

Линейное программирование

Задача, в которой требуется минимизировать/максимизировать лин. форму:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i &\rightarrow \min \text{ (max)} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_i &\leq b_j, \quad j = \overline{1, m}, \text{ или} \\ \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot x_i &= b_j, \quad j = \overline{(m+1), p}, \\ x_i &> 0, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

называется задачей ЛП в *произвольной* форме записи.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Задача в матричной форме вида:} \\ \bar{c}^T \cdot \bar{x} \rightarrow \min(\max) \\ A \cdot \bar{x} \leq \bar{b}, \\ \bar{x} \geq \bar{0}, \end{array} \right\} \quad (1)$$

называется *симметричной* формой записи задачи ЛП.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Задача линейного программирования вида} \\ \bar{c}^T \cdot \bar{x} \rightarrow \min (\max) \\ A \cdot \bar{x} = \bar{b}, \\ \bar{x} \geq \bar{0}, \end{array} \right\} \quad (2)$$

называется *канонической формой* записи задачи линейного программирования.

Любую задачу ЛП можно привести к канонической форме.

Если система ограничений задана в форме $A \cdot \bar{x} \leq \bar{b}$, то можно, введя дополнительные переменные, привести ее к виду

$$A \cdot \bar{x} + E \cdot \bar{y} = \bar{b}, \quad \bar{x} \geq 0, \quad \bar{y} \geq 0, \quad \text{где } \bar{y} = [x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]^T.$$

Рассмотрим задачу с ограничениями $A \cdot \bar{x} \leq \bar{b}$. Эту систему ограничений можно представить в виде системы

[illegible]

Введем следующие обозначения:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \dots \\ a_{m,1} \end{bmatrix}, \dots, \bar{A}_n = \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \dots \\ a_{m,n} \end{bmatrix}, \bar{A}_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \bar{A}_{n+m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{A}_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Тогда задачу линейного программирования можно записать в виде:

$$\sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i \rightarrow \min (\max)$$

$$x_1 \cdot \bar{A}_1 + x_2 \cdot \bar{A}_2 + \dots + x_n \cdot \bar{A}_n + x_{n+1} \cdot \bar{A}_{n+1} + \dots + x_{n+m} \cdot \bar{A}_{n+m} = A_0,$$

$$\bar{x} \geq \bar{0}.$$

Векторы \bar{A}_i называются векторами условий, а сама задача линейного программирования называется расширенной по отношению к исходной. Пусть D и D_1 - допустимые множества решений исходной и расширенной задач соответственно.

Тогда любой точке множества D_1 соответствует единственная точка множества D и наоборот. В общем случае, допустимое множество D исходной задачи есть проекция множества D_1 расширенной задачи на подпространство исходных переменных.

$\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, удовлетв. ограничениям задачи ЛП, называется **планом**.

Решением задачи линейного программирования называется ее план, минимизирующий (или максимизирующий) линейную форму.

Введем понятие базисного решения. Из матрицы расширенной задачи $A_p = [\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_{n+m}]$ выберем m линейно независимых векторов-столбцов, которые обозначим как матрицу $B_{m \times m}$, а через $D_{m \times n}$ обозначим матрицу из оставшихся столбцов. Тогда $A_p = [B, D]$, и ограничения расширенной задачи линейного программирования можно записать в виде:

$$A_p \cdot \bar{x} = B \cdot \bar{x}_B + D \cdot \bar{x}_D = \bar{A}_0. \quad (3)$$

Очевидно, что столбцы матрицы B образуют базис m -мерного пространства. Поэтому вектор \bar{A}_0 и любой столбец матрицы D можно представить в виде линейной комбинации столбцов матрицы B .

Умножим (3) на B^{-1} слева и найдем отсюда \bar{x}_B :

$$B^{-1} \cdot B \cdot \bar{x}_B + B^{-1} \cdot D \cdot \bar{x}_D = B^{-1} \cdot \bar{A}_0, \quad (4)$$

$$\bar{x}_B = B^{-1} \cdot \bar{A}_0 - B^{-1} \cdot D \cdot \bar{x}_D. \quad (5)$$

Придавая \bar{x}_D различные значения, будем получать различные решения \bar{x}_B .

$$\text{Если положить } \bar{x}_D = \bar{0}, \text{ то } \bar{x}_B = B^{-1} \cdot \bar{A}_0. \quad (6)$$

Решение (6) – **базисное решение** системы из m уравнений с $m+n$ неизвестными.

Если полученное решение содержит только положительные компоненты, то оно называется **базисным допустимым**.

Особенность допустимых базисных решений состоит в том, что они являются крайними точками допустимого множества D_1 расширенной задачи.

Если среди компонент \bar{x}_B нет нулевых, то базисное допустимое решение называется **невыврожденным**.

План \bar{x} задачи линейного программирования будем называть **опорным**, если векторы условий \bar{A}_i с положительными коэффициентами линейно независимы.

То есть опорный план – это базисное допустимое решение расширенной системы, угловая точка многогранника решений.

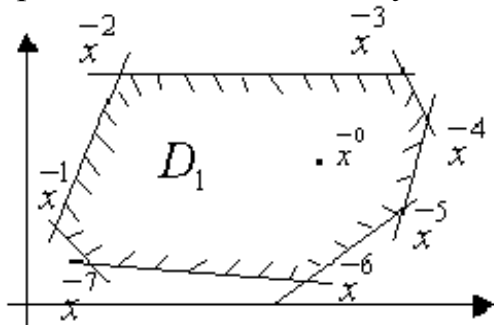
Опорное решение называется **невырожденным**, если оно содержит m положительных компонент (по числу ограничений).

Невырожденный опорный план образуется пересечением n гиперплоскостей из образующих допустимую область. В случае вырожденности в угловой точке многогранника решений пересекается более n гиперплоскостей.

Теорема 1: (основная теорема линейного программирования):

- 1) Линейная форма $z = \bar{c}^T \cdot \bar{x}$ достигает своего минимума в угловой точке многогранника решений.
- 2) Если она принимает минимальное решение более чем в одной угловой точке, то она достигает того же самого значения в любой точке, являющейся выпуклой комбинацией этих угловых точек.

Лемма: Если D - замкнутое, ограниченное, выпуклое множество, имеющее конечное число крайних (угловых) точек, то любая точка $\bar{x} \in D$ может быть представлена в виде выпуклой комбинации крайних точек D .



- 1) Пусть \bar{x}^0 - некоторая внутренняя точка. Многогранник ограниченный замкнутый, имеет конечное число угловых точек. D - допустимое множество.

Предположим, что точка \bar{x}^0 является оптимальной точкой, то есть $z(\bar{x}^0) \leq z(\bar{x})$, $\forall \bar{x} \in D$. Предположим, что точка \bar{x}^0 не является угловой. Тогда на основании леммы точку \bar{x}^0 можно выразить через угловые точки многогранника \bar{x}^i , т.е.

$$\bar{x}^0 = \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot \bar{x}^i, \quad \forall \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1.$$

Так как функция $z(\bar{x})$ линейна, то

$$z(\bar{x}^0) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot z(\bar{x}^i). \quad (*)$$

Выберем среди точек \bar{x}^i ту, в которой линейная форма $z(\bar{x})$ принимает наименьшее значение. Пусть это будет точка \bar{x}^k . Обозначим минимальное значение функции в угловой точке через z^* :

$$z^* = z(\bar{x}^k) = \min_{1 \leq i \leq p} \{z(\bar{x}^1), z(\bar{x}^2), \dots, z(\bar{x}^p)\}.$$

Подставим данное значение функции в линейную форму (*) вместо $z(\bar{x}^{-i})$ и получим:

$$z(\bar{x}^{-0}) \geq \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot z^* = z^* \cdot \sum_{i=1}^p \alpha_i = z^*.$$

Так как \bar{x}^{-0} - оптимальная точка, то получили противоречие: $z(\bar{x}^{-0}) \geq z^*$ (!).

Следовательно, $z(\bar{x}^{-0}) = z(\bar{x}^{-k})$, $\bar{x}^{-0} = \bar{x}^{-k}$ - угловая точка.

2) Предположим, что линейная форма $z(\bar{x})$ принимает минимальное значение более чем в одной угловой точке, например, в угловых точках $\bar{x}^{-1}, \bar{x}^{-2}, \dots, \bar{x}^{-q}$ $z(\bar{x}^{-1}) = z(\bar{x}^{-2}) = \dots = z(\bar{x}^{-q}) = z^*$. Тогда если \bar{x} является выпуклой комбинацией этих точек, то есть

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^q \alpha_i \cdot \bar{x}^{-i}, \quad \sum_{i=1}^q \alpha_i = 1 \quad \text{и} \quad \forall i \quad \alpha_i \geq 0,$$

то
$$z(\bar{x}) = z\left(\sum_{i=1}^q \alpha_i \cdot \bar{x}^{-i}\right) = z^* \cdot \sum_{i=1}^q \alpha_i = z^*.$$

То есть, если минимальное значение достигается более чем в одной угловой точке, то того же самого значения линейная форма достигает в любой точке, являющейся выпуклой комбинацией этих угловых точек

Теорема 2: Если известно, что системы векторов условий $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_m$, ($m \leq n$) линейно независима и такова, что

$$x_1 \cdot \bar{A}_1 + \dots + x_m \cdot \bar{A}_m = \bar{A}_0,$$

где все $x_j > 0$, то точка $\bar{x} = [x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0]^T$ является угловой точкой многогранника решений.

Теорема 3: Если вектор \bar{x} является угловой точкой многогранника решений, то векторы условий, соответствующие положительным компонентам вектора \bar{x} , являются линейно независимыми.

Следствия: 1) Угловая точка многогранника решений имеет не более m положительных компонент вектора \bar{x} .

2) Каждой угловой точке многогранника решений соответствует m линейно независимых векторов из данной системы: $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n$.

Пусть имеем следующую задачу:

с системой ограничений следующего вида:

Разрешим эту систему относительно переменных x_1, \dots, x_m :

Векторы условий, соответствующие x_1, \dots, x_m , образуют базис. Переменные x_1, \dots, x_m назовем базисными переменными. Остальные переменные задачи – небазисные.

Целевую функцию можно выразить через небазисные переменные:

Если приравнять небазисные переменные нулю –

то соответствующие базисные переменные примут значения

Вектор \bar{x} с такими компонентами представляет собой угловую точку многогранника решений (допустимую) при условии, что $b'_i \geq 0$ (опорный план). Теперь необходимо перейти к другой угловой точке с меньшим значением целевой функции. Для этого следует выбрать некоторую небазисную переменную и некоторую базисную так, чтобы после того, как мы “поменяем их местами”, значение целевой функции уменьшилось. Такой направленный перебор в конце концов приведет нас к решению задачи.

Пример 1:

Выберем в качестве базисных следующие переменные $\{x_1, x_2, x_3\}$ и разрешим систему относительно этих переменных. Система ограничений примет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 1 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 &= 2 + 2x_4 - x_5 \\ x_3 &= 3 - 3x_4 - x_5 \end{aligned} \right\}.$$

Переменные $\{x_4, x_5\}$ являются небазисными. Если взять $x_4 = 0$ и $x_5 = 0$, то получим угловую точку (опорный план)

$$\bar{x}^{-1} = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0]^T,$$

которому соответствует $Q(\bar{x}^{-1}) = 0$.

Значение целевой функции можно уменьшить за счет увеличения x_5 . При увеличении x_5 величина x_1 также увеличивается, а x_2 и x_3 — уменьшаются. Причем величина x_2 раньше может стать отрицательной. Поэтому, вводя в базис переменную x_5 , одновременно x_2 исключаем из базиса. В результате после очевидных преобразований получим следующие выражения для новой системы базисных переменных и целевой функции:

$$\left. \begin{aligned} x_5 &= 2 - x_2 + 2x_4 \\ x_1 &= 5 - 2x_2 + 3x_4 \\ x_3 &= 1 + x_2 - 5x_4 \end{aligned} \right\}$$

$$Q(\bar{x}) = -2 - x_4 + x_2 \rightarrow \min.$$

Соответствующий опорный план $\bar{x}^{-2} = [5 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 2]^T$ и $Q(\bar{x}^{-2}) = -2$.

Целевую функцию можно уменьшить за счет увеличения x_4 . Увеличение x_4 приводит к уменьшению только x_3 . Поэтому вводим в базис переменную x_4 , а x_3 исключаем из базиса. В результате получим следующие выражения для новой системы базисных переменных и целевой функции:

$$\left. \begin{aligned} x_4 &= \frac{1}{5} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{5}x_3 \\ x_1 &= \frac{28}{5} - \frac{7}{5}x_2 - \frac{3}{5}x_3 \\ x_5 &= \frac{12}{5} - \frac{3}{5}x_2 - \frac{2}{3}x_3 \end{aligned} \right\}$$

$$Q(\bar{x}) = -\frac{11}{5} + \frac{4}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3 \rightarrow \min.$$

Соответствующий опорный план $\bar{x}^{-3} = \left[\frac{28}{5} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{5} \quad \frac{12}{5} \right]^T$ и значение

целевой функции $Q(\bar{x}^{-3}) = -\frac{11}{5}$. Так как все коэффициенты при небазисных переменных в целевой функции неотрицательны, то нельзя уменьшить целевую

функцию за счет увеличения x_2 или x_3 , следовательно, полученный план \bar{x}^{-3} является оптимальным.

Пример 2: Пусть имеем задачу

$$\begin{aligned} Q(\bar{x}) &= -x_1 - x_2 \rightarrow \min \\ \left. \begin{aligned} x_3 &= 1 + x_1 - x_2 \\ x_4 &= 2 - x_1 + 2x_2 \\ \bar{x} &\geq 0 \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

Переменные $\{x_3, x_4\}$ - базисные, а $\{x_1, x_2\}$ - небазисные переменные. Опорный план $\bar{x}^0 = [0 \ 0 \ 1 \ 2]^T$, $Q(\bar{x}^0) = 0$.

Теперь вводим в базис переменную x_1 , а x_4 исключаем из базиса. В результате получим следующие выражения для базисных переменных и целевой функции:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} x_1 &= 2 + 2x_2 - x_4 \\ x_3 &= 3 + x_2 - x_4 \end{aligned} \right\} \\ Q(\bar{x}) &= -2 - 3x_2 + x_4. \end{aligned}$$

Опорный план $\bar{x}^1 = [2 \ 0 \ 3 \ 0]^T$, значение целевой функции $Q(\bar{x}^1) = -2$.

Теперь можно заметить, что при увеличении x_2 значения переменных x_1 и x_3 также возрастают, то есть при $x_2 \rightarrow \infty$ в допустимой области $Q(\bar{x}) \rightarrow -\infty$ (задача не имеет решения).

Замечание: В процессе поиска допустимого плана может быть выявлена противоречивость системы ограничений.

Алгоритм симплекс метода

Формализованный алгоритм симплекс метода состоит из двух основных этапов: 1) построение опорного плана; 2) построение оптимального плана.

Проиллюстрируем алгоритм на рассмотренном ранее примере:

$$\begin{aligned} Q(\bar{x}) &= x_4 - x_5 \rightarrow \min \\ \left. \begin{aligned} x_1 + x_4 - 2x_5 &= 1 \\ x_2 - 2x_4 + x_5 &= 2 \\ x_3 + 3x_4 + x_5 &= 3 \end{aligned} \right\}. \\ \bar{x} &\geq \bar{0}. \end{aligned}$$

В случае базисных переменных $\{x_1, x_2, x_3\}$ начальная симплексная таблица для данного примера будет выглядеть следующим образом:

	$-x_4$	$-x_5$	1
$x_1 =$	1	-2	1
$x_2 =$	-2	1	2
$x_3 =$	3	1	3
$Q(\bar{x}) =$	-1	1	0

Она уже соответствует опорному плану $\bar{x}^{-1} = [1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 0]^T$ (столбец свободных членов).

Построение оптимального плана. Для того чтобы опорный план был оптимален, при минимизации целевой функции необходимо, чтобы коэффициенты в строке целевой функции были неположительными (в случае максимизации – неотрицательными). Т.е. при поиске минимума мы должны освободиться от положительных коэффициентов в строке $Q(\bar{x})$.

Выбор разрешающего элемента. Если при поиске минимума в строке целевой функции есть коэффициенты больше нуля, то выбираем столбец с положительным коэффициентом в строке целевой функции в качестве разрешающего. Пусть это столбец с номером l .

Для выбора разрешающей строки (разрешающего элемента) среди положительных коэффициентов разрешающего столбца выбираем тот (строку), для которого отношение коэффициента в столбце свободных членов к коэффициенту в разрешающем столбце минимально:

$$\frac{b_r}{a_{rl}} = \min \left\{ \frac{b_i}{a_{il}} \mid a_{il} \geq 0 \right\}.$$

a_{rl} – разрешающий (направляющий) элемент, строка r – разрешающая.

Для перехода к следующей симплексной таблице (следующему опорному плану с меньшим значением целевой функции) делается шаг модифицированного жорданова исключения с разрешающим элементом a_{rl} .

Если в разрешающем столбце нет положительных коэффициентов, то целевая функция неограничена снизу (при максимизации – неограничена сверху).

Шаг модифицированного жорданова исключения над симплексной таблицей.

1. На месте разрешающего элемента ставится 1 и делится на разрешающий элемент.
2. Остальные элементы разрешающего столбца меняют знак на противоположный и делятся на разрешающий элемент.
3. Остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент.
4. Все остальные элементы симплексной таблицы вычисляются по следующей формуле:

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_S$	$-x_n$	1
0	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,S}$	$a_{1,n}$	b_1
....
0	$a_{m,1}$	$a_{m,2}$	$a_{m,S}$	$a_{m,n}$	b_m
x_{m+1}	$a_{m+1,1}$	$a_{m+1,2}$	$a_{m+1,s}$	$a_{m+1,n}$	b_{m+1}
....
x_{m+p}	$a_{m+p,1}$	$a_{m+p,2}$	$a_{m+p,S}$	$a_{m+p,n}$	b_{m+p}
$Q(\overline{x})$	$-c_1$	$-c_2$	$-c_S$	$-c_n$	0

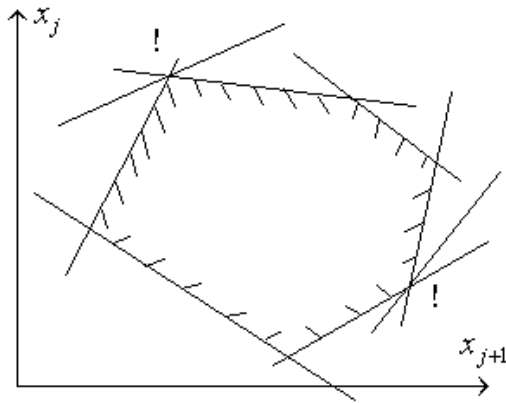
Правила выбора разрешающего элемента при поиске опорного плана.

1. При условии отсутствия “0-строк” (ограничений-равенств) и “свободных” переменных (т.е. переменных, на которые не наложено требование неотрицательности).
 - Если в столбце свободных членов симплексной таблицы нет отрицательных элементов, то опорный план найден.
 - Есть отрицательные элементы в столбце свободных членов, например $b_i < 0$. В такой строке ищем отрицательный коэффициент a_{il} , и этим самым определяем разрешающий столбец l . Если не найдем отрицательный a_{il} , то система ограничений несовместна (противоречива).
 - В качестве разрешающей выбираем строку, которой соответствует минимальное отношение:
$$\frac{b_r}{a_{rl}} = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{il}} \mid \frac{b_i}{a_{il}} > 0 \right\},$$
 где r - номер разрешающей строки. Таким образом, a_{rl} - разрешающий элемент.
 - После того, как разрешающий элемент найден, делаем шаг модифицированного жорданова исключения с направляющим элементом a_{rl} и переходим к следующей симплексной таблице.
2. В случае присутствия ограничений-равенств и “свободных” переменных поступают следующим образом.
 - Выбирают разрешающий элемент в “0-строке” и делают шаг модифицированного жорданова исключения, после чего вычеркивают этот разрешающий столбец. Данную последовательность действий продолжают до тех пор, пока в симплексной таблице остается хотя бы одна “0-строка” (при этом таблица сокращается).
 - Если же присутствуют и свободные переменные, то необходимо данные переменные сделать базисными. И после того, как свободная переменная станет базисной, в процессе определения разрешающего элемента при поиске опорного и оптимального планов данная строка не учитывается (но преобразуется).

Вырожденность в задачах линейного программирования

Рассматривая симплекс-метод, мы предполагали, что задача линейного программирования является невырожденной, т.е. каждый опорный план содержит ровно m положительных компонент, где m – число ограничений в задаче. В вырожденном опорном плане число положительных компонент оказывается меньше числа ограничений: некоторые базисные переменные, соответствующие данному опорному плану, принимают нулевые значения. Используя геометрическую интерпретацию для простейшего случая, когда $n - m = 2$ (число небазисных переменных равно 2), легко отличить вырожденную задачу от невырожденной. В вырожденной задаче в одной вершине многогранника условий пересекается более двух прямых,

описываемых уравнениями вида $x_i = 0$. Это значит, что одна или несколько сторон многоугольника условий стягиваются в точку.



Аналогично при $n - m = 3$ в вырожденной задаче в одной вершине пересекается более 3-х плоскостей $x_i = 0$.

В предположении о невырожденности задачи находилось только одно значение

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{il}} \mid \frac{b_i}{a_{il}} > 0 \right\}, \quad \text{по которому}$$

определялся индекс выводимого из базиса вектора условий (выводимой из числа

базисных переменных). В вырожденной задаче $\min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{il}} \mid \frac{b_i}{a_{il}} > 0 \right\}$ может

достигаться на нескольких индексах сразу (для нескольких строк). В этом случае в найденном опорном плане несколько базисных переменных будут нулевыми.

Если задача линейного программирования оказывается вырожденной, то при плохом выборе вектора условий, выводимого из базиса, может возникнуть бесконечное движение по базисам одного и того же опорного плана. Один из приемов борьбы с вырожденностью состоит в преобразовании задачи путем “незначительного” изменения вектора правых частей системы ограничений на величины ε_i , таким образом, чтобы задача стала невырожденной, и, в то же время, чтобы это изменение не повлияло реально на оптимальный план задачи.

Чаще реализуемые алгоритмы включают в себя некоторые простые правила, снижающие вероятность возникновения закливания или его преодоления.

Пусть переменную x_j необходимо сделать базисной. Рассмотрим множество индексов E_0 , состоящее из тех i , для которых достигается

$$\theta_0 = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{il}} \mid \frac{b_i}{a_{il}} > 0 \right\}. \quad \text{Множество индексов } i, \text{ для которых выполняется}$$

данное условие обозначим через E_0 . Если E_0 состоит из одного элемента, то из базиса исключается вектор условий A_i (переменная x_i делается небазисной).

Если E_0 состоит более чем из одного элемента, то составляется множество E_1 , которое состоит из $i \in E_0$, на которых достигается

$$\theta_1 = \min_{i \in E_0} \left\{ \frac{a_{il}}{a_{il}} \right\}. \quad \text{Если } E_1 \text{ состоит из одного индекса } k, \text{ то из базиса выводится}$$

переменная x_k . В противном случае составляется множество E_2 и т.д.

Практически правилом надо пользоваться, если закливание уже обнаружено.