Национална програма
"Обучение за ИТ умения и кариера"
https://it-kariera.mon.bg

Министерството на
образованието и науката
https://www.mon.bg

Комбинаторни алгоритми

Алгоритми и структури от данни

Съдържание

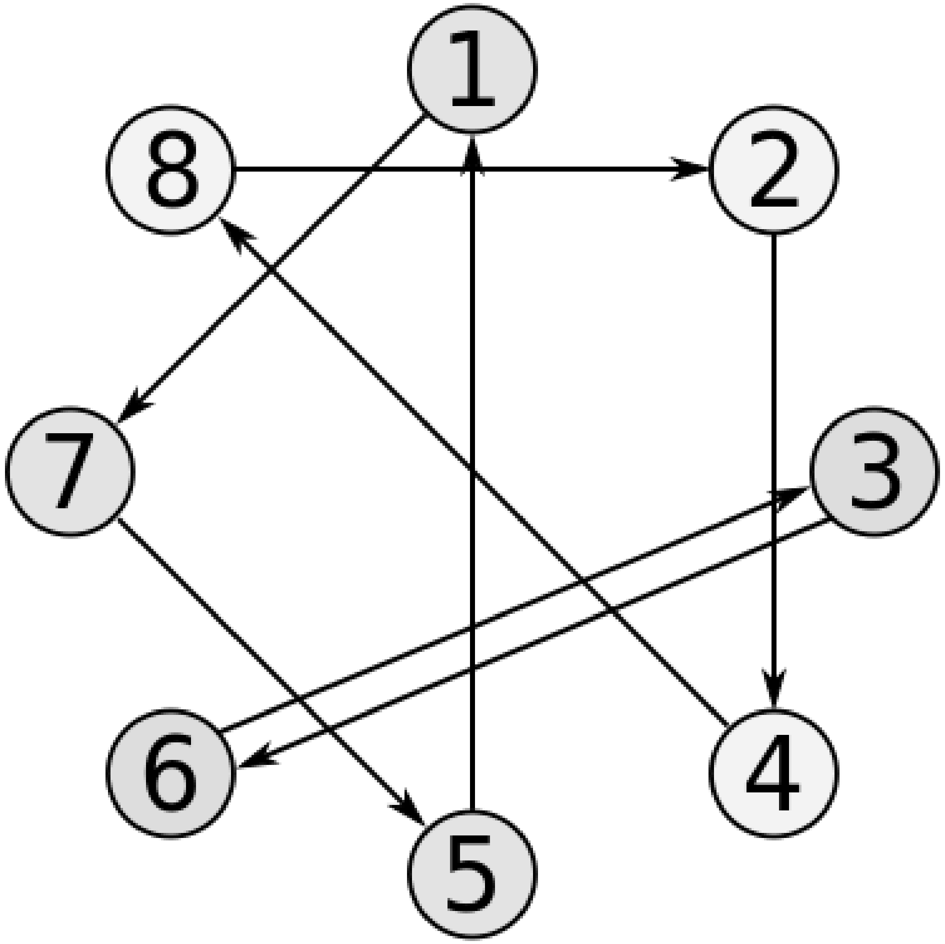
- Генериране на вариации, комбинации, пермутации
- Упражнения: генериране на комбинации и вариации
- Упражнения: генериране на пермутации и други комбинаторни обекти
- Упражнения: комбинаторни задачи

Множества [1/2]

- **Съвкупност от обекти** обединени по някакъв общ признак.
- Обектите, от които се състои множеството, се наричат **елементи**.
- Символният запис $a \in A$ означава, че елементът a принадлежи на множеството A.

Множества [2/2]

- Множеството A се нарича **крайно**, ако се състои от краен брой елементи.
- Означаваме $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и пишем $|A|=n$.
- Множеството $\varnothing$, което не съдържа нито един елемент, се нарича **празно множество.**



Пермутации

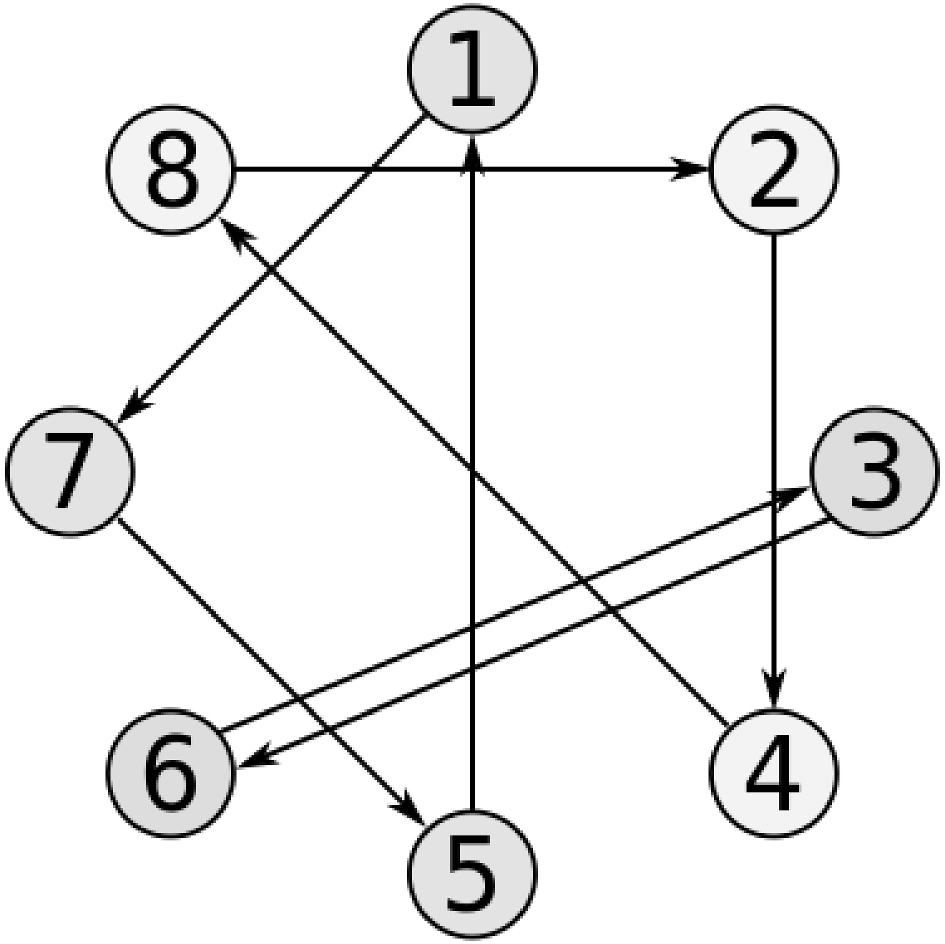
Пермутации без повторение

Определение: Нека А е множество и |А|=n. Всяко подреждане на всичките n елемента на А (или всички различни подреждания на първите n естествени числа) се нарича пермутация без повторение от n-ти ред. Две пермутации се различават една от друга по реда на елементите, участващи в тях.

Теорема: Броят на всички различни пермутации от n-ти ред е:

$$P_n = 1.2.3...n = n!$$

По определение се приема, че 0!=1.

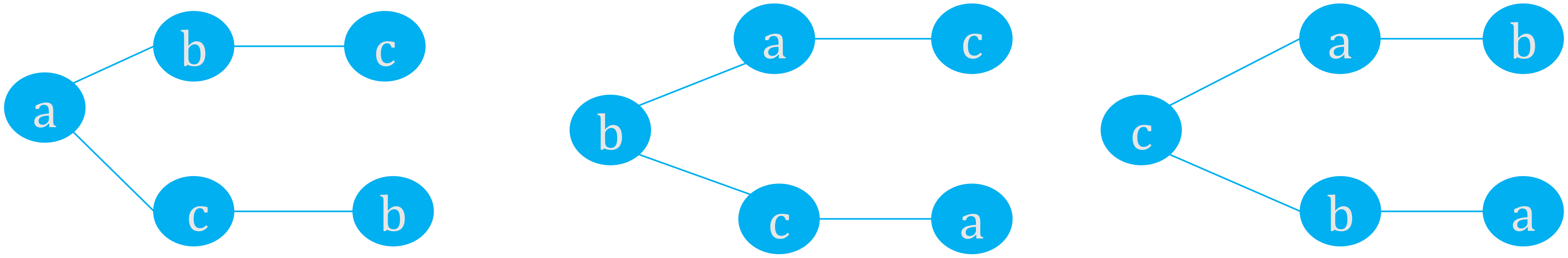


Пермутации

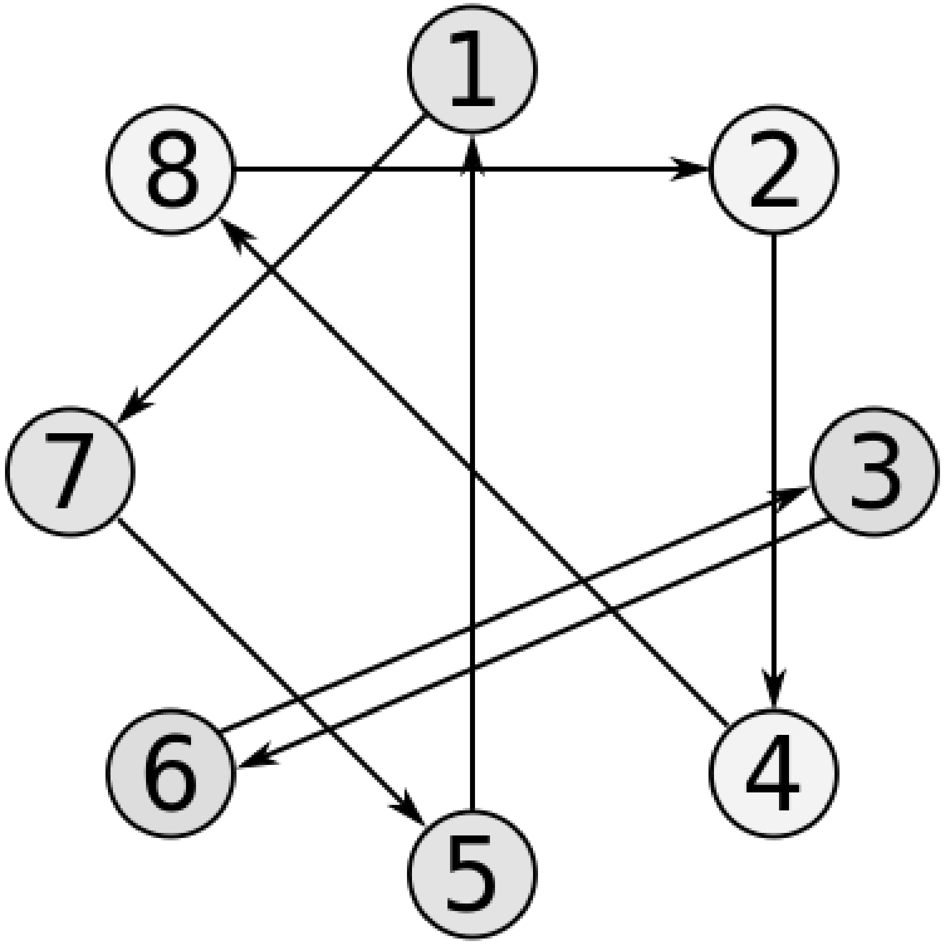
задача

Пермутации без повторение

По колко различни начина могат да седнат трима приятели на един ред в киносалон?



$|A|=|\{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}|=3.2.1=6.$



Пермутации

задача

Пермутации без повторение [1/2]

Колко различни петцифрени числа могат да се запишат с цифрите 0, 1, 2, 3, и 4, ако всички цифри участват?

0 1 2 3 4 НЕ

1 0 2 3 4 4!

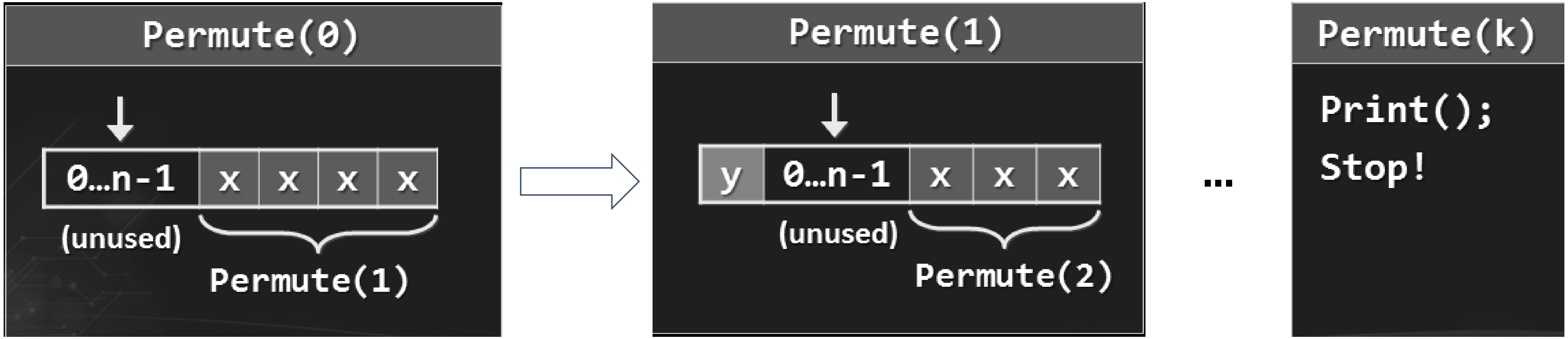
Пермутации без повторение [2/2]

2	1	0	3	4	4!
3	1	2	0	4	4!
4	1	2	3	0	4!

общо: 96

Пермутации: алгоритъм

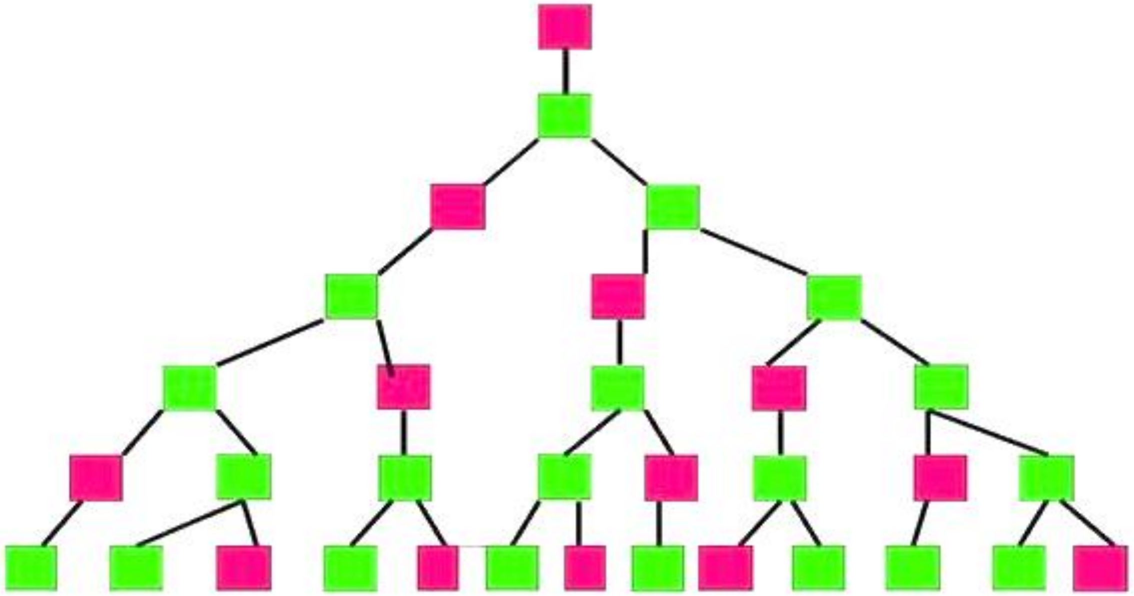
- Използва се функция с един параметър Permute(index)
- Индекса i ще пази неизползваните елементи i=0…n-1
- Маркират се всички използвани елементи
- Извиква се рекурсивно функцията comb(index + 1), за да се генерира останалата част от масива



Генериране на пермутации

```
public static void Gen(int index)
{
  if (index >= elements.Length)
    Console.WriteLine(string.Join(" ", perm));
  else
    for (int i = 0; i < elements.Length; i++)
      if (!used[i])
      {
        used[i] = true;
        perm[index] = elements[i];
        Gen(index + 1);
        used[i] = false;
      }
}
```

```
elements = new int[n];
used = new bool[n];
perm = new int[n];
Permute(0);
```



Комбинации

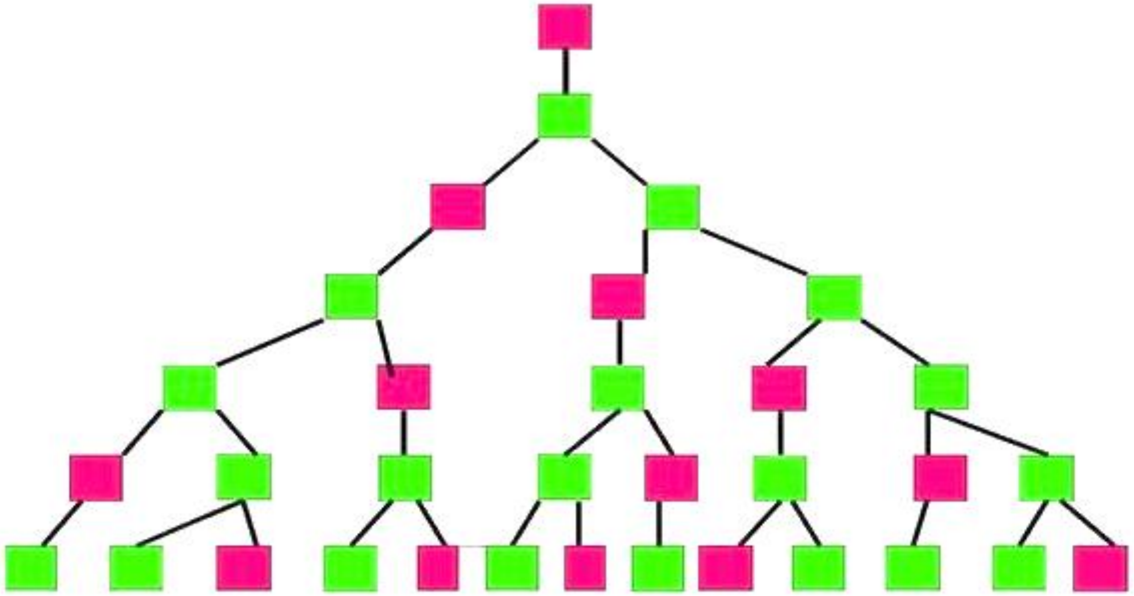
Комбинации без повторения

Определение: Всички различни не наредени извадки без повторение на n елемента от k-ти клас се наричат комбинации без повторение на n елемента от k-ти клас. Две комбинации без повторение се различават една от друга по елементите, участващи в тях.

Теорема: Броят на всички различни комбинации на n елемента от k-ти клас е:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Някои по-често използвани свойства на биномните коефициенти са: $C_n^0 = C_n^n = 1$ $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

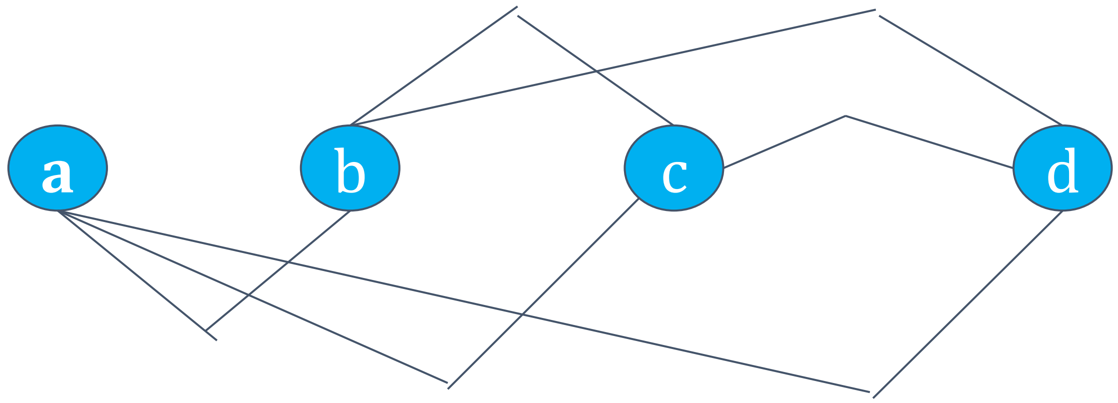


Комбинации

задача

Комбинации без повторения

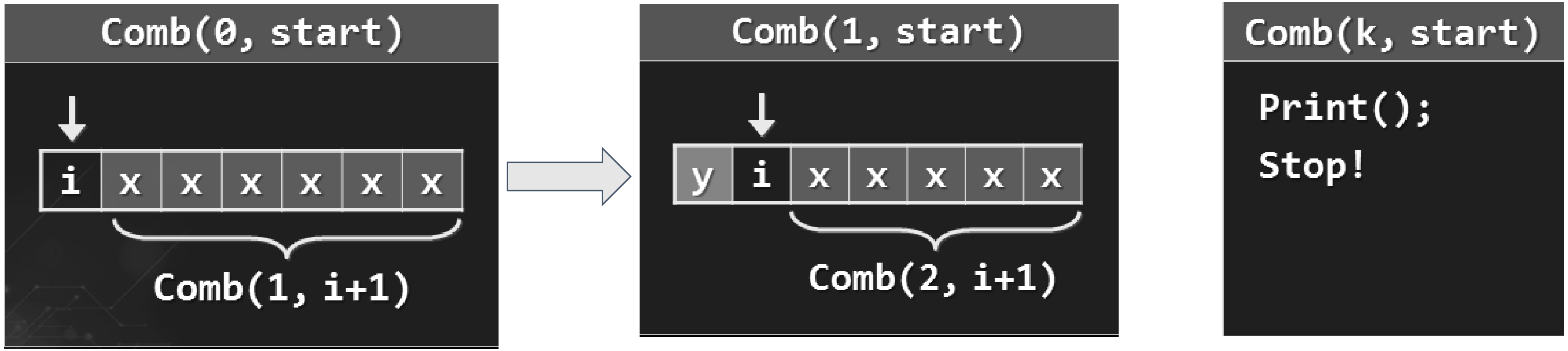
Да се опишат всички комбинации без повторение на четири елемента от втори клас от елементите a, b, c и d и да се определи броят им.

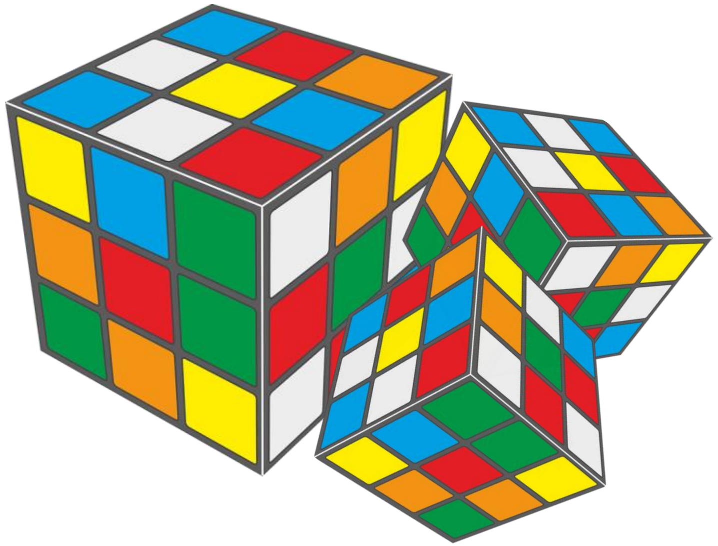


$|A|=|\{ab, ac, ad, bc, bd, cd\}|=6.$

Генериране на комбинации без повторения

- Използва се функция с два параметъра comb(index, start)
- Индекса i има за начална стойност start, и крайна n-1
- Извиква се рекурсивно функцията comb(index + 1, i + 1), за да се генерира останалата част от масива





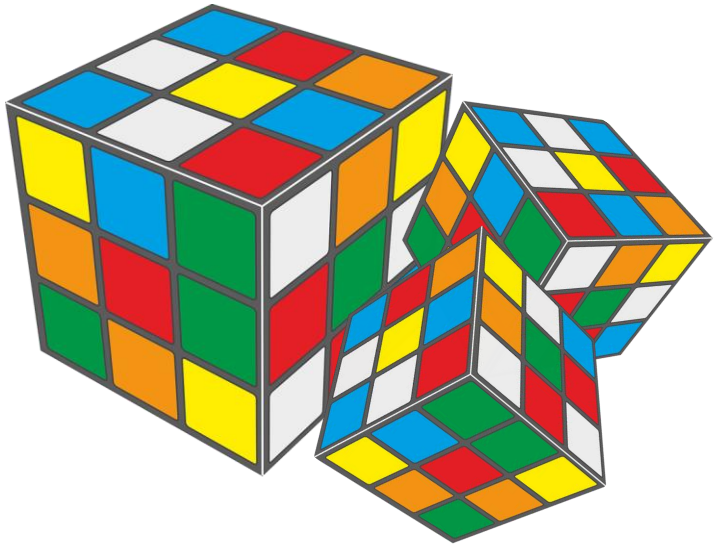
Вариации

Вариации без повторения

Определение: Всички различни наредени извадки без повторение на n елемента от k-ти клас наричаме вариации без повторение на n елемента от k -ти клас. Две вариации без повторение се различават една от друга или по реда на участващите в тях елементи или по елементите, участващи в тях.

Теорема: Броят на всички различни вариации без повторение на n елемента от k-ти клас е:

$$V_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$$



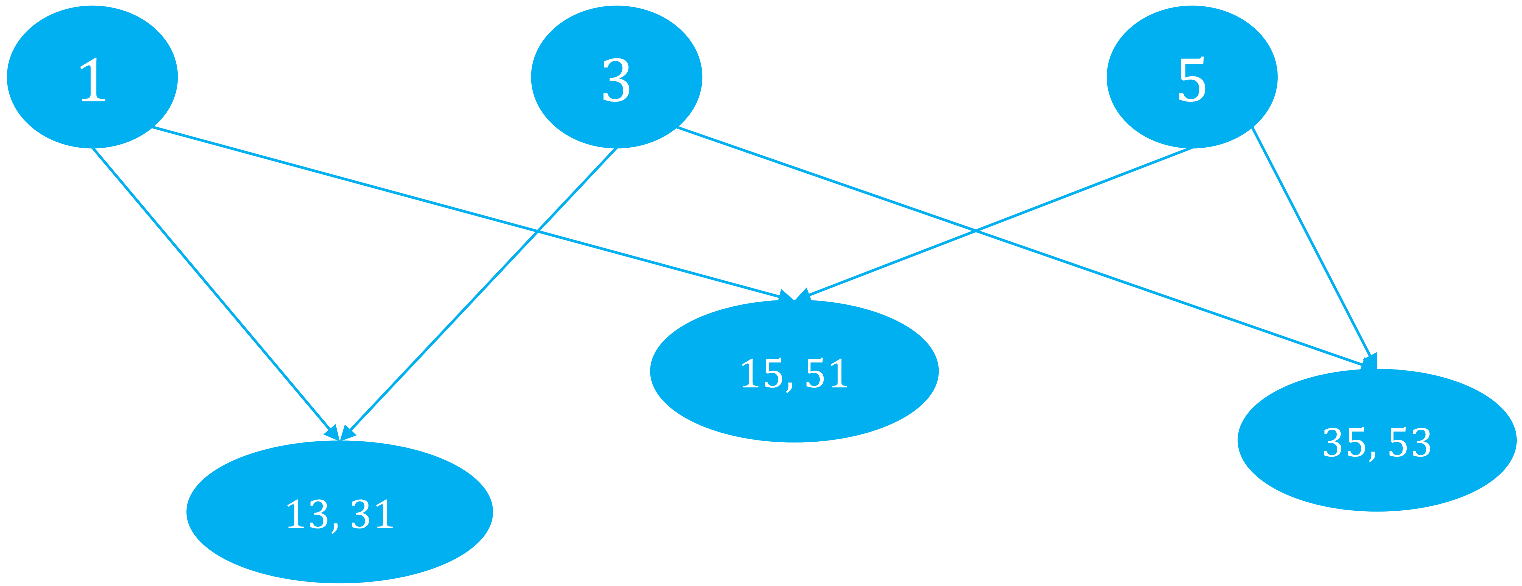
Вариации

задача

Вариации без повторения

Колко различни двуцифрени числа, съставени от различни цифри могат да бъдат образувани с цифрите 1, 3 и 5.

NB! Редът на подреждането на цифрите в числото има значение.



Упражнения:
генериране на комбинации и вариации

Упражнения: генериране на комбинации и вариации

Задача: Да се напише програма, която въвежда от клавиатурата две естествени числа n - броя на елементите и k - от колко елемента да се състои подмножеството, което ще се генерира. Програмата да извежда всички комбинации от n елемента k-ти клас.

Примерен вход:

4 2

Примерен изход:

1 2

1 3

1 4

2 3

2 4

3 4

Упражнения: генериране на комбинации и вариации

Задача: Да се напише програма, която въвежда от клавиатурата две естествени числа n - броя на елементите и k - от колко елемента да се състои подмножеството, което ще се генерира. Програмата да извежда всички комбинации от n елемента k-ти клас, като редът на елементите е от значение.

Примерен вход: 4 2

Примерен изход: 1 2   1 3   1 4   2 1   2 3   2 4   3 1   3 2   3 4   4 1   4 2   4 3

Упражнения:
генериране на пермутации и
други комбинаторни обекти

Упражнения: генериране на пермутации и други комбинаторни обекти

Задача: Да се напише програма, която въвежда от клавиатурата едно цяло число n - броя на елементите от дадено множество. Програмата да извежда всички възможни подреждания на тези елементи. Всеки елемент участва веднъж и мястото му е съществено.

Примерен вход:

3

Примерен изход:

1 2 3

1 3 2

2 1 3

2 3 1

3 1 2

3 2 1

Упражнения: генериране на пермутации и други комбинаторни обекти

Задача: Напишете програма, която намира биномните коефициенти на израза $(x + y)^n$

където n се въвежда от клавиатурата .

Примерен вход: 2

Примерен изход: 1 2 1

Упражнения: генериране на пермутации и други комбинаторни обекти

При повдигане на степен n на израза (x+y) коефициентите пред съответните степени на x и y са всъщност биномните коефициенти.

Например:

$$\left(x+y\right)^2 = \binom{2}{0}.x^2 + \binom{2}{1}.x.y + \binom{2}{2}.y^2 = 1.x^2 + 2.x.y + 1.y^2$$

Биномни коефициенти [1/5]

За комбинация на n елемента от k- ти клас използваме означението C_n^k

В литературата е прието да се означава $\binom{n}{k}$

Теорема: Броят на всички различни комбинации на n елемента от k-ти клас е:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

Биномни коефициенти [2/5]

- Тази формула е еквивалентна на:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- Тези числа са известни като биномни коефициенти, тъй като те участват в Нютоновия бином (математическа теорема за разлагане на двучлен, повдигнат на степен).

$$\left(x+y\right)^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k} y^{n-k}$$

Биномни коефициенти [3/5]

- В частен случай, когато x=y=1 се получава:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

- Някой най-често използвани свойства на биномните коефициенти са:

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$$

Биномни коефициенти [4/5]

- Рекурсивната дефиниция за броя на всички комбинации от n елемента k-ти клас е:

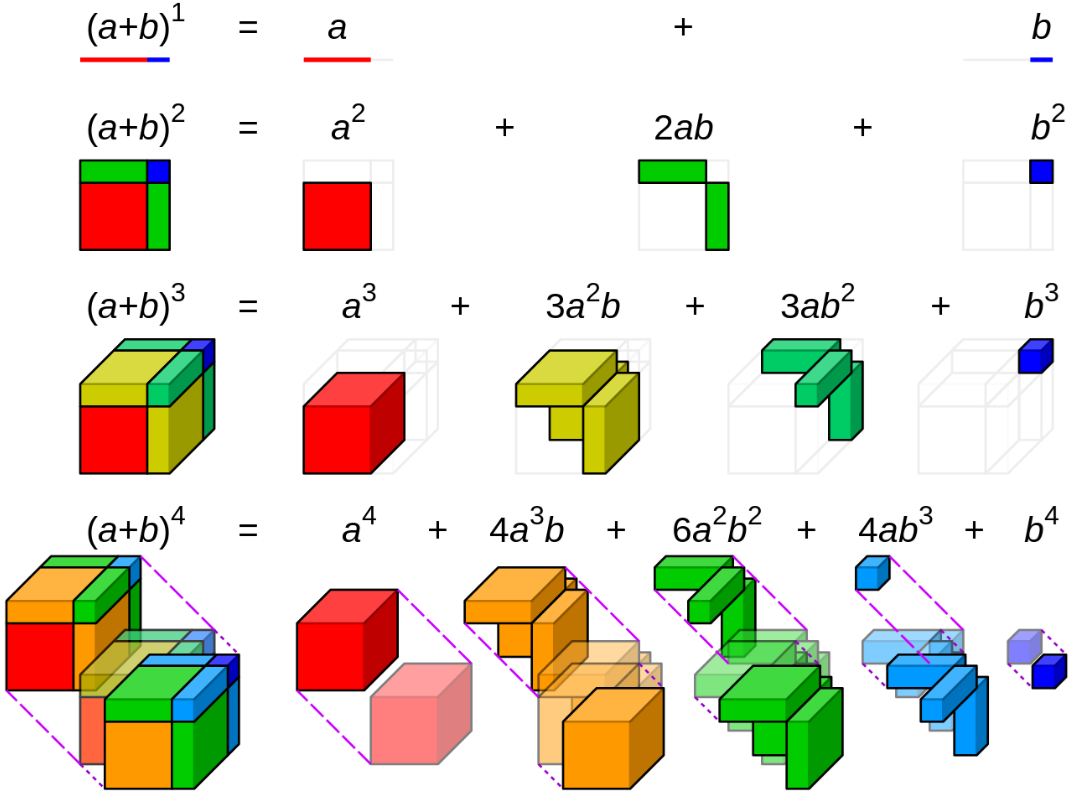
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

- Частни случаи:

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1$$

Биномни коефициенти [5/5]

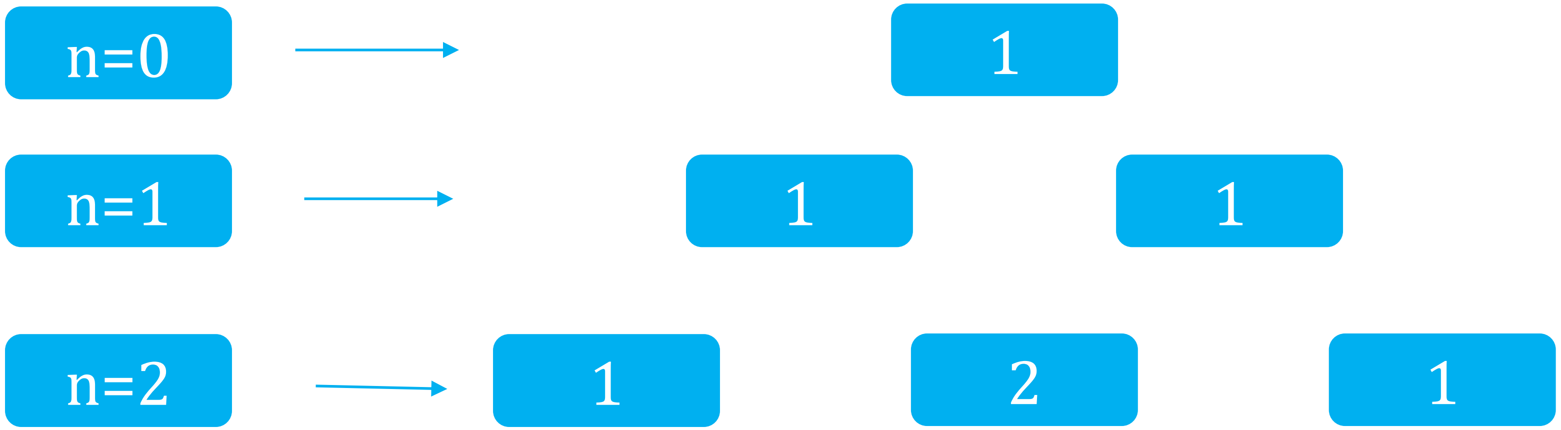
```
// Рекурсивна функция
int binom(int n, int k)
{
 if (n==k || k==0) return 1;
 return binom(n-1, k) + binom(n-1, k-1);
}
```



Триъгълник на Паскал

Триъгълник на Паскал [1/5]

- Аритметичен триъгълник, съдържащ биномните коефициенти.
- Позволява да разположите биномните коефициенти, като всяко число е равно на сумата от двете числа над него.



Триъгълник на Паскал [2/5]

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

Триъгълник на Паскал [3/5]

- Ако сте наблюдателни в триъгълника на Паскал ще забележите:
  - Естествените числа 1, 2, 3, 4, …
  - Триъгълните числа 1, 3, 6, 10, …
  - Петоъгълните числа 1, 5, 15, 35, 70, …
  - Шестоъгълни числа 1, 6, 15, 28, …

Триъгълник на Паскал [4/5]

- Ако сте наблюдателни в триъгълника на Паскал ще забележите:
  - Пирамидалните числа 1, 4, 10, 20, …
  - Числа на Фибоначи 1, 1, 2, 3, 5, 8, …
  - Числа на Каталан 1, 2, 5, 14, 42, …

Триъгълник на Паскал [5/5]

Задача: Напишете програма, която извежда триъгълника на Паскал. От клавиатурата се въвеждат две цели числа N- броя на елементите и K - подмножествата. На изхода изведете триъгълника на Паскал, подравнен в ляво.

$k \setminus n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126				
10	1	10	45	120	210	252				
11	1	11	55	165	330	462				

Обобщение

- Пермутации - начини за подреждане на N елемента
- Вариации - начини за подреждане на K от N елемента
- Комбинации - начини за избор на K от N елемента
- Биномни коефициенти
- Триъгълник на Паскал

Национална програма
"Обучение за ИТ умения и кариера"
https://it-kariera.mon.bg

Министерството на
образованието и науката
https://www.mon.bg