Astronomía General

apuntes de trabajos prácticos

PRÁCTICA 6 - Parte II

Salida y puesta de un astro - Duración del día - Altura máxima

María Laura Arias y Roberto Venero
Jefes de trabajos prácticos de la cátedra

Universidad Nacional de La Plata
Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas

La Plata, Argentina
- 2021 -

Apuntes para resolver la PRÁCTICA 6 - Parte II

Salida y puesta de un astro - Altura máxima - Duración del día

Como ya vimos en las prácticas anteriores, los astros, en su movimiento diurno aparente, describen en la esfera celeste arcos paralelos al ecuador. Además los astros salen desde la parte del horizonte que contiene al este y se ponen en la parte del horizonte que contiene al oeste.

Nos interesa conocer las coordenadas de salida y puesta de un astro, para saber por ejemplo, si es visible para un dado observador una noche dada o en un determinado instante, o cuánto tiempo permanecerá el astro sobre el horizonte.

1. Salida y puesta de un astro

Consideremos un observador ubicado en La Plata ($\phi = -34°\ 54'$), y un astro cuya declinación es $\delta = -22°$. Conociendo el valor de δ, podemos graficar el arco diurno del astro en la esfera celeste y sus **puntos de salida y puesta**, tal como se ve en la figura 1.

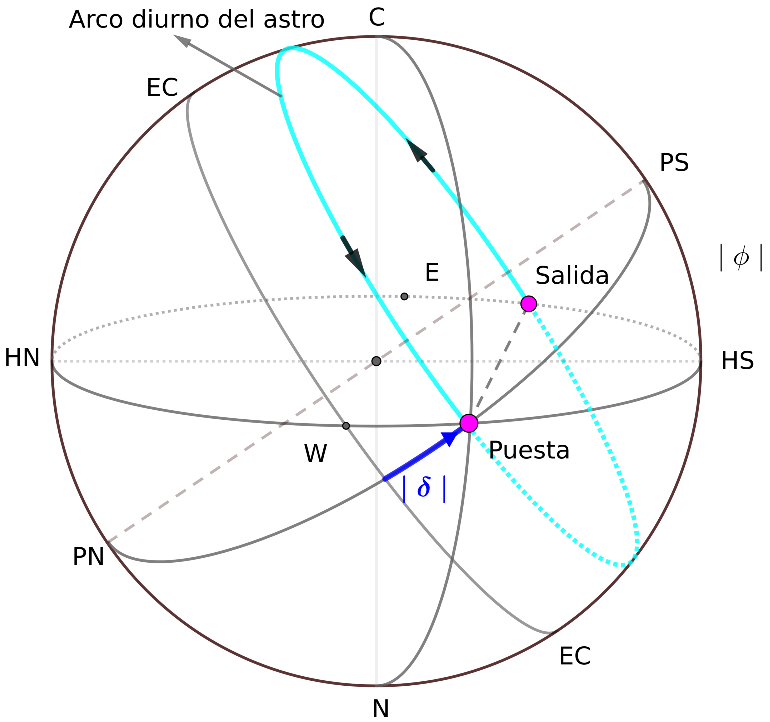

Figura 1. Esfera celeste para un observador en una latitud sur ϕ. Se indica el arco diurno de un astro con declinación δ sur conocida y los puntos de salida y de puesta del astro.

Para calcular las coordenadas de salida y puesta de un astro, hay que resolver un triángulo similar al visto en la práctica de transformación de coordenadas locales. La diferencia es que cuando el astro está en el punto de **salida** o en el de **puesta**, la altura vale 0° (**h = 0**°), porque el astro está sobre el horizonte.

Como conocemos la declinación δ del astro dado (recurriendo por ejemplo a un catálogo o tabla), y sabemos que h = 0°, las coordenadas que resta averiguar son el **ángulo horario** t y el **acimut** A, en los puntos de salida y de puesta. Para calcularlas, es necesario resolver el triángulo esférico de la figura 2.

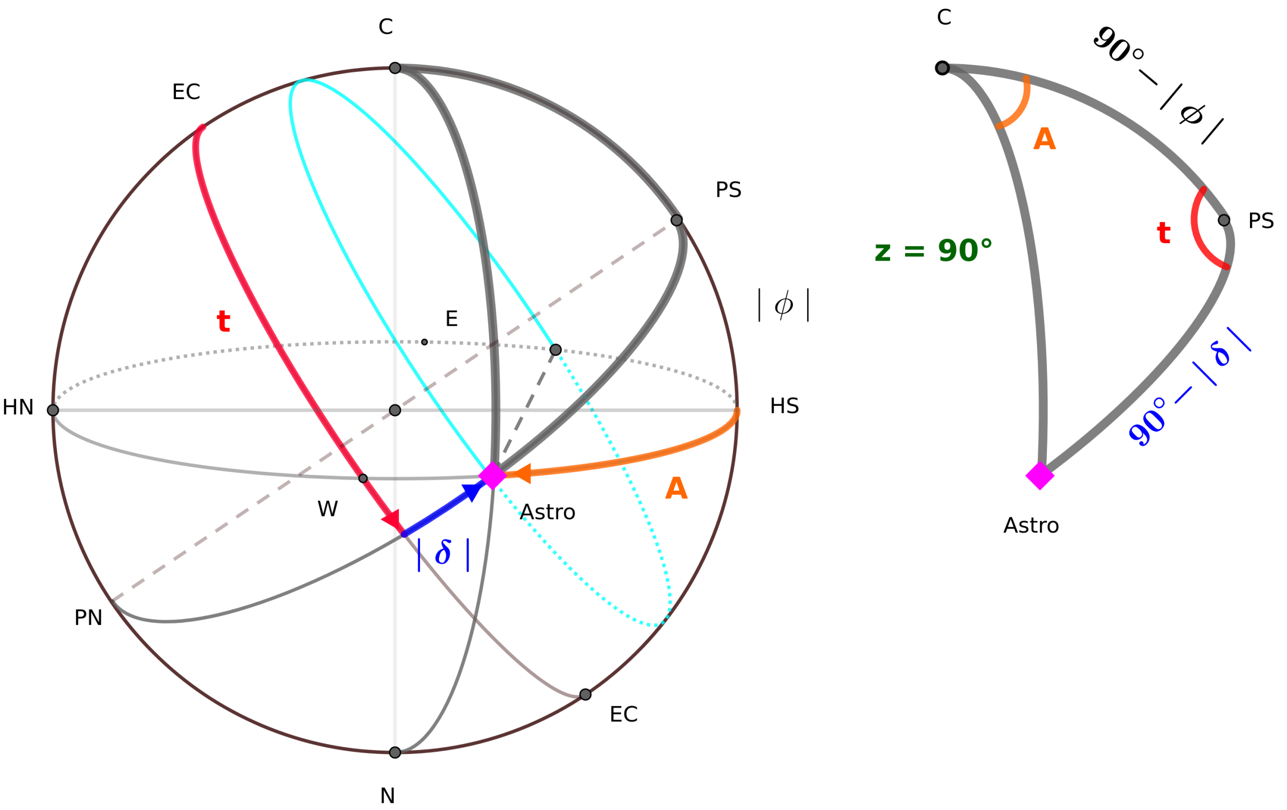

Figura 2. Esfera celeste para un observador en una latitud sur $\phi = -34°\ 54$' y un astro con declinación $\delta = -22°$. El astro está en su punto de **puesta**. Se marca el triángulo de posición con vértices PS-Cenit-Astro, con todos sus elementos. Notar que h = 0° en el punto de puesta, entonces z = 90°.

- **Cálculo del ángulo horario de salida y puesta**

Usamos el **Teorema del coseno** dado por: $\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \operatorname{sen}(b)\operatorname{sen}(c)\cos(A)$, y lo aplicamos al arco z del triángulo de la figura 2:

$$cos(z) = cos(90° - \mid \phi \mid)cos(90° - \mid \delta \mid) + sen(90° - \mid \phi \mid)sen(90° - \mid \delta \mid)cos(t) \tag{1}$$

Sabiendo que, cos(90° - α) = sen(α) y sen(90° - α) = cos(α) y teniendo en cuenta que z = 90° y cos(90°) = 0, resulta:

$$0 = cos(90°) = sen(\mid \phi \mid)sen \mid \delta \mid) + cos(\mid \phi \mid)cos(\mid \delta \mid)cos(t) \tag{2}$$

Despejando cos(t) obtenemos:

$$cos(t) = \frac{-sen(\mid \phi \mid)sen \mid \delta \mid)}{cos(\mid \phi \mid)cos(\mid \delta \mid)}$$

Entonces:

$$cos(t) = -tg(\mid \phi \mid)tg(\mid \delta \mid) \tag{3}$$

La expresión (3) nos da el valor de cos(t), para un astro de declinación δ sur, visto por un observador en una latitud sur ϕ.

Esta expresión, permite calcular tanto el ángulo horario de salida como el de puesta. Ya que, si resolviéramos el triángulo esférico que corresponde al punto de salida obtendríamos la misma expresión.

Si reemplazamos por los valores numéricos: $\mid \phi \mid = 34°\ 54'$ y $\mid \delta \mid = 22°$, obtenemos:

$$cos(t) = -tg(34°54')tg(22°) = -0.281852599 \tag{4}$$

Sabemos que la ecuación:

$$cos(t) = -0.281852599$$

tiene dos soluciones, ya que habrá dos valores de t, comprendidos entre 0° y 360°, que tienen el mismo coseno. Como, en este caso, el cos(t) es negativo, sabemos que t corresponde a un ángulo del cuadrante II o III.

Si hacemos arccos(-0.281852599) (o como se toma en muchas calculadoras: $\cos^{-1}$(-0.281852599)), la calculadora nos dará como resultado el ángulo: 106° 22' 15" y nosotros debemos calcular el otro ángulo, que será: 360° - 106° 22' 15"= 253° 37' 45".

Una de las soluciones será el valor del ángulo horario de salida t_{salida} y la otra, el valor del ángulo horario de puesta t_{puesta}. ¿Cómo sabemos cuál es cada una? Para entender mejor esto, miremos la esfera celeste de la figura 2.

Sabemos que todos los astros salen desde la mitad del horizonte que contiene al este (el arco de horizonte que está en línea punteda) y se ponen sobre la mitad del horizonte que contiene al oeste. Recordando que el ángulo horario se mide sobre el ecuador, desde el meridiano superior del lugar hacia el oeste, veremos que, para cualquier astro, **t_{puesta} estará en el cuadrante I o II** y **t_{salida} estará en el cuadrante III o IV**.
Entonces, en este caso tendremos:

$$t_{salida} = 253°\ 37'\ 45''$$
$$t_{puesta} = 106°\ 22'\ 15''$$

Expresando estos valores en horas, minutos y segundos, resulta:

$$\boxed{t_{salida} = 16h\ 54m\ 31s} \qquad \boxed{t_{puesta} = 7hs\ 5m\ 29s}$$

- **Cálculo del acimut A de salida y puesta**

Usamos el **Teorema del coseno** y lo aplicamos lo aplicamos al arco 90°-$\mid \delta \mid$ del triángulo de la figura 2.

$$cos(90°- \mid \delta \mid) = cos(z)cos(90°- \mid \phi \mid) + sen(z)sen(90°- \mid \phi \mid)cosA \tag{5}$$

Reescribimos como:

$$sen(\mid \delta \mid) = cos(90°)sen(\mid \phi \mid) + sen(90°)cos(\mid \phi \mid)cosA \tag{6}$$

Dado que cos(90°) = 0 y sen(90°) = 1, entonces:

$$sen(\mid \delta \mid) = cos(\mid \phi \mid)cosA \tag{7}$$

Entonces:

$$cos(A) = \frac{sen(\mid \delta \mid)}{cos(\mid \phi \mid)} \tag{8}$$

Si reemplazamos por los valores numéricos: $| \phi | = 34° \; 54'$ y $| \delta | = 22°$, obtenemos:

$$cos(A) = \frac{sen(22°)}{cos(34°54')} = 0.456752711 \tag{9}$$

Aquí ocurre lo mismo que para el cálculo del ángulo horario de salida y puesta. Habrá dos ángulos A, comprendidos entre 0° y 360°, que tienen el mismo valor del coseno.
Como, en este caso, el cos(A) es positivo, sabemos que A corresponde a un ángulo del cuadrante I o IV.

Haciendo arccos(0.456752711), la calculadora nos dará como resultado el ángulo: 62° 49' 20" y nosotros debemos calcular el otro valor, que será: 360° - 62° 49' 20" = 297° 10' 40".

Una de las soluciones será el valor del acimut de salida A_{salida} y la otra el valor del acimut de puesta A_{puesta}.

Nuevamente, mirando la figura 2, podemos deducir que el $\mathbf{A}_{puesta}$ de un astro, estará siempre en el **cuadrante I o II**, mientras que el $\mathbf{A}_{salida}$ estará siempre en el **cuadrante III o IV**.

Por lo tanto:

$$\boxed{A_{salida} = 297°10'40''} \qquad \boxed{A_{puesta} = 62°49'20''}$$

Importante: las expresiones que nos permiten calcular t y A de salida y puesta (fórmulas 3 y 8), tal como están deducidas en el ejemplo anterior, no son iguales para todos los casos. Puede variar su signo, dependiendo de si la latitud es sur o norte o si la declinación es sur o norte. Por ello, es necesario plantear, en cada caso particular, el triángulo de trasnsformación correspondiente.

2. Tiempo que permanece un astro por encima del horizonte

De acuerdo con el valor de su declinación y con la latitud del observador, un determinado astro, permanecerá un cierto tiempo por encima del horizonte y el tiempo restante por debajo.

Para saber cómo calcular cuántas horas el astro se encuentra por encima y cuántas horas por debajo del horizonte, pensemos lo siguiente: tal como esta indicado en la figura 1, un observador en una dada latitud, verá que un astro dado se mueve de este a oeste. El astro sale, culmina superiormente (es decir, cruza el meridiano superior del lugar) y se pone.

Como el arco diurno es simétrico, respecto de la línea norte-sur, al llegar a su culminación superior, habrá transcurrido la mitad del tiempo total que permanecerá el astro sobre el horizonte. Desde la culminación superior hasta su punto de puesta, pasará la otra mitad del tiempo.

Si miramos ahora la figura 2, vemos que el ángulo horario de puesta del astro (indicado en rojo), nos da la cantidad de horas que transcurren entre la culminación superior y la puesta, es decir, la mitad del tiempo que astro está sobre el horizonte.

Entonces, podemos decir que **el tiempo total que permanecerá el astro sobre el horizonte es dos veces el valor del ángulo horario de puesta**:

$$\boxed{\textit{Tiempo que permanece el astro } \textbf{sobre} \textit{ el horizonte} = 2\ t_{puesta}}$$

Por lo tanto, el tiempo que el astro esté debajo del horizonte será:

$$\boxed{\textit{Tiempo que permanece el astro } \textbf{debajo} \textit{ del horizonte} = 24hs\ -\ 2\ t_{puesta}}$$

En el caso del astro de la figura 2, este permanecerá sobre el horizonte:

$$\boxed{\textit{Tiempo sobre el horizonte} = 2\ t_{\odot puesta} = 2 \times 7hs\ 5m\ 29s = 14hs\ 10\ 58s}$$

3. El Sol y la duración del día

Supongamos ahora que el astro es el Sol. Entonces, el **tiempo que el Sol permanece sobre el horizonte**, nos dará la **cantidad de horas de luz o duración del día**.

Como ya dijimos, ese tiempo será el doble del ángulo horario de puesta. Así:

$$\boxed{\textit{Duración del día}\ =\ 2\ t_{\odot puesta}}$$

Calculando entonces el ángulo horario de puesta del Sol, $t_{\odot puesta}$, dada la latitud ϕ del observador y usando el valor de $\delta_\odot$ obtenido de las efemérides[1] para el día deseado, podemos saber la cantidad de horas que el Sol estará sobre el horizonte ese día.

Como la declinación $\delta_\odot$ del Sol varía a lo largo del año entre -23° 27' y 23° 27' (ver apunte de *Movimiento anual aparente del Sol*), la cantidad de horas de luz en el día irá variando a lo largo del año.

En particular, si pensamos en un observador en una latitud sur, durante el solsticio de invierno, $\delta_\odot = 23°\ 27'$, la duración del día o cantidad de horas de luz del Sol será la mínima.

Mientras que en el solsticio de verano para el hemisferio sur, $\delta_\odot = -23°\ 27'$, la duración del día o cantidad de horas de luz del Sol será la máxima.

En los equinoccios, $\delta_\odot = 0°$, el Sol permanecerá 12 hs por encima y 12 hs por debajo del horizonte.

4. Altura máxima de un astro sobre el horizonte

En la figura 3, vemos el arco diurno de un astro de declinación sur $\delta = -22°$ en la esfera celeste, correspondiente a un observador en una latitud sur $\phi = -34°\ 54'$.

[1] En el *Suplemento al almanaque naútico y aeronáutico* se publican cada año, las efemérides del Sol, la Luna, los planetas y las estrellas mas brillantes. Allí se pueden encontrar las coordenadas del Sol requeridas para esta práctica, para cada día del año. Este Suplemento está disponible como material de la clase.

En su **punto de salida**, el astro tiene una altura **h = 0°**. Luego, a medida que describe su arco diurno de este a oeste, su altura va aumentando. Cuando llega a su **culminación superior**, es decir, cuando cruza el meridiano superior del lugar, **alcanza su mayor altura h**$_{max}$. Despueś se sigue moviendo hacia el oeste y su altura va disminuyendo hasta volver a ser **h = 0° en el punto de puesta**.

Veamos cómo podemos calcular el valor de h$_{max}$ para el astro de la figura 3.
En la figura 3, la altura máxima del astro se indica en rojo y corresponde al arco que va desde el

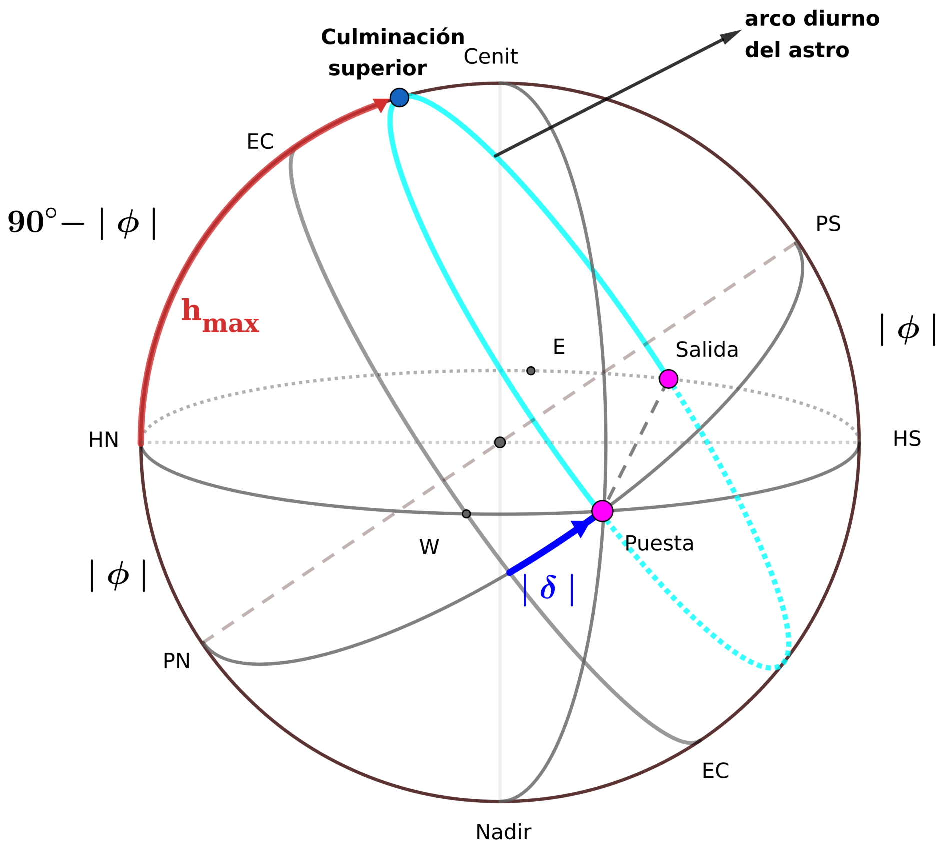

Figura 3. Esfera celeste para un observador en una latitud sur $\phi = -34° \ 54'$. Marcamos el arco diurno de un astro con declinación **sur** $\delta = -22°$. El astro alcanza su altura máxima en el punto de culminación superior. Notar que entre HN y el ecuador hay un ángulo de 90° - $\mid \phi \mid$, y desde el ecuador a la posición del astro, el valor del arco es la coordenada declinación δ.

horizonte hasta el astro, sobre el meridiano del lugar.

Notemos que entre el ecuador y el horizonte, hay un ángulo de $90°- \mid \phi \mid$ y, entre el ecuador y el astro se marca la declinación δ.

Por lo tanto, la altura máxima del astro cuyo arco diurno se muestra en la figura 3, será:

$$h_{max} = (90°- \mid \phi \mid) + \mid \delta \mid$$

Reemplazando por: $\mid \phi \mid = 34° \ 54'$ y $\mid \delta \mid = 22°$, obtenemos:

$$h_{max} = (90° - 34°54') + 22° = 77°6'$$

Hay que tener en cuenta que la expresión de h_{max} no es general, sino que dependerá de si la declinación es sur o norte.

Veamos el caso de un astro con declinación norte $\delta = 29°$, para la misma latitud sur $\phi = -34°$ 54', tal como se muestra en la figura 4.

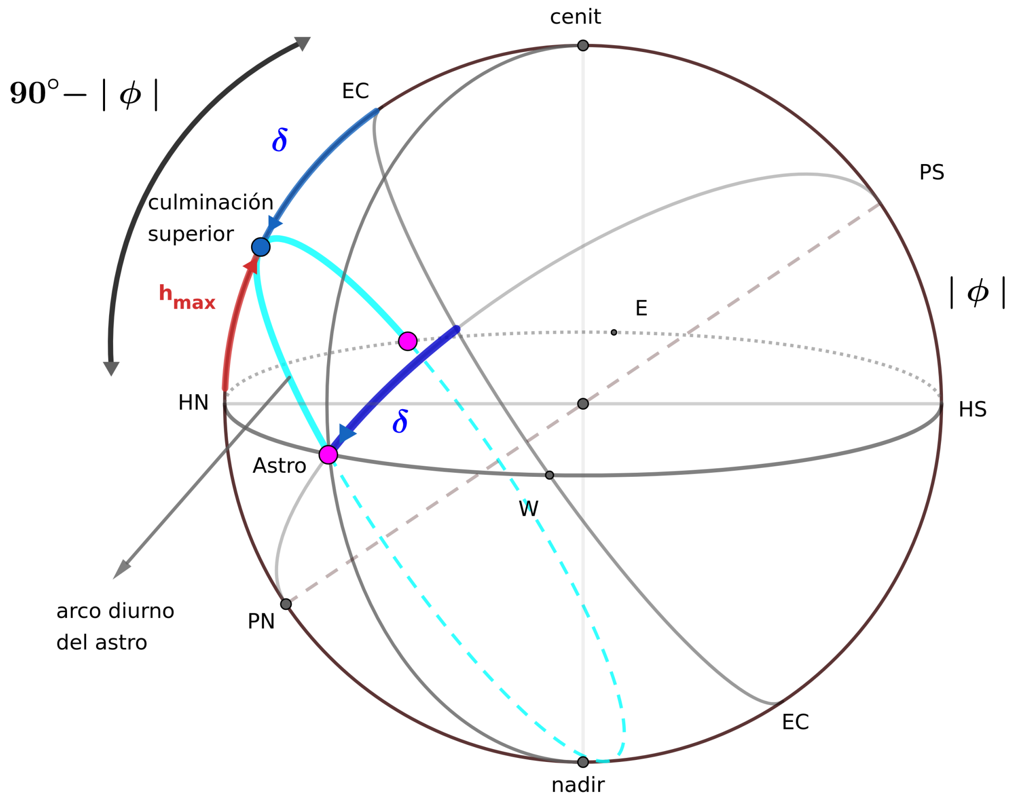

Figura 4. Esfera celeste para un observador en una latitud sur ϕ. Marcamos el arco diurno de un astro con declinación **norte** $\delta = 29°$. El astro alcanza su altura máxima en el punto de culminación superior. Notar que entre HN y el ecuador hay un ángulo de 90° - $\mid \phi \mid$, y desde el ecuador a la posición del astro, el valor del arco es la coordenada declinación δ.

En este caso vemos que, el arco entre el horizonte y el ecuador sobre el meridiano del lugar, vale $90° - \mid \phi \mid$ y este arco es igual a la suma de la declinación δ más la altura máxima h_{max}.

Así,

$$90° - \mid \phi \mid = \delta + h_{max}$$

Entonces:

$$h_{max} = 90° - \mid \phi \mid - \delta$$

Reemplazando por $\mid \phi \mid = 34°$ 54' y $\delta = 29°$, obtenemos:

$$h_{max} = 90° - 34°54' - 29° = 26°6'$$

Notar que aquí no es necesario poner módulo en δ porque la declinación es norte.