Национална програма
"Обучение за ИТ умения и кариера"
https://it-kariera.mon.bg

Министерството на
образованието и науката
https://www.mon.bg

Алчни алгоритми

Алгоритми и структури от данни

Съдържание

- Алчни (greedy) алгоритми и приложение
- Упражнения: алчни алгоритми

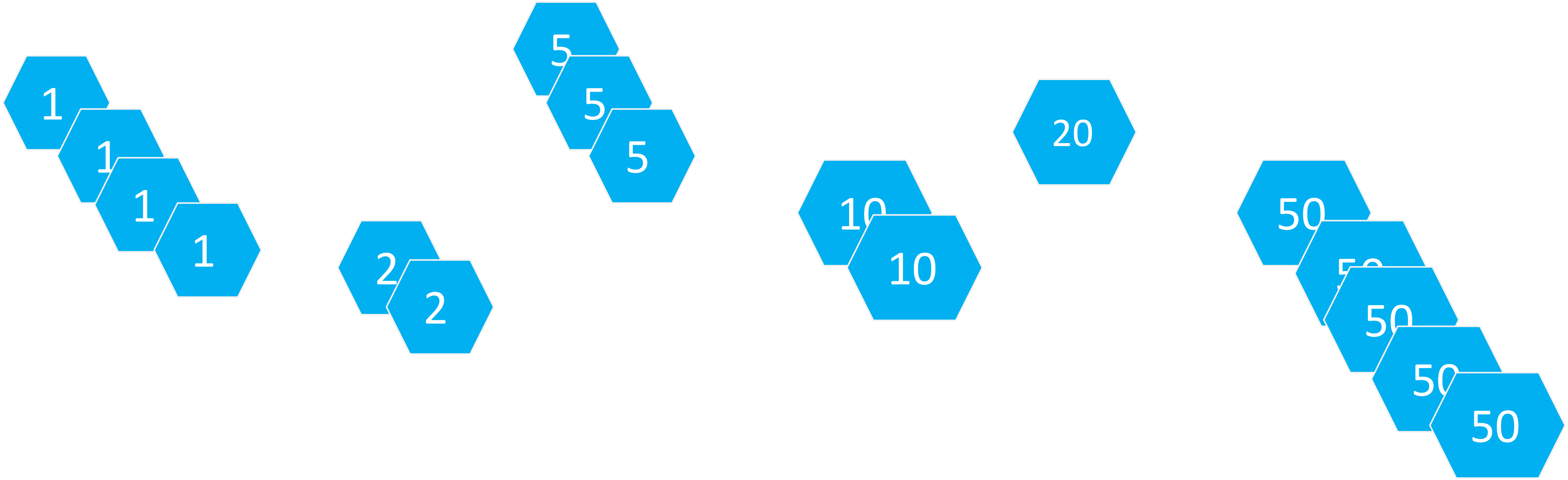
Алчни алгоритми (greedy)

Greedy подходът включва изграждане на решение чрез избиране на последователни стъпки, всяка от които произвежда частично решение на задачата, до получаване на цялостното решение. В същото време на всяка стъпка изборът трябва да бъде:

- допустим, т.е. да отговаря на ограниченията на задачата;
- локално оптимален, т.е. да е най-добрият локален избор между всички възможни варианти, налични на всяка стъпка;
- окончателен, т.е. веднъж направен, не може да променя следващите стъпки на алгоритъма.

Оптимизационни решения

В компютърните науки задачите, свързани с **оптимизацията** са такива, в които е необходимо да се намери **най-доброто решение** от всички възможни решения. Пример за такива задачи са:

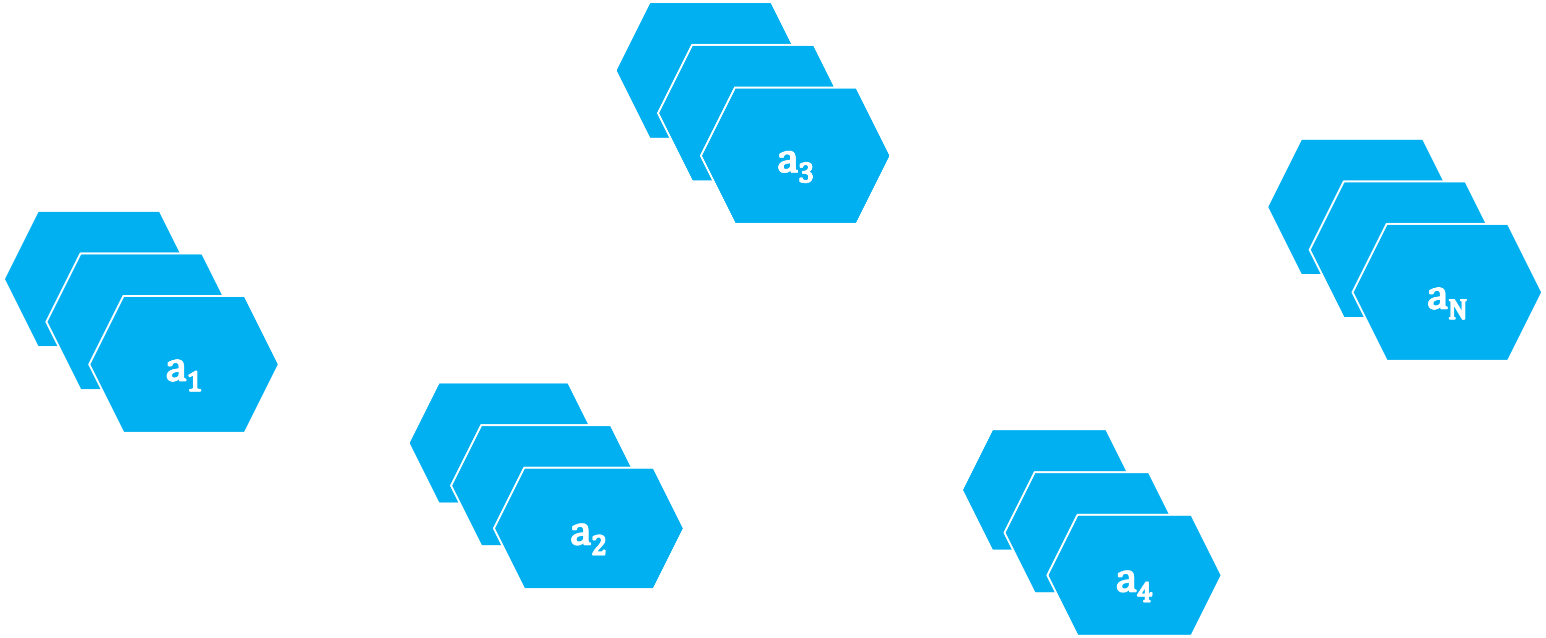


Представяне на суми

задача

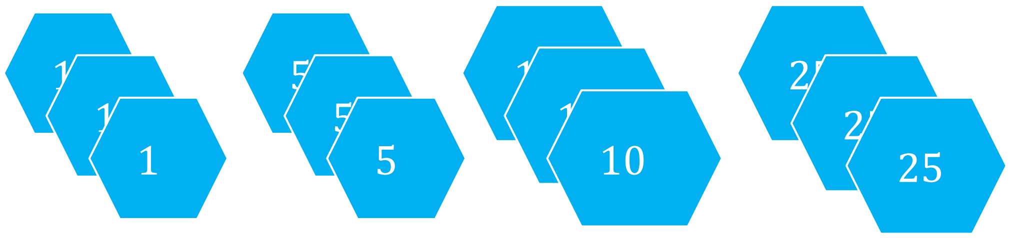
Представяне на суми [1/8]

Да се намери начин за получаване на дадена сума S (S е естествено число), като се използват минимален брой монети, с номинали от множеството C = {a_1, a_2, ..., a_N}.



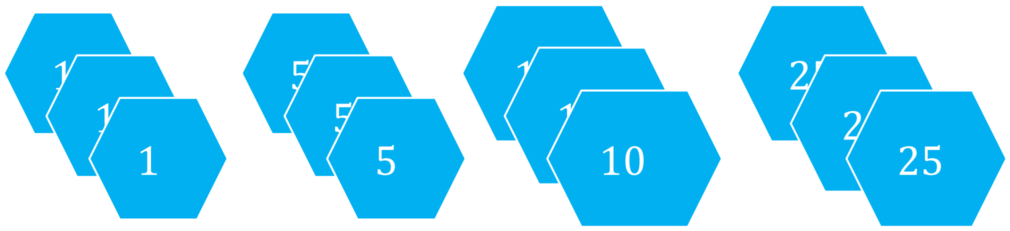
Представяне на суми [2/8]

Сума: 48



Представяне на суми [3/8]

Сума: 48



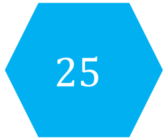
Начална стойност: 0

Представяне на суми [4/8]

Взимайте от най-голямата монета, докато е възможно.

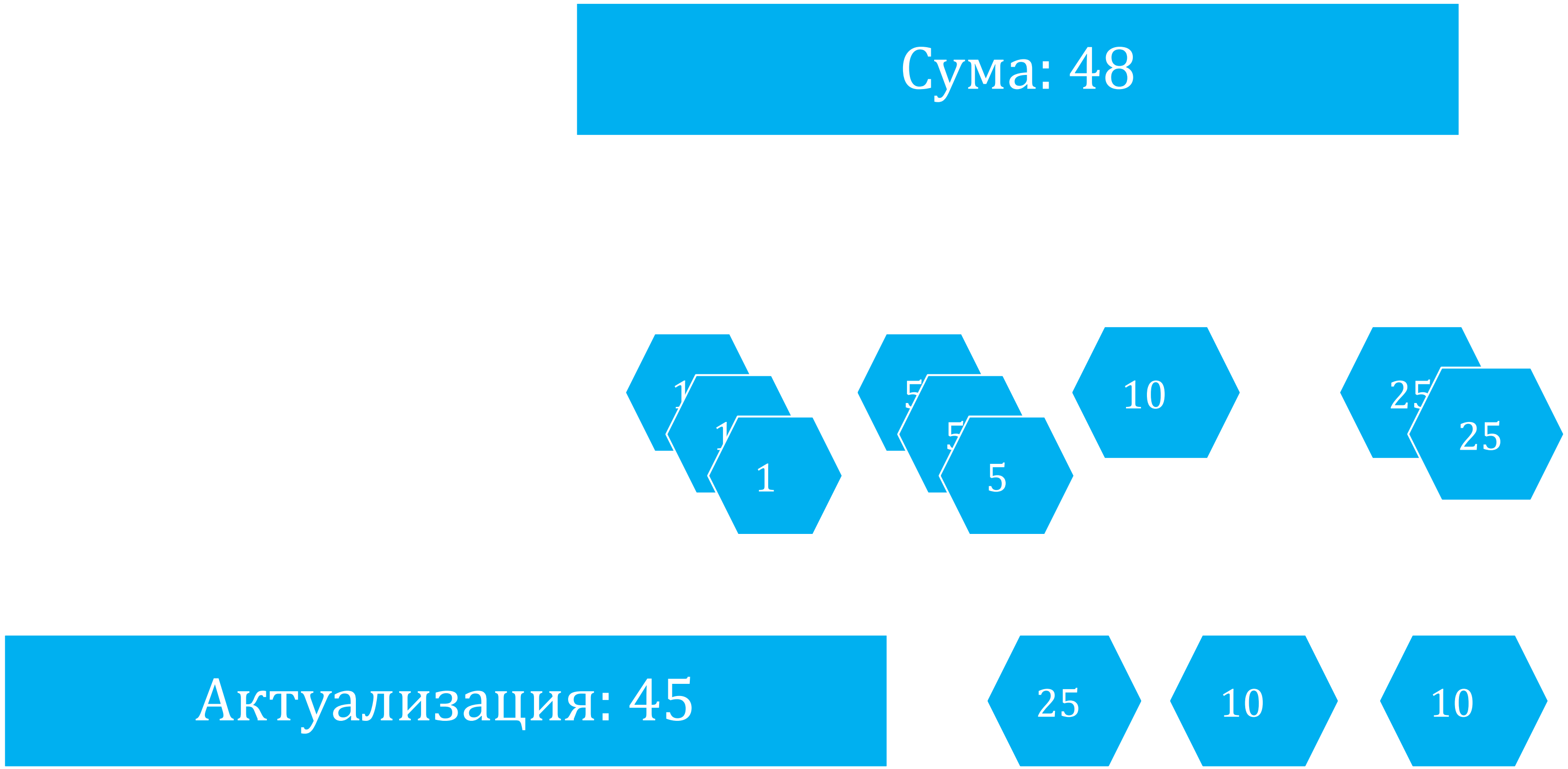
Сума: 48

Актуализация: 25



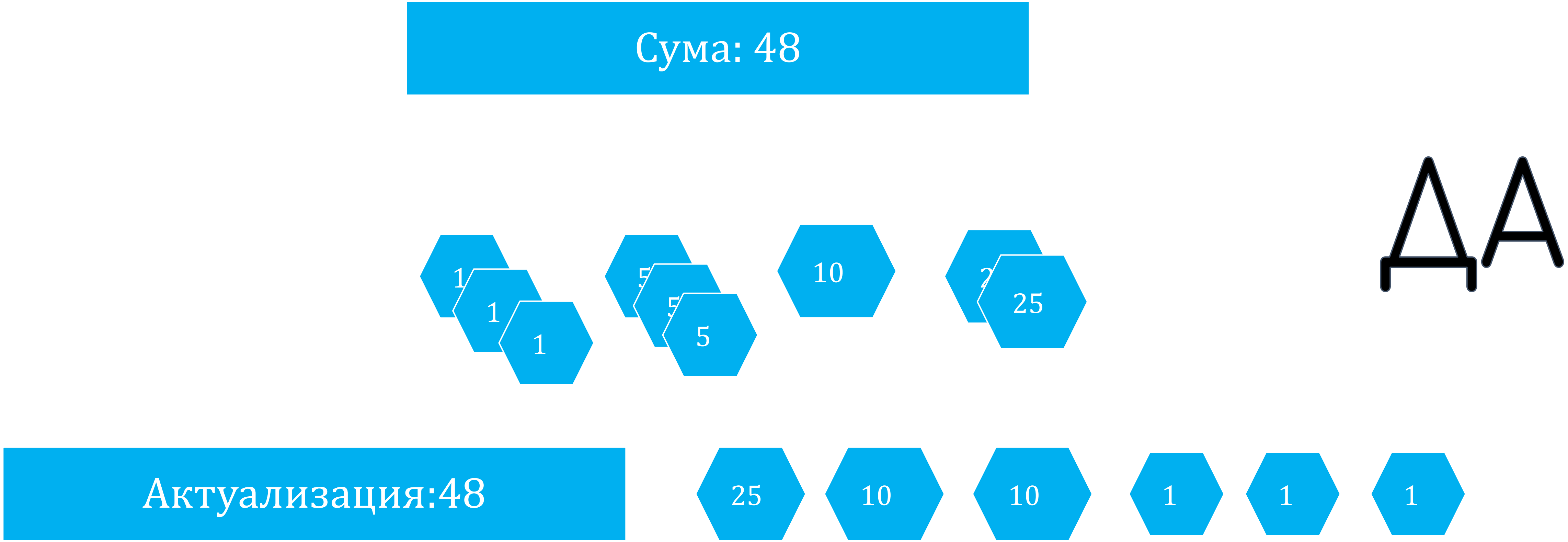
Представяне на суми [5/8]

Вземете необходимия брой от втората по големина.



Представяне на суми [6/8]

Вземете необходимия брой от третата по големина.



Представяне на суми [7/8]

```
int finalSum = 18;
int currentSum = 0;
int[] coins = { 10, 10, 5, 5, 2, 2, 1, 1 };

Queue<int> resultCoins = new Queue<int>();

// Следващия слайд

Console.WriteLine("Sum not found");
```

Представяне на суми [8/8]

```
for (int i = 0; i < coins.Length; i++)
{
  if (currentSum + coins[i] > finalSum) continue;
  currentSum += coins[i];
  resultCoins.Enqueue(coins[i]);
  if (currentSum == finalSum)
  {
   // Sum Found
  }
}
```

$7/9 = 1/2 + 1/4 + 1/36$

$7/9 = 1/3 + 1/3 + 1/9$

$7/9 = 1/9 + 1/9 + 1/9 + 1/9 + 1/9 + 1/9 + 1/9$

Египетски дроби

задача

Египетски дроби [1/10]

Древните египтяни са използвали означение само за дробите с числител единица. Всяка друга дроб p/q представяли и записвали като сума от такива дроби (с числител единица).

Египетски дроби [2/10]

Търсим най-голямата възможна дроб, която не надвишава 7/9.

Дроб: 7/9

$1/a_1 = 1/2$

Египетски дроби [3/10]

Търсим следващия член в сумата - $1/a_2$, който трябва да бъде максималната дроб, която може да се добави към 1/2 така, че резултатът да не надвишава 7/9.

Дроб: 7/9

$1/a_1 = 1/2$

1/4

$1/a_2 \leq 7/9 - 1/2 \leq 5/18$

Египетски дроби [4/10]

Търсим следващия член в сумата - $1/a_3$, който трябва да бъде максималната дроб, която може да се добави към ½+¼ така, че резултатът да не надвишава 7/9.

Дроб: 7/9

$1/a_1 = 1/2$

$1/a_2 = 1/4$

1/36

$1/a_3 \leq 7/9 - 1/2 - 1/4 \leq 5/18 - 1/4 \leq 2/72$

Египетски дроби [5/10]

Дроб: 7/9

$1/a_1 = 1/2$

$1/a_2 = 1/4$

$1/a_2 = 1/36$

$1/2 + 1/4 + 1/36 = 7/9$

ДА

Египетски дроби [6/10]

Стъпка 1. Дайте стойности за числителя и знаменателя на дробта p/q.

```
p=7; q=9;
```

Стъпка 2. Докато числителят е по-голям от 1 търсим максималната дроб 1/r, ненадвишаваща p/q (q ≠0).

```
r = (p+q) / p;
// r = (7+9) / 7
// r = 2
```

```
Изход:
1/2 +
```

Египетски дроби [7/10]

Стъпка 3. Разликата p/q – 1/r се пресмята чрез привеждане под общ знаменател. Така, новите стойности за p и q ще бъдат:

```
p=p*r-q;
// p = 7*2-9 = 5
q=q*r;
// q = 9*2 = 18
```

Стъпка 4. Проверяваме дали новите стойности на числителя и знаменателя са кратни.

```
is divided(p, q)
//is divided(5, 18)
```

```
Изход:
1/2 +
```

Египетски дроби [8/10]

Стъпка 5. Числителя е по-голям от 1.
Изпълняваме стъпка 2 с новите стойности за p и q.

```
r = (p+q) / p
// r = (5+18) / 5
// r = 4
```

Изход:
1/2 + 1/4 +

Египетски дроби [9/10]

Стъпка 5. Изпълняваме стъпка 3 с новите стойности за p и q.

```
p = p*r - q
// p = 5*4-18 = 2
q = q*r;
// q = 18*4 = 72
```

Стъпка 6. Изпълняваме стъпка 4 за новите стойности на p и q.

```
is divided(p, q)
// is divided(2, 72) ->1, 36
```

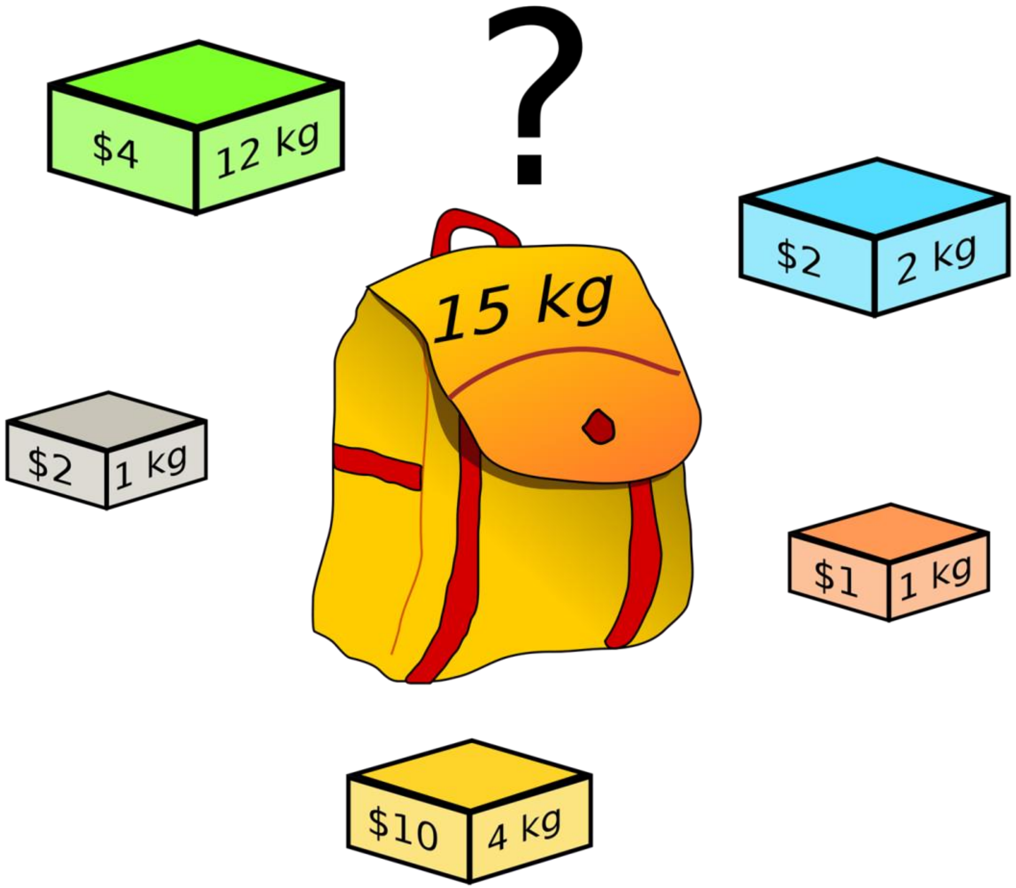
```
Изход:
1/2 + 1/4 +
```

Египетски дроби [10/10]

Стъпка 7. Числителят след съкращението на дробта е 1. Добавяме съкратената дроб към получения до тук израз.

```
Изход:
1/2 + 1/4 + 1/36
```

Стъпка 8. Край на алгоритъма.

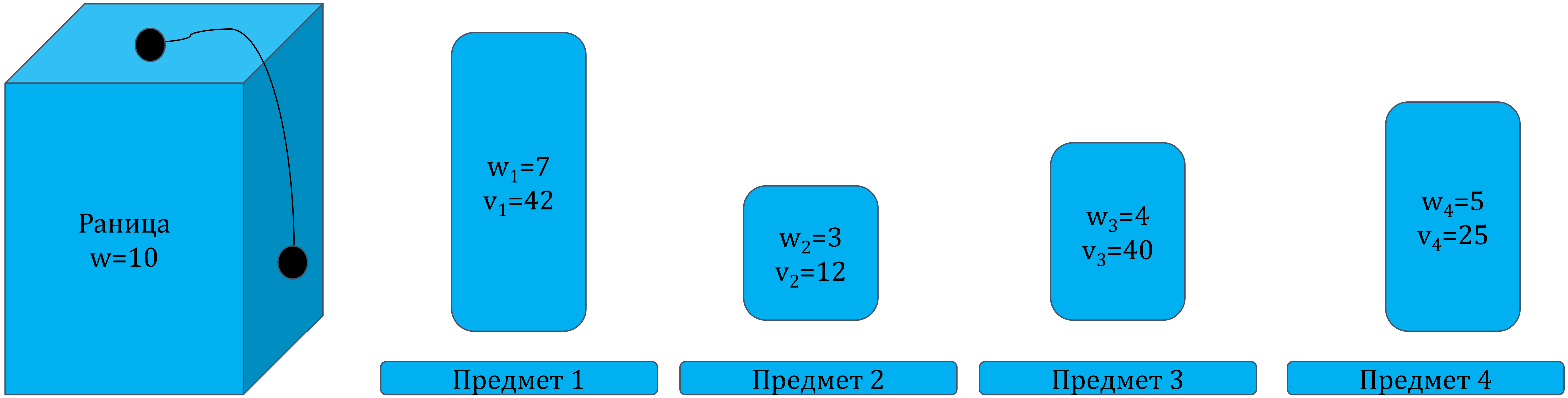


Задача за раницата

Задача за раницата [1/7]

Дадени са N предмета с тегла w_1, w_2..., w_N и съответните им цени v_1,v_2 ..., v_N, както и раница, която може да издържи тегло W. Необходимо е да се намери подмножество от предмети, които могат да бъдат поставени в раницата и които в същото време да имат максимална цена.

Задача за раницата [2/7]



Ще подредим резултатите в таблица, разглеждайки всички възможни подмножества.

Задача за раницата [3/7]

- Разглеждат се всички подмножества от 4 елемента, като е необходимо:
  - тяхното общо тегло да е по-малко или равно на теглото на раницата
  - тяхната обща цена да е максимална
- Прилага се метода на изчерпващото търсене, т.е. преглеждат се подмножества и се търси това, което отговаря на условието.
- Необходими са два масива за пазене на стойностите съответно на теглата m[i] и цените c[i] на всеки един от предметите.

Задача за раницата [4/7]

Разглеждаме подмножеството, състоящо се от първия предмет. Неговото общо тегло е 7, а общата му цена е 42. Към него се опитваме да добавим нов предмет, който не е взет до момента. Запазваме максималната обща цена, намерена до момента и отговаряща на тегло по-малко или равно на 10. (MAXC=42)

Подмножество	Общо тегло	Обща цена
{1}	7	42
{1, 2}	10	36
{1, 3}	11	недопустим
{1, 4}	12	недопустим

Подмножество	Общо тегло	Обща цена
{1, 2, 3}	14	недопустим
{1, 2, 4}	15	недопустим
{1, 3, 4}	16	недопустим
{1, 2, 3, 4}	19	недопустим

Задача за раницата [5/7]

Разглеждаме подмножеството, състоящо се от втория предмет. Неговото общо тегло е 3, а общата му цена е 12. Към него се опитваме да добавим нов предмет, който не е взет до момента. Запазваме максималната обща цена, намерена до момента и отговаряща на тегло по-малко или равно на 10. (42<52 -> MAXC=52)

Подмножество	Общо тегло	Обща цена
{2}	3	12
{2, 3}	7	52
{2, 4}	8	37
{2, 3, 4}	12	недопустим

Задача за раницата [6/7]

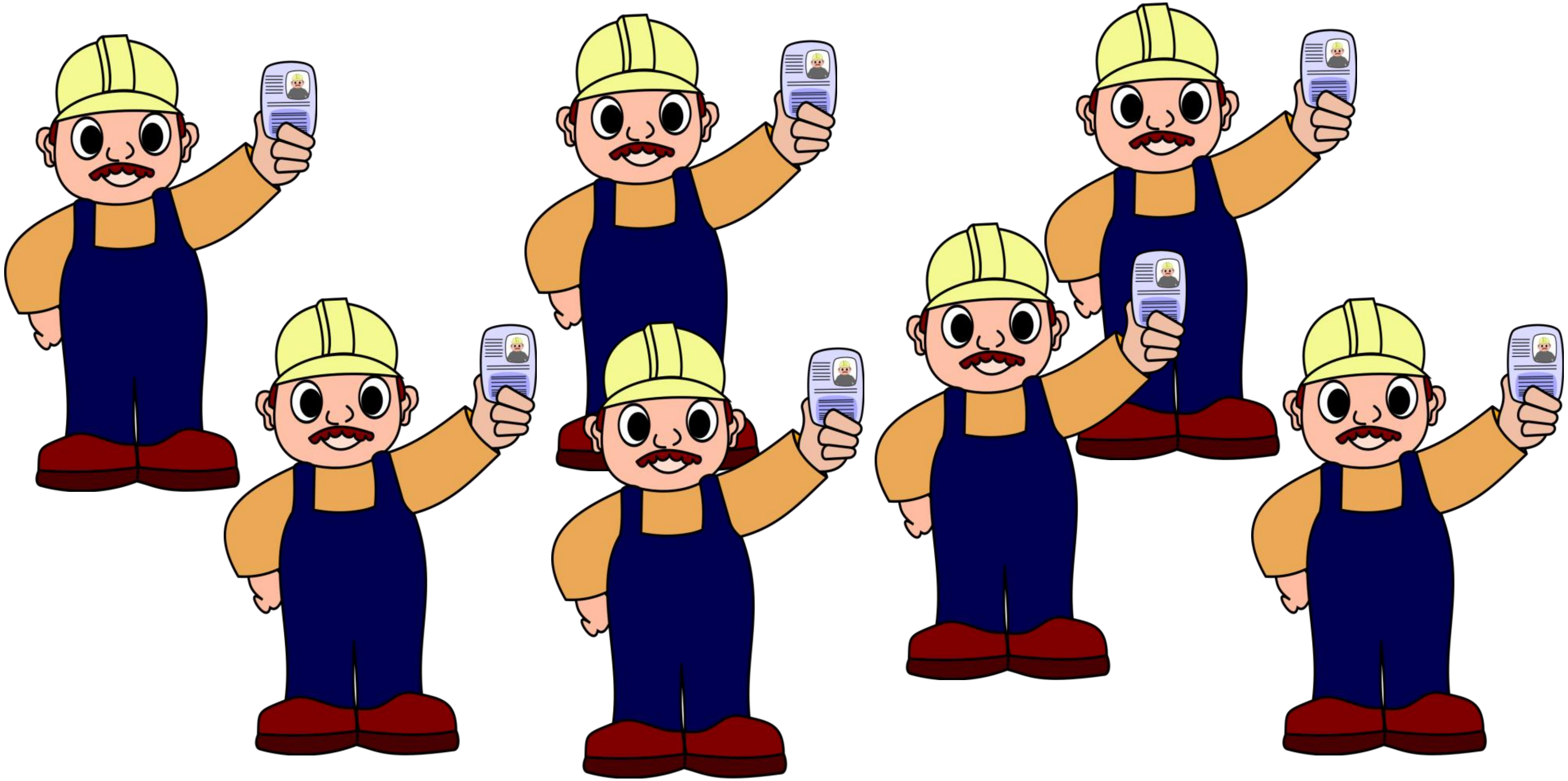
Разглеждаме подмножеството, състоящо се от третия предмет. Неговото общо тегло е 4, а общата му цена е 40. Към него се опитваме да добавим нов предмет, който не е взет до момента и отговаряща на тегло по-малко или равно на 10. Запазваме максималната обща цена, намерена до момента. (52<65->MAXC = 65)

Подмножество	Общо тегло	Обща цена
{3}	4	40
{3, 4}	9	65

Задача за раницата [7/7]

Разглеждаме подмножеството, състоящо се от четвъртия предмет. Неговото общо тегло е 5, а общата му цена е 25. Към него се опитваме да добавим нов предмет, който не е взет до момента и отговаряща на тегло по-малко или равно на 10. Запазваме максималната обща цена, намерена до момента. (MAXC=65)

Подмножество	Общо тегло	Обща цена
{4}	5	25



Задача за възлагане на дейности

Задача за възлагане на дейности [1/9]

Нека имаме N служители, които трябва да изпълнят N дейности, по една дейност всеки (т.е. всеки служител е назначен да изпълнява само една дейност, а всяка дейност е възложена само на един човек). Разходите за изпълнение на j-тата дейност от i-тия служител са известни и са равни на C [i, j] за всички двойки i, j = 1, ...N. Задачата е следната: необходимо е да се разпределят дейностите между работниците, така че те да бъдат изпълнени с най-ниска обща цена.

Задача за възлагане на дейности [2/9]

Задачата може да се представи чрез матрицата на разходите. Идеята е да се избере по един елемент от всеки ред на матрицата, така че избраните елементи да са в различни колони и общото им количество да има най-малката възможна стойност.

	Дейност 1	Дейност 2	Дейност 3	Дейност 4
Работник 1	9	2	7	8
Работник 2	6	4	3	7
Работник 3	5	8	1	8
Работник 4	7	6	9	4

Задача за възлагане на дейности [3/9]

Очевидната стратегия за решаване на тази задача е да изберете най-малките елементи във всеки ред, но тя реално не е вярна, тъй като елементите се появят в една и съща колона. Всъщност най-малките елементи въобще може да не влизат в оптималното решение.

	Дейност 1	Дейност 2	Дейност 3	Дейност 4
Работник 1	9	2	7	8
Работник 2	6	4	3	7
Работник 3	5	8	1	8
Работник 4	7	6	9	4

НЕ

Задача за възлагане на дейности [4/9]

Случай в който на 1-ия работник е възложена първата дейност, на 2-ия - втората, на 3-ия - третата и на 4-ия - четвъртата.

$\{1, 2, 3, 4\}$

	Дейност 1	Дейност 2	Дейност 3	Дейност 4
Работник 1	9	2	7	8
Работник 2	6	4	3	7
Работник 3	5	8	1	8
Работник 4	7	6	9	4

18

Задача за възлагане на дейности [5/9]

Случай в който на 1-ия работник е възложена първата дейност, на 2-ия - втората, на 3-ия - четвъртата и на 4-ия - третата.

$\{1, 2, 4, 3\}$

	Дейност 1	Дейност 2	Дейност 3	Дейност 4
Работник 1	9	2	7	8
Работник 2	6	4	3	7
Работник 3	5	8	1	8
Работник 4	7	6	9	4

30

Задача за възлагане на дейности [6/9]

Случай в който на 1-ия работник е възложена първата дейност, на 2-ия - третата, на 3-ия - втората и на 4-ия - четвъртата.

$\{1, 3, 2, 4\}$

	Дейност 1	Дейност 2	Дейност 3	Дейност 4
Работник 1	9	2	7	8
Работник 2	6	4	3	7
Работник 3	5	8	1	8
Работник 4	7	6	9	4

24

Задача за възлагане на дейности [7/9]

Случай в който на 1-ия работник е възложена първата дейност, на 2-ия - третата, на 3-ия - четвъртата и на 4-ия - втората.

$\{1, 3, 4, 2\}$

	Дейност 1	Дейност 2	Дейност 3	Дейност 4
Работник 1	9	2	7	8
Работник 2	6	4	3	7
Работник 3	5	8	1	8
Работник 4	7	6	9	4

26

Задача за възлагане на дейности [8/9]

Случай в който на 1-ия работник е възложена първата дейност, на 2-ия - четвъртата, на 3-ия - втората и на 4-ия - третата.

$\{1, 4, 2, 3\}$

	Дейност 1	Дейност 2	Дейност 3	Дейност 4
Работник 1	9	2	7	8
Работник 2	6	4	3	7
Работник 3	5	8	1	8
Работник 4	7	6	9	4

33

Задача за възлагане на дейности [9/9]

Случай в който на 1-ия работник е възложена първата дейност, на 2-ия - четвъртата, на 3-ия - третата и на 4-ия - втората.

$\{1, 4, 3, 2\}$

	Дейност 1	Дейност 2	Дейност 3	Дейност 4
Работник 1	9	2	7	8
Работник 2	6	4	3	7
Работник 3	5	8	1	8
Работник 4	7	6	9	4

23

Задача за възлагане на дейности

В задачата за възлагане на дейности, броят на разглежданите пермутации са равни на N!. При N=4 е необходимо да разгледаме 24 случая. Ние разгледахме само 6. Оказва се, че изчерпващото търсене е непрактично за всички стойности на N, с изключение на малките. Този проблем има значително по-ефективно решение, наречен унгарски метод в чест на унгарските математици Koning и Egervary, които са го открили.

Обобщение

- Greedy алгоритмите се използват за решаване на оптимизационни задачи
- Обикновено са по-ефективни от другите алгоритми, но може да доведат и до не толкова оптимален резултат
- Алчните алгоритми избират най-доброто локално решение
- Алчните алгоритми предполагат, че винаги изборът на локално оптимално решение води до глобално такова, но понякога не е така