Методы решения транспортной задачи

Транспортная задача линейного программирования формулируется следующим образом. Необходимо минимизировать транспортные расходы

$$Q(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min$$

при ограничениях

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j = \overline{1,n}, \\ &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i = \overline{1,m}, \\ &x_{ij} \ge 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}, \end{aligned}\right\},$$

где c_{ij} - стоимость перевозки единицы продукции из пункта i в пункт j; x_{ij} – планируемая величина перевозок из пункта i в пункт j (план перевозок X – матрица размерности $m \times n$); b_j - потребности в продукте в пункте j; a_i - запасы в пункте i.

Предполагается, что модель *закрытого* типа, то есть $\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i$.

Если модель открытого типа $\left(\sum_{j=1}^{n} b_j \ne \sum_{i=1}^{m} a_i\right)$, то ее всегда можно привести к закрытому типу введением фиктивного пункта производства или фиктивного пункта потребления:

- Если $\sum_{j=1}^{n} b_j < \sum_{i=1}^{m} a_i$, то $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, тогда $\sum_{j=1}^{n+1} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i$, причем $c_{i,n+1} = 0 \quad \forall i$.
- Если $\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i$, то $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, $\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m+1} a_i$ и $c_{m+1,j} = 0 \quad \forall j$.

Транспортная задача представляет собой задачу линейного программирования и, естественно, ее можно решить с использованием метода последовательного улучшения плана или метода последовательного уточнения оценок. В этом случае основная трудность бывает связана с числом переменных задачи ($m \times n$) и числом ограничений ($m+n$). Поэтому специальные алгоритмы оказываются более эффективными. К таким алгоритмам относятся *метод потенциалов* и *венгерский метод*.

Метод северо-западного угла

Заполнение начинается с верхнего левого угла таблицы. Величина перевозки устанавливается равной минимальной из величин: величины остатка запасов в пункте *i* или величины еще неудовлетворенного спроса в пункте *j*.

- Если ресурс в данной строке исчерпан, то переходим к перевозке в следующей строке текущего столбца (на одну строку вниз).
- Если потребности для данного пункта (столбца) удовлетворены, то переходим к следующей перевозке текущей строки в следующем столбце.

Метод минимального элемента

В таблице отыскивается $\min\{c_{ij}\}$ и в первую очередь заполняется соответствующая клетка: $x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$. Затем вычеркивается остаток соответствующей строки, если $a_i < b_j$, или столбца, если $a_i > b_j$, и корректируем остатки запасов и неудовлетворенного спроса. В оставшихся клетках таблицы снова отыскивается минимальная стоимость перевозки и заполняется соответствующая клетка и т.д.

Определение 1. Набором называется произвольная совокупность перевозок транспортной таблицы.
Определение 2. Цепью называют такие наборы, когда каждая пара соседних клеток в цепи расположены либо в одном столбце, либо в одной строке.
Определение 3. Циклом называется цепь, крайние элементы которой находятся либо в одной строке, либо в одном столбце.

Метод потенциалов

Метод позволяет находить оптимальный план перевозок транспортной таблицы. В основе лежит следующая теорема.

Теорема. Для того, чтобы некоторый план $X = [x_{ij}]_{m\times n}$ транспортной задачи был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы ему соответствовала такая система $m+n$ чисел $u_1, u_2, ..., u_m;\ v_1, v_2, ..., v_n$, для которой выполняются условия:

$$v_j - u_i \le c_{ij},\ \ i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n}, \tag{1}$$

$$v_j - u_i = c_{ij},\ \ \forall x_{ij} > 0. \tag{2}$$

u_i и v_j называются потенциалами соответствующих пунктов отправления и пунктов назначения. Условия (1)-(2) называются условиями потенциальности.

План X будем называть потенциальным, если для него существует система u_i и v_j, удовлетворяющая (1)-(2). Тогда теорема коротко формулируется следующим образом.

Теорема. Для оптимальности транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы он был оптимален.

Достаточность. Пусть план X потенциален, так что существует система u_i и v_j, удовлетворяющая (1)-(2). Тогда для любого допустимого плана $X' = [x'_{ij}]_{m \times n}$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x'_{ij} \geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(v_j - u_i)x'_{ij} = \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} x'_{ij} - \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} x'_{ij} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} v_j b_j - \sum_{i=1}^{m} u_i a_i = \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} v_j x_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_i x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(v_j - u_i)x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij},$$

т.е. стоимость перевозок по любому плану X' не меньше стоимости перевозок по потенциальному плану X. Следовательно, план X оптимален.

Необходимость. Будем рассматривать транспортную задачу, как задачу линейного программирования с минимизацией линейной формы

$$Q(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min$$

при соответствующих ограничениях. Заполним симплексную таблицу и рассмотрим двойственную к ней задачу, что легко получить из таблицы. Прямую таблицу будем заполнять, повернув.

	0= $-u_1$	…	0= $-u_i$	…	0= $-u_m$	0= $-v_1$	…	0= $-v_j$	…	0= $-v_n$	$Q=$ 1
x_{11} $y_{11}=$	-1	…	0	…	0	1	…	0	…	0	c_{11}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_{1n} $y_{1n}=$	-1	…	0	…	0	0	…	0	…	1	c_{1n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_{i1} $y_{i1}=$	0	…	-1	…	0	1	…	0	…	0	c_{i1}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_{ij} $y_{ij}=$	0	…	-1	…	0	0	…	1	…	0	c_{ij}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_{in} $y_{in}=$	0	…	-1	…	0	0	…	0	…	1	c_{in}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_{m1} $y_{m1}=$	0	…	0	…	-1	1	…	0	…	0	C_{m1}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_{mn} $y_{mn}=$	0	…	0	…	-1	0	…	0	…	1	C_{mn}
1 $w=$	a_1	…	a_i	…	a_n	$-b_1$	…	$-b_j$	…	$-b_n$	0

Получаем, что двойственная задача имеет вид:

$$w = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \to \max$$

при ограничениях

$$y_{ij} = u_i - v_j + c_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},$$

т.е. $v_j - u_i \leq c_{ij}$, $\quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$.

Пусть $X = [x_{ij}]_{m \times n}$ – оптимальное решение транспортной задачи. Тогда на основании теоремы двойственности двойственная задача имеет оптимальное решение

$$u_1^*, \ldots, u_m^*; v_1^*, \ldots, v_n^*.$$

Убедимся, что эти числа являются потенциалами соответствующих пунктов транспортной задачи. Действительно, все u_i^*, v_j^* как опорное решение двойственной задачи удовлетворяют неравенствам (1).

Если $x_{ij} > 0$, то по второй теореме двойственности соответствующее ограничение

$$y_{ij}^* = u_i^* - v_j^* + c_{ij} \geq 0$$

двойственной задачи обращается в строгое равенство

$$v_j^* - u_i^* = c_{ij}.$$

Алгоритм метода потенциалов

Алгоритм метода потенциалов состоит из предварительного этапа и повторяющегося основного этапа.

Предварительный этап.

1. Каким-либо способом ищется допустимый план X (методом северо-западного угла или минимального элемента).
2. Для полученного плана строится система m+n чисел $u_1, \ldots, u_m$, $v_1, \ldots, v_n$, таких, что $v_j - u_i = c_{ij}$, $\forall x_{ij} > 0$.
3. Построенная система u_i и v_j исследуется на потенциальность (то есть план X исследуется на оптимальность). Для этого проверяется $v_j - u_i \leq c_{ij}$, $\forall x_{ij} = 0$.

Если система непотенциальна, то переходят к основному этапу (т.к. план не оптимален), иначе оптимальный план найден.

Основной этап.

1. Улучшаем план, то есть от плана X переходим к $X' : Q(X) \geq Q(X')$.
2. Для плана X' строим новую систему $u_i^{'}, v_j^{'}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, такую, что $v_j^{'} - u_j^{'} = c_{ij}$, $\forall x_{ij} > 0$.
3. Исследуем систему $u_i^{'}, v_j^{'}$ на потенциальность. Если система непотенциальна, то переходим на п.1. Иначе найден оптимальный план.

Найдем методом потенциалов оптимальное решение задачи, взяв в качестве опорного план, построенный методом северо-западного угла (1-й шаг предварительного этапа).

Определение 4. Допустимый опорный план транспортной задачи называется невырожденным, если число заполненных клеток транспортной таблицы, т.е. число положительных перевозок $x_{ij} > 0$, равно $m+n+1$, где m – число пунктов отправления, $n-$ число пунктов назначения.

Определение 5. Если допустимый опорный план содержит менее $m+n+1$ элементов $x_{ij} > 0$, то он называется вырожденным, а транспортная задача называется вырожденной транспортной задачей.

Следующая теорема позволяет определить вырожденность задачи до ее решения.

Теорема. Для невырожденной транспортной задачи необходимо и достаточно отсутствие такой неполной группы пунктов производства, суммарный объем производства которой точно совпадает с суммарными потребностями некоторой группы пунктов потребления.

Другими словами, это условие означает, что для любых двух систем индексов $i_1, i_2, ..., i_t$, $j_1, j_2, ..., j_S$, где $t+S<n+m$, имеет место неравенство $\sum_{k=1}^{t} a_{i_k} \neq \sum_{k=1}^{S} b_{j_k}$. (Доказательство не сложно, от противного.)

Для решения транспортной задачи методом потенциалов строится система потенциалов $v_j - u_i = c_{ij}, \quad \forall x_{ij} > 0$. Если опорное решение невырожденно, то число неизвестных на 1 больше числа уравнений. При вырожденном опорном решении число этих уравнений еще меньше. По аналогии симплекс-методом, в невырожденном решении $x_{ij} > 0$ представляют собой базисные переменные, а $x_{ij} = 0$ – небазисные. Если опорное решение вырожденно, то часть базисных переменных принимает нулевые значения.

Пусть первое опорное решение, найденное методом северо-западного угла или методом минимального элемента, является вырожденным. Тогда, чтобы решать задачу методом потенциалов необходимо выбрать в качестве базисных переменных некоторые перевозки $x_{ij} = 0$ и для них также составить уравнения $v_j - u_i = c_{ij}$ по условию (2) теоремы. Какие перевозки вида $x_{ij} = 0$ включать в базисные? Выбираются такие клетки таблицы с $x_{ij} = 0$, чтобы из базисных переменных нельзя было организовать ни одного цикла!

При переходе к новому улучшенному плану задачи в небазисные переменные переводится перевозка в отрицательной полуцепи, которая находится следующим образом $\theta = \min\left\{x_{ij}^{-}\right\}$. В вырожденной задаче это значение может достигаться на нескольких перевозках x_{ij} отрицательной полуцепи.