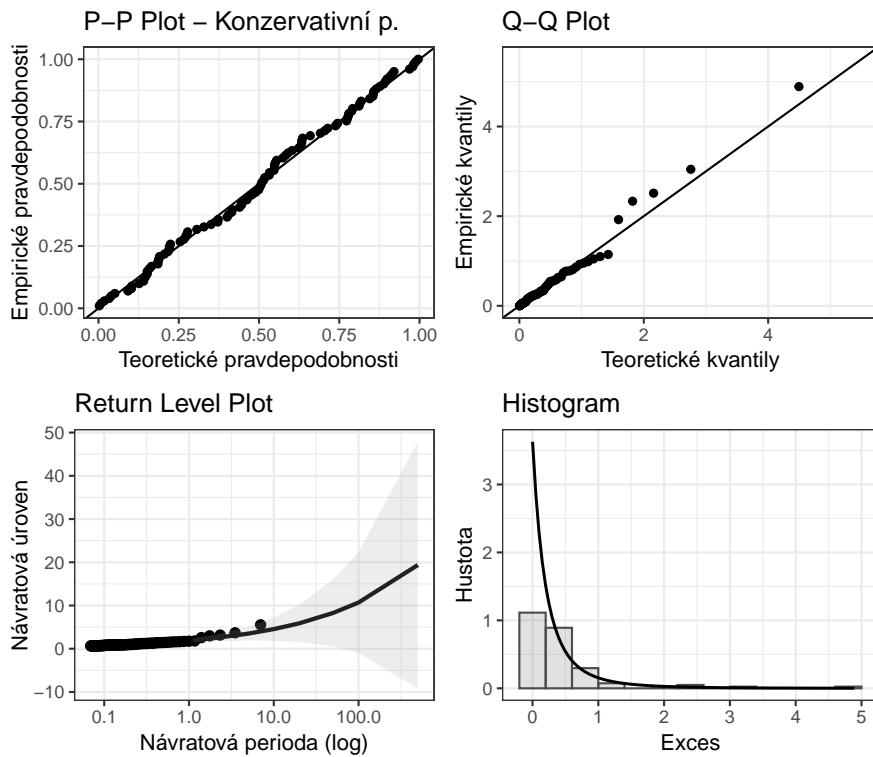
Následně byla ještě data přesahující tyto zvolené prahy $u_1 = 0,65$ a $u_2 = 0,85$ declusterována. Proces declusterizace prokázal výskyt shluků mezi přesahy. Některé přesahy se v datech vyskytly v časovém rozmezí menším než 7 dní, což je v analýze finančních časových

řad obecně považováno za vhodné rozmezí mezi dvěma nezávislými přesahy. Pro $u_1 = 0,65$ zbyl po declusterizaci z původních 101 pozorování vzorek o rozsahu $n_u = 59$, pro $u_2 = 0,85$ se declusterizací n_u zmenšilo z původních 56 na 35.

Tabulka 4.4: Bodové a intervalové (95%) odhady parametrů GP modelu ztrát konzervativního portfolia a jeho declusterizované varianty, pro $u_1 = 0,65$ a $u_2 = 0,85$.

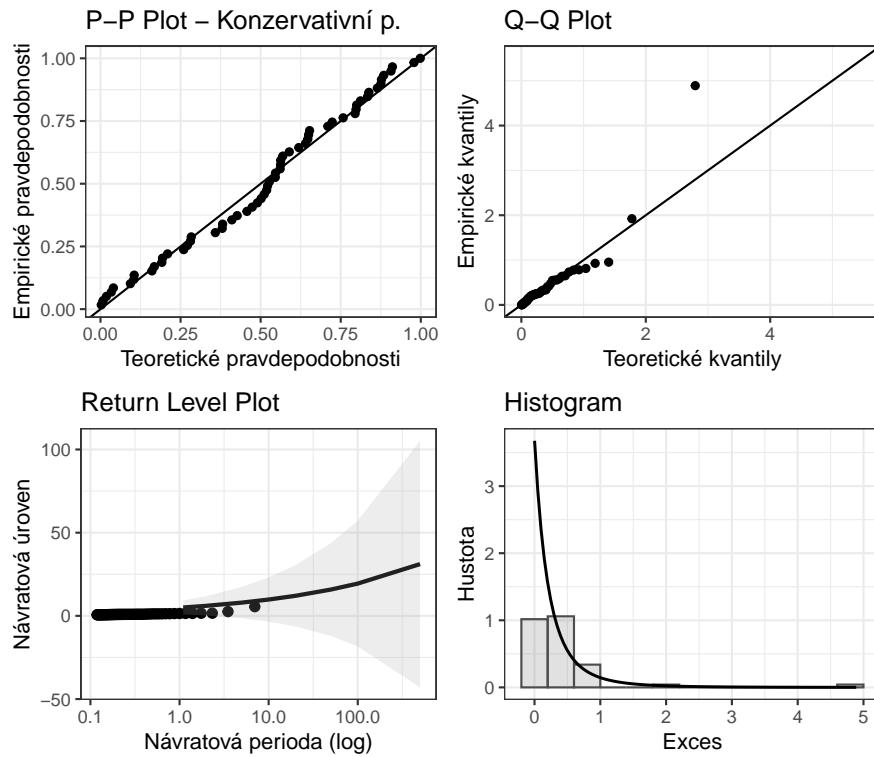
| Parametr | Práh | Model | Bodový odhad | Intervalový odhad |
|----------------|--------------|-------------|--------------|--------------------|
| $\hat{\sigma}$ | $u_1 = 0,65$ | GP | 0,27457 | (0,18772;0,36142) |
| | | Declust. GP | 0,27116 | (0,16848;0,37384) |
| | $u_2 = 0,85$ | GP | 0,26863 | (0,13757; 0,39969) |
| | | Declust. GP | 0,19025 | (0,07297; 0,30752) |
| $\hat{\xi}$ | $u_1 = 0,65$ | GP | 0,36662 | (0,10751;0,62574) |
| | | Declust. GP | 0,29009 | (0,00065;0,57953) |
| | $u_2 = 0,85$ | GP | 0,52283 | (0,08900; 0,95666) |
| | | Declust. GP | 0,57232 | (0,01893; 1,12571) |

Pro takto stanovené prahy byly odhadnuty parametry GP modelů a rovněž parametry odpovídajících declusterizovaných GP modelů. Všechny parametry byly odhadnuty metodou maximální věrohodnosti. Výsledné bodové i intervalové odhady jsou sepsány v Tabulce 4.4. Modely byly navzájem opět graficky porovnány, viz diagnostické grafy na Obrázku 4.14, 4.15, 4.16 a 4.17.



Obrázek 4.14: Diagnostické grafy GP modelu ztrát konzervativního portfolia přesahujících práh $u_1 = 0,65$.

První zkoumaný model (Obrázek 4.14) na základě grafické diagnostiky vypadá uspokojivě. Všechny body grafu návratové úrovně leží v zobrazovaném konfidenčním pásu. V porovnání s jinými modely navíc i Q–Q Plot tohoto modelu vychází velmi dobře.



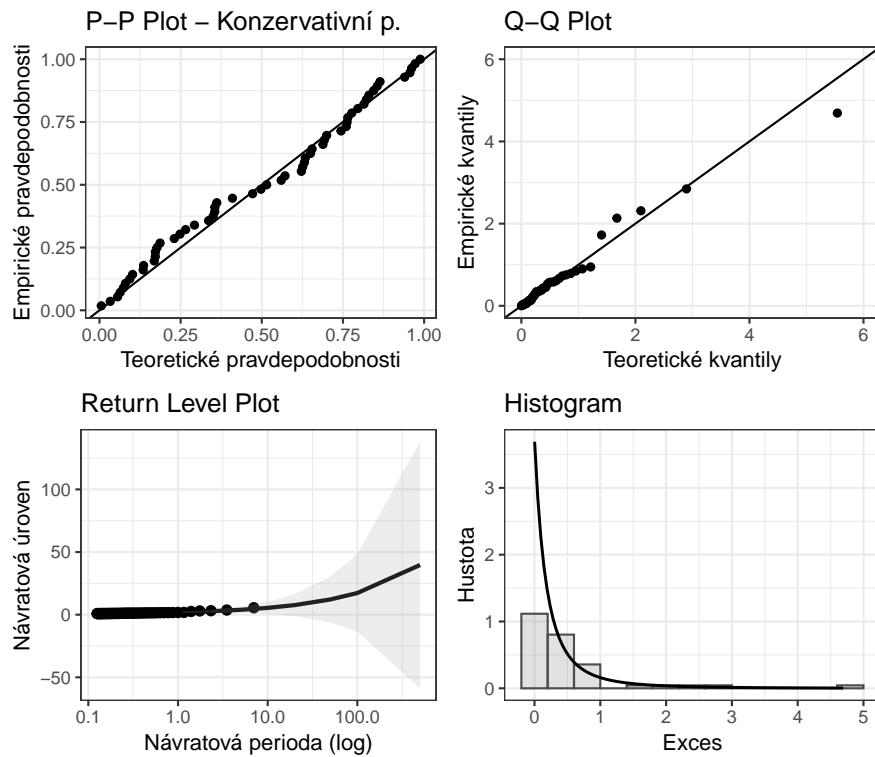
Obrázek 4.15: Diagnostické grafy declusterizovaného GP modelu ztrát konzervativního portfolia přesahujících prah $u_1 = 0,65$.

Graf návratové úrovně na Obrázku 4.15 příslušného declusterizovaného modelu vychází hůře. Declusterizací bylo z modelovaných dat vyřazeno několik extrémních pozorování z března roku 2020, což způsobilo, že hodnoty empirických návratových úrovní v grafu nejsou tak vysoké jako ty teoretické. Z toho důvodu se většina empirických bodů pohybuje kolem spodní hranice konfidenčního pásu. Q–Q Plot vykazuje podobně jako například Q–Q Ploty GEV modelů jedno vybočující pozorování (pro nejvyšší kvantil).

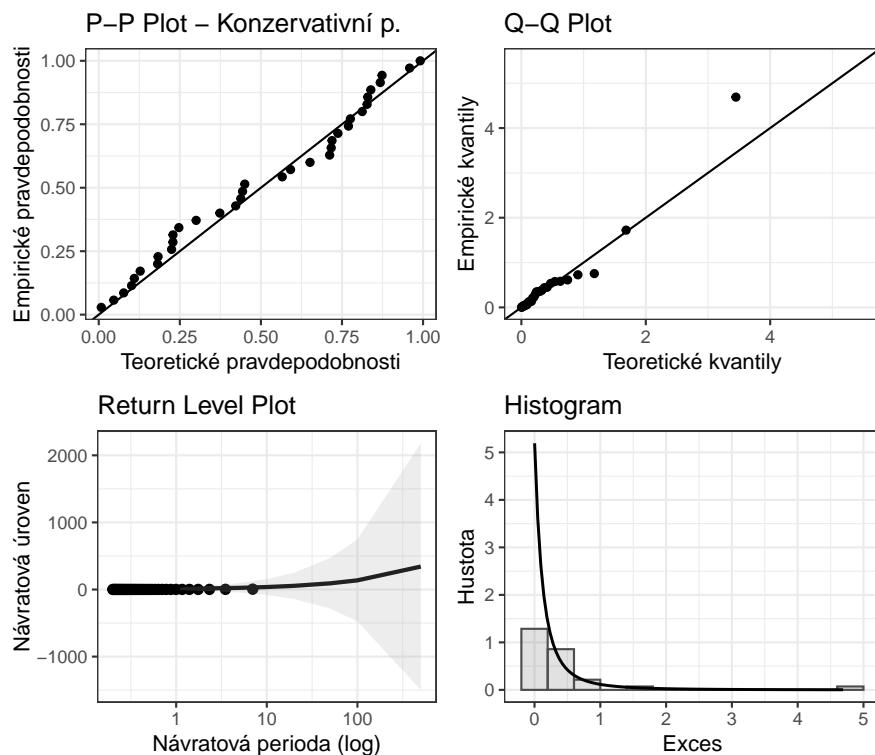
Naproti tomu grafická diagnostika třetího modelu (Obrázek 4.16, bez declusterizace, $u_2 = 0,85$) neukazuje nic, co by naznačovalo nevhodnost modelu, ačkoliv kvůli měřítku na ose y u grafu návratové úrovně je obtížné zjistit, zda konfidenční pásy skutečně pokrývají zobrazované empirické hodnoty. Podobně i diagnostika declusterizovaného varianty modelu vypadá v pořádku, viz Obrázek 4.17.

Následně byla metoda špiček nad prahem aplikována na ztráty dynamického portfolia. Bylo nutné znova najít vhodný prah u . Volba prahu u proběhla nejprve na základě grafu střední hodnoty excesů, viz Obrázek 4.18.

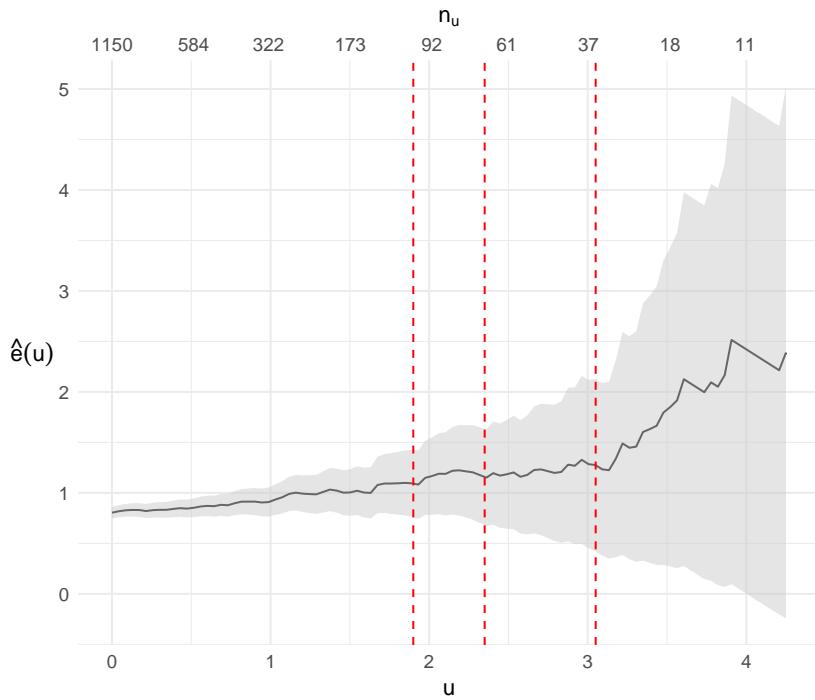
Z grafu vyplývá, že nejvhodnější by mohla být volba $u \approx 3$, jelikož pro $u \in (3; 4,25)$ je křivka $e(u)$ přibližně lineární. Prahy větší než 4,25 nebyly brány v potaz vzhledem k nízkému n_u



Obrázek 4.16: Diagnostické grafy GP modelu ztrát konzervativního portfolia přesahujících práh $u_2 = 0,85$.



Obrázek 4.17: Diagnostické grafy declusterizovaného GP modelu ztrát konzervativního portfolia přesahujících práh $u_2 = 0,85$.



Obrázek 4.18: Graf střední hodnoty excesů pro dynamické portfolio, včetně 95% intervalů spolehlivosti a příslušných hodnot n_u . Červenou přesušovanou čarou znázorněny hodnoty $u = 1,9$, $u = 2,35$ a $u = 3,05$.

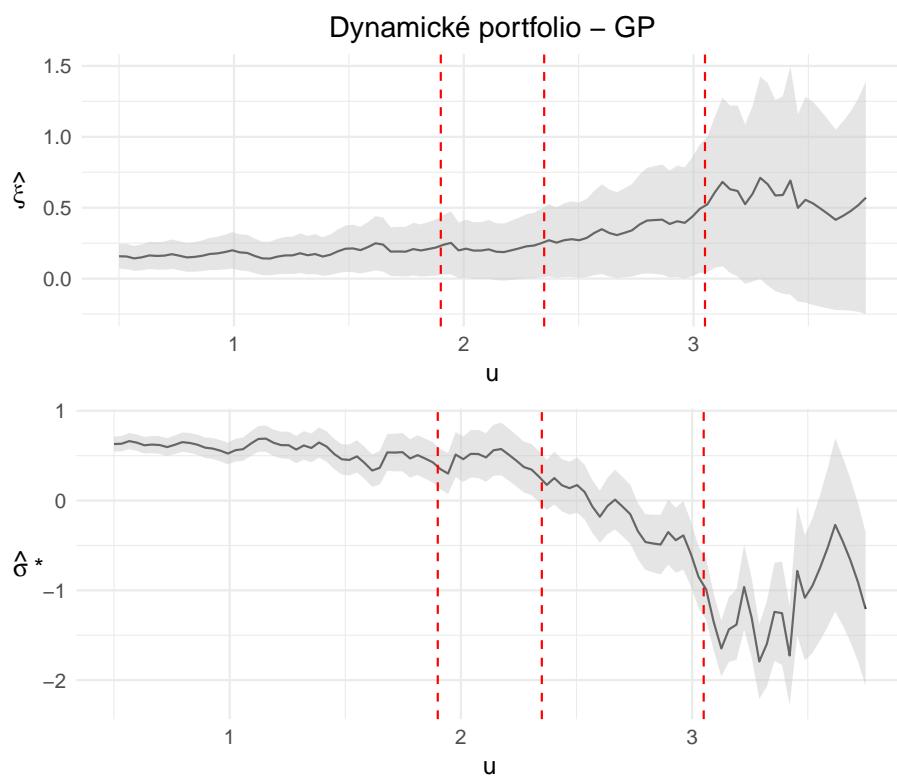
($n_u \leq 10$ pro $u \gtrsim 4,25$). Kromě $u \approx 3$ přicházejí dále v úvahu například hodnoty $u \approx 2,35$, případně ještě $u \approx 1,9$ (všechny tyto potenciální prahové hodnoty jsou v grafu opět zakresleny v podobě svislých červených přerušovaných čar). Ke konečnému rozhodnutí poslouží také grafy na Obrázku 4.19.

Odhady $\hat{\xi}$ mají jednoznačně rostoucí trend na intervalu $(0; 3)$. Poté už odhady oscilují kolem hodnoty 0,5. Pro $u \gtrsim 2,35$ už všechny intervaly spolehlivosti hodnotu $\hat{\xi} = 0,5$ pokrývají, což je důležitý argument pro volbu prahové hodnoty. V bodě $u \approx 3,05$ se hodnota $\hat{\xi}$ téměř shoduje s již zmínovanou hodnotou 0,5, k čemuž bude při výsledné volbě prahu u rovněž přihlédnuto. Z pohledu grafů na Obrázku 4.19 se dříve zvažovaná volba $u = 1,9$ nejeví jako příliš vhodná.

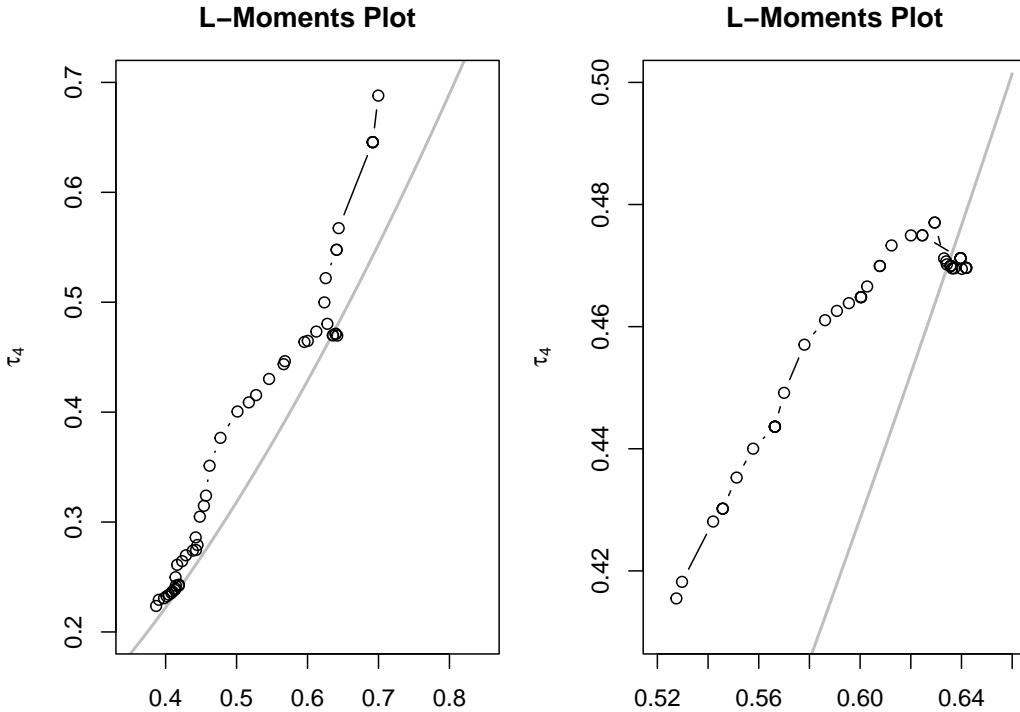
Poslední pohled na volbu vhodné prahové hodnoty je vidět na Obrázku 4.20. Přestože se některé body od křivky v L-Moments Plotu mírně vzdalují, stále tyto body na sledovaném intervalu tvar křivky přibližně kopírují. Pravý graf nabízí bližší pohled pro $u \in (2,35; 3,35)$. Při detailnějším zkoumání bylo zjištěno, že pro $u \approx 3$ leží všechny body velmi blízko křivky, nebo přímo na ní.

Na základě všechny popsánych grafických metod byly pro následné modelování zvoleny jako nejvhodnější prahové hodnoty $u_1 = 2,35$ a $u_2 = 3,05$.

Ztráty dynamického portfolia přesahující zvolené prahy $u_1 = 2,35$ a $u_2 = 3,05$ byly následně declusterizovány. Jako minimální vzdálenost mezi dvěma přesahy byl opět určen 1 týden.



Obrázek 4.19: Graf závislosti prahu u na odhadu parametrů ξ a σ^* GP rozdělení ztrát konzervativního portfolia, včetně 95% intervalů spolehlivosti. Červenou přesušovanou čarou znázorněny hodnoty $u = 1,9$, $u = 2,35$ a $u = 3,05$.



Obrázek 4.20: L-Moments Plot pro různé volby prahu u (vlevo pro $u \in (0; 4,25)$, vpravo pro $u \in (2,35; 3,35)$), dynamické portfolio.

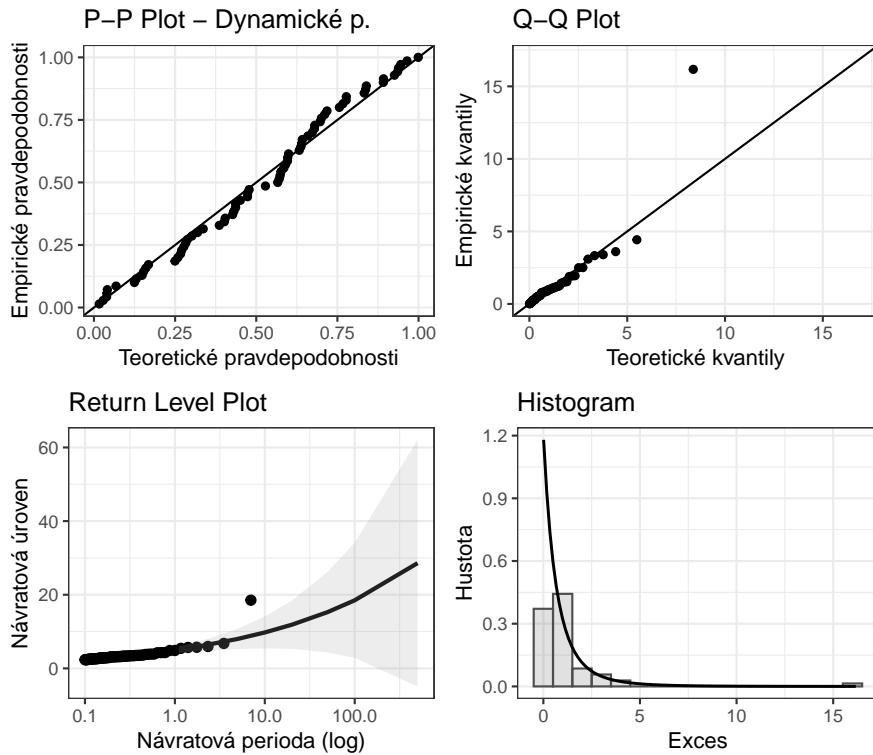
V datech bylo podobně jako u konzervativního portfolia identifikováno několik shluků. Pro $u_1 = 2,35$ zbyl po declusterizaci z původních 70 pozorování vzorek o rozsahu $n_u = 44$, pro $u_2 = 3,05$ se declusterizací n_u zmenšilo z původních 36 na 25. Poznamenejme, že tak nízká n_u mohou mít negativní dopad na výsledky modelování.

Odhady parametrů GP modelů ztrát dynamického portfolia jsou shrnutý v Tabulce 4.5. Vlivem poklesu n_u pozorujeme u declusterizovaných modelů širší intervaly spolehlivosti.

Tabulka 4.5: Bodové a intervalové (95%) odhady parametrů GP modelu ztrát dynamického portfolia a jeho declusterizované varianty, pro $u_1 = 2,35$ a $u_2 = 3,05$.

| Parametr | Práh | Model | Bodový odhad | Intervalový odhad |
|----------------|--------------|-------------|--------------|---------------------|
| $\hat{\sigma}$ | $u_1 = 2,35$ | GP | 0,83006 | (0,55149; 1,10862) |
| | | Declust. GP | 0,94283 | (0,53640; 1,34925) |
| | $u_2 = 3,05$ | GP | 0,63905 | (0,29185; 0,98625) |
| | | Declust. GP | 0,68097 | (0,19026; 1,17168) |
| $\hat{\xi}$ | $u_1 = 2,35$ | GP | 0,26127 | (0,01329; 0,50924) |
| | | Declust. GP | 0,30575 | (-0,02087; 0,63236) |
| | $u_2 = 3,05$ | GP | 0,50200 | (0,03792; 0,96608) |
| | | Declust. GP | 0,61074 | (-0,03959; 1,26107) |

V Q-Q Plotech všech GP modelů ztrát dynamického portfolia (viz Obrázky 4.21, 4.22, 4.23



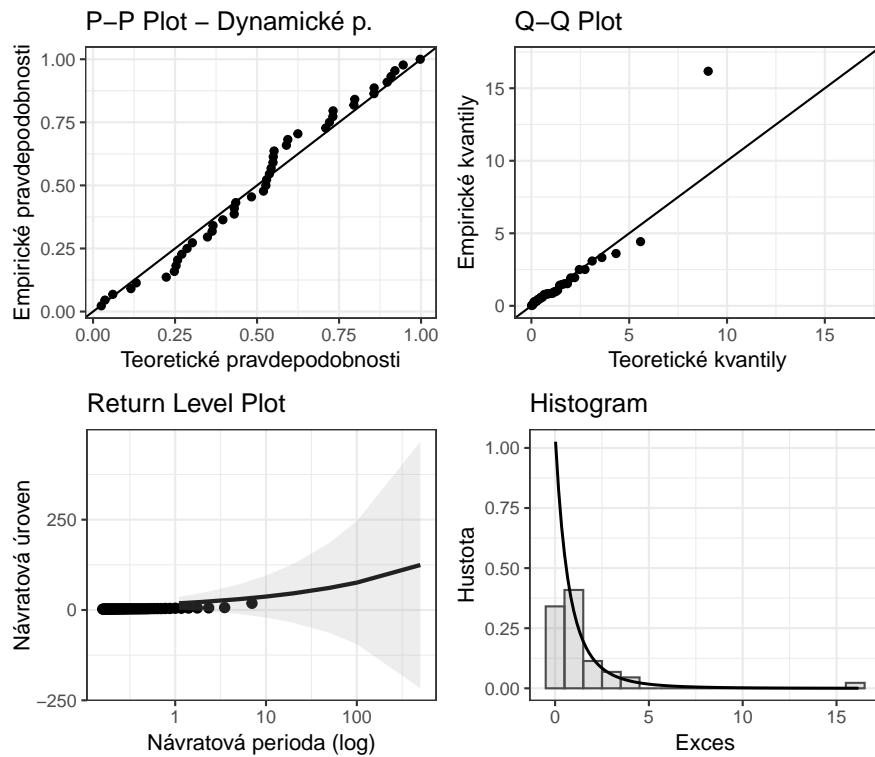
Obrázek 4.21: Diagnostické grafy GP modelu ztrát dynamického portfolia přesahujících práh $u_1 = 2,35$.

a 4.24) pozorujeme opět jeden vybočující bod. Extrémní empirické kvantily se tedy vždy velmi liší od svého teoretického protějšku. Znovu se jedná o extrémy z jara roku 2020.

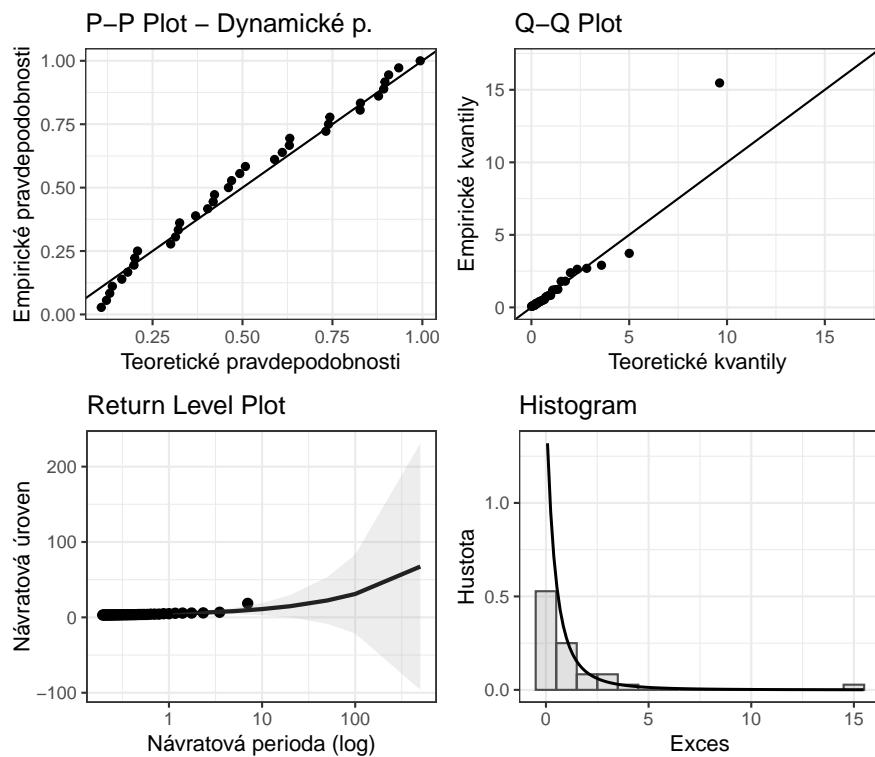
V případě nedeclusterizovaných modelů navíc pozorujeme jeden vybočující bod, který neleží v konfidenčním pásu. Jedná se o bod, který značí hodnotu empirické návratové úrovni pro nejvyšší návratovou periodu, viz Obrázky 4.21 a 4.23.

U grafu návratové úrovni declusterizovaného modelu pro $u_2 = 3,05$ (Obrázek 4.24) jsou kvůli velmi nízkému n_u konfidenční intervaly s rostoucí návratovou periodou velmi široké. Kromě těchto zmíněných nedostatků ale diagnostické grafy pro GP modely ztrát dynamického portfolia vycházejí uspokojivě.

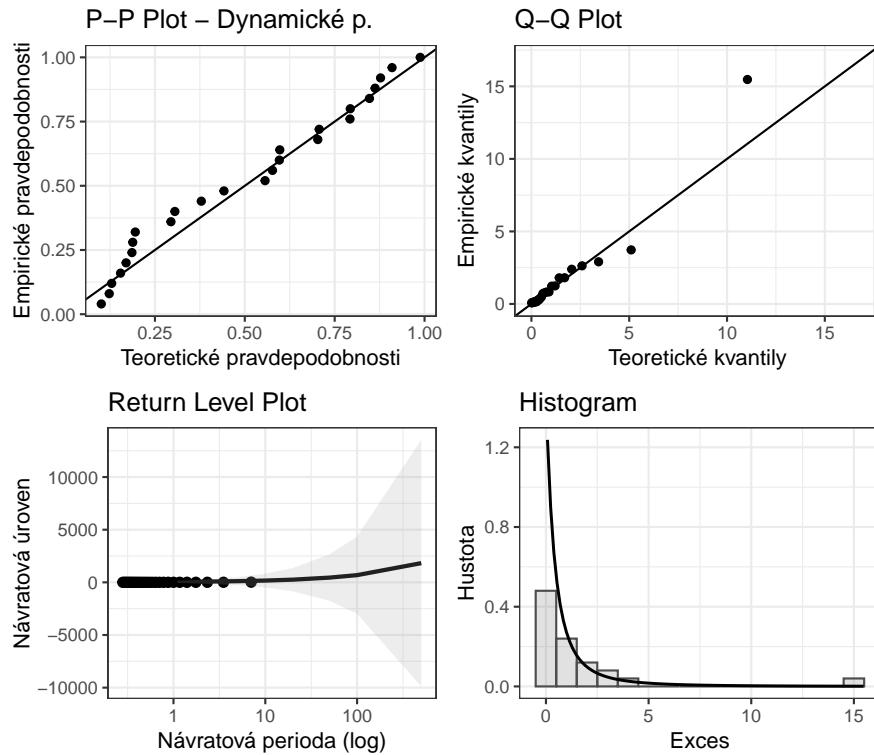
V následující kapitole budou pro všechny získané modely odhadnuty hodnoty v riziku a očekávané ztráty.



Obrázek 4.22: Diagnostické grafy declusterizovaného GP modelu ztrát dynamického portfolia přesahujících práh $u_1 = 2,35$.



Obrázek 4.23: Diagnostické grafy GP modelu ztrát dynamického portfolia přesahujících práh $u_2 = 3,05$.



Obrázek 4.24: Diagnostické grafy declusterizovaného GP modelu ztrát dynamického portfolia přesahujících práh $u_2 = 3,05$.

4.4 Odhad VaR a ES

4.4.1 Konzervativní portfolio

Tabulky 4.6 a 4.7 obsahují výsledné bodové odhadы VaR a ES konzervativního portfolia pro hladiny pravděpodobnosti $\alpha \in \{0,05; 0,025; 0,01; 0,005\}$. Výsledky včetně 95% intervalů spolehlivosti jsou uvedeny v tabulkách v Příloze B. Odhady obou měr rizika byly pro všechny hladiny pravděpodobnosti získány celkem devíti metodami, a to metodou historické simulace, varianční–kovarianční metodou s předpokladem normality dat, metodou blokových maxim s čtvrtletními, měsíčními a týdenními šírkami bloků, a metodou špiček nad prahem pro dva různé prahy u_1 a u_2 a pro declusterizovanou i nedeclusterizovanou variantu. Modely vykazují největší rozdíly především u odhadů 99,5% ES.

4.4.2 Dynamické portfolio

Tabulky 4.8 a 4.9 obsahují výsledné bodové odhadы VaR a ES dynamického portfolia pro hladiny pravděpodobnosti $\alpha \in \{0,05; 0,025; 0,01; 0,005\}$. Výsledky včetně 95% intervalů spolehlivosti jsou uvedeny v tabulkách v Příloze B. Odhady obou měr rizika byly opět pro všechny hladiny pravděpodobnosti získány devíti metodami, a to metodou historické simulace, varianční–kovarianční metodou s předpokladem normality dat, metodou blokových ma-

Tabulka 4.6: Bodové odhady VaR konzervativního portfolia při různých hladinách pravděpodobnosti.

| Metoda odhadu | 95% VaR | 97,5% VaR | 99% VaR | 99,5% VaR |
|---------------------------------|----------|-----------|----------|-----------|
| Historická simulace | -0,55248 | -0,79483 | -1,15725 | -1,43535 |
| Varianční–kovarianční metoda | -0,83001 | -0,98547 | -1,16580 | -1,28859 |
| GEV model pro čtvrtletní maxima | -0,42968 | -0,60336 | -0,88327 | -1,13545 |
| GEV model pro měsíční maxima | -0,48053 | -0,66102 | -0,95244 | -1,22228 |
| GEV model pro týdenní maxima | -0,52720 | -0,74032 | -1,07545 | -1,37518 |
| GP model pro u_1 | -0,58772 | -0,78820 | -1,14266 | -1,49883 |
| Declust. GP model pro u_1 | -0,45727 | -0,63275 | -0,91670 | -1,16786 |
| GP model pro u_2 | -0,66454 | -0,81551 | -1,11207 | -1,44534 |
| Declust. GP model pro u_2 | -0,65890 | -0,74696 | -0,92138 | -1,12040 |

Tabulka 4.7: Bodové odhady ES konzervativního portfolia při různých hladinách pravděpodobnosti.

| Metoda odhadu | 95% ES | 97,5% ES | 99% ES | 99,5% ES |
|---------------------------------|----------|----------|----------|----------|
| Historická simulace | -0,97129 | -1,28576 | -1,81919 | -2,35620 |
| Varianční–kovarianční metoda | -1,03604 | -1,17143 | -1,33258 | -1,44418 |
| GEV model pro čtvrtletní maxima | -0,74954 | -0,98582 | -1,37919 | -1,76079 |
| GEV model pro měsíční maxima | -0,80460 | -1,04717 | -1,43985 | -1,80626 |
| GEV model pro týdenní maxima | -0,89108 | -1,16046 | -1,58334 | -1,96286 |
| GP model pro u_1 | -0,98890 | -1,30446 | -1,84847 | -2,39876 |
| Declust. GP model pro u_1 | -0,76335 | -0,99443 | -1,36421 | -1,70400 |
| GP model pro u_2 | -1,02412 | -1,33749 | -1,93140 | -2,59200 |
| Declust. GP model pro u_2 | -0,86730 | -1,04589 | -1,39704 | -1,78628 |

xim s čtvrtletními, měsíčními a týdenními šírkami bloků, a metodou špiček nad prahem pro dva různé prahy u_1 a u_2 a pro declusterizovanou i nedeclusterizovanou variantu. Modely vykazují velké rozdíly především u odhadů 99,5% ES. Pro odhadu ES pozorujeme široké intervaly spolehlivosti, především s klesající hladinou α , viz tabulky v Příloze B.

Všechny odhady získané v této kapitole byly následně podrobeny zpětnému testování, jehož výsledky jsou uvedeny v Kapitole 4.5.

Tabulka 4.8: Bodové odhady VaR dynamického portfolia při různých hladinách pravděpodobnosti.

| Metoda odhadu | 95% VaR | 97,5% VaR | 99% VaR | 99,5% VaR |
|---------------------------------|----------|-----------|----------|-----------|
| Historická simulace | -1,72104 | -2,40920 | -3,30005 | -3,82706 |
| Varianční–kovarianční metoda | -2,71178 | -3,22220 | -3,81682 | -4,22369 |
| GEV model pro čtvrtletní maxima | -1,61717 | -2,10991 | -2,96902 | -3,76681 |
| GEV model pro měsíční maxima | -1,44645 | -2,06381 | -3,02453 | -3,87040 |
| GEV model pro týdenní maxima | -1,62084 | -2,25513 | -3,23253 | -4,10044 |
| GP model pro u_1 | -1,53005 | -2,03950 | -2,84892 | -3,57713 |
| Declust. GP model pro u_1 | -1,43888 | -2,00414 | -2,94381 | -3,79846 |
| GP model pro u_2 | -2,27494 | -2,53768 | -3,03552 | -3,57802 |
| Declust. GP model pro u_2 | -2,23073 | -2,49710 | -3,03705 | -3,64280 |

Tabulka 4.9: Bodové odhady ES dynamického portfolia při různých hladinách pravděpodobnosti.

| Metoda odhadu | 95% ES | 97,5% ES | 99% ES | 99,5% ES |
|---------------------------------|----------|----------|----------|----------|
| Historická simulace | -2,79987 | -3,58275 | -4,70089 | -5,93086 |
| Varianční–kovarianční metoda | -3,38940 | -3,83550 | -4,36947 | -4,73924 |
| GEV model pro čtvrtletní maxima | -2,60821 | -3,35924 | -4,65500 | -6,02206 |
| GEV model pro měsíční maxima | -2,50553 | -3,28483 | -4,52990 | -5,66745 |
| GEV model pro týdenní maxima | -2,68225 | -3,47242 | -4,69366 | -5,78818 |
| GP model pro u_1 | -2,41847 | -3,06605 | -4,11007 | -5,07705 |
| Declust. GP model pro u_1 | -2,46210 | -3,21462 | -4,46226 | -5,66081 |
| GP model pro u_2 | -2,86553 | -3,32809 | -4,23104 | -5,18781 |
| Declust. GP model pro u_2 | -2,83490 | -3,39663 | -4,48398 | -5,62387 |

4.5 Zpětné testování

4.5.1 Konzervativní portfolio

Nejprve byly výsledné odhady VaR otestovány pomocí Kupiecova testu pro hladinu významnosti 95 %. Rozhodnutí o výsledku testu bylo založeno na p-hodnotě. U konzervativního portfolia byly z hlediska Kupiecova testu označeny jako úspěšné například modely historické

simulace a nedeclusterizované GP modely (pro oba prahy u_1 i u_2) pro 99% a 99,5% VaR. Dále to byly GP modely s $u_2 = 0,85$ (bez declusterizace i s declusterizací) pro 95% VaR nebo modely s varianční–kovarianční metodou pro 95%, 97,5% a 99% VaR. Z GEV modelů prošel Kupiecovým testem při dané hladině spolehlivosti pouze model s týdenními maximy pro 99,5% VaR. Výsledky jsou podrobněji sepsány v Tabulce 4.10, přičemž odhady, u kterých nebyla zamítnuta nulová hypotéza

$$H_0 : \alpha = \hat{\alpha},$$

mají p-hodnotu vyznačenou tučným písmem. U ostatních odhadů byly nulové hypotézy zamítnuty ve prospěch oboustranných alternativ.

Následně byly testovány odhady ES pomocí Costanzino–Curanova testu. Na základě p-hodnot nezamítáme nulovou hypotézu

$$\begin{aligned} H_0 : & \quad \left\{ H_{\text{ES}}^{(t)}(\alpha) \right\}_{t=1}^T \quad \text{jsou IID} \\ & \& \widehat{\text{VaR}}_p = \widehat{\text{VaR}}_p \quad \forall p \in (0, \alpha], \end{aligned}$$

pouze u historické simulace, nedeclusterizovaných GP modelů a GEV modelu s týdenními maximy, a to vždy u 99% a 99,5% ES, viz Tabulka 4.11. Ostatní p-hodnoty jsou velmi nízké, často po zaokrouhlení rovné nule. U zbylých odhadů proto zamítáme nulovou hypotézu ve prospěch alternativní hypotézy, která říká, že došlo k porušení IID u $\left\{ H_{\text{ES}}^{(t)}(\alpha) \right\}_{t=1}^T$, nebo k porušení rovnosti $\text{VaR}_p = \widehat{\text{VaR}}_p$ pro nějaké $p \in (0, \alpha]$, nebo k obojímu. Zamítnutím H_0 nejsme schopni rozhodnout, z jakého z těchto tří možných důvodů k zamítnutí došlo.

Nakonec byly ještě pro všechny odhady u konzervativního portfolia určeny hodnoty Fissler–Ziegel ztrátové funkce. Výsledky jsou shrnutы v Tabulce 4.12. Tentokrát jsou ale metody odhadů VaR a ES uspořádány v rámci dané hladiny pravděpodobnosti podle hodnoty FZ ztrátové funkce vzestupně, tedy od nejvíc vyhovující hodnoty až po tu, která je v porovnání s ostatními nejhorská. Čím vyšší je hodnota FZ funkce, tím větší ztráty v testovaném období způsobené podhodnocením rizika pozorujeme.

Pro všechny hladiny pravděpodobnosti jsou z pohledu ztrátové funkce u konzervativního portfolia nejvhodnější nedeclusterizované GP modely, jelikož ve všech případech patří z hlediska ztrátové funkce mezi čtyři nejlepší metody z devíti testovaných. Tímto způsobem zároveň zjišťujeme, že nejhůře vycházejí declusterizovaný GP model pro $u_1 = 0,65$ a GEV model se čtvrtletními bloky. GEV model s týdenními bloky se nachází vždy přibližně uprostřed uspořádaných hodnot, výjimkou je jen hladina 99,5 %, kdy se objevuje na prvním místě. Často jsou si dvě sousední hodnoty FZ funkcí velmi blízké.

4.5.2 Dynamické portfolio

Výsledky Kupiecova testu pro dynamické portfolio jsou uvedeny v Tabulce 4.13. V porovnání s konzervativním testem nebyla zamítnuta nulová hypotéza Kupiecova testu u většího množství odhadů. Ve všech případech testem úspěšně prošel GEV model s měsíčními maximy, GP

Tabulka 4.10: Výsledky Kupiecova testu pokrytí pro konzervativní portfolio. Tučným písmem jsou vyznačeny p-hodnoty vyšší než hladina významnosti 5 %. Ve sloupci Překročení jsou uvedeny počty hodnoty v testovaných datech, které přesáhly hranici příslušného \widehat{VaR} .

| Odhad | Metoda | \widehat{VaR} | Překročení | Test. statistika | p-hodnota |
|-----------|--------------------------------------|-----------------|------------|------------------|----------------|
| 95% VaR | HS | -0,55248 | 95 | 25,78677 | 0,00000 |
| | Var.-Kovar. | -0,83001 | 44 | 2,37499 | 0,12329 |
| | GP pro u_1 | -0,58772 | 83 | 13,34072 | 0,00026 |
| | Decl. GP pro u_1 | -0,45727 | 125 | 70,73876 | 0,00000 |
| | GP pro u_2 | -0,66454 | 63 | 1,25063 | 0,26343 |
| | Decl. GP pro u_2 | -0,65890 | 64 | 1,56403 | 0,21108 |
| | GEV čtvrtletní | -0,42968 | 135 | 89,53082 | 0,00000 |
| | GEV měsíční | -0,48053 | 118 | 58,65229 | 0,00000 |
| | GEV týdenní | -0,52720 | 102 | 34,60730 | 0,00000 |
| | HS | -0,79483 | 49 | 14,24564 | 0,00016 |
| 97,5% VaR | Var.-Kovar. | -0,98547 | 28 | 0,01453 | 0,90406 |
| | GP pro u_1 | -0,78820 | 49 | 14,24564 | 0,00016 |
| | Decl. GP pro u_1 | -0,63275 | 70 | 47,91603 | 0,00000 |
| | GP pro u_2 | -0,81551 | 47 | 11,92161 | 0,00055 |
| | Decl. GP pro u_2 | -0,74696 | 54 | 20,78979 | 0,00001 |
| | GEV čtvrtletní | -0,60336 | 75 | 58,08548 | 0,00000 |
| | GEV měsíční | -0,66102 | 63 | 34,97377 | 0,00000 |
| | GEV týdenní | -0,74032 | 57 | 25,18976 | 0,00000 |
| | HS | -1,15725 | 16 | 2,05954 | 0,15126 |
| | Var.-Kovar. | -1,16580 | 16 | 2,05954 | 0,15126 |
| 99% VaR | GP pro u_1 | -1,14266 | 17 | 2,88954 | 0,08916 |
| | Decl. GP pro u_1 | -0,91670 | 35 | 33,77815 | 0,00000 |
| | GP pro u_2 | -1,11207 | 17 | 2,88954 | 0,08916 |
| | Decl. GP pro u_2 | -0,92138 | 35 | 33,77815 | 0,00000 |
| | GEV čtvrtletní | -0,88327 | 38 | 41,14341 | 0,00000 |
| | GEV měsíční | -0,95244 | 29 | 20,69169 | 0,00001 |
| | GEV týdenní | -1,07545 | 21 | 7,34315 | 0,00673 |
| | HS | -1,43535 | 7 | 0,39219 | 0,53115 |
| | Var.-Kovar. | -1,28859 | 12 | 5,82230 | 0,01582 |
| | GP pro u_1 | -1,49883 | 6 | 0,04906 | 0,82471 |
| 99,5% VaR | Decl. GP pro u_1 | -1,16786 | 16 | 13,36869 | 0,00026 |
| | GP pro u_2 | -1,44534 | 7 | 0,39219 | 0,53115 |
| | Decl. GP pro u_2 | -1,12040 | 17 | 15,59506 | 0,00008 |
| | GEV čtvrtletní | -1,13545 | 17 | 15,59506 | 0,00008 |
| | GEV měsíční | -1,22228 | 15 | 11,26925 | 0,00079 |
| | GEV týdenní | -1,37518 | 7 | 0,39219 | 0,53115 |

Tabulka 4.11: Výsledky Costanzino-Curranova testu pro konzervativní portfolio. Tučným písmem jsou vyznačeny p-hodnoty vyšší než hladina významnosti 5 %.

| Odhad | Metoda | \widehat{ES} | Test. statistika | p-hodnota |
|----------|--------------------------------|----------------|------------------|----------------|
| 95% ES | HS | -0,97129 | 4,49140 | 0,00001 |
| | Var.-Kovar. | -1,03604 | 2,43880 | 0,01474 |
| | GP pro u_1 | -0,98890 | 3,90175 | 0,00010 |
| | Decl. GP pro u_1 | -0,76335 | 9,83168 | 0,00000 |
| | GP pro u_2 | -1,02412 | 2,90450 | 0,00368 |
| | Decl. GP pro u_2 | -0,86730 | 4,47728 | 0,00001 |
| | GEV čtvrtletní | -0,74954 | 11,91166 | 0,00000 |
| | GEV měsíční | -0,80460 | 8,73449 | 0,00000 |
| | GEV týdenní | -0,89108 | 5,78459 | 0,00000 |
| | HS | -1,28576 | 3,21062 | 0,00132 |
| 97,5% ES | Var.-Kovar. | -1,17143 | 3,77409 | 0,00016 |
| | GP pro u_1 | -1,30446 | 3,17981 | 0,00147 |
| | Decl. GP pro u_1 | -0,99443 | 8,36196 | 0,00000 |
| | GP pro u_2 | -1,33749 | 3,15042 | 0,00163 |
| | Decl. GP pro u_2 | -1,04589 | 6,89489 | 0,00000 |
| | GEV čtvrtletní | -0,98582 | 9,65354 | 0,00000 |
| | GEV měsíční | -1,04717 | 7,25559 | 0,00000 |
| | GEV týdenní | -1,16046 | 4,43631 | 0,00001 |
| | HS | -1,81919 | 0,87699 | 0,38049 |
| | Var.-Kovar. | -1,33258 | 5,06380 | 0,00000 |
| 99% ES | GP pro u_1 | -1,84847 | 0,79668 | 0,42563 |
| | Decl. GP pro u_1 | -1,36421 | 5,32279 | 0,00000 |
| | GP pro u_2 | -1,93140 | 1,19445 | 0,23230 |
| | Decl. GP pro u_2 | -1,39704 | 6,29231 | 0,00000 |
| | GEV čtvrtletní | -1,37919 | 6,24035 | 0,00000 |
| | GEV měsíční | -1,43985 | 4,15454 | 0,00003 |
| | GEV týdenní | -1,58334 | 1,83771 | 0,06611 |
| | HS | -2,35620 | 0,19700 | 0,84383 |
| | Var.-Kovar. | -1,44418 | 6,42863 | 0,00000 |
| | GP pro u_1 | -2,39876 | -0,28386 | 0,77652 |
| 99,5% ES | Decl. GP pro u_1 | -1,70400 | 2,90564 | 0,00366 |
| | GP pro u_2 | -2,59200 | -0,12229 | 0,90267 |
| | Decl. GP pro u_2 | -1,78628 | 4,14368 | 0,00003 |
| | GEV čtvrtletní | -1,76079 | 3,27603 | 0,00105 |
| | GEV měsíční | -1,80626 | 2,11449 | 0,03447 |
| | GEV týdenní | -1,96286 | 0,63459 | 0,52569 |

Tabulka 4.12: Hodnoty FZ ztrátové funkce pro konzervativní portfolio. Uspořádané v rámci jednotlivých hladin pravděpodobnosti vzestupně podle hodnoty ztrátové funkce.

| Odhad | Metoda | \widehat{VaR} | \widehat{ES} | FZ ztrátová funkce |
|----------------|--------------------------------|-----------------|----------------|--------------------|
| 95% VaR a ES | GP pro u_2 | -0,66454 | -1,02412 | 0,09603 |
| | Var.-Kovar. | -0,83001 | -1,03604 | 0,09698 |
| | GP pro u_1 | -0,58772 | -0,98890 | 0,12229 |
| | Decl. GP pro u_2 | -0,65890 | -0,86730 | 0,12472 |
| | HS | -0,55248 | -0,97129 | 0,14709 |
| | GEV týdenní | -0,52720 | -0,89108 | 0,18958 |
| | GEV měsíční | -0,48053 | -0,80460 | 0,28452 |
| | Decl. GP pro u_1 | -0,45727 | -0,76335 | 0,35056 |
| | GEV čtvrtletní | -0,42968 | -0,74954 | 0,41236 |
| | Var.-Kovar. | -0,98547 | -1,17143 | 0,29017 |
| 97,5% VaR a ES | GP pro u_2 | -0,81551 | -1,33749 | 0,32218 |
| | HS | -0,79483 | -1,28576 | 0,33642 |
| | GP pro u_1 | -0,78820 | -1,30446 | 0,33932 |
| | GEV týdenní | -0,74032 | -1,16046 | 0,39240 |
| | Decl. GP pro u_2 | -0,74696 | -1,04589 | 0,41801 |
| | GEV měsíční | -0,66102 | -1,04717 | 0,51306 |
| | Decl. GP pro u_1 | -0,63275 | -0,99443 | 0,57953 |
| | GEV čtvrtletní | -0,60336 | -0,98582 | 0,63350 |
| | HS | -1,15725 | -1,81919 | 0,52398 |
| | GP pro u_1 | -1,14266 | -1,84847 | 0,52898 |
| 99% VaR a ES | GP pro u_2 | -1,11207 | -1,93140 | 0,54235 |
| | Var.-Kovar. | -1,16580 | -1,33258 | 0,54774 |
| | GEV týdenní | -1,07545 | -1,58334 | 0,55322 |
| | GEV měsíční | -0,95244 | -1,43985 | 0,67701 |
| | Decl. GP pro u_2 | -0,92138 | -1,39704 | 0,73011 |
| | Decl. GP pro u_1 | -0,91670 | -1,36421 | 0,74746 |
| | GEV čtvrtletní | -0,88327 | -1,37919 | 0,79905 |
| | GEV týdenní | -1,37518 | -1,96286 | 0,65730 |
| | GP pro u_1 | -1,49883 | -2,39876 | 0,66703 |
| | HS | -1,43535 | -2,35620 | 0,66875 |
| 99,5% VaR a ES | GP pro u_2 | -1,44534 | -2,59200 | 0,68921 |
| | GEV měsíční | -1,22228 | -1,80626 | 0,75025 |
| | Var.-Kovar. | -1,28859 | -1,44418 | 0,75458 |
| | Decl. GP pro u_1 | -1,16786 | -1,70400 | 0,81819 |
| | GEV čtvrtletní | -1,13545 | -1,76079 | 0,84578 |
| | Decl. GP pro u_2 | -1,12040 | -1,78628 | 0,85962 |

model pro $u_1 = 2,35$ neprošel akorát pro $\alpha = 0,05$. Naopak nejhůře dle Kupiecova testu dopadla u dynamického portfolia varianční–kovarianční metoda. Podle sloupce Překročení je to způsobeno zbytečným nadhodnocením rizika u odhadů VaR získaných touto metodou, které vedlo k malému počtu pozorování překračujících tento odhad. Pro 99% VaR nezamítáme nulové hypotézy u všech odhadů kromě již zmíněného odhadu varianční–kovarianční metodou. U odhadů 99% VaR už dokonce nebyla zamítnuta nulová hypotéza u žádného z odhadů.

Výsledky Costanzino–Curranova testu pro dynamické portfolio jsou shrnutы v Tabulce 4.14. V případě odhadů získaných GEV modelem s měsíčními maximy není zamítnuta nulová hypotéza ani v jednom z případů. Pro testování 97,5% ES nezamítáme H_0 u žádného z GEV modelů. Pro 99% a 99,5% ES není zamítnuta nulová hypotéza u žádného z odhadů.

V Tabulce 4.15 jsou shrnutы výsledky zpětného testování pomocí FZ ztrátové funkce. Metody odhadů VaR a ES jsou uspořádány v rámci dané hladiny pravděpodobnosti α podle hodnoty FZ ztrátové funkce vzestupně. Opět platí, že čím vyšší hodnoty FZ ztrátové funkce, tím větší ztráty v testovaném období způsobené podhodnocením rizika. Obecně jsou z pohledu FZ ztrátové funkce nejlepší GP modely pro $u_1 = 2,35$ (declusterizovaný i nedecclusterizovaný), nejhorší naopak odhadu získané z historické simulace a z varianční–kovarianční metody s předpokladem normality dat. Není ovšem dobré sledovat pouze pořadí jednotlivých metod, jelikož příslušné hodnoty ztrátových funkcí si jsou často navzájem velmi blízké pro danou hladinu pravděpodobnosti α .

4.6 Srovnání výsledků

Hlavním cílem této diplomové práce je zjistit, zda metody založené na teorii extrémních hodnot poskytují lepší odhadu než metoda historické simulace a varianční–kovarianční metoda.

Na základě výsledků zpětného testování popsaných v Kapitole 4.5 bylo zjištěno, že volba nejlepší metody odhadu VaR a ES vždy záleží na zkoumané hladině pravděpodobnosti α . Na základě provedených testů nebylo možné jednoznačně určit, zda metody založené na teorii extrémních hodnot poskytují obecně lepší odhadu, či nikoliv.

V následujících podkapitolách proto budou výsledky okomentovány v závislosti na hladině pravděpodobnosti α . Jelikož je v této diplomové práci kladen hlavní důraz na vzájemné porovnání metod mezi sebou, bude klíčovým aspektem v hodnocení hodnota FZ ztrátové funkce.

4.6.1 Konzervativní portfolio

V případě vyšších hladin pravděpodobnosti ($\alpha \in \{0,05; 0,025\}$, tzn. 95% a 97,5% VaR a ES) vychází velmi dobře varianční–kovarianční metoda založená na předpokladu normality dat, konkuruje jí především nejlepší z GP modelů (tj. nedecclusterizovaný GP model pro $u_2 = 0,85$).

Tabulka 4.13: Výsledky Kupiecova testu pokrytí pro dynamické portfolio. Tučným písmem jsou vyznačeny p-hodnoty vyšší než hladina významnosti 5 %. Ve sloupci Překročení jsou uvedeny počty hodnoty v testovaných datech, které přesáhly hranici příslušného \widehat{VaR} .

| Odhad | Metoda | \widehat{VaR} | Překročení | Test. statistika | p-hodnota |
|-----------|--------------------------------------|-----------------|------------|------------------|----------------|
| 95% VaR | HS | -1,72104 | 26 | 19,56396 | 0,00001 |
| | Var.-Kovar. | -2,71178 | 10 | 57,39421 | 0,00000 |
| | GP pro u_1 | -1,53005 | 40 | 4,59633 | 0,03204 |
| | Decl. GP pro u_1 | -1,43888 | 43 | 2,85658 | 0,09100 |
| | GP pro u_2 | -2,27494 | 18 | 34,73668 | 0,00000 |
| | Decl. GP pro u_2 | -2,23073 | 21 | 28,33663 | 0,00000 |
| | GEV čtvrtletní | -1,61717 | 35 | 8,55257 | 0,00345 |
| | GEV měsíční | -1,44645 | 43 | 2,85658 | 0,09100 |
| | GEV týdenní | -1,62084 | 35 | 8,55257 | 0,00345 |
| | HS | -2,40920 | 16 | 5,68544 | 0,01711 |
| 97,5% VaR | Var.-Kovar. | -3,22220 | 6 | 24,96067 | 0,00000 |
| | GP pro u_1 | -2,03950 | 24 | 0,44499 | 0,50472 |
| | Decl. GP pro u_1 | -2,00414 | 24 | 0,44499 | 0,50472 |
| | GP pro u_2 | -2,53768 | 14 | 8,14082 | 0,00433 |
| | Decl. GP pro u_2 | -2,49710 | 14 | 8,14082 | 0,00433 |
| | GEV čtvrtletní | -2,10991 | 22 | 1,15916 | 0,28164 |
| | GEV měsíční | -2,06381 | 22 | 1,15916 | 0,28164 |
| | GEV týdenní | -2,25513 | 20 | 2,24491 | 0,13405 |
| | HS | -3,30005 | 6 | 2,70361 | 0,10012 |
| | Var.-Kovar. | -3,81682 | 4 | 5,88810 | 0,01524 |
| 99% VaR | GP pro u_1 | -2,84892 | 7 | 1,65037 | 0,19891 |
| | Decl. GP pro u_1 | -2,94381 | 7 | 1,65037 | 0,19891 |
| | GP pro u_2 | -3,03552 | 6 | 2,70361 | 0,10012 |
| | Decl. GP pro u_2 | -3,03705 | 6 | 2,70361 | 0,10012 |
| | GEV čtvrtletní | -2,96902 | 7 | 1,65037 | 0,19891 |
| | GEV měsíční | -3,02453 | 7 | 1,65037 | 0,19891 |
| | GEV týdenní | -3,23253 | 6 | 2,70361 | 0,10012 |
| | HS | -3,82706 | 4 | 0,44081 | 0,50673 |
| | Var.-Kovar. | -4,22369 | 3 | 1,34614 | 0,24595 |
| | GP pro u_1 | -3,57713 | 5 | 0,04266 | 0,83636 |
| 99,5% VaR | Decl. GP pro u_1 | -3,79846 | 4 | 0,44081 | 0,50673 |
| | GP pro u_2 | -3,57802 | 5 | 0,04266 | 0,83636 |
| | Decl. GP pro u_2 | -3,64280 | 5 | 0,04266 | 0,83636 |
| | GEV čtvrtletní | -3,76681 | 4 | 0,44081 | 0,50673 |
| | GEV měsíční | -3,87040 | 4 | 0,44081 | 0,50673 |
| | GEV týdenní | -4,10044 | 3 | 1,34614 | 0,24595 |

Tabulka 4.14: Výsledky Costanzino-Curranova testu pro dynamické portfolio. Tučným pís-
mem jsou vyznačeny p-hodnoty vyšší než hladina významnosti 5 %.

| Odhad | Metoda | \widehat{ES} | Test. statistika | p-hodnota |
|----------|--------------------------------------|----------------|------------------|----------------|
| 95% ES | HS | -2,79987 | -2,91857 | 0,00352 |
| | Var.-Kovar. | -3,38940 | -4,14565 | 0,00003 |
| | GP pro u_1 | -2,41847 | -7,22598 | 0,00000 |
| | Decl. GP pro u_1 | -2,46210 | -10,93611 | 0,00000 |
| | GP pro u_2 | -2,86553 | -29,75862 | 0,00000 |
| | Decl. GP pro u_2 | -2,83490 | -13,69110 | 0,00000 |
| | GEV čtvrtletní | -2,60821 | -2,00667 | 0,04479 |
| | GEV měsíční | -2,50553 | -1,47883 | 0,13918 |
| | GEV týdenní | -2,68225 | -2,48901 | 0,01281 |
| | HS | -3,58275 | -2,25125 | 0,02437 |
| 97,5% ES | Var.-Kovar. | -3,83550 | -2,56909 | 0,01020 |
| | GP pro u_1 | -3,06605 | -5,15186 | 0,00000 |
| | Decl. GP pro u_1 | -3,21462 | -24,93291 | 0,00000 |
| | GP pro u_2 | -3,32809 | -74,31802 | 0,00000 |
| | Decl. GP pro u_2 | -3,39663 | -27,97175 | 0,00000 |
| | GEV čtvrtletní | -3,35924 | -0,86507 | 0,38700 |
| | GEV měsíční | -3,28483 | -1,05124 | 0,29315 |
| | GEV týdenní | -3,47242 | -1,81498 | 0,06953 |
| | HS | -4,70089 | -1,18418 | 0,23634 |
| | Var.-Kovar. | -4,36947 | -0,77496 | 0,43836 |
| 99% ES | GP pro u_1 | -4,11007 | -0,03405 | 0,97284 |
| | Decl. GP pro u_1 | -4,46226 | 0,42847 | 0,66831 |
| | GP pro u_2 | -4,23104 | -0,41907 | 0,67516 |
| | Decl. GP pro u_2 | -4,48398 | -0,08431 | 0,93281 |
| | GEV čtvrtletní | -4,65500 | -0,95346 | 0,34036 |
| | GEV měsíční | -4,52990 | -1,14350 | 0,25283 |
| | GEV týdenní | -4,69366 | -1,35134 | 0,17658 |
| | HS | -5,93086 | -0,97944 | 0,32736 |
| | Var.-Kovar. | -4,73924 | 0,19468 | 0,84565 |
| | GP pro u_1 | -5,07705 | 0,66277 | 0,50748 |
| 99,5% ES | Decl. GP pro u_1 | -5,66081 | 0,63273 | 0,52691 |
| | GP pro u_2 | -5,18781 | 0,62899 | 0,52936 |
| | Decl. GP pro u_2 | -5,62387 | 1,16455 | 0,24420 |
| | GEV čtvrtletní | -6,02206 | -0,85707 | 0,39140 |
| | GEV měsíční | -5,66745 | -1,01873 | 0,30833 |
| | GEV týdenní | -5,78818 | -1,25044 | 0,21114 |

Tabulka 4.15: Hodnoty FZ ztrátové funkce pro dynamické portfolio. Uspořádané v rámci jednotlivých hladin pravděpodobnosti vzestupně podle hodnoty ztrátové funkce.

| Odhad | Metoda | \widehat{VaR} | \widehat{ES} | FZ ztrátová funkce |
|----------------|--------------------------------|-----------------|----------------|--------------------|
| 95% VaR a ES | Decl. GP pro u_1 | -1,43888 | -2,46210 | 0,77879 |
| | GEV měsíční | -1,44645 | -2,50553 | 0,78171 |
| | GP pro u_1 | -1,53005 | -2,41847 | 0,78572 |
| | GEV čtvrtletní | -1,61717 | -2,60821 | 0,80595 |
| | GEV týdenní | -1,62084 | -2,68225 | 0,81105 |
| | HS | -1,72104 | -2,79987 | 0,83569 |
| | Decl. GP pro u_2 | -2,23073 | -2,83490 | 0,93837 |
| | GP pro u_2 | -2,27494 | -2,86553 | 0,94930 |
| | Var.-Kovar. | -2,71178 | -3,38940 | 1,07309 |
| | GP pro u_1 | -2,03950 | -3,06605 | 1,03827 |
| 97,5% VaR a ES | Decl. GP pro u_1 | -2,00414 | -3,21462 | 1,04182 |
| | GEV měsíční | -2,06381 | -3,28483 | 1,04723 |
| | GEV čtvrtletní | -2,10991 | -3,35924 | 1,05332 |
| | GEV týdenní | -2,25513 | -3,47242 | 1,06772 |
| | HS | -2,40920 | -3,58275 | 1,09025 |
| | Decl. GP pro u_2 | -2,49710 | -3,39663 | 1,09276 |
| | GP pro u_2 | -2,53768 | -3,32809 | 1,09625 |
| | Var.-Kovar. | -3,22220 | -3,83550 | 1,24291 |
| | GP pro u_1 | -2,84892 | -4,11007 | 1,29681 |
| | GP pro u_2 | -3,03552 | -4,23104 | 1,31666 |
| 99% VaR a ES | Decl. GP pro u_1 | -2,94381 | -4,46226 | 1,31698 |
| | Decl. GP pro u_2 | -3,03705 | -4,48398 | 1,32556 |
| | GEV měsíční | -3,02453 | -4,52990 | 1,32619 |
| | GEV čtvrtletní | -2,96902 | -4,65500 | 1,32721 |
| | GEV týdenní | -3,23253 | -4,69366 | 1,35323 |
| | HS | -3,30005 | -4,70089 | 1,36002 |
| | Var.-Kovar. | -3,81682 | -4,36947 | 1,41349 |
| | GP pro u_1 | -3,57713 | -5,07705 | 1,48263 |
| | GP pro u_2 | -3,57802 | -5,18781 | 1,48591 |
| | Decl. GP pro u_2 | -3,64280 | -5,62387 | 1,50252 |
| 99,5% VaR a ES | Decl. GP pro u_1 | -3,79846 | -5,66081 | 1,50779 |
| | Var.-Kovar. | -4,22369 | -4,73924 | 1,51073 |
| | GEV měsíční | -3,87040 | -5,66745 | 1,51148 |
| | HS | -3,82706 | -5,93086 | 1,52044 |
| | GEV čtvrtletní | -3,76681 | -6,02206 | 1,52179 |
| | GEV týdenní | -4,10044 | -5,78818 | 1,52800 |

S klesající hladinou α se ale varianční–kovarianční metoda postupně propadá v pořadí (lehký propad zaznamenáváme rovněž u nedclusterizovaného GP modelu pro $u_2 = 0,85$).

Naopak s klesající hladinou α se v porovnání s ostatními metodami zlepšují odhady získané GEV modelem s týdenními bloky, obzvlášt u rizika velmi extrémních ztrát ($\alpha = 0,005$, tzn. 99,5% VaR a ES).

GEV model se čtvrtletními bloky v případě konzervativního portfolia není vůbec schopen ostatním metodám konkurovat. Podobně to platí i pro GEV model s měsíčními bloky, který z pohledu ztrátové funkce není schopen předčít metodu historické simulace pro žádnou hladinu α a varianční–kovarianční metodu předčí jen u $\alpha = 0,005$. Ani clusterizované GP modely nejsou příliš konkurenceschopné, snad kromě clusterizovaného GP modelu s $u_2 = 0,85$ pro $\alpha = 0,05$, kdy vychází z pohledu ztrátové funkce lépe než odhadu z historické simulace a než všechny GEV modely.

Pořadí odhadů u metody historické simulace je proměnlivé. Ale s klesající α se odhadu v porovnání s jinými metodami spíše zlepšují. Kromě $\alpha = 0,005$ vždy předčí všechny GEV modely.

Porovnáme-li nyní mezi sebou pouze GP modely, zjištujeme, že pro $\alpha \in \{0,05; 0,025\}$ je vhodnější model s vyšší prahovou hodnotou $u_2 = 0,85$, naopak pro $\alpha \in \{0,01; 0,005\}$ je vhodnější model s nižší prahovou hodnotou $u_1 = 0,65$. Vždy vychází lépe nedclusterizované modely v porovnání se svými clusterizovanými protějšky.

Při porovnání GEV modelů mezi sebou je vždy z pohledu ztrátové funkce jednoznačně nejhorší model se čtvrtletními maximy. Platí, že čím kratší blok, tím menší hodnota ztrátové funkce. Nejlepší GEV model pro konzervativní portfolio je tudíž model s týdenními maximy.

Nyní porovnáme pro 95% a 97,5% VaR a ES varianční–kovarianční metodu a historickou simulaci s týdenním GEV modelem a GP modelem pro u_2 (v Tabulce 4.12 vyznačeno tučně). Pro 95% VaR a ES jsou nejlepší odhadu GP modelu s u_2 a odhadu z varianční–kovarianční metody. Ačkoliv pro 97,5% VaR a ES jsou tyto dvě metody stále v čele, pozorujeme, že se rozdíly mezi jejich ztrátovými funkcemi a hodnotou u historické simulace značně změnily.

Dále porovnáme varianční–kovarianční metodu a historickou simulaci s týdenním GEV modelem a GP modelem pro u_1 pro 99% a 99,5% VaR a ES (v Tabulce 4.12 vyznačeno tučně). Úspěšnost varianční–kovarianční metody v porovnání s ostatními klesá. Pro 99% VaR a ES jsou opět hodnoty ztrátových funkcí těchto metod poměrně vyrovnané. Pro 99,5% VaR a ES je metoda historické simulace stále schopná EVT modelům velmi dobře konkurovat.

Nyní odhlédneme od toho, jak malé rozdíly mezi některými ztrátovými funkcemi pozorujeme, a budeme sledovat čistě pořadí jednotlivých metod (na základě hodnot FZ funkcí). Pro každou hladinu α bylo seřazeným hodnotám FZ ztrátových funkcí přiděleno pořadí od 1 do 9 (metodě s nejnižší hodnotou FZ ztrátové funkce bylo přiřazeno pořadí „1“ atd.). Následně bylo pořadí pro jednotlivé metody zprůměrováno přes všechny zkoumané hladiny α . Tabulka 4.16 uvádí toto výsledné průměrné pořadí jednotlivých metod. Pozorujeme, že v průměru byly

u konzervativního portfolia nezávisle na hladině α nejlepší odhadu získané nedeclusterizovanými GP modely (pro oba prahy u_1 i u_2). Hned za nimi ale následují historická simulace i varianční–kovarianční metoda. Obecně horší odhadu rizikových měr konzervativního portfolia pozorujeme u GEV modelů a declusterizovaných GP modelů.

Tabulka 4.16: Průměrné pořadí metod odhadů VaR a ES dle hodnoty FZ ztrátové funkce pro konzervativní portfolio. Poslední dva sloupce uvádějí nejnižší hladinu pravděpodobnosti $1 - \alpha$, u níž již docházelo k nezamítnutí nulové hypotézy Kupiecova a Costanzino–Curranova testu.

| Metoda | Prům. pořadí | Prům. hodnota FZ | H_0 | Kupiec | H_0 | C.–C. |
|--------------------|--------------|------------------|-------|--------|-------|-------|
| GP pro u_2 | 2,50 | 0,41244 | | 95 % | | 99 % |
| GP pro u_1 | 2,75 | 0,41441 | | 99 % | | 99 % |
| HS | 3,00 | 0,41906 | | 99 % | | 99 % |
| Var.-Kovar. | 3,25 | 0,42237 | | 95 % | | |
| GEV týdenní | 4,25 | 0,44813 | | 99,5 % | | 99 % |
| GEV měsíční | 6,25 | 0,55621 | | | | |
| Decl. GP pro u_2 | 6,50 | 0,53312 | | 95 % | | |
| Decl. GP pro u_1 | 7,75 | 0,62394 | | | | |
| GEV čtvrtletní | 8,75 | 0,67267 | | | | |

Z výše sepsaných závěrů pro konzervativní portfolio vyplývá, že celkově nejnižší hodnoty ztrátových funkcí mají nedeclusterizované GP modely. Nicméně rozdíly mezi jednotlivými hodnotami ztrátových funkcí byly často velmi malé, nelze proto učinit závěry pouze na základě pořadí. Při detailnějším zkoumání hodnot ztrátových funkcí nebylo pro vyšší hladiny pravděpodobnosti α prokázáno, že by varianční–kovarianční metoda s předpokladem normality dat podávala horší odhadu vybraných měr rizika oproti metodám založených na teorii extrémních hodnot. Pro nízké hladiny pravděpodobnosti se ale výhody metod založených na teorii extrémních hodnot oproti varianční–kovarianční metodě (s předpokladem normality dat) prokázat podařilo. Pro nízké hladiny pravděpodobnosti nebylo prokázáno, že by metoda historické simulace podávala horší odhadu vybraných měr rizika oproti metodám založeným na teorii extrémních hodnot. Při hladině pravděpodobnosti $\alpha = 0,05$ ale historická simulace vykazuje horší výsledky než například nedeclusterizovaný GP model pro u_2 nebo varianční–kovarianční metoda.

V Tabulce 4.16 jsou rovněž uvedeny nejnižší hladiny pravděpodobnosti $1 - \alpha$, u nichž již docházelo k nezamítnutí nulové hypotézy Kupiecova (resp. Costanzino–Curranova) testu. Tyto údaje nám mohou poskytnout další informace o přesnosti jednotlivých odhadů.

4.6.2 Dynamické portfolio

V případě dynamického protfolia jsou výsledky srovnání metod jednoznačnější. Metoda historické simulace i varianční–kovarianční metoda s předpokladem normality přináší v porovnání s EVT metodami nevyhovující odhadu rizikových měr.

Z GP modelů jsou obecně lepší ty s $u_1 = 2,35$. Pro nižší hladiny α ale vycházejí velmi dobře i GP modely pro $u_2 = 3,05$. Pro 99% a 99,5% VaR a ES mají tyto čtyři modely nejnižší hodnoty ztrátové funkce (ačkoliv rozestupy s hodnotami ostatních ztrátových funkcí jsou vcelku nízké). Pokud bychom se ale měli rozhodnout, jako nejlepší GP model pro odhad rizikových měr dynamického portfolia se z hlediska ztrátových funkcí jeví nedeclusterizovaný GP model s $u_1 = 2,35$.

Mezi GEV modely vychází nejlépe model s měsíčními maximy. Nejhorší z GEV modelů z hlediska FZ ztrátové funkce je vždy GEV model s týdenními maximy (ačkoliv výsledky jsou opět často velmi vyrovnané).

Nedeclusterizovaný model s $u_1 = 2,35$ vychází vždy lépe než historická simulace i variančníkovarianční metoda, avšak pro 99,5% VaR a ES už jsou rozdíly ve ztrátových funkcích nízké. GEV model s měsíčními maximy byl z hlediska FZ funkce úspěšnější než historická simulace i variančníkovarianční metoda pro 95%, 97,5% a 99% odhadů. Pro 99,5% VaR a ES už je GEV model na přibližně stejně úrovni jako tyto dvě metody.

U dynamického portfolia bylo prokázáno, že pro vyšší hladiny pravděpodobnosti $\alpha \in \{0,05; 0,025; 0,01\}$ vykazují metody založené na teorii extrémních hodnot lepší odhady VaR a ES oproti metodě historické simulace a variančníkovarianční metodě. Pro $\alpha = 0,005$ se ale výhody EVT metod prokázat nepodařilo.

Nyní se opět podíváme pouze na průměrné pořadí jednotlivých metod, viz Tabulka 4.17. Z této tabulky vyplývá, že jednoznačně nejhorší metodou u dynamického portfolia je variančníkovarianční metoda. Přestože metoda historické simulace je na tom v průměru o něco lépe než variančníkovarianční metoda, nedokáže ani ona metodám založeným na EVT konkurovat. Jako nejlepší z modelů byl potvrzen nedeclusterizovaný GP model pro u_1 , ale také GEV model s měsíčními maximy a declusterizovaný GP model pro u_1 vycházejí z tohoto pohledu dobré.

Tabulka 4.17: Průměrné pořadí metod odhadů VaR a ES dle hodnoty FZ ztrátové funkce pro dynamické portfolio. Poslední dva sloupce uvádějí nejnižší hladinu pravděpodobnosti $1 - \alpha$, u níž již docházelo k nezamítnutí nulové hypotézy Kupiecova a Costanzino–Curanova testu.

| Metoda | Prům. pořadí | Prům. hodnota FZ | H_0 Kupiec | H_0 C.–C. |
|--------------------|--------------|------------------|--------------|-------------|
| GP pro u_1 | 1,50 | 1,15086 | 97,5 % | 99 % |
| Decl. GP pro u_1 | 2,50 | 1,16134 | 95 % | 99 % |
| GEV měsíční | 4,00 | 1,16665 | 95 % | 95 % |
| GP pro u_2 | 5,00 | 1,21203 | 99 % | 99 % |
| Decl. GP pro u_2 | 5,25 | 1,21480 | 99 % | 99 % |
| GEV čtvrtletní | 5,50 | 1,17707 | 97,5 % | 97,5 % |
| GEV týdenní | 6,50 | 1,19000 | 97,5 % | 97,5 % |
| HS | 6,75 | 1,20160 | 99 % | 99 % |
| Var.-Kovar. | 8,00 | 1,31005 | 99,5 % | 99 % |

Na základě získaných poznatků usuzujeme, že v případě dynamického portfolia jsou nejlepší odhady získané z nedecclusterizovaného GP modelu pro u_1 . Naopak metoda historické simulace, a především varianční–kovarianční metoda ukazují v porovnání s EVT metodami horší výsledky, obzvlášť pro vyšší hladiny α .

V Tabulce 4.17 jsou rovněž uvedeny nejnižší hladiny pravděpodobnosti $1 - \alpha$, u nichž již docházelo k nezamítnutí nulové hypotézy Kupiecova (resp. Costanzino–Curanova) testu. Tyto údaje nám mohou poskytnout další informace o přesnosti jednotlivých odhadů. Například pro GEV model s měsíčními bloky dochází k nezamítnutí už od 95 % u obou testů. U nedecclusterizovaného GP modelu pro u_1 sice dochází k prvnímu nezamítnutí Kupiecova testu také už pro hladinu 95 %, ale u Contanzino–Curanova testu až u 99 %. To naznačuje, že tento GP model dobře odhaduje VaR, ale hůře ES ve srovnání s měsíčním GEV modelem. Tento fakt by mohl být argumentem, proč zvažovat i jiné varianty než pouze nedecclusterizovaný GP model.

4.6.3 Konzervativní a dynamické portfolio – srovnání

S přihlédnutím k průměrnému pořadí jednotlivých metod bylo zjištěno, že obecně nejlepší odhady jsou z nedecclusterizovaných GP modelů. U dynamického portfolia se varianční–kovarianční metoda s předpokladem normality dat ukazuje jako nedostačující. U konzervativního portfolia výsledky nejsou tak jednoznačné, nicméně při nižší hladině α již opět varianční–kovarianční metoda s předpokladem normality dat nedokáže EVT metodám konkurovat.

Na základě FZ ztrátové funkce nebylo prokázáno, že by metody založené na teorii extrémních hodnot obecně vykazovaly lepší odhady měr rizika než metoda historické simulace. V případě konzervativního portfolia byla metoda schopna plně konkurovat vybraným EVT metodám.

Na druhou stranu přihlédneme-li k výsledkům Kupiecova a Costanzino–Curanova testu, v případě dynamického portfolia přichází v úvahu rovněž například GEV model s měsíčními maximy, které dle Costanzino–Curanova testu dokáží lépe odhadnout ES již při vyšší hladině pravděpodobnosti α .

Je vcelku překvapivé, že jako nevhodnější GP model pro dynamické portfolio byl zvolen model se značně nižším parametrem $\hat{\xi}$ v porovnání s GP modely u konzervativního portfolia. Odhad parametrů tvaru naznačují velmi těžké chvosty u konzervativního portfolia.

Hlavním důvodem, proč ztrátové funkce varianční–kovarianční metody pro nízké hodnoty α ($\alpha = 0,005$) dávají horší výsledky, jsou odhady ES, které v porovnání s jinými metodami výrazně podhodnocují riziko. V případě vyšších hladin α ($\alpha = 0,05$) bývají naopak odhady ES u varianční–kovarianční metody často příliš nadhodnocené, což například zapříčinilo špatné výsledky zpětného testování dynamického portfolia (pomocí ztrátové funkce) pro tuto metodu. Z pohledu odhadů VaR by tedy možná varianční–kovarianční metoda (s předpokladem normality dat) ještě zvládla v porovnání s ostatními metodami obstát, u odhadů ES už to

ale tvrdit nelze.

Vzhledem k rostoucímu významu ES mezi mírami rizika je problematika odhadů ES variančníkovarianční metodou za předpokladu normality klíčovým důvodem, proč by bylo vhodné od této metody upustit, a dát prostor metodám, které jsou schopny konce rozdělení modelovat lépe.

Na závěr poznamenejme, že FZ ztrátová funkce penalizuje pouze příliš podhodnocující odhadu rizika a nebore v potaz možné zbytečné nadhodnocení rizika. Zbytečně konzervativní odhadu měr rizika také nejsou v praxi vítány, jelikož nutí společnosti držet kapitál, který by ve skutečnosti mohly investovat jinde. Záleží, pro koho jsou odhadu rizikových měr určeny. Drobný investor, který neinvestuje za účelem obchodování, ale za účelem postupného zhodnocování držené investice, obvykle investuje pouze tu část úspor, kterou momentálně nepotřebuje. Při výrazném propadu výnosů tudíž takovému investorovi nedělá problém krizi přečkat do doby, než hodnoty investic opět stoupnou. VaR i ES má pro něj tedy především informativní charakter. Naproti tomu bankovní instituce mají povinnost na základě těchto odhadů držet minimální kapitálové požadavky, aby byly v případě výrazných propadů hodnoty investic schopny zaplatit všechny své finanční závazky. Zároveň ale chtějí držet kapitálu co nejméně, aby mohly většinu zhodnocovat v podobě investic.

Ztrátové funkce, které by zároveň penalizovaly i příliš konzervativní odhadu rizika, už jsou u odhadů VaR běžnou praxí. Vzhledem k rostoucí úloze ES v Risk Managementu by bylo dobré sestavit vhodnou asymetrickou ztrátovou funkci, která by penalizovala nejen příliš podhodnocující, ale částečně také příliš konzervativní odhadu rizika, a zároveň by ve svém výpočtu brala v potaz nejen odhad VaR, ale i příslušný odhad ES.

Závěr

Hlavním tématem diplomové práce byla aplikace teorie extrémních hodnot na odhad vybraných měr rizika finančních časových řad. Cílem práce bylo porovnat tyto odhady rizikových měr získaných pomocí teorie extrémních hodnot s odhady získanými použitím jiných tradičních metod. Nejprve byla sestavena dvě různá portfolia. Portfolia byla sestavena tak, aby jedno bylo spíše konzervativní a druhé dynamické. Pro obě portfolia byla odhadována hodnota v riziku a očekávaná ztráta, a to pro několik hladin pravděpodobnosti. Hlavním cílem práce bylo tyto odhady mezi sebou porovnat a otestovat hypotézu, že vzhledem k povaze finančních časových řad vykazují metody založené na teorii extrémních hodnot lepší výsledky odhadů rizikových měr oproti jiným metodám. Odhady hodnoty v riziku a očekávané ztráty byly navzájem srovnávány z pohledu metodiky odhadu, hladiny pravděpodobnosti a typu vstupních dat (konzervativní vs. dynamické). Odhady byly srovnávány na základě několika metod zpětného testování. Konkrétně byl v této diplomové práci použit Kupiecův test pokrytí pro hodnotu v riziku, Costanzino–Curranův test pro očekávanou ztrátu a Fissler–Ziegel ztrátová funkce pro hodnotu v riziku a očekávanou ztrátu dohromady. Bylo zmíněno úskalí Fissler–Ziegel ztrátové funkce, a to sice že nepenalizuje příliš konzervativní odhady. I přesto byl při testování odhadů měr rizika kladen hlavní důraz právě na Fissler–Ziegel ztrátovou funkci, jelikož pro srovnávání více modelů mezi sebou jsou ztrátové funkce vhodnou cestou.

Na základě výsledků zpětného testování nebylo potvrzeno, že metody založené na teorii extrémních hodnot obecně poskytují oproti jiným metodám lepší odhady hodnoty v riziku a očekávané ztráty nezávisle na volbě EVT metody. Na základě FZ ztrátové funkce ale bylo zjištěno, že odhady získané pomocí nedecusterizovaného GP modelu (při vhodné volbě prahové hodnoty) jsou obecně lepší v porovnání s odhady získanými varianční–kovarianční metodou s předpokladem normality dat, a to bez ohledu na zvolenou hladinu pravděpodobnosti nebo na typu portfolia (ačkoliv u konzervativního portfolia nebyly rozdíly tolík znatelné). NA základě hodnot FZ ztrátové funkce usuzujeme, že odhady VaR a ES založené na teorii extrémních hodnot poskytují lepší výsledky ve srovnání s odhady získanými varianční–kovarianční metodou s předpokladem normality dat.

U konzervativního portfolia bylo na základě FZ ztrátové funkce prokázáno, že odhady rizikových měr založené na teorii extrémních hodnot pro velmi nízké hladiny pravděpodobnosti jsou lepší než příslušné odhady založené na předpokladu normality vstupních dat. V případě vyšších hladin pravděpodobnosti byla ale naopak tato hypotéza vyvrácena. Přestože tedy v obecném měřítku jsou odhady měr rizika založené na teorii extrémních hodnot lepší, lze najít případy, kdy je varianční–kovarianční metoda s předpokladem normality dat plně schopna metodám založeným na EVT konkurovat.

Na základě zpětného testování FZ ztrátovou funkcí docházíme k závěru, že odhady VaR a ES založené na nedecusterizovaném GP modelu s vhodně zvoleným prahem jsou přibližně stejně dobré nebo lepší než metoda historické simulace nebo varianční–kovarianční metoda s předpokladem normality dat. Bylo zjištěno, že odhady VaR a ES založené na GEV modelech obvykle

nejsou tak dobré jako příslušné odhady založené na vhodném nedeclusterizovaném GP modelu. Výjimkou jsou výsledky Costanzino–Curanova testu u dynamického portfolia, které naznačují velmi dobré výsledky odhadů ES pomocí GEV modelů. Na základě poznatků získaných v této diplomové práci docházíme k závěru, že metoda odhadu VaR a ES vycházející z nedeclusterizovaného GP rozdělení s vhodně zvoleným prahem je nejrobustnější z testovaných metod, a to jak z hlediska výše hladiny pravděpodobnosti, tak i nezávisle na typu vstupních dat nebo konkrétní odhadované míře rizika.

Jedním z dílčích cílů diplomové práce bylo zároveň ukázat, jak moc špatné odhady varianč–kovarianční metoda s předpokladem normality dat ve srovnání s jinými metodami přináší. Bylo proto poukázáno na obecnou problematiku odhadů očekávané ztráty pro nízké hladiny pravděpodobnosti, které byly získány varianč–kovarianční metodou s předpokladem normality dat. Odhady očekávané ztráty mají podobně jako odhady hodnoty v riziku přímý vliv na hodnotu Fissler–Ziegel ztrátové funkce, takže vysoké hodnoty ztrátové funkce u některých odhadů varianč–kovarianční metodou s předpokladem normality dat mohly být způsobeny právě těmito nevyhovujícími odhady očekávané ztráty.

V návaznosti na tuto diplomovou práci se nabízí zaměřit se dále na ztrátové funkce zohledňující odhady hodnoty v riziku i očekávané ztráty, které by zároveň do jisté míry penalizovaly i příliš konzervativní odhady. Jedná se o nepříliš prozkoumanou oblast, jejíž vývoj by ale mohl v budoucnu pozitivně ovlivnit proces zpětného testování těchto rizikových měr. Diplomovou práci je také možné rozšířit například o další metody odhadu hodnoty v riziku a očekávané ztráty.

Tato diplomová práce by měla přispět k lepšímu pochopení problematiky aplikace teorie extrémních hodnot na odhad hodnoty v riziku a očekávané ztráty u finančních časových řad. Slouží také jako souhrnné srovnání několika metod pro odhad těchto rizikových měr.

Použitá literatura

- Acerbi, C. & Szekely, B. (2017). General Properties of Backtestable Statistics. *SSRN Electronic Journal*, 1–30. <https://doi.org/10.2139/ssrn.2905109>
- Adamko, P., Spuchl'áková, E. & Valášková, K. (2015). The history and ideas behind VaR. *Procedia Economics and Finance*, 24, 18–24. [https://doi.org/10.1016/S2212-5671\(15\)00607-3](https://doi.org/10.1016/S2212-5671(15)00607-3)
- Ardia, D., Boudt, K. & Catania, L. (2019). Generalized Autoregressive Score Models in R: The GAS Package. *Journal of Statistical Software*, 88(6), 1–28. <https://doi.org/10.18637/jss.v088.i06>
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M. & Heath, D. (1999). Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, 9(3), 203–228. <https://doi.org/https://doi.org/10.1111/1467-9965.00068>
- Auguie, B. (2017). *gridExtra: Miscellaneous Functions for "Grid" Graphics* [R package version 2.3]. <https://CRAN.R-project.org/package=gridExtra>
- Baeriswyl, R., Oktay, A. & Ramelet, M.-A. (2023). Exchange rate shocks and equity prices: the role of currency denomination. *Swiss National Bank Working Paper*, (5), 1–59. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.4655105>
- Basel Committee on Banking Supervision. (2019). *The Market Risk Framework – In Brief* (tech. zpr.). Bank for International Settlements. https://www.bis.org/bcbs/publ/d457_inbrief.pdf
- Basel Committee on Banking Supervision. (2023). *Internal models approach: capital requirements calculation (MAR33)* (tech. zpr.). Bank for International Settlements. https://www.bis.org/basel_framework/chapter/MAR/33.htm?inforce=20230101&published=20200605
- Beguería, S. (2005). Uncertainties in partial duration series modelling of extremes related to the choice of the threshold value. *Journal of Hydrology*, 303(1-4), 215–230. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2004.07.015>
- Bilan, Y., Mentel, G., Streimikiene, D. & Szetela, B. (2020). WEATHER RISK MANAGEMENT IN THE WEATHER-VAR APPROACH. ASSUMPTIONS OF VALUE-AT-RISK MODELING. *Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research*, 54(1), 31–48. <https://doi.org/10.24818/18423264/54.1.20.03>
- Britten-Jones, M. & Schaefer, S. M. (1999). Non-linear value-at-risk. *Review of Finance*, 2(2), 161–187. <https://doi.org/10.1023/A:1009779322802>
- Calmon, W., Ferioli, E., Lettieri, D., Soares, J. & Pizzinga, A. (2021). An Extensive Comparison of Some Well-Established Value at Risk Methods. *International Statistical Review*, 89(1), 148–166. <https://doi.org/https://doi.org/10.1111/insr.12393>
- Campbell, S. D. (2005). *A Review of Backtesting and Backtesting Procedures* (tech. zpr.). Board of Governors of the Federal Reserve System (U.S.) <https://www.federalreserve.gov/econres/feds/a-review-of-backtesting-and-backtesting-procedures.htm>

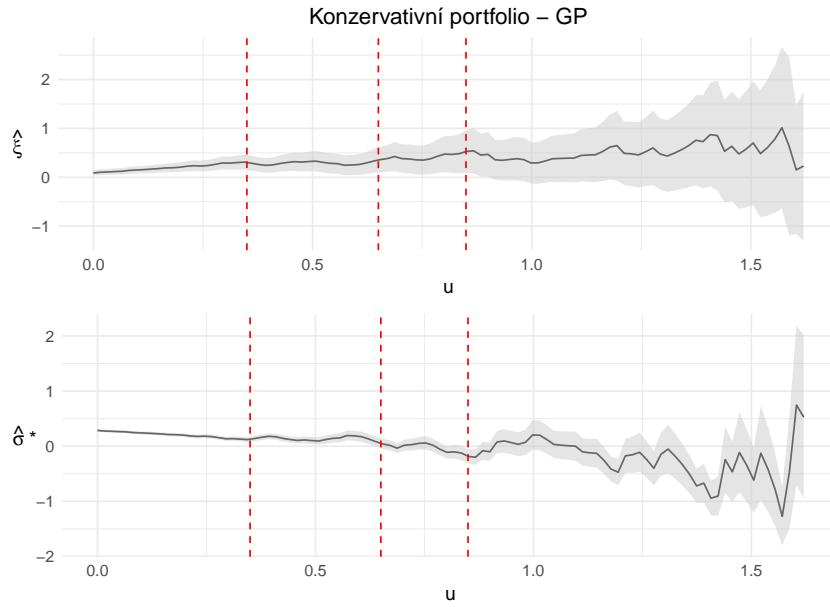
- Cao, H., Li, J. & Fine, J. P. (2016). On last observation carried forward and asynchronous longitudinal regression analysis. *Electronic Journal of Statistics*, 10(1), 1155–1180. <https://doi.org/10.1214/16-EJS1141>
- Cervantes, M. Á. N., Benito, S. & López-Martín, C. (2024). Assessing the Performance of the Block Maxima Method in Estimating Market Risk. <https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-4426771/v1>
- Clift, S., Costanzino, N. & Curran, M. (2016). Empirical Performance of Backtesting Methods for Expected Shortfall. *SSRN Electronic Journal*, 1–18. <https://doi.org/10.2139/ssrn.2618345>
- Coles, S. (2001). *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-3675-0>
- Costanzino, N. & Curran, M. (2015). Backtesting general spectral risk measures with application to expected shortfall. *The Journal of Risk Model Validation*, 9(1), 21–31. <https://doi.org/10.21314/JRMV.2015.131>
- Dahl, D. B., Scott, D., Roosen, C., Magnusson, A. & Swinton, J. (2019). *xtable: Export Tables to LaTeX or HTML* [R package version 1.8-4]. <https://CRAN.R-project.org/package=xtable>
- Dkengne Sielenou, P. A., Girard, S. & Ahiad, S. (2020). An automatic procedure to select a block size in the continuous generalized extreme value model estimation. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.25968.07685>
- Dvořák, J. (2022). *Průvodce pro pasivní investování: od Rozbitého prasátka*. BizBooks.
- Embrechts, P., Klüppelberg, C. & Mikosch, T. (1997). *Modelling Extremal Events: for Insurance and Finance*. Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-33483-2>
- Fissler, T., Ziegel, J. & Gneiting, T. (2015). Expected Shortfall is jointly elicitable with Value at Risk – Implications for backtesting, 1–7. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1507.00244>
- Fissler, T. & Ziegel, J. F. (2016). Higher order elicibility and Osband's principle. *The Annals of Statistics*, 44(4), 1680–1707. <https://doi.org/10.1214/16-AOS1439>
- Galichon, A. (2010). The VAR at Risk. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 13(04), 503–506. <https://doi.org/10.1142/S0219024910005875>
- Garrido, M. & Lezaud, P. (2013). Extreme Value Analysis : an Introduction. *Journal de la Société Française de Statistique*, 154(2), 66–97. <https://enac.hal.science/hal-00917995/document>
- Gilleland, E. & Katz, R. W. (2016). extRemes 2.0: An Extreme Value Analysis Package in R. *Journal of Statistical Software*, 72(8), 1–39. <https://doi.org/10.18637/jss.v072.i08>
- Gilli, M. & Kellezi, E. (2006). An Application of Extreme Value Theory for Measuring Financial Risk. *Computational Economics*, 27, 207–228. <https://doi.org/10.1007/s10614-006-9025-7>
- Gneiting, T. (2011). Making and Evaluating Point Forecasts. *Journal of the American Statistical Association*, 106(494), 746–762. <https://doi.org/10.1198/jasa.2011.r10138>

- Gomes, M. I. & Guillou, A. (2015). Extreme Value Theory and Statistics of Univariate Extremes: A Review. *International Statistical Review*, 83(2), 263–292. <https://doi.org/10.1111/insr.12058>
- Halilbegovic, S. & Vehabovic, M. (2016). Backtesting Value at Risk Forecast: the Case of Kupiec Pof-Test. *European Journal of Economic Studies*, 17(3), 393–404. <https://doi.org/10.13187/es.2016.17.393>
- He, X. D., Kou, S. & Peng, X. (2022). Risk Measures: Robustness, Elicitability, and Backtesting. *Annual Review of Statistics and Its Application*, 9, 141–166. <https://doi.org/10.1146/annurev-statistics-030718-105122>
- Hosking, J. R. M. & Wallis, J. R. (1997). *Regional frequency analysis*. Cambridge University Press.
- Hudson, R. S. & Gregoriou, A. (2015). Calculating and Comparing Security Returns is harder than you think: A Comparison between Logarithmic and Simple Returns. *International Review of Financial Analysis*, 38, 151–162. <https://doi.org/10.1016/j.irfa.2014.10.008>
- Hull, J. C. (2015). *Risk Management and Financial Institutions* (4th). John Wiley & Sons.
- Jorion, P. (2007). *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk* (3. vyd.). McGraw Hill.
- justETF. (2025). ETF Screener [Přístup z: 24. února 2025].
- Kamdem, J. S. (2005). Value-at-Risk and expected shortfall for linear portfolios with elliptically distributed risk factors. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 8(5), 537–551. <https://doi.org/10.1142/S0219024905003104>
- Khindanova, I. N. & Rachev, S. T. (2019). Value at risk: Recent Advances. In G. Anastassiou (Ed.), *Handbook of Analytic Computational Methods in Applied Mathematics* (s. 801–858). Chapman & Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/9780429123610>
- Krause, A. (2003). Exploring the Limitations of Value at Risk: How Good Is It in Practice? *The Journal of Risk Finance*, 4(2), 19–28. <https://doi.org/10.1108/eb022958>
- Leippold, M. (2015). Value-at-Risk and Other Risk Measures. In H. K. Baker & G. Filbeck (Ed.), *Investment Risk Management* (s. 283–303). Oxford University Press. https://students.aiu.edu/submissions/profiles/resources/onlineBook/b9b2w3_Investment_Risk_Management.pdf
- Linsmeier, T. J. & Pearson, N. D. (2000). Value at Risk. *Financial Analysts Journal*, 56(2), 47–67. <https://doi.org/10.2469/faj.v56.n2.2343>
- Manganelli, S. & Engle, R. F. (2001). Value at Risk Models in Finance. *ECB Working Paper*, 75. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.356220>
- Markose, S. & Alentorn, A. (2005). The Generalized Extreme Value (GEV) Distribution, Implied Tail Index and Option Pricing. *Journal of Derivatives*, 18. <https://doi.org/10.3905/jod.2011.18.3.035>
- Millard, S. P. (2013). *EnvStats: An R Package for Environmental Statistics*. Springer. <https://www.springer.com>
- Özari, Ç., Eren, Ö. & Saygin, H. (2019). A New Methodology for the Block Maxima Approach in Selecting the Optimal Block Size. *Tehnički vjesnik*, 26(5), 1292–1296. <https://doi.org/10.17559/TV-20180529125449>

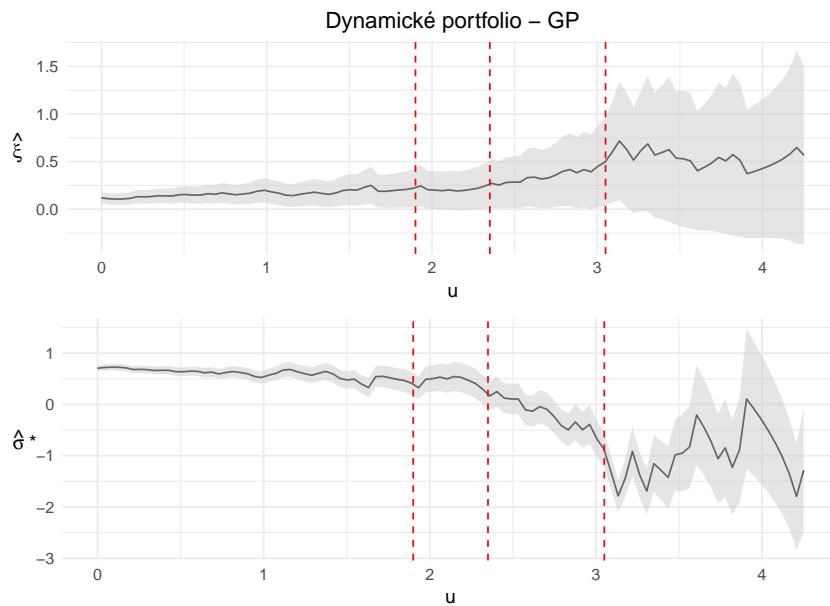
- Patton, A. J., Ziegel, J. F. & Chen, R. (2019). Dynamic Semiparametric Models for Expected Shortfall (and Value-at-Risk). *Journal of Econometrics*, 211(2), 388–413. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2018.10.008>
- Prakash, P., Sangwan, V. & Singh, K. (2021). Transformational Approach to Analytical Value-at-Risk for near Normal Distributions. *Journal of Risk and Financial Management*, 14(2), 51. <https://doi.org/10.3390/jrfm14020051>
- R Core Team. (2023). *R: A Language and Environment for Statistical Computing* [R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria]. <https://www.R-project.org/>
- Ribatet, M. & Dutang, C. (2024). *POT: Generalized Pareto Distribution and Peaks Over Threshold* [R package version 1.1-11]. <https://CRAN.R-project.org/package=POT>
- RStudio Team. (2023). *RStudio: Integrated Development Environment for R* [RStudio, PBC, Boston, MA]. <https://www.rstudio.com/>
- Ryan, J. A. & Ulrich, J. M. (2024a). *quantmod: Quantitative Financial Modelling Framework* [R package version 0.4.26]. <https://CRAN.R-project.org/package=quantmod>
- Ryan, J. A. & Ulrich, J. M. (2024b). *xts: eXtensible Time Series* [R package version 0.14.1]. <https://CRAN.R-project.org/package=xts>
- Strnad, P. (2009). Řízení tržních rizik pomocí Value at Risk – úskalí a problémy. *Ekonomické rozhlady*, 38(1), 91–102. https://euba.sk/www_write/files/SK/ekonomicke-rozhlady/er1_2009_strnad-10136.pdf
- Szubzda, F. & Chlebus, M. (2019). Comparison of Block Maxima and Peaks Over Threshold Value-at-Risk models for market risk in various economic conditions. *Central European Economic Journal*, 6(53), 70–85. <https://doi.org/10.2478/ceej-2019-0005>
- Taleb, N. N. (2020). *Statistical Consequences of Fat Tails: Real World Preasymptotics, Epistemology, and Applications* (2nd). STEM Academic Press.
- Taylor, J. W. (2020). Forecast Combinations for Value at Risk and Expected Shortfall. *International Journal of Forecasting*, 36(2), 428–441. <https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2019.05.014>
- Trapletti, A. & Hornik, K. (2024). *tseries: Time Series Analysis and Computational Finance* [R package version 0.10-58]. <https://CRAN.R-project.org/package=tseries>
- Tsay, R. S. (2005). *Analysis of Financial Time Series* (2. vyd.). John Wiley & Sons.
- Wang, J., You, S., Wu, Y., Zhang, Y. & Bin, S. (2016). A Method of Selecting the Block Size of BMM for Estimating Extreme Loads in Engineering Vehicles. *Mathematical Problems in Engineering*, 2016(1), 1–9. <https://doi.org/https://doi.org/10.1155/2016/6372197>
- Wickham, H. (2016). *ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*. Springer-Verlag New York. <https://ggplot2.tidyverse.org>
- Wickham, H., François, R., Henry, L., Müller, K. & Vaughan, D. (2023). *dplyr: A Grammar of Data Manipulation* [R package version 1.1.4]. <https://CRAN.R-project.org/package=dplyr>
- Wirch, J. L. (1999). Raising Value at Risk. *North American Actuarial Journal*, 3(2), 106–115. <https://doi.org/10.1080/10920277.1999.10595804>
- Yahoo. (2025). Yahoo Finance [Přístup z: 24. února 2025]. <https://finance.yahoo.com>

Přílohy

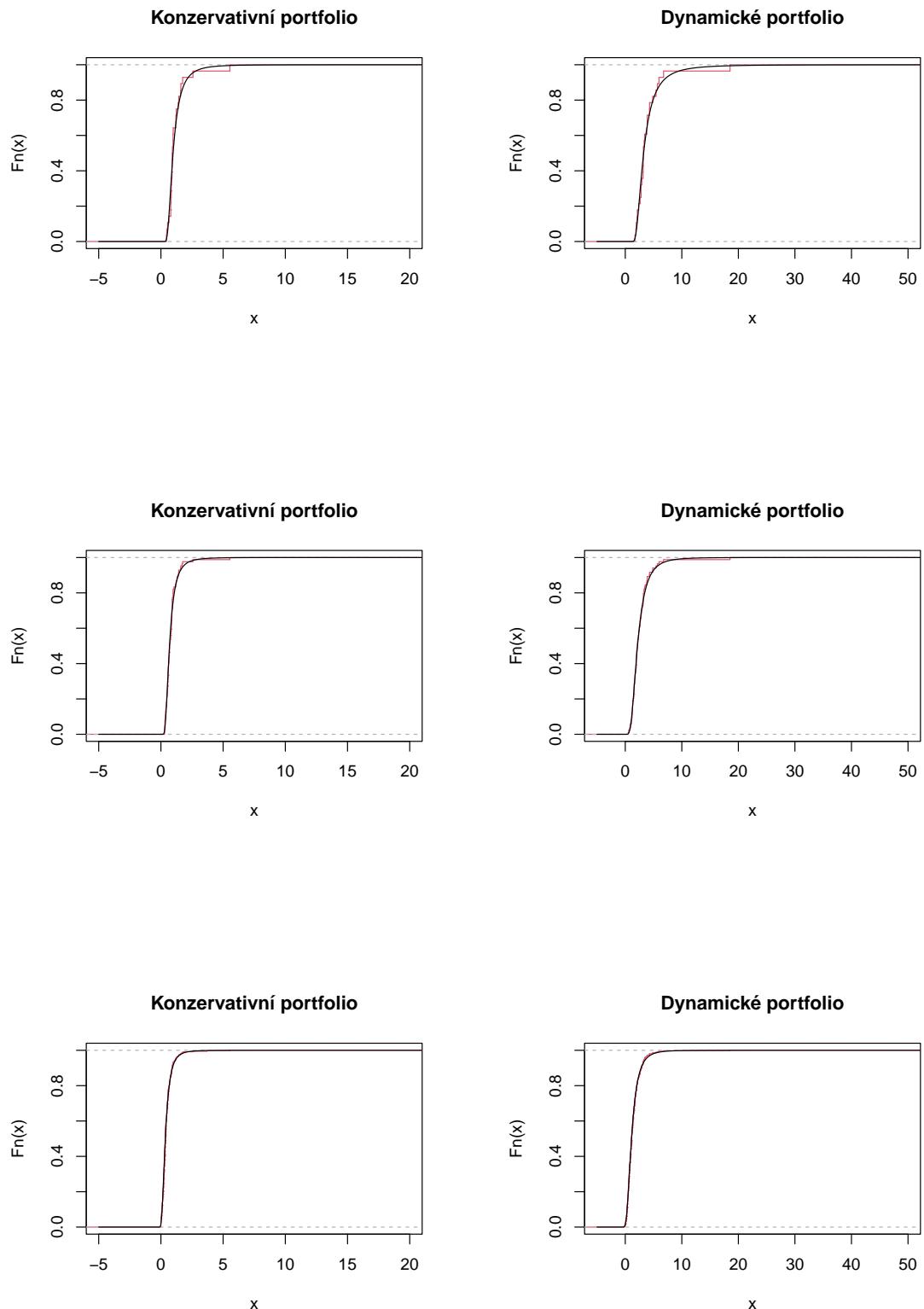
A. Grafy



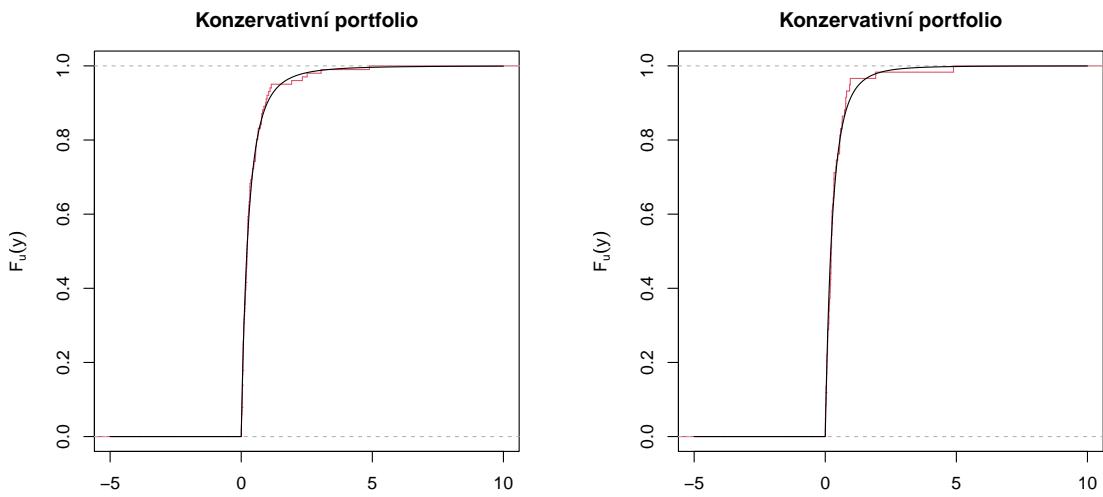
Obrázek A.1: Graf závislosti odhadů parametrů GP rozdělení konzervativního portfolia na volbě prahu, zvolen delší interval $u \in (0; 1,6)$.



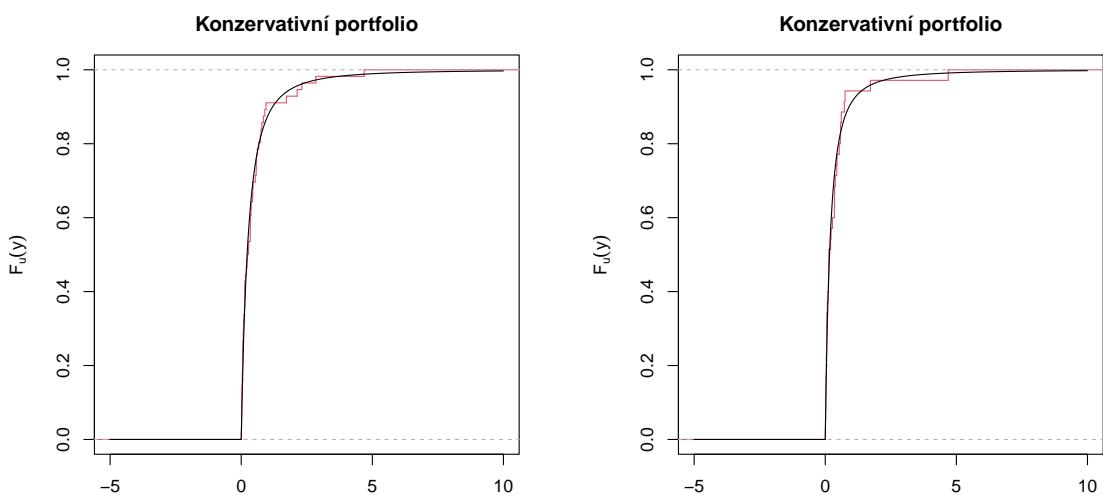
Obrázek A.2: Graf závislosti odhadů parametrů GP rozdělení dynamického portfolia na volbě prahu, zvolen delší interval $u \in (0; 4,25)$.



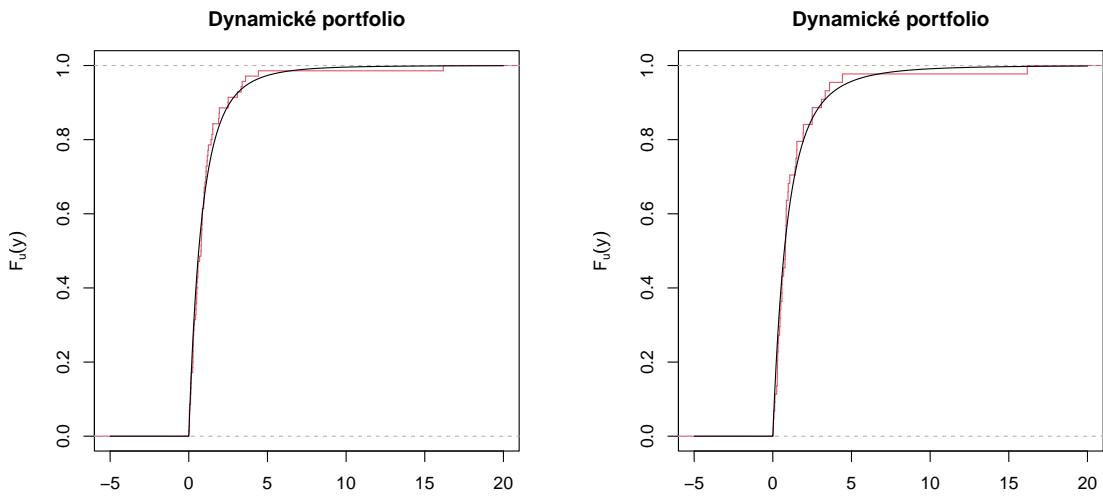
Obrázek A.5: Grafy empirických distribučních funkcí GEV rozdělení proložené teoretickou křivkou. Uspořádáno pod sebou pro čtvrtletní, měsíční a týdenní bloky, vlevo pro konzervativní a vpravo pro dynamické portfolio.



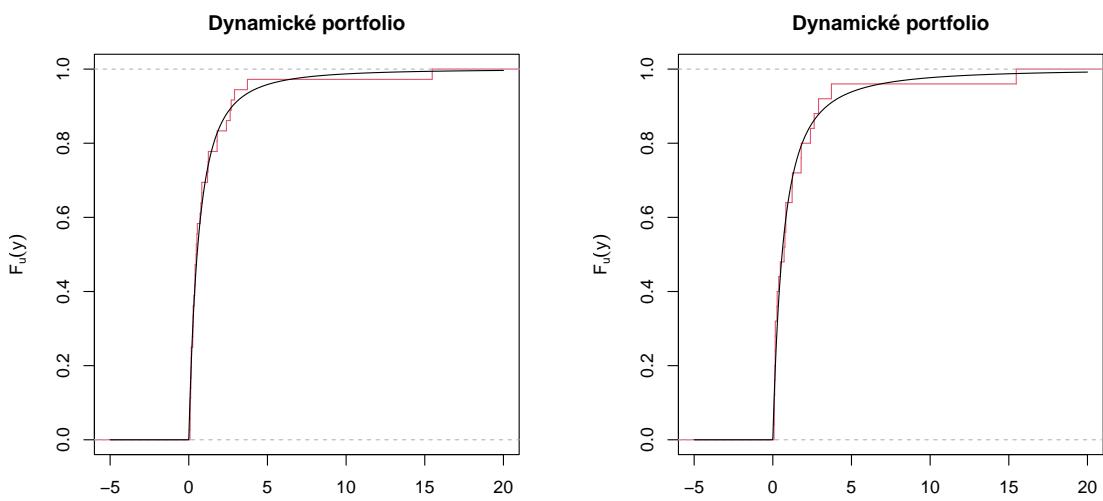
Obrázek A.6: Grafy empirických distribučních funkcí GP rozdělení pro $u_1 = 0,65$ pro konzervativní portfolio, vpravo declusterizovaný model, proložené teoretickou křivkou.



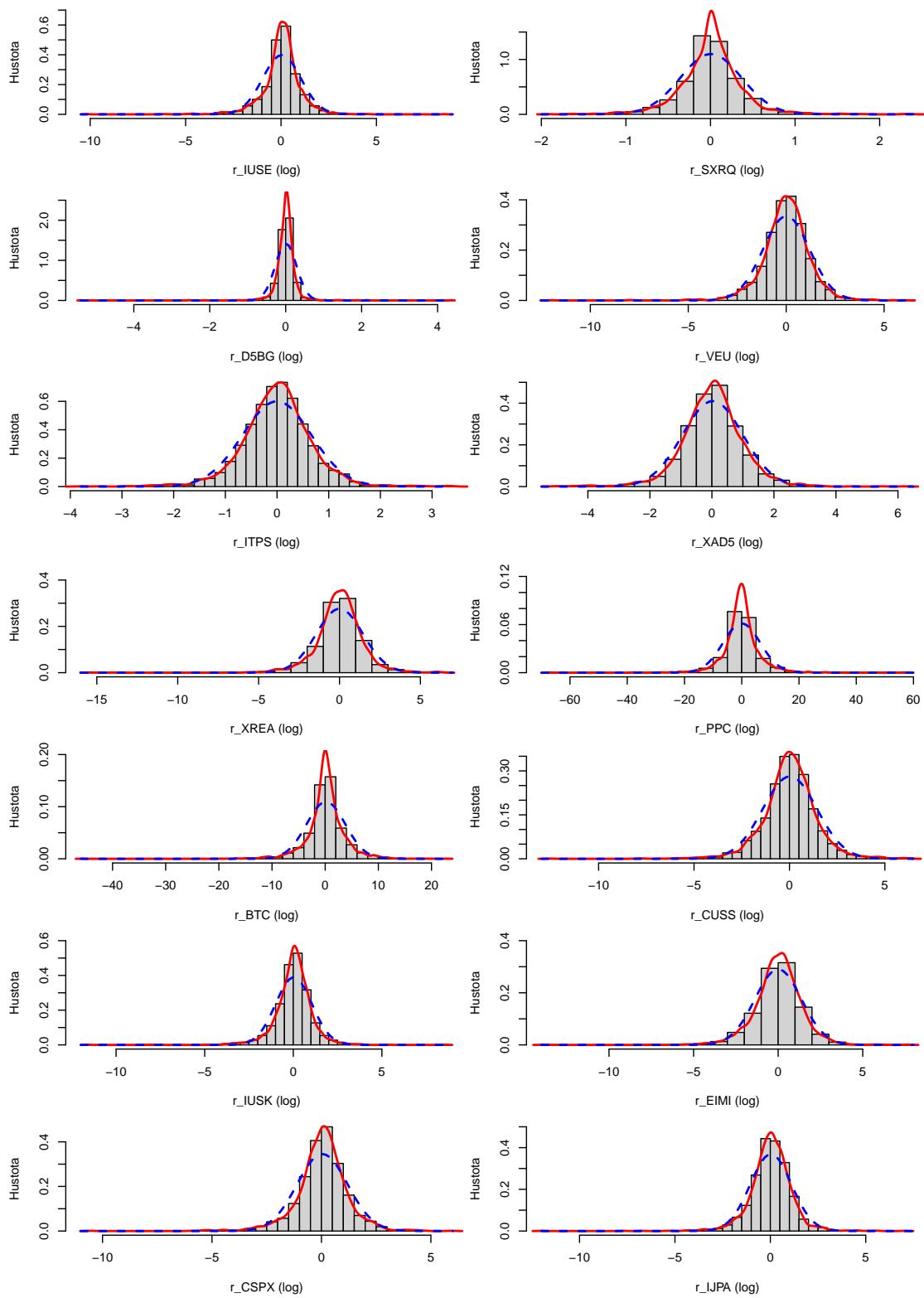
Obrázek A.7: Grafy empirických distribučních funkcí GP rozdělení pro $u_2 = 0,85$ pro konzervativní portfolio, vpravo declusterizovaný model, proložené teoretickou křivkou.



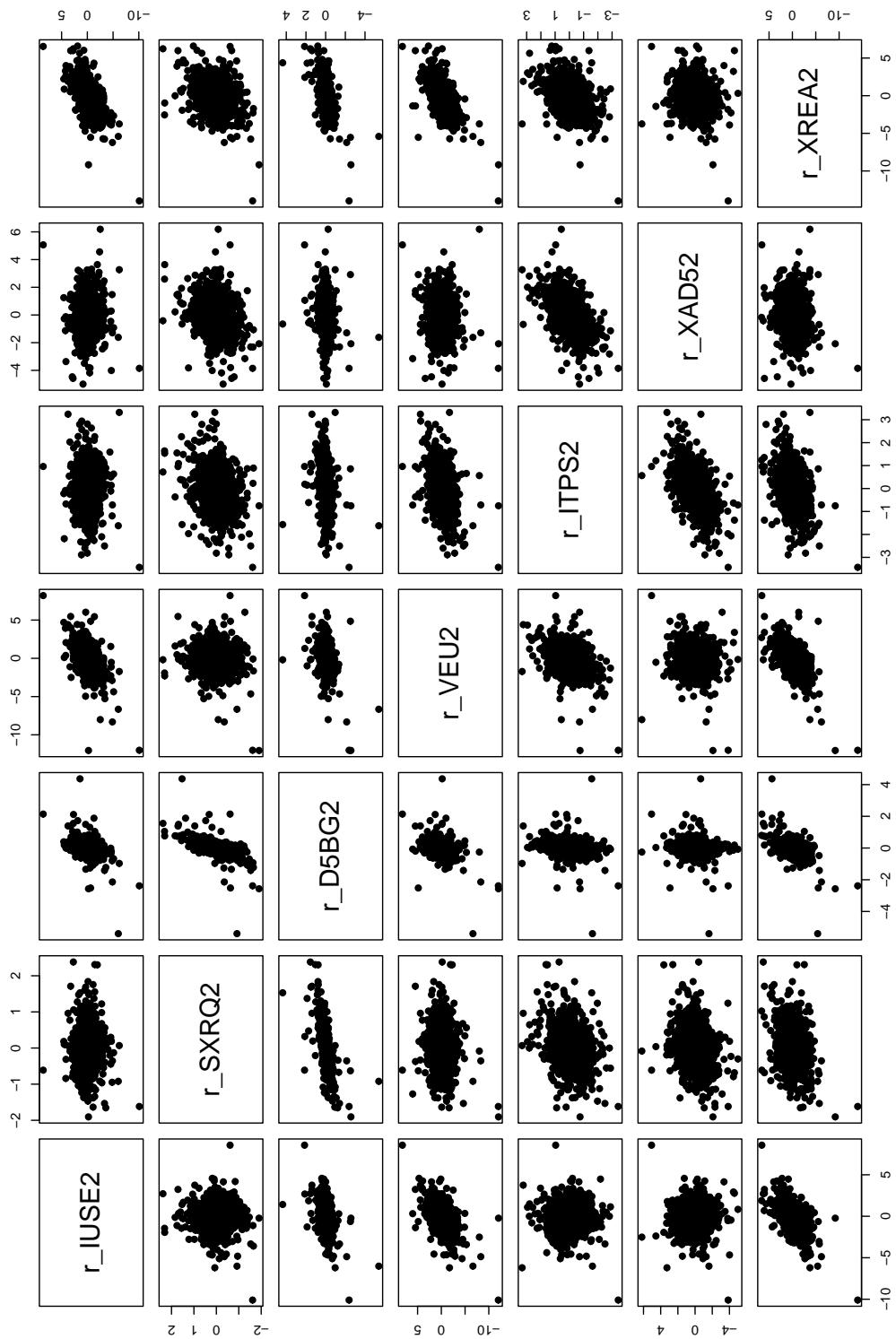
Obrázek A.8: Grafy empirických distribučních funkcí GP rozdělení pro $u_1 = 2,35$ pro dynamické portfolio, vpravo declusterizovaný model, proložené teoretickou křivkou.



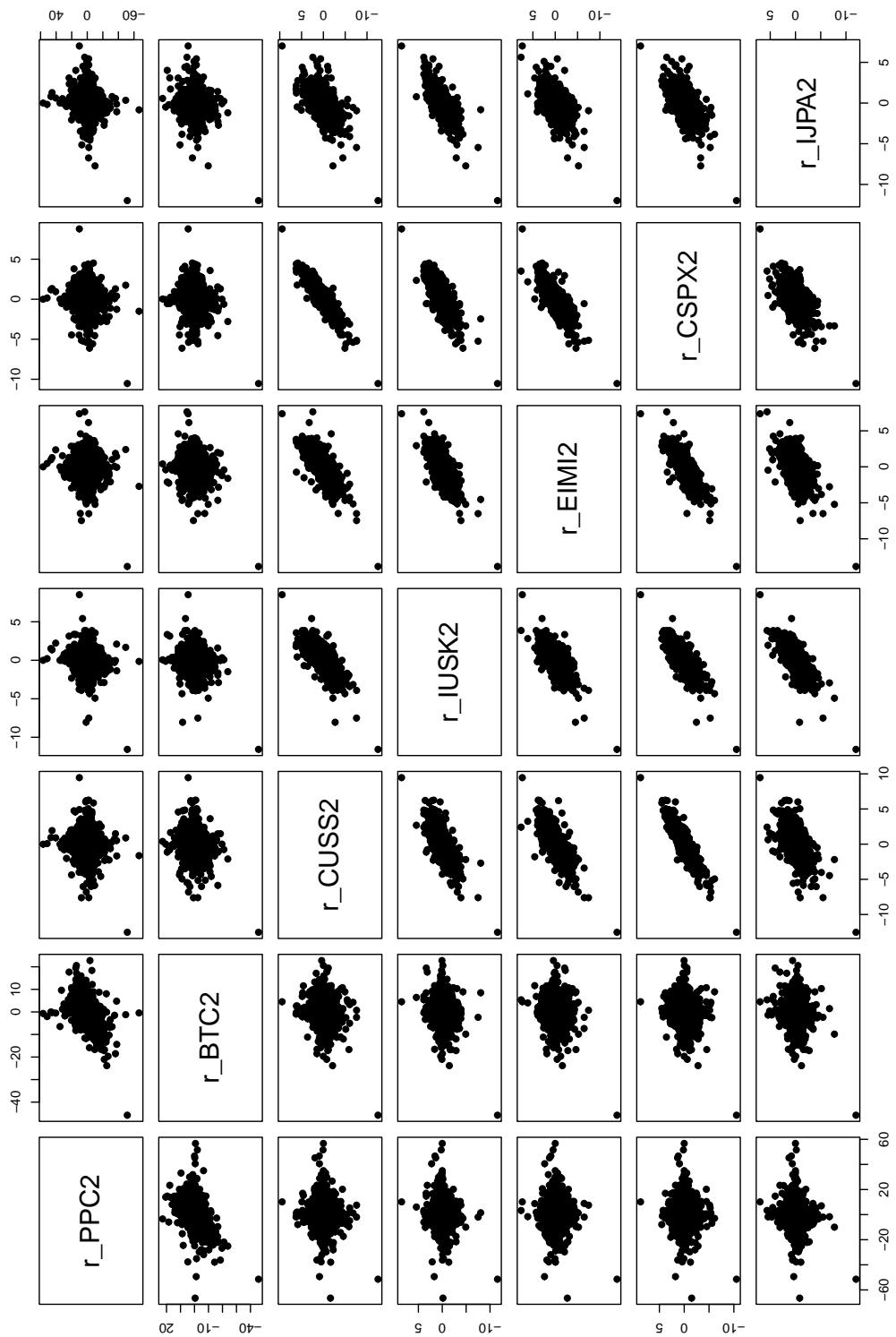
Obrázek A.9: Grafy empirických distribučních funkcí GP rozdělení pro $u_2 = 3,05$ pro dynamické portfolio, vpravo declusterizovaný model, proložené teoretickou křivkou.



Obrázek A.10: Histogramy rozdělení logaritmických denních výnosů jednotlivých aktiv v letech 2015 až 2024. Červenou čarou jádrový odhad, modrou přerušovanou čarou odpovídající křivka normálního rozdělení.



Obrázek A.11: Scatterplot denních výnosů aktiv v konzervativním portfoliu.



Obrázek A.12: Scatterplot denních výnosů aktiv v dynamickém portfoliu.

B. Tabulky

Tabulka B.1: Odhadý 95% VaR konzervativního portfolia.

| Metoda odhadu | 95% Interval spolehlivosti | | |
|---------------------------------|----------------------------|--------------|-----------|
| | Dolní mez | Bodový odhad | Horní mez |
| Historická simulace | -0,59453 | -0,55248 | -0,51210 |
| Varianční–kovarianční metoda | -1,21650 | -0,83001 | -0,49255 |
| GEV model pro čtvrtletní maxima | -0,66308 | -0,42968 | -0,30739 |
| GEV model pro měsíční maxima | -0,54178 | -0,48053 | -0,43299 |
| GEV model pro týdenní maxima | -0,57149 | -0,52720 | -0,48430 |
| GP model pro u_1 | -0,60527 | -0,58772 | -0,56473 |
| Declust. GP model pro u_1 | -0,53243 | -0,45727 | -0,26435 |
| GP model pro u_2 | -0,75564 | -0,66454 | -0,51234 |
| Declust. GP model pro u_2 | -0,78099 | -0,65890 | -0,13862 |

Tabulka B.2: Odhadý 95% ES konzervativního portfolia.

| Metoda odhadu | 95% Interval spolehlivosti | | |
|---------------------------------|----------------------------|----------|-----------|
| | Dolní mez | Průměr | Horní mez |
| Historická simulace | -1,11797 | -0,97129 | -0,86165 |
| Varianční–kovarianční metoda | -1,51941 | -1,03604 | -0,61473 |
| GEV model pro čtvrtletní maxima | -0,94472 | -0,74954 | -0,63786 |
| GEV model pro měsíční maxima | -0,93036 | -0,80460 | -0,70874 |
| GEV model pro týdenní maxima | -1,01600 | -0,89108 | -0,78575 |
| GP model pro u_1 | -1,15195 | -0,98890 | -0,88931 |
| Declust. GP model pro u_1 | -0,88168 | -0,76335 | -0,68480 |
| GP model pro u_2 | -1,70679 | -1,02412 | -0,91793 |
| Declust. GP model pro u_2 | -1,39563 | -0,86730 | -0,24146 |

Tabulka B.3: Odhadý 97,5% VaR konzervativního portfolia.

| Metoda odhadu | 95% Interval spolehlivosti | | |
|---------------------------------|----------------------------|--------------|-----------|
| | Dolní mez | Bodový odhad | Horní mez |
| Historická simulace | -0,87707 | -0,79483 | -0,71021 |
| Varianční–kovarianční metoda | -1,44493 | -0,98547 | -0,58468 |
| GEV model pro čtvrtletní maxima | -0,75795 | -0,60336 | -0,50653 |
| GEV model pro měsíční maxima | -0,74019 | -0,66102 | -0,59533 |
| GEV model pro týdenní maxima | -0,81324 | -0,74032 | -0,67531 |
| GP model pro u_1 | -0,83116 | -0,78820 | -0,75368 |
| Declust. GP model pro u_1 | -0,63840 | -0,63275 | -0,62250 |
| GP model pro u_2 | -0,82998 | -0,81551 | -0,79264 |
| Declust. GP model pro u_2 | -0,80697 | -0,74696 | -0,57304 |

Tabulka B.4: Odhadý 97,5% ES konzervativního portfolia.

| Metoda odhadu | 95% Interval spolehlivosti | | |
|---------------------------------|----------------------------|----------|-----------|
| | Dolní mez | Průměr | Horní mez |
| Historická simulace | -1,54087 | -1,28576 | -1,09223 |
| Varianční–kovarianční metoda | -1,71883 | -1,17143 | -0,69520 |
| GEV model pro čtvrtletní maxima | -1,30467 | -0,98582 | -0,83035 |
| GEV model pro měsíční maxima | -1,28067 | -1,04717 | -0,88670 |
| GEV model pro týdenní maxima | -1,36276 | -1,16046 | -0,99492 |
| GP model pro u_1 | -1,62549 | -1,30446 | -1,11097 |
| Declust. GP model pro u_1 | -1,22656 | -0,99443 | -0,88826 |
| GP model pro u_2 | -2,62922 | -1,33749 | -1,12944 |
| Declust. GP model pro u_2 | -2,02429 | -1,04589 | -0,14367 |

Tabulka B.5: Odhadý 99% VaR konzervativního portfolia.

| Metoda odhadu | 95% Interval spolehlivosti | | |
|---------------------------------|----------------------------|--------------|-----------|
| | Dolní mez | Bodový odhad | Horní mez |
| Historická simulace | -1,29408 | -1,15725 | -0,96208 |
| Varianční–kovarianční metoda | -1,71053 | -1,16580 | -0,69184 |
| GEV model pro čtvrtletní maxima | -1,02120 | -0,88327 | -0,73951 |
| GEV model pro měsíční maxima | -1,08323 | -0,95244 | -0,84310 |
| GEV model pro týdenní maxima | -1,22181 | -1,07545 | -0,94479 |
| GP model pro u_1 | -1,27404 | -1,14266 | -1,02419 |
| Declust. GP model pro u_1 | -1,01085 | -0,91670 | -0,84429 |
| GP model pro u_2 | -1,24715 | -1,11207 | -1,02209 |
| Declust. GP model pro u_2 | -0,98176 | -0,92138 | -0,88697 |

Tabulka B.6: Odhadý 99% ES konzervativního portfolia.

| Metoda odhadu | 95% Interval spolehlivosti | | |
|---------------------------------|----------------------------|----------|-----------|
| | Dolní mez | Průměr | Horní mez |
| Historická simulace | -2,36366 | -1,81919 | -1,44214 |
| Varianční–kovarianční metoda | -1,95618 | -1,33258 | -0,79117 |
| GEV model pro čtvrtletní maxima | -2,13893 | -1,37919 | -1,11076 |
| GEV model pro měsíční maxima | -1,97595 | -1,43985 | -1,14504 |
| GEV model pro týdenní maxima | -1,96555 | -1,58334 | -1,30306 |
| GP model pro u_1 | -2,66193 | -1,84847 | -1,44725 |
| Declust. GP model pro u_1 | -1,93071 | -1,36421 | -1,12019 |
| GP model pro u_2 | -5,21618 | -1,93140 | -1,43426 |
| Declust. GP model pro u_2 | -3,81836 | -1,39704 | 0,89447 |

Tabulka B.7: Odhadý 99,5% VaR konzervativního portfolia.

| Metoda odhadu | 95% Interval spolehlivosti | | |
|---------------------------------|----------------------------|--------------|-----------|
| | Dolní mez | Bodový odhad | Horní mez |
| Historická simulace | -1,69609 | -1,43535 | -1,22606 |
| Varianční–kovarianční metoda | -1,89138 | -1,28859 | -0,76497 |
| GEV model pro čtvrtletní maxima | -1,37934 | -1,13545 | -0,95618 |
| GEV model pro měsíční maxima | -1,47231 | -1,22228 | -1,03293 |
| GEV model pro týdenní maxima | -1,61489 | -1,37518 | -1,17023 |
| GP model pro u_1 | -1,75702 | -1,49883 | -1,28488 |
| Declust. GP model pro u_1 | -1,37656 | -1,16786 | -1,03404 |
| GP model pro u_2 | -1,72605 | -1,44534 | -1,25417 |
| Declust. GP model pro u_2 | -1,28500 | -1,12040 | -1,01006 |

Tabulka B.8: Odhadý 99,5% ES konzervativního portfolia.

| Metoda odhadu | 95% Interval spolehlivosti | | |
|---------------------------------|----------------------------|----------|-----------|
| | Dolní mez | Průměr | Horní mez |
| Historická simulace | -3,33114 | -2,35620 | -1,69335 |
| Varianční–kovarianční metoda | -2,12054 | -1,44418 | -0,85762 |
| GEV model pro čtvrtletní maxima | -3,16737 | -1,76079 | -1,31915 |
| GEV model pro měsíční maxima | -2,74734 | -1,80626 | -1,34457 |
| GEV model pro týdenní maxima | -2,54804 | -1,96286 | -1,55210 |
| GP model pro u_1 | -3,89319 | -2,39876 | -1,73891 |
| Declust. GP model pro u_1 | -2,73328 | -1,70400 | -1,26011 |
| GP model pro u_2 | -9,26532 | -2,59200 | -1,67756 |
| Declust. GP model pro u_2 | -6,66358 | -1,78628 | 2,72736 |

Tabulka B.9: Odhadý 95% VaR dynamického portfolia.

| Metoda odhadu | 95% Interval spolehlivosti | | |
|---------------------------------|----------------------------|--------------|-----------|
| | Dolní mez | Bodový odhad | Horní mez |
| Historická simulace | -1,91621 | -1,72104 | -1,64689 |
| Varianční–kovarianční metoda | -5,73946 | -2,71178 | -1,46395 |
| GEV model pro čtvrtletní maxima | -2,01993 | -1,61717 | -1,11828 |
| GEV model pro měsíční maxima | -1,64113 | -1,44645 | -1,25587 |
| GEV model pro týdenní maxima | -1,75482 | -1,62084 | -1,48930 |
| GP model pro u_1 | -1,81586 | -1,53005 | -0,92316 |
| Declust. GP model pro u_1 | -1,78911 | -1,43888 | -0,40468 |
| GP model pro u_2 | -2,65321 | -2,27494 | -0,73761 |
| Declust. GP model pro u_2 | -2,76323 | -2,23073 | 2,65556 |

Tabulka B.10: Odhadý 95% ES dynamického portfolia.

| Metoda odhadu | 95% Interval spolehlivosti | | |
|---------------------------------|----------------------------|----------|-----------|
| | Dolní mez | Průměr | Horní mez |
| Historická simulace | -3,17906 | -2,79987 | -2,51000 |
| Varianční–kovarianční metoda | -7,16797 | -3,38940 | -1,82793 |
| GEV model pro čtvrtletní maxima | -3,39830 | -2,60821 | -2,24571 |
| GEV model pro měsíční maxima | -2,88472 | -2,50553 | -2,20595 |
| GEV model pro týdenní maxima | -3,05697 | -2,68225 | -2,41336 |
| GP model pro u_1 | -2,64661 | -2,41847 | -2,17979 |
| Declust. GP model pro u_1 | -2,84728 | -2,46210 | -2,06753 |
| GP model pro u_2 | -3,52915 | -2,86553 | -1,96797 |
| Declust. GP model pro u_2 | -4,19872 | -2,83490 | -0,12140 |

Tabulka B.11: Odhadý 97,5% VaR dynamického portfolia.

| Metoda odhadu | 95% Interval spolehlivosti | | |
|---------------------------------|----------------------------|--------------|-----------|
| | Dolní mez | Bodový odhad | Horní mez |
| Historická simulace | -2,66262 | -2,40920 | -2,12976 |
| Varianční–kovarianční metoda | -6,81394 | -3,22220 | -1,73824 |
| GEV model pro čtvrtletní maxima | -2,51418 | -2,10991 | -1,86657 |
| GEV model pro měsíční maxima | -2,33155 | -2,06381 | -1,83565 |
| GEV model pro týdenní maxima | -2,48059 | -2,25513 | -2,06234 |
| GP model pro u_1 | -2,13436 | -2,03950 | -1,87883 |
| Declust. GP model pro u_1 | -2,12335 | -2,00414 | -1,73281 |
| GP model pro u_2 | -2,76485 | -2,53768 | -1,79653 |
| Declust. GP model pro u_2 | -2,83097 | -2,49710 | -0,37364 |

Tabulka B.12: Odhadý 97,5% ES dynamického portfolia.

| Metoda odhadu | 95% Interval spolehlivosti | | |
|---------------------------------|----------------------------|----------|-----------|
| | Dolní mez | Průměr | Horní mez |
| Historická simulace | -4,23983 | -3,58275 | -3,12366 |
| Varianční–kovarianční metoda | -8,11889 | -3,83550 | -2,06823 |
| GEV model pro čtvrtletní maxima | -4,81429 | -3,35924 | -2,80240 |
| GEV model pro měsíční maxima | -3,97427 | -3,28483 | -2,81126 |
| GEV model pro týdenní maxima | -4,07985 | -3,47242 | -3,03100 |
| GP model pro u_1 | -3,43922 | -3,06605 | -2,84037 |
| Declust. GP model pro u_1 | -3,92045 | -3,21462 | -2,87510 |
| GP model pro u_2 | -4,46879 | -3,32809 | -3,00351 |
| Declust. GP model pro u_2 | -6,02852 | -3,39663 | -0,70554 |

Tabulka B.13: Odhadý 99% VaR dynamického portfolia.

| Metoda odhadu | 95% Interval spolehlivosti | | |
|---------------------------------|----------------------------|--------------|-----------|
| | Dolní mez | Bodový odhad | Horní mez |
| Historická simulace | -3,53758 | -3,30005 | -2,98459 |
| Varianční–kovarianční metoda | -8,07929 | -3,81682 | -2,05822 |
| GEV model pro čtvrtletní maxima | -3,48932 | -2,96902 | -2,50029 |
| GEV model pro měsíční maxima | -3,45806 | -3,02453 | -2,66765 |
| GEV model pro týdenní maxima | -3,68383 | -3,23253 | -2,89326 |
| GP model pro u_1 | -3,01232 | -2,84892 | -2,72639 |
| Declust. GP model pro u_1 | -3,22127 | -2,94381 | -2,76780 |
| GP model pro u_2 | -3,04110 | -3,03552 | -3,02223 |
| Declust. GP model pro u_2 | -3,04383 | -3,03705 | -3,01317 |

Tabulka B.14: Odhadý 99% ES dynamického portfolia.

| Metoda odhadu | 95% Interval spolehlivosti | | |
|---------------------------------|----------------------------|----------|-----------|
| | Dolní mez | Průměr | Horní mez |
| Historická simulace | -6,19158 | -4,70089 | -3,81221 |
| Varianční–kovarianční metoda | -9,25008 | -4,36947 | -2,35442 |
| GEV model pro čtvrtletní maxima | -8,35666 | -4,65500 | -3,64571 |
| GEV model pro měsíční maxima | -5,98029 | -4,52990 | -3,65114 |
| GEV model pro týdenní maxima | -5,78080 | -4,69366 | -3,93539 |
| GP model pro u_1 | -5,02897 | -4,11007 | -3,55652 |
| Declust. GP model pro u_1 | -6,19738 | -4,46226 | -3,62990 |
| GP model pro u_2 | -7,21064 | -4,23104 | -3,66761 |
| Declust. GP model pro u_2 | -11,05841 | -4,48398 | 2,62586 |

Tabulka B.15: Odhadý 99,5% VaR dynamického portfolia.

| Metoda odhadu | 95% Interval spolehlivosti | | |
|---------------------------------|----------------------------|--------------|-----------|
| | Dolní mez | Bodový odhad | Horní mez |
| Historická simulace | -4,84959 | -3,82706 | -3,39705 |
| Varianční–kovarianční metoda | -8,94169 | -4,22369 | -2,27629 |
| GEV model pro čtvrtletní maxima | -4,54672 | -3,76681 | -3,16034 |
| GEV model pro měsíční maxima | -4,63567 | -3,87040 | -3,29171 |
| GEV model pro týdenní maxima | -4,82963 | -4,10044 | -3,56341 |
| GP model pro u_1 | -3,92037 | -3,57713 | -3,30154 |
| Declust. GP model pro u_1 | -4,40733 | -3,79846 | -3,36056 |
| GP model pro u_2 | -3,91389 | -3,57802 | -3,37717 |
| Declust. GP model pro u_2 | -4,27045 | -3,64280 | -3,36423 |

Tabulka B.16: Odhadý 99,5% ES dynamického portfolia.

| Metoda odhadu | 95% Interval spolehlivosti | | |
|---------------------------------|----------------------------|----------|-----------|
| | Dolní mez | Průměr | Horní mez |
| Historická simulace | -8,81574 | -5,93086 | -4,29071 |
| Varianční–kovarianční metoda | -10,03300 | -4,73924 | -2,55260 |
| GEV model pro čtvrtletní maxima | -13,30541 | -6,02206 | -4,29138 |
| GEV model pro měsíční maxima | -8,14414 | -5,66745 | -4,28443 |
| GEV model pro týdenní maxima | -7,43989 | -5,78818 | -4,67980 |
| GP model pro u_1 | -6,82974 | -5,07705 | -4,07995 |
| Declust. GP model pro u_1 | -8,85694 | -5,66081 | -4,19912 |
| GP model pro u_2 | -11,15739 | -5,18781 | -4,12187 |
| Declust. GP model pro u_2 | -18,74640 | -5,62387 | 8,41692 |