2.5.1 SOLUCION PARA LOS PROBLEMAS DIRECTO E INVERSO DE LA GEODESIA: FÓRMULAS DE PUISSANT.

Las ecuaciones de Puissant, comúnmente usadas, son válidas para bases cuya longitud no sea superior a 80 km, debido al hecho de que estas fueron deducidas con simplificaciones para un modelo esférico, se desarrollaron en series matemáticas y adoptan un radio medio terrestre para la región levantada. La deducción de las ecuaciones de Puissant pueden ser encontradas en HOSMER (1946) y en GEMAEL (1959).

- **Problema Directo**

En este caso son conocidas:

φ_1 y λ_1 = latitud y longitud geodésica del punto 1

A_{12} y S_{12} = azimut geodésico del punto 1 para el punto 2 y distancia entre los dos puntos.

Se debe calcular:

φ_2 y λ_2 = latitud y longitud geodésica del punto 2

A_{21}= azimut geodésico del punto 2 para el punto 1

La formulación aplicada para la solución del problema directo es:

1.- $e^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}$

2.- $M_1 = \dfrac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 sen^2 \varphi_1)^{3/2}}$

3.- $N_1 = \dfrac{a}{(1 - e^2 sen^2 \varphi_1)^{1/2}}$

4.- $B = \dfrac{1}{M_1 \cdot sen1''}$

5.- $C = \dfrac{tg\varphi_1}{2 \cdot M_1 \cdot N_1 \cdot sen1''}$

6.- $D = \dfrac{3 \cdot e^2 \cdot \cos\varphi_1 \cdot sen\varphi_1 \cdot sen1''}{2(1 - e^2 \cdot sen^2\varphi_1)}$

7.- $E = \frac{1 + 3 \cdot tg^2 \varphi_1}{6 \cdot N_1^2}$

8.- $h = \frac{S_{12} \cdot \cos A_{12}}{M_1 \cdot sen1''}$

9.- $\delta\varphi'' = B \cdot S_{12} \cdot \cos A_{12} - C \cdot S_{12}^2 \cdot sen^2 A_{12} - h \cdot E \cdot S_{12}^2 \cdot sen^2 A_{12}$

10.- $\Delta\varphi''_{12} = \delta\varphi''_{12} - D(\delta\varphi''_{12})^2$

11.- $\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi_{12}$

12.- $M_2 = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 sen^2 \varphi_2)^{3/2}}$

13.- $N_2 = \frac{a}{(1 - e^2 sen^2 \varphi_2)^{1/2}}$

14.- $T_{12} = \frac{S_{12} \cdot senA_{12}}{N_2 \cdot \cos\varphi_2}$

15.- $\Delta\lambda''_{12} = \frac{T_{12}}{sen1''}\left(1 - \frac{S_{12}^2}{6 \cdot N_2^2} + \frac{T_{12}^2}{6}\right)$

16.- $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_{12}$

17.- $\varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$

18.- $F = \frac{1}{12} sen\varphi_m \cdot \cos^2 \varphi_m \cdot sen^2 1''$

19.- $\gamma''_{12} = \Delta\lambda''_{12} \cdot sen\varphi_m \sec\frac{1}{2}\Delta\varphi_{12} + F(\Delta\lambda''_{12})^3$ convergencia meridiana

20.- $A_{21} = A_{12} + \gamma \pm 180°$

- **Problema Inverso**

En este caso son conocidas:

φ_1 y λ_1 = latitud y longitud geodésica del punto 1

φ_2 y λ_2 = latitud y longitud geodésica del punto 2

Los términos que se deben calcular son:

A_{12} y S_{12} = azimut geodésico y distancia entre los dos puntos

La formulación aplicada para la solución del problema inverso es:

1.- $M_i = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_i)^{3/2}}$

Donde:

M_i es el radio de curvatura de la sección meridiana en el punto ($i = 1,2$)

e^2 es la excentricidad segunda

2.- $N_i = \frac{a}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_i)^{1/2}}$

Donde:

N_i es la gran normal en el punto ($i = 1,2$)

3.- $Nm = \frac{N_1 + N_2}{2}$

4.- $Mm = \frac{M_1 + M_2}{2}$

5.- $Bm = \frac{1}{Mm \cdot \operatorname{sen}1''}$

6.- $\varphi m = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$

7.- $x = \Delta\lambda'' \cdot \cos(\varphi m) \cdot Nm \cdot \operatorname{sen}1''$

8.- $y = \frac{\Delta\varphi''_{12} \cdot \cos(0{,}5\Delta\lambda)}{Bm}$

9.- Cálculo del azimut: $\operatorname{tg}\left(A_{12} + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{x}{y}$

10.- Cálculo de la distancia entre los dos puntos: $S_{12} = \frac{x}{\operatorname{sen}\left(A_{12} + \frac{\gamma}{2}\right)}$

2.5.2 SOLUCIÓN NO ITERATIVA PARA LOS PROBLEMAS DIRECTO E INVERSO DE LA GEODESIA: FÓRMULAS DE SODANO.

El punto de partida son las fórmulas de Helmert. Mediante unos desarrollos en series de potencias, que incluyen hasta los términos de grado seis en la excentricidad del elipsoide, se eliminan las iteraciones del Método de Helmert.

En las décadas de los 50 y 60 SODANO presentó fórmulas que proporcionan una solución no iterativa para los problemas directo e inverso de la Geodesia. Estos algoritmos son de fácil programación, además de presentar ecuaciones auxiliares que buscan garantizar un alto grado de exactitud para cualquier línea geodésica, no importando su longitud (hasta diez decimales en el azimut y la distancia expresados en radianes). En un principio, la deducción no iterativa fue desarrollada para geodésicas muy largas, visando el cálculo computacional. Posteriormente, de forma de obtener la misma exactitud para geodésicas muy cortas, fueron desarrolladas fórmulas alternativas.

La deducción de las fórmulas está publicada en el Bulletin Geodésique: “A rigorous non-iterative procedure for rapid inverse solution of very long geodésics”. Emanuel Sodano. B. G. N° 47-48, pp. 13-25. 1958.

De manera general, las fórmulas alternativas para líneas cortas son también utilizadas para líneas largas (incluso hasta otro hemisferio); luego, es necesario programar solo un conjunto de ecuaciones. Las ecuaciones para la solución no iterativa desarrolladas por SODANO son presentadas a continuación (SODANO, 1965).

- **Problema Directo**

En este caso son conocidas:

φ_1 y λ_1 = latitud y longitud geodésica del punto 1

A_{12} y S_{12} = azimut geodésico del punto 1 para el punto 2 y distancia entre los dos puntos.

Se debe calcular:

φ_2 y λ_2 = latitud y longitud geodésica del punto 2

A_{21} = azimut geodésico del punto 2 para el punto 1

La formulación aplicada para la solución del problema directo es:

1.- $\tan\beta_1 = \frac{b}{a}(\tan\varphi_1)$

2.- $\cos\beta_o = \cos\beta_1 \cdot \operatorname{sen}A_{12}$

3.- $g = \cos\beta_1 \cdot \cos A_{12}$

4.- $m_1 = \left(1 + \frac{e'^2}{2}\operatorname{sen}^2\beta_1\right)\left(1 - \cos^2\beta_o\right)$

5.- $\phi_S = \frac{S}{b}$

6.- $a_1 = \left(1 + \frac{e'^2}{2}\operatorname{sen}^2\beta_1\right)\left(\operatorname{sen}^2\beta_1 \cdot \cos\phi_S + g \cdot \operatorname{sen}\beta_1 \cdot \operatorname{sen}\phi_S\right)$

7.- $\phi_o = \mathrm{Term1} + \mathrm{Term2} + \mathrm{Term3}$

8.- $\mathrm{Term1} = \phi_S + a_1\left(-\frac{e'^2}{2}\operatorname{sen}\phi_S\right) + m_1\left(-\frac{e'^2}{4}\phi_S + \frac{e'^2}{4}\operatorname{sen}\phi_S\cos\phi_S\right)$

9.-

$$\mathrm{Term2} = a_1^2\left(\frac{5e'^4}{8}\operatorname{sen}\phi_S\cos\phi_S\right) + m_1^2\left(\frac{11e'^4}{64}\phi_S - \frac{13e'^4}{64}\operatorname{sen}\phi_S\cos\phi_S - \frac{e'^4}{8}\phi_S\cos^2\phi_S + \right.$$
$$\left. + \frac{5e'^4}{32}\operatorname{sen}\phi_S\cos^3\phi_S\right)$$

10.- $\mathrm{Term3} = a_1 \cdot m_1\left(\frac{3e'^4}{8}\operatorname{sen}\phi_S + \frac{e'^4}{4}\phi_S\cos\phi_S - \frac{5e'^4}{8}\operatorname{sen}\phi_S\cos^2\phi_S\right)$

11.- $\cot A_{21} = \frac{\left(g \cdot \cos\phi_o - \operatorname{sen}\beta_1\operatorname{sen}\phi_o\right)}{\cos\beta_o}$

12.- $\cot\lambda = \frac{\left(\cos\beta_1\cos\phi_o - \operatorname{sen}\beta_1\operatorname{sen}\phi_o\cos A_{12}\right)}{\operatorname{sen}\phi_o\operatorname{sen}A_{12}}$

13.- $\frac{L - \lambda}{\cos\beta_o} = \left(-f\phi_S\right) + a1\left(\frac{3f^2}{2}\operatorname{sen}\phi_S\right) + m_1\left(\frac{3f^2}{4}\phi_S - \frac{3f^2}{4}\operatorname{sen}\phi_S\cos\phi_S\right)$

14.- $\lambda_2 = \lambda_1 + L$

15.- $\operatorname{sen}\beta_2 = \operatorname{sen}\beta_1\cos\phi_o + g \cdot \operatorname{sen}\phi_o$

16.- $\cos\beta_2 = +\sqrt{\left(\cos\beta_o\right)^2 + \left(g \cdot \cos\phi_o - \operatorname{sen}\beta_1\operatorname{sen}\phi_o\right)^2}$

17.- $\tan\beta_2 = \frac{\mathrm{sen}\beta_2}{\cos\beta_2}$

18.- $\tan\varphi_2 = \frac{a}{b}\tan\beta_2$

- **Problema Inverso**

En este caso son conocidas:

φ_1 y λ_1 = latitud y longitud geodésica del punto 1

φ_2 y λ_2 = latitud y longitud geodésica del punto 2

Los términos que se deben calcular son:

A_{12} y S_{12} = azimut geodésico y distancia entre los dos puntos

La formulación aplicada para la solución del problema inverso es:

1.- $L = \lambda_2 - \lambda_1$

2.- $\tan\beta_1 = \frac{b}{a}\tan\varphi_1$

3.- $\tan\beta_2 = \frac{b}{a}\tan\varphi_2$

4.- $aa = \mathrm{sen}\beta_1 \mathrm{sen}\beta_2$

5.- $bb = \cos\beta_1 \cos\beta_2$

6.- $\cos\phi = aa + bb \cdot \cos L$

7.- $c = \frac{b \cdot \mathrm{sen}L}{\mathrm{sen}\phi}$

8.- $m = 1 - c^2$

9.- $\frac{S_{!2}}{b} = \mathrm{Term1} + \mathrm{Term2} + \mathrm{Term3} + \mathrm{Term4} * \mathrm{Term5}$

10.-

$$\mathrm{Term1} = \left(1 + f + f^2\right)\phi + aa\left[\left(f + f^2\right)\mathrm{sen}\phi - \left(\frac{f^2}{2}\right)\phi^2 \cos\mathrm{ec}\phi\right]$$

$$\mathrm{Term2} = m\left[-\left(\frac{f + f^2}{2}\right)\phi - \left(\frac{f + f^2}{2}\right)\mathrm{sen}\phi\cos\phi + \left(\frac{f^2}{2}\right)\phi^2 \cot\phi\right]$$

$$\mathrm{Term3} = aa^2\left[-\left(\frac{f^2}{2}\right)\mathrm{sen}\phi\cos\phi\right]$$

$$\mathrm{Term4} = m^2\left[\left(\frac{f^2}{16}\right)\phi + \left(\frac{f^2}{16}\right)\mathrm{sen}\phi\cos\phi - \left(\frac{f^2}{2}\right)\phi^2 \cot\phi - \left(\frac{f^2}{8}\right)\mathrm{sen}\phi\cos^3\phi\right]$$

$$\mathrm{Term5} = aa \cdot m\left[\left(\frac{f^2}{2}\right)\phi^2 \cos\mathrm{ec}\phi + \left(\frac{f^2}{2}\right)\mathrm{sen}\phi\cos^2\phi\right]$$

11.-

$$\frac{\lambda - L}{c} = \left(f + f^2\right)\phi + aa\left[-\left(\frac{f^2}{2}\right)\mathrm{sen}\phi - f^2\phi^2 \cos\mathrm{ec}\phi\right] +$$

$$+ m\left[-\left(\frac{5f^2}{4}\right)\phi + \left(\frac{f^2}{4}\right)\mathrm{sen}\phi\cos\phi + f^2\phi^2 \cot\phi\right]$$

12.- $\cot A_{21} = \dfrac{\mathrm{sen}\beta_2 \cos\beta_1 \cos\lambda - \mathrm{sen}\beta_1 \cos\beta_2}{\mathrm{sen}\lambda\cos\beta_1}$

13.- $\cot A_{12} = \dfrac{\mathrm{sen}\beta_2 \cos\beta_1 - \cos\lambda\,\mathrm{sen}\beta_1 \cos\beta_2}{\mathrm{sen}\lambda\cos\beta_2}$