

Лабораторная работа 1.24V

Оборотный маятник Катера

Цели работы

1. Изучение колебательного движения оборотного маятника
2. Определение ускорения свободного падения

Теоретическое введение

Физическим маятником называется твердое тело, способное совершать колебания около неподвижной точки, не совпадающей с центром масс этого тела. Если покоящийся маятник отвести в сторону и отпустить (т.е. создать начальное смещение), то он начнет совершать колебания около положения равновесия. Время, за которое маятник совершает движение из одного крайнего положения в другое и возвращается обратно в первоначальное положение, называется *периодом колебаний* маятника. При плоском движении маятника его положение в каждый момент времени можно задать с помощью одной переменной — угла отклонения φ из положения равновесия в плоскости колебаний. Величина наибольшего угла отклонения маятника из положения равновесия, достигаемая в ходе его колебаний, называется *угловой амплитудой колебаний*. Из-за наличия силы трения в оси, вообще говоря, колебания маятника будут затухающими, т.е. с течением времени максимальное отклонение маятника от положения равновесия (амплитуда) будет уменьшаться. Частным случаем физического маятника является математический маятник. *Математическим маятником* называется идеализированная система, состоящая из невесомой и нерастяжимой нити, на конце которой находится материальная точка массы m . Достаточно хорошей моделью математического маятника является небольшой тяжелый ша-

рик, подвешенный на длинной тонкой нити (длина нити ℓ много больше радиуса шарика R : $\ell \gg R$).

На рис. 1, а изображен физический маятник, подвешенный на оси z , проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка. Маятник может совершать колебания в плоскости рисунка, причем все точки тела, лежащие на оси z , остаются неподвижными. Центр масс физического маятника обозначен точкой C . Положение равновесия маятника соответствует моменту, когда центр масс и точка подвеса лежат на вертикальной прямой, т.е. момент силы тяжести относительно оси z равен нулю. На рис.1б представлен математический маятник.

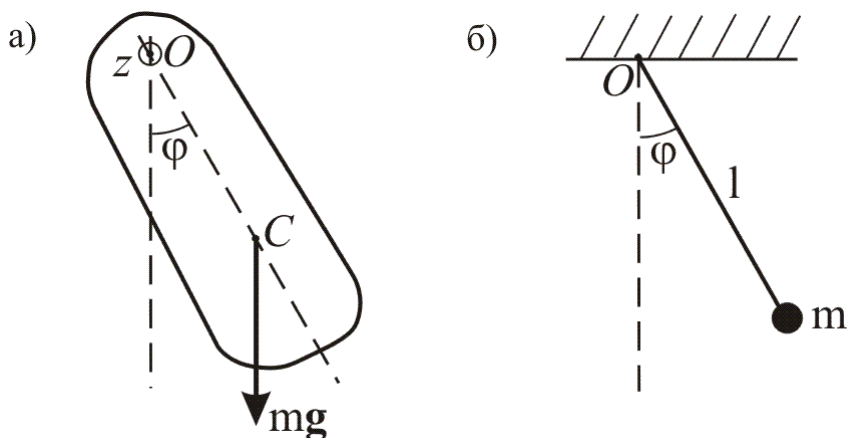


Рис. 1. а) физический маятник б) математический маятник

Рассмотрим малые колебания физического маятника. Если отклонить его на угол φ (см. рис. 1, а), то возникает ненулевой момент силы тяжести, стремящийся вернуть его в положение равновесия. Проекция момента силы тяжести на ось z имеет вид

$$N_z = -mga \sin \varphi, \quad (1)$$

где m — масса маятника; g — ускорение свободного падения; a — расстояние от точки подвеса O до центра масс маятника C , т.е. длина отрезка OC . Так как в работе изучаются малые колебания физического маятника, т.е. угол отклонения мал ($\varphi \ll 1$), то выражение для момента силы тяжести упрощается:

$$N_z \approx -mga \cdot \varphi, \quad (2)$$

Колебательное движение физического маятника около неподвижной оси z описывается уравнением вращательного движения твердого тела (уравнением моментов), которое в проекции на ось z имеет вид

$$I_z \beta_z = N_z, \quad (3)$$

где $\beta_z = \ddot{\varphi}$ — проекция углового ускорения маятника на ось z ; I_z — момент инерции маятника относительно оси z . Подставляя выражение для момента силы тяжести (2) в уравнение движения (3) получим уравнение малых колебаний физического маятника:

$$\ddot{\varphi} + \frac{mga}{I_z} \varphi = 0. \quad (4)$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha), \quad (5)$$

где φ_0 — угловая амплитуда колебаний; $\omega = \sqrt{mga/I_z}$ — круговая (циклическая) частота; α — начальная фаза колебаний. Как следует из приведенного решения, малые колебания физического маятника являются гармоническими (функциональная зависимость угла отклонения от времени — косинус). Таким образом, период малых колебаний физического маятника не зависит от амплитуды колебаний и может быть определен по формуле:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{mga}}. \quad (6)$$

В случае математического маятника: $a = \ell$, $I_z = m\ell^2$, где ℓ – длина нити маятника. Формула (6) при этом переходит в выражение

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}. \quad (7)$$

Сравнивая формулы (6) и (7), можно заключить, что физический маятник массы m колеблется с тем же периодом, что и математический маятник той же массы m и длины

$$\ell_{\text{пр}} = \frac{I_z}{ma}, \quad (8)$$

Величина $\ell_{\text{пр}}$ называется приведенной длиной физического маятника. С использованием определения приведенной длины формулу для периода малых колебаний физического маятника (6) можно переписать в виде

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_{\text{пр}}}{g}}. \quad (9)$$

Точка K на прямой, соединяющей точку подвеса O с центром масс тела C , лежащая на расстоянии приведенной длины от оси вращения, называется центром качания физического маятника (рис. 2). Можно показать, что приведенная длина физического маятника всегда больше расстояния между точкой подвеса и центром масс, т.е. $\ell_{\text{пр}} > a$. Следовательно, точка подвеса O и центр качания K лежат по разные стороны от центра масс C . Точка подвеса и центр

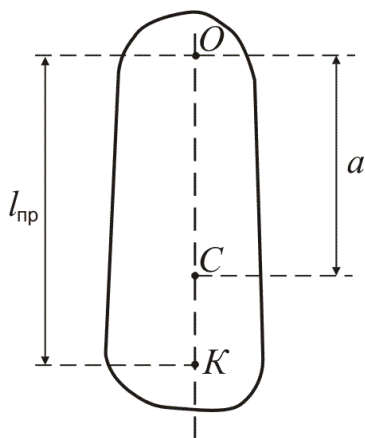


Рис. 2

качания обладают свойством взаимности: при переносе точки подвеса в центр качания прежняя точка подвеса становится новым центром качания. Следовательно, при переносе точки подвеса в центр качания период колебаний маятника останется прежним. Это положение называется теоремой Гюйгенса. Таким образом, если подобрать у физического маятника такие несимметричные относительно центра масс положения двух параллельных осей подвеса, чтобы период колебаний относительно них был одинаков, то расстояние между этими осями будет равно приведенной длине.

Измеряя это расстояние и период колебаний, можно используя формулу (9) найти ускорение свободного падения

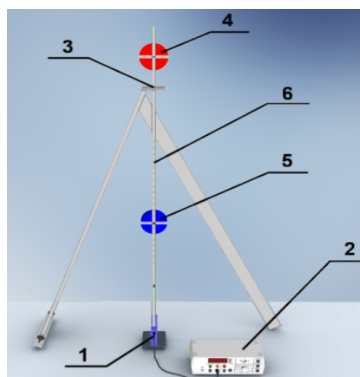
$$g = \frac{4\pi^2 \ell_{\text{пр}}}{T^2}. \quad (10)$$

В заключение приведем формулу для расчета погрешности ускорения свободного падения вычисленного по формуле (10):

$$\varepsilon_g \equiv \frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{2\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \ell_{\text{пр}}}{\ell_{\text{пр}}}\right)^2}, \quad (11)$$

где $\Delta \ell_{\text{пр}}$ и ΔT — абсолютные погрешности измерения приведенной длины маятника и периода его колебаний, соответственно.

Лабораторная установка



(А) Установка



(В) Электронный секундомер

Рис. 3. Схема установки

Схема обратного маятника, используемого в работе, представлена на рис. 3а. Обратный маятник представляет собой стальной стержень 6, на котором неподвижно закреплены точка подвеса 3, а также тяжелые грузы 4 и 5. Маятник подвешивается на кронштейне за один из креплений. На стойке прибора укреплен фотодатчик 1, который подключен в электронному секундомеру 2. Электронный секундомер (рис. 3б) предназначен для измерения периода колебаний обратного маятника и конструктивно выполнен единым блоком с пусковым устройством. Когда маятник проходит положение равновесия, он пересекает оптическую ось фотодатчика. При этом обращенная к фотодатчику сторона отражает луч света, испущенный осветителем фотодатчика на фотоэлемент фотодатчика. Генерируемые при этом в фотодатчике электрические импульсы управляют работой электронного секундомера.

Проведение измерений

1. Запустите приложение. Нажмите кнопку **Запуск** в главном меню.
2. Установку можно приблизить колесиком мыши. Смещение камеры осуществляется зажатием левой кнопки мыши. Зажатием правой кнопки мыши можно поворачивать камеру при необходимости.
3. Последовательным нажатием **Параметры** \Rightarrow **Расстоян.** установите минимальное расстояние от подвеса до груза $M_2 = 100$ мм. Запишите это значение x_2 в таблицу 1.
4. Запустите колебания обратного маятника нажатием кнопки **Пуск**. При это маятник начнет колебаться с небольшой амплитудой, а секундомер начнет измерять период одного колебания T_1 и через 1 полное колебание он снова начнет проводить измерение периода T_1 . Запишите эти значения, для 5 последовательных измерений величины T_1 в таблицу 1.
5. Повторите п.3-4 для всех возможных в установке значений x_2 .
6. Последовательным нажатием **Параметры** \Rightarrow **№ Опыта** выберите **№2**, чтобы изменить точку подвеса маятника, которая находится на расстоянии $d = 800$ мм. Теперь груз M_1 (красный) находится под точкой подвеса.
7. Повторите для этого случая п.3-5 и запишите значения T_2 в таблицу 1.
8. *Измерения можно проводить другим способом: для каждого значения x_2 можно проделать **Опыт №1** и **Опыт №2**, меняя каждый раз точку подвеса, как это указано в п.б.*

Не забудьте записать необходимые параметры установки в разделе **Меню** \Rightarrow **Инфо**.

Обработка результатов измерений

1. По результатам прямых измерений из Таблицы 1 определите среднее значение величин $\langle T_1 \rangle$ и $\langle T_2 \rangle$ для каждого значения x_2 .
2. По данным п.1 постройте графики зависимостей $\langle T_1(x_2) \rangle$ и $\langle T_2(x_2) \rangle$ на одной координатной плоскости.
3. С помощью построенных графиков определите значения x_2 и x'_2 , для которых выполняется условие $\langle T_1 \rangle = \langle T_2 \rangle$. Чтобы максимально точно определить координаты точек пересечения, следует выполнить интерполяцию между самими точками измерения.
4. Определите ускорение свободного падения по формуле 10, учитывая $x_2 + x'_2 = \ell_{\text{пр}}$.
5. Определите относительную и абсолютную погрешности величины ускорения свободного падения ε_g и Δ_g по формуле 11. В качестве погрешности периода колебаний ΔT следует взять максимальную из приборной погрешности (0.1 мс) светового барьера или наименьшую разность $\Delta T = T_2 - T_1$ из Таблицы 1. Погрешность измерения $\Delta \ell_{\text{пр}}$ принять равной 1 мм.
6. Определите какая из погрешностей прямых измерений дает максимальный вклад в погрешность экспериментально определенного ускорения свободного падения.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение понятию физический маятник.
2. Чем математический маятник отличается от физического?
3. Получите уравнение малых колебаний физического маятника.
4. Какое решение у уравнения малых колебаний физического маятника?
5. При каких условиях формула для периода физического маятника становится схожей с формулой для периода математического маятника?

Приложение

Таблица 1

№	x_2 , мм	T_1 , с	T_2 , с	$\langle T_1 \rangle$, с	$\langle T_2 \rangle$, с
1	100				
2					
3					
4					
5					
1	125				
2					
3					
4					
5					
...