СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бодров А.Г., Никитин А.А. Качественный и численный анализ интегрального уравнения, возникающего в модели стационарных сообществ // Докл. АН. 2014. **455**. № 5. С. 507–511.
2. Бодров А.Г., Никитин А.А. Исследование интегрального уравнения плотности биологического вида в пространствах различных размерностей // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2015. № 4. С. 7–13.
3. Plank M.J., Law R. Spatial point processes and moment dynamics in the life sciences: a parsimonious derivation and some extensions // Bull. Math. Biol. 2015. **77**. P. 586–613.
4. Dieckmann U., Law R. Relaxation projections and the method of moments // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity. Cambridge University Press, 2000. P. 252–270.
5. Dieckmann U., Law R. Relaxation projections and the method of moments // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity. Cambridge University Press, 2000. P. 412–455.
6. Law R., Murrell D.J., Dieckmann U. Population growth in space and time: spatial logistic equations // Ecology. 2003. **84**. N 1. P. 252–262.
7. Murrell D.J., Dieckmann U. On moment closures for population dynamics in continuous space // J. Theor. Biology. 2004. **229**. P. 421–432.
8. Данченко В.И., Давыдов А.А., Никитин А.А. Об интегральном уравнении для стационарных распределений биологических сообществ // Проблемы динамического управления. Вып. 3. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2009. С. 15–29.
9. Давыдов А.А., Данченко В.И., Звягин М.Ю. Существование и единственность стационарного распределения биологического сообщества // Труды МИАН. 2009. **267**. С. 46–55.
10. Baddour N. Operational and convolution properties of two-dimensional Fourier transforms in polar coordinates // J. Opt. Soc. Amer. 2009. **26**. P. 1767–1777.
11. Murrell J., Law R. Heteromyopia and the spatial coexistence of similar competitors // Ecology Letters. 2003. **6**. P. 48–59.

Поступила в редакцию
13.04.17

УДК 519.6

В. И. Пагурова[1]

О ПРЕДЕЛЬНОМ МНОГОМЕРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК

Исследуется совместное асимптотическое при $n \to \infty$ распределение промежуточных порядковых статистик, построенных по выборке объема n.

Ключевые слова: промежуточные порядковые статистики, многомерное нормальное распределение, слабая сходимость.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые и одинаково абсолютно непрерывно распределенные величины, копии случайной величины X, $F(x) = \mathbf{P}\{X \leqslant x\}$, $f(x) = F'(x)$, $X_k^{(n)}$ — порядковая статистика в вариационном ряду $X_1^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant X_n^{(n)}$, построенном по величинам $X_1, \ldots, X_n$. Обозначим $n_i = [t_i n^\alpha]$, $i = 1, \ldots, m$, $0 < t_1 < \ldots < t_m$, где t_i не зависит от n, $0 < \alpha < 1$, $[x]$ означает целую часть числа x. Для различных классов распределений F исследуется асимптотическое при $n \to \infty$ совместное распределение m промежуточных порядковых статистик $X_{n_1}^{(n)}, \ldots, X_{n_m}^{(n)}$.

Порядковые статистики играют важную роль при построении статистических критериев и оценок неизвестных параметров при изучении наводнений и засух, в задачах изучения прочности на разрыв в проблемах, связанных с усталостью материалов, в задачах контроля качества,

[1] Факультет ВМК МГУ, ст. науч. сотр., к.ф.-м.н., e-mail: pagurova@yandex.ru

при обнаружении аномальных наблюдений. Промежуточные порядковые статистики также находят применение при аппроксимации нижних и верхних "хвостов" распределения F, при построении состоятельных оценок параметра формы предельного распределения величин $X_1^{(n)}$ и $X_n^{(n)}$.

Введем величины

$$\lambda_{k,n} = k/n, \quad k = k(n) \to \infty, \quad \lambda_{k,n} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{1}$$

Необходимым и достаточным условием асимптотической нормальности при $n \to \infty$ статистики $T_n = (X_k^{(n)} - d_n)/c_n$ при некоторых $c_n > 0$ и d_n является условие [1, 2]: для любых x выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} (F(c_n x + d_n) - \lambda_{k,n})\sqrt{k}/\lambda_{k,n} = x.$$

Для абсолютно непрерывных распределений величины c_n и d_n определяются из соотношений

$$F(d_n) = \lambda_{k,n}, \quad c_n = \sqrt{k}/\big(nf(d_n)\big). \tag{2}$$

В работах [3, 4] показано, что при выполнении условия (1) и $n \to \infty$ возможными предельными распределениями статистики T_n являются нормальное и логнормальное распределения.

Совместное асимптотическое распределение при $n \to \infty$ центральных порядковых статистик ранга $[n\lambda_i] + 1$, $i = 1, \ldots, m$, $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_m < 1$, рассмотрено в работе [5]. Предельное распределение процесса $V_k^{(n)}(t) = (X_{n-kt}^{(n)} - \beta_{kt}^{(n)})/\alpha_{kt}^{(n)}$, где k определяется соотношениями (1), а параметр t не зависит от n, исследовано в [6]. В [7] приведено предельное распределение промежуточных порядковых статистик, когда исходные величины $X_1, \ldots, X_n$ удовлетворяют некоторым общим условиям зависимости. В [8] указано предельное распределение промежуточных порядковых статистик, построенных по выборке случайного объема.

Рассмотрим вектор $(X_{n_1}^{(n)}, \ldots, X_{n_m}^{(n)})$, для которого величины $(X_{n_i}^{(n)} - d_{n,t_i})/c_{n,t_i}$, $i = 1, \ldots, m$, при $n \to \infty$ асимптотически стандартно нормальны и

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} c_{n,t_1} < \infty. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ дифференцируема в окрестности точки d_{n,t_i} и $f(d_{n,t_i}) \neq 0$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда совместное распределение величин $X_{n_1}^{(n)} - d_{n,t_1}, \ldots, X_{n_m}^{(n)} - d_{n,t_m}$ при $n \to \infty$ сходится к m-мерному нормальному распределению с вектором нулевых математических ожиданий и ковариациями* $\operatorname{cov}(X_{n_i}^{(n)}, X_{n_j}^{(n)}) = \sqrt{t_i/t_j}\, c_{n,t_i}\, c_{n,t_j}$, $i \leqslant j$.

Доказательство. Предположим сначала, что исходное распределение F является равномерным распределением на отрезке $(0, 1)$, так как с помощью обратного вероятностного интегрального преобразования можно получить любое распределение F, удовлетворяющее условиям теоремы. Совместная плотность распределения величин $X_{n_i}^{(n)}$, $i = 1, \ldots, m$, имеет вид

$$h(x_1, \ldots, x_m) = C x_1^{n_1 - 1} \prod_{j=2}^{m} (x_j - x_{j-1})^{n_j - n_{j-1} - 1} (1 - x_m)^{n - n_m},$$

где C — общее обозначение для постоянной. Сделаем замену $x_i = t_i^{1/2}/n^{1-\alpha/2} y_i + t_i/n^{1-\alpha}$, $i = 1, \ldots, m$, тогда

$$h(x_1, \ldots, x_m) =$$
$$= C \left(1 + \frac{y_1}{\sqrt{t_1} n^{\alpha/2}}\right)^{t_1 n^\alpha - 1} \prod_{j=2}^{m} \left(1 + \frac{\sqrt{t_j} y_j - \sqrt{t_{j-1}} y_{j-1}}{(t_j - t_{j-1}) n^{\alpha/2}}\right)^{(t_j - t_{j-1}) n^\alpha - 1} \left(1 - \frac{\sqrt{t_m} y_m n^{1/2}}{n - t_m n^\alpha}\right)^{n - t_m n^\alpha}.$$

Найдем совместное асимптотическое распределение при $n \to \infty$ компонент вектора $(Y_1, \ldots, Y_m)$. Для этого рассмотрим выражение

$$\ln h(x_1, \ldots, x_m) = C + y_1^2 \left[-\frac{t_2}{2(t_2 - t_1)} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right] + \sum_{j=2}^{m-1} y_j^2 \left[-\frac{t_j (t_{j+1} - t_{j-1})}{2(t_j - t_{j-1})(t_{j+1} - t_j)} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right] +$$

$$+ y_m^2\left[-\frac{t_m}{2(t_m-t_{m-1})}+O\left(\max\left(\frac{1}{n^\alpha},\ \frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)\right)\right]+\sum_{j=1}^{m-1} y_j y_{j+1}\left[\frac{\sqrt{t_j t_{j+1}}}{t_{j+1}-t_j}+O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^{\alpha/2}}\right). \tag{4}$$

Преобразуя его, будем иметь

$$\ln h(x_1,\dots,x_n) =$$
$$= C-\frac{1}{2}\left[y_1^2\frac{t_2}{t_2-t_1}+\sum_{j=2}^{m-1} y_j^2\frac{t_j(t_{j+1}-t_{j-1})}{(t_j-t_{j-1})(t_{j+1}-t_j)}+y_m^2\frac{t_m}{t_m-t_{m-1}}-2\sum_{j=1}^{m-1} y_j y_{j+1}\frac{\sqrt{t_j t_{j+1}}}{t_{j+1}-t_j}\right]+$$
$$+O\left(\max\left(\frac{1}{n^{\alpha/2}},\ \frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)\right). \tag{5}$$

Из (4), (5) следует, что вектор $(Y_1,\dots,Y_m)$ асимптотически при $n\to\infty$ имеет m-мерное нормальное распределение с вектором нулевых математических ожиданий. Элементы матрицы $A=(A_{ij})$ коэффициентов квадратичной формы в соотношении (5) определяются следующим образом:

$$A_{11}=\frac{t_2}{t_2-t_1},\quad A_{jj}=\frac{t_j(t_{j+1}-t_{j-1})}{(t_j-t_{j-1})(t_{j+1}-t_j)},\quad 2\leqslant j\leqslant m-1,\quad A_{mm}=\frac{t_m}{t_m-t_{m-1}},$$
$$A_{j,j+1}=A_{j+1,j}=-\frac{\sqrt{t_j t_{j+1}}}{(t_{j+1}-t_j)},\quad A_{ij}=0\quad \text{при } |i-j|>1.$$

Матрица, обратная к A, т. е. ковариационная матрица величин Y_i, асимптотически имеет элементы $\operatorname{cov}(Y_i,Y_j)=\sqrt{t_i/t_j}$, $i\leqslant j$. Так как

$$X_{n_i}^{(n)}=\frac{t_i^{1/2}}{n^{1-\alpha/2}}Y_i+\frac{t_i}{n^{1-\alpha}},\quad i=1,\dots,m,$$

то в том случае, когда исходное распределение F является равномерным на отрезке $(0,1)$, вектор $(X_{n_1}^{(n)},\dots,X_{n_m}^{(n)})$ асимптотически при $n\to\infty$ имеет m-мерное нормальное распределение с вектором математических ожиданий $(t_1/n^{1-\alpha},\dots,t_m/n^{1-\alpha})$ и ковариациями $\operatorname{cov}(X_{n_i}^{(n)},X_{n_j}^{(n)})=t_i/n^{2-\alpha}$, $i\leqslant j$.

Для доказательства теоремы в общем случае воспользуемся следующей леммой [9, гл. 9, § 9.2].

Лемма. *Если случайные величины $Z_{n,i}$, $i=1,\dots,m$, имеют асимптотически m-мерное нормальное распределение с математическими ожиданиями $\mu_{n,i}$, дисперсиями $\sigma_{n,i}^2$, $\sigma_{n,i}^2\to 0$ при $n\to\infty$, и ковариациями $\rho_{i,j}\sigma_{n,i}\sigma_{n,j}$, и если $g_i(Z_{n,i})$ — однозначные функции с не равными нулю в некоторых окрестностях точек $Z_{n,i}=\mu_{n,i}$ и непрерывными производными $g_i'(Z_{n,i})$, то сами $g_i(Z_{n,i})$ асимптотически имеют m-мерное нормальное распределение с математическими ожиданиями $g_i(\mu_{n,i})$ и ковариациями $\rho_{i,j}\sigma_{n,i}\sigma_{n,j}g_i'(\mu_{n,i})g_j'(\mu_{n,j})$.*

Полагая $Z_{n,i}=X_{n_i}^{(n)}$, $\mu_{n,i}=t_i/n^{1-\alpha}$, $\rho_{i,j}\sigma_{n,i}\sigma_{n,j}=t_i/n^{2-\alpha}$, $i\leqslant j$, получим, что преобразование $g_i(X_{n_i}^{(n)})=F^{-1}(X_{n_i}^{(n)})$ удовлетворяет условиям леммы,

$$g_i(\mu_{n,i})=F^{-1}(\mu_{n,i})=d_{n,t_i},\qquad g_i'(\mu_{n,i})=\frac{dg_i(\mu_{n,i})}{d\mu_{n,i}}=\frac{1}{f(d_{n,t_i})},\quad i=1,\dots,m.$$

Выразим величину $1/f(d_{n,t_i})$ через c_{n,t_i}, используя соотношение (2), после чего получим значения для ковариаций, указанные в формулировке теоремы. Доказательство теоремы завершено.

Введем обозначение $z_F=\inf\{x: F(x)>0\}$, $0<\alpha<1$, $t>0$, и рассмотрим типичные классы распределений, широко используемые в статистических приложениях.

Класс B_1:

$$F(x)\sim a|x|^\gamma\exp(-b|x|^\Delta),\quad f(x)\sim ab\Delta|x|^{\gamma+\Delta-1}\exp(-b|x|^\Delta)\ \text{при } x\to-\infty,\ a,b,\Delta>0,$$
$$d_{n,t}=-\left(\frac{(1-\alpha)\ln n}{b}\right)^{1/\Delta}\left(1+\frac{\gamma\ln\ln n+\ln c}{\Delta^2(1-\alpha)\ln n}\right),\quad c=\left(\frac{1-\alpha}{b}\right)^\gamma\left(\frac{a}{t}\right)^\Delta,$$
$$c_{n,t}=\left(\frac{(1-\alpha)\ln n}{b}\right)^{(1-\Delta)/\Delta}\frac{1}{\Delta b t^{1/2}n^{\alpha/2}}.$$

Класс B_2:

$$F(x) \sim a|x|^{-\Delta}, \quad f(x) \sim a\Delta|x|^{-\Delta-1} \text{ при } x \to -\infty, \ a, \Delta > 0,$$
$$d_{n,t} = -(a\,n^{1-\alpha}/t)^{1/\Delta}, \quad c_{n,t} = a^{1/\Delta}/(\Delta\, t^{(2+\Delta)/(2\Delta)} n^{-(1-\alpha)/\Delta+\alpha/2}).$$

Класс B_3:

$$F(x) \sim a(x - z_F)^{\Delta}, \quad f(x) \sim a\Delta(x - z_F)^{\Delta-1} \text{ при } x \to z_F, \ -\infty < z_F < \infty, \ a, \Delta > 0,$$
$$d_{n,t} = z_F + (an^{1-\alpha}/t)^{-1/\Delta}, \quad c_{n,t} = 1/(\Delta a^{1/\Delta} t^{(\Delta-2)/(2\Delta)} n^{(1-\alpha)/\Delta+\alpha/2}).$$

При $n \to \infty$ для всех трех классов B_1, B_2 и B_3 предельным распределением статистики $(X^{(n)}_{[t\,n^\alpha]} - d_{n,t})/c_{n,t}$ является стандартное нормальное распределение. Для классов B_1 и B_3 условие (3) выполняется, а для класса B_2 это условие справедливо только при $2/(2+\Delta) \leqslant \alpha < 1$. Следовательно, для класса B_2 теорема верна лишь при указанном ограничении на параметр α.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов Н.В. Предельные законы распределения для членов вариационного ряда // Тр. МИАН им. В.А. Стеклова. 1949. **25.** С. 5–59.
2. Смирнов Н.В. О сходимости к нормальному закону распределений членов вариационного ряда // Известия АН УзССР. 1966. **3.** С. 24–32.
3. Чибисов Д.М. О предельных распределениях для членов вариационного ряда // Теория вероятн. и примен. 1964. **9.** № 1. С. 159–163.
4. Wu C. The types of limit distributions for some terms of variational series // Sci. Sinica. 1966. **15.** P. 749–762.
5. Mosteller F. On some useful “inefficient” statistics // Ann. Math. Statist. 1946. **17.** P. 377–408.
6. Cooil B. Limiting multivariate distributions of intermediate order statistics // Ann. Probab. 1985. **13.** N 2. P. 469–477.
7. Watts V., Rootsen H., Leadbetter M. On limiting distributions of intermediate order statistics from stationary sequences // Ann. Probab. 1982. **10.** P. 653–662.
8. Пагурова В.И. О предельном распределении порядковых статистик в выборке случайного объема // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2016. № 4. С. 16–19.
9. Дэйвид Г. Порядковые статистики. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию
13.02.17