№1: Спуск по наклонной плоскости с трением

Дано:
$m, h, \alpha,$
$\mu, g = 9{,}81 \frac{м}{с^2}$

Решение: L - длина наклонной плоскости

$L = \frac{h}{\sin\alpha}$; $F = mg$; $F_y = mg\sin\alpha$

$F_x = mg\cos\alpha$; $F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$

По второму закону Ньютона: $ma = F_y - F_{тр}$
$= mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha \Rightarrow \quad a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$

Скорость v у основания: $v^2 = 2aL$, тогда

$$v^2 = 2g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \cdot \frac{h}{\sin\alpha}$$

$$v = \sqrt{2gh(1 - \mu\cos\alpha)}$$

Расстояние до остановки: $0 = v^2 + 2a$

$$S = \frac{v^2}{2\mu g}$$

Подставляем v из „первой части", тогда

$$S = \frac{h(1 - \mu\cos\alpha)}{\mu}$$

<u>Ответы</u>: 1. $v = \sqrt{2gh(1 - \mu\cos\alpha)}$

2. $S = \frac{h(1 - \mu\cos\alpha)}{\mu}$

№2: Соударение шаров с учётом трения и наклонной плоскости

Дано:
$\lambda, h, \mu, m_1,$
m_2, e

Решение: Длина наклонной плоскости $L = \frac{h}{\sin\lambda}$

Силы, действующие на m_1:

$F_y = m_1 g \sin\lambda$; $F_{тр} = \mu N = \mu m_1 g \cos\lambda$

$a = g(\sin\lambda - \mu\cos\lambda)$. Опять, формула скорости у основания: $v_1^2 = 2aL$, отсюда $v_1 = \sqrt{2gh(1-\mu\cos\lambda)}$

Далее, ЗСИ: $m_1 v_1 + m_2 \cdot 0 = m_1 V_1 + m_2 V_2$

$m_1 v_1 = m_1 V_1 + m_2 V_2$ (1)

К-т восстановления e: $e = \frac{V_2 - V_1}{v_1 - 0} \Rightarrow V_1 = V_2 - e v_1$ (2)

Подставляем в (1): $v_2 = \frac{m_1 v_1 (1+e)}{m_1 + m_2}$, тогда

$$V_1 = \frac{m_1 - e m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad ; \quad V_2 = \frac{m_1(1+e)}{m_1 + m_2} v_1$$

Теперь найдём расстояние тела m_2 до остановки. Силы вдоль плоскости:

$$m_2 g \sin\lambda + \mu m_2 g \cos\lambda = m_2 a$$

$$0 = v_2^2 - 2a \quad ; \quad S = \frac{v_2^2}{2g(\sin\lambda + \mu\cos\lambda)}$$

Ответы
1. $v_1 = \sqrt{2gh(1-\mu\cos\lambda)}$

2. $V_1 = \frac{m_1 - m_2 e}{m_1 + m_2} v_1$; $V_2 = \frac{m_1(1+e)}{m_1 + m_2} v_1$

3. $S = \frac{m_1^2 (1+e)^2 v_1^2}{2g(m_1+m_2)^2 (\sin\lambda + \mu\cos\lambda)}$

№3: Сохранение момента импульса

Дано:
$M, m, R,$
ω_0

Решение: Момент инерции системы до перехода человека:

$I_{пл} = \frac{1}{2}MR^2$; $I_ч = mR^2$

Общий момент инерции: $I_0 = I_{пл} + I_ч$

$I_0 = R^2(\frac{1}{2}M + m)$. ЗСМИ: $I_0\omega_0 = I\omega$

Подставляем: $(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2)\omega_0 = \frac{1}{2}MR^2\omega$

$$\omega = \omega_0 \cdot \frac{\frac{1}{2}M + m}{\frac{1}{2}M} = \omega_0\left(1 + \frac{2m}{M}\right)$$

Теперь определим работу A человека.

$E_{к0}$(до перехода) $= \frac{1}{2}I_0\omega_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_0^2$

$E_к$(после перехода) $= \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega^2$

После некоторых упрощений, получаем:

$$A = E_к - E_{к0} = \frac{1}{4}MR^2\omega_0^2\left(1 + \frac{4m}{M} + \frac{4m^2}{M^2}\right) - \frac{1}{4}MR^2\omega_0^2$$

$$- \frac{1}{2}mR^2\omega_0^2 = \ldots = mR^2\omega_0^2\left(\frac{1}{2} + \frac{m}{M}\right)$$

Ответы

1. $\omega = \omega_0 \cdot \left(1 + \frac{2m}{M}\right)$

2. $A = mR^2\omega_0^2\left(\frac{1}{2} + \frac{m}{M}\right)$

№4: Неупругое столкновение с подвижной платформой

Дано:
m, M, h, V_0

Решение:

Вертикальная скорость груза перед ударом $\underset{V_y}{\cancel{v_y}} = \sqrt{2gh}$

Используем ЗСИ: $MV_0 = (M+m)V_x$

$$\Rightarrow V_x = \frac{MV_0}{M+m} \quad ; \quad m\sqrt{2gh} = (M+m)V_y$$

$$\Rightarrow V_y = \frac{m\sqrt{2gh}}{M+m}$$

Далее найдём выделившееся количество теплоты:

$E_к$ до удара: платформа — $\frac{1}{2}MV_0^2$

груз — $\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m(2gh) = mgh$

$E_к$ после удара: $\frac{M^2V_0^2 + 2m^2gh}{2(M+m)}$, тогда теплота

$$Q = E_{к(до)} - E_{к(после)} = \frac{(M+m)MV_0^2 + 2(M+m)mgh - M^2V_0^2 - 2m^2gh}{2(M+m)}$$

$$= \frac{Mm}{2(M+m)}(V_0^2 + 2gh)$$

Ответы:

1. $V_x = \frac{MV_0}{M+m}$; $V_y = \frac{m\sqrt{2gh}}{M+m}$

2. $Q = \frac{Mm}{2(M+m)}(V_0^2 + 2gh)$

№5 Столкновение шаров с пружиной и диссипативными потерями

Дано:
m_1, m_2, k
μ, v_1, v_2, c

Решение:

$E_{k(нач)} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$

$E_{k(c*)} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) V^2$

Потенциальная энергия пружины: $U = \frac{1}{2} k x_{max}^2$

$A_{тр} = -\mu g (m_1 + m_2) x_{max}$; $A_{диссип} = -cv$

Производя некоторые преобразования, получаем

$$x_{max} = \frac{\sqrt{\mu v^2 - 2\mu g x_{max}(m_1+m_2)}}{\sqrt{k}}$$

Далее. Уравнение колебания с трением:

$\mu_{пр} a + cv + kx = 0$, отсюда $t \approx \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\mu_{пр}}{k}}$

Далее. Потеря энергии. На трение: $\Delta E_{тр} = \mu g (m_1 + m_2) x_{max}$

На диссипацию: $\Delta E_д \approx c v_{отн} \cdot x_{max}$

Суммарные потери: $\Delta E \approx \mu g (m_1 + m_2) x_{max} + c v_{отн} \cdot x_{max}$

Ответы: $x_{max} = \frac{\sqrt{\mu v^2 - 2\mu g x_{max}(m_1+m_2)}}{\sqrt{k}}$

$t \approx \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\mu_{пр}}{k}}$

$\Delta E = (\mu g (m_1 + m_2) + c v_{отн}) x_{max}$

№6 Столкновение тел с учетом упругой деформации

Дано:
$m_1, m_2, k,$
e, v_1, v_2

Решение: Приведённая масса системы $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Относительная скорость до столкновения: $v_{отн} = v_1 + v_2$

В момент максимального сжатия скорости тел временно равны ($v_1 = v_2 = v$)

Используя ЗСИ, получаем: $v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$

Кинетическая энергия системы переход в потенциальную и диссипативные потери

$$\frac{1}{2}\mu v_{отн}^2 = \frac{1}{2} k x_{max}^2 \Rightarrow x_{max} = v_{отн}\sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

Далее. Скорости тел после взаимодействия

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}, \text{ где } e = e^{-\frac{c\pi}{2\sqrt{k\mu}}}$$

(скорости укажу сразу в ответах.)

Далее. $\Delta E = E_{нач} - E_{кон} = \frac{1}{2}\mu(v_1 + v_2)^2(1 - e^2)$,

так как $E_{нач} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$

$$E_{кон} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

Ответы: 1 $x_{max} = (v_1 + v_2)\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$

2 $v_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - e m_2 (v_1 + v_2)}{m_1 + m_2}$; $v_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + e m_1 (v_1 + v_2)}{m_1 + m_2}$

3. $\Delta E = \frac{m_1 m_2 (v_1 + v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}(1 - e^2)$

№7 Вращение системы с пружиной и трением

Исследуем пункт №2 этой задачи

Дано:

$R_1, R_2,$

$M_1, M_2, k,$

μ, g, ω_0

Решение. Сперва найдём критическое значение ω_0 для N оборотов до остановки.

Начальная $E_к = \frac{1}{2} I_{общ} \omega_0^2$

Работа сил трения за N оборотов ($\theta = 2\pi N$)

$$A_{тр} = -\mu M_2 g \cdot 2\pi N R_1$$

Условие остановки: $E_0 + A_{тр} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} I_{общ} \omega_0^2 = \mu M_2 g \cdot 2\pi N R_1$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi \mu M_2 g N R_1}{I_{общ}}}$$

<u>Ответ</u>: $\omega_0^{крит} = \sqrt{\frac{4\pi \mu M_2 g N R_1}{I_1 + M_2 R_1^2}}$

№8 Динамика системы с переменной массой в неинерциальной С.О.

Дано: ε, R, k, η

Решение: Исследуем первые два пункта этой задачи:

Собственная частота системы:

$$\Omega(t) = \sqrt{\frac{k}{m(t)}} = \sqrt{\frac{k}{m_0 - \mu t}}$$

Центробежная сила изменяется с частотой вращения $\omega(t)$

Условие резонанса: $\omega(t) = \Omega(t)$

$$\Rightarrow \omega_{крит} = \frac{2\varepsilon m_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{k}}$$

Угловая скорость платформы: $\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t$

Далее. Мощность, рассеиваемая сопротивлением

$$P(t) = \eta a(t)$$

Ответы: 1. $\omega_{крит} = \dfrac{2\varepsilon m_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{k}}$

2. $\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t$

3. $P(t) = \eta a(t)$