Astronomía General

apuntes de trabajos prácticos

PRÁCTICA 1
Repaso de trigonometría plana

María Laura Arias y Roberto Venero
Jefes de trabajos prácticos de la cátedra

Universidad Nacional de La Plata
Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas

La Plata, Argentina
- 2021 -

Apuntes para resolver la PRÁCTICA 1

Repaso de trigonometría plana

En esta práctica vamos a repasar algunos conceptos básicos de trigonometría plana. ¿Qué es la trigonometría? La trigonometría es una parte de la matemática que se ocupa de la medición de triángulos. Conocer las medidas de los triángulos implica saber cuáles son sus ángulos y sus lados. En el caso de la trigonometría plana, se estudian triángulos en el plano.

1. Sistemas de medida de los ángulos

Para medir los ángulos se usan diferentes sistemas de medida, cada uno con sus respectivas unidades. En astronomía usamos, en particular, tres de ellos: el sistema sexagesimal, el horario y el circular. En lo que sigue vamos a definir estos sistemas y conocer las equivalencia entre ellos.

a) Sistema sexagesimal:

En el sistema sexagesimal, la unidad de medida es el **grado** y se lo escribe como 1°. En este sistema los ángulos se miden de **0° a 360°**. Los ángulos se pueden expresar en grados (°), minutos (') y segundos ("). En 1° hay $60'$ y en $1'$ hay $60''$.

* * *

Ejemplo 1: Ángulos en el sistema sexagesimal

$$\alpha = 20°45'15'',\ \beta = 67°,\ \gamma = 34°\ 0'\ 23''$$

Ejemplo 2: Otra forma útil de escribir los ángulos en el sistema sexagesimal es usando fracción de grado, es decir, sin expresar los minutos ni los segundos.

De este modo el ángulo $\delta = 53°\ 30'$ se puede expresar como 53.5°. Dado que 60' equivale a 1°, entonces 30' equivalen 0.5°.

Ejemplo 3: Representar $\alpha = 20°\ 45'15''$ en fracción de grados.

Sabemos que $60''$ equivalen a $1'$, por lo tanto $15'' \equiv \dfrac{15'}{60}$

También sabemos que 60' equivalen a 1°, entonces $\dfrac{15'}{60} \equiv \left(\dfrac{15}{60 \times 60}\right)^{\circ} = 0.00417°$

De la misma manera $45' \equiv \dfrac{45°}{60} = 0.75°$

Así podemos escribir:
$20° + 0.75° + 0.00417° = 20.75417°$

Finalmente podemos decir que: $\alpha = 20.75417° = 20°45'15''$

* * *

b) Sistema circular:

La unidad de medida es el **radián**. En este sistema los ángulos se miden de **0 a 2π radianes**. Cabe aclarar que comúnmente la unidad radián no se escribe explícitamente. Es decir, en este sistema, los ángulos se escriben como un número o una fracción de π, sin agregar la unidad.

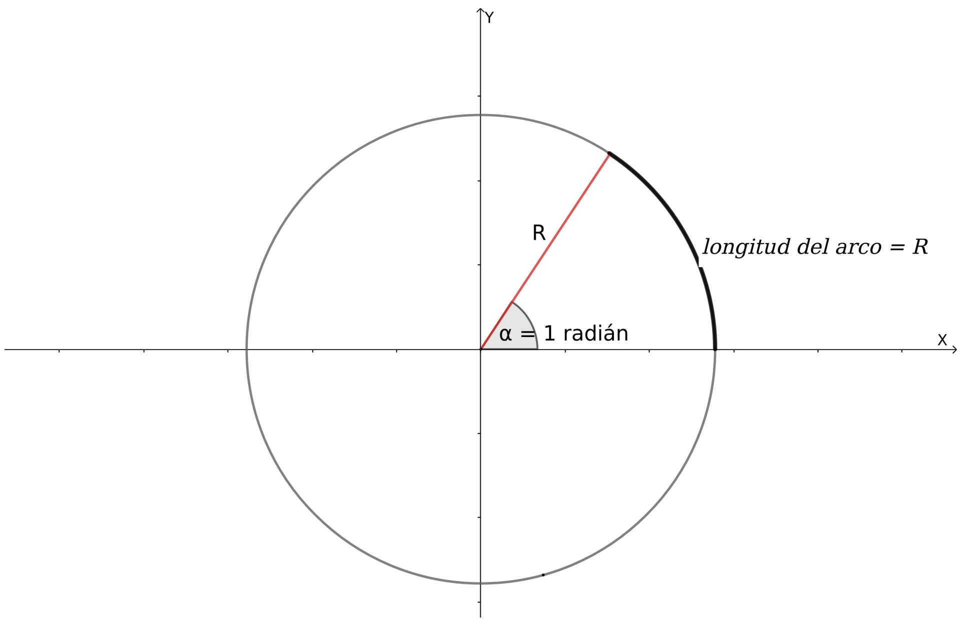
* * *

EJEMPLO: Ángulos en el sistema circular.

$$\tau = 0.567,\ \theta = 2\ \pi,\ \mu = 4.4,\ \eta = \frac{3}{4}\pi$$

* * *

Un radián se define como el ángulo que corresponde a un ángulo central de una circunferencia cuyo radio es igual a la longitud del arco (ver figura).

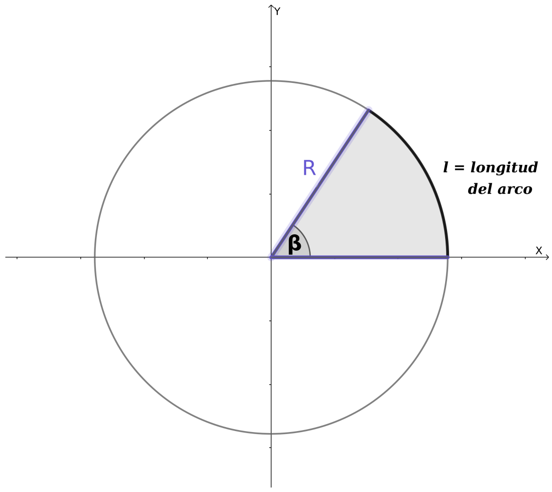


Para entender esta definición veamos cómo calcular la longitud de un arco l de una circunferencia de radio R.

Sabemos que la longitud de la circunferencia o perímetro está dada por: L = 2πR.

Si queremos conocer cuál es la longitud de un arco l, que subtiende un ángulo β como el de la figura siguiente, podemos hacer la proporción:

$$\text{L} \text{ ——— } 2\ \pi$$
$$l \text{ ——— } \beta$$



Entonces tenemos que:

$\frac{\mathrm{L}}{l} = \frac{2\pi}{\beta}$, de donde $l = \frac{\mathrm{L}\beta}{2\pi}$ y sabiendo que $\mathrm{L} = 2\pi\mathrm{R}$, resulta: $l = \frac{2\pi\mathrm{R}\beta}{2\pi}$

Entonces, simplificando: $l = \beta[\text{radianes}]\ \mathrm{R}$

Es decir, la longitud del arco l que subtiende un ángulo β en una circunferencia de radio R, equivale al valor de dicho ángulo expresado en radianes, multiplicado por el radio de la circunferencia.

En el caso particular de una circunferencia con $\mathrm{R} = 1$, resulta:

$$l = \beta\ [\text{radianes}]$$

c) <u>Sistema horario:</u>

En el sistema horario, la unidad de medida es la **hora**, que equivale a 60 minutos. Un **minuto** equivale a 60 **segundos**. En este sistema los ángulos se miden de **0 a 24 horas**.

Este sistema resulta útil en astronomía ya que relacionamos 1 día, es decir 24 hs, con una vuelta completa de la Tierra sobre su eje (360°).

* * *

EJEMPLO 1: Ángulos expresados en el sistema horario.

$$\mathrm{t} = 5^h\ 42^m\ 2^s,\ \alpha = 20^h\ 0^m\ 33^s,\ \lambda = 0^h\ 16^m\ 55^s$$

EJEMPLO 2: Expresar $10^h\ 34^m\ 08^s$ en fracción de horas.

La conversión a fracción de horas es similar al caso de los grados ya explicado.

Así $10^h\ 34^m\ 08^s \equiv 10.569$ hs.

* * *

Equivalencias entre los sistemas de unidades:

Para convertir valores expresados en una unidad de medida a otra se deben tener en cuenta las siguientes equivalencias,

$360° \equiv 24$ hs $\equiv 2\pi$ radianes (todos corresponden a una vuelta completa)

o las que se desprenden de éstas, por ejemplo:

$$180° \equiv 12 \text{ hs} \equiv \pi$$

$$90° \equiv 6 \text{ hs} \equiv \frac{\pi}{2}$$

* * *

Ejemplo 1: Para convertir de horas a grados fácilmente, podemos multiplicar las horas por 15. De manera inversa, podemos dividir por 15 para pasar de grados a horas. Esto se demuestra como sigue:

Si 24 hs ——— 360°, entonces, 1h ——— $\frac{1\text{h} \times 360°}{24\text{hs}} = 15°$

Ejemplo 2: Calculemos el número de segundos de arco (“) que hay en un radián. Este número nos va a ser útil en las próximas prácticas:

Podemos calcular cuantos segundos hay en 360°: $360° = (360 \times 60 \times 60)” = 1\,296\,000”$ y luego hacer la proporción siguiente:

2π —— $1\,296\,000”$

1 radián —— $\frac{1\,296\,000}{2\pi} = 206\,265”$

De aquí resulta que en 1 radián hay 206 265” (el valor exacto da 206 264.8062 pero se redondea).

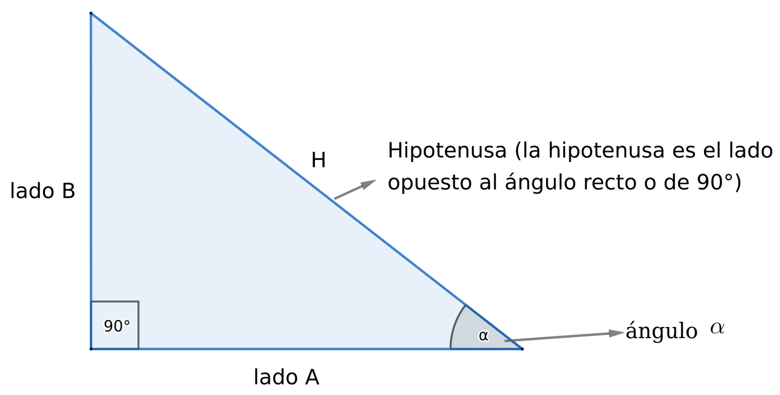
* * *

2. Definición de funciones trigonométricas

En primer lugar recordemos la definición de las funciones trigonométricas tales como seno, coseno y tangente. Dibujemos un triángulo rectángulo, es decir un triángulo que tiene uno de sus ángulos de 90° (grados sexagesimales).

Se define el **seno** del ángulo α como el valor del cociente entre el cateto opuesto al ángulo α (lado B) y la hipotenusa H:

$$sen\ \alpha = \frac{B}{H}$$



El **coseno** de un ángulo es el valor del cociente entre el cateto adyacente al ángulo α (lado A) y la hipotenusa H:

$$cos\ \alpha = \frac{A}{H}$$

La **tangente** es el cociente entre el seno y el coseno:

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$$

Se definen las funciones trigonométricas recíprocas, en base a las anteriores:

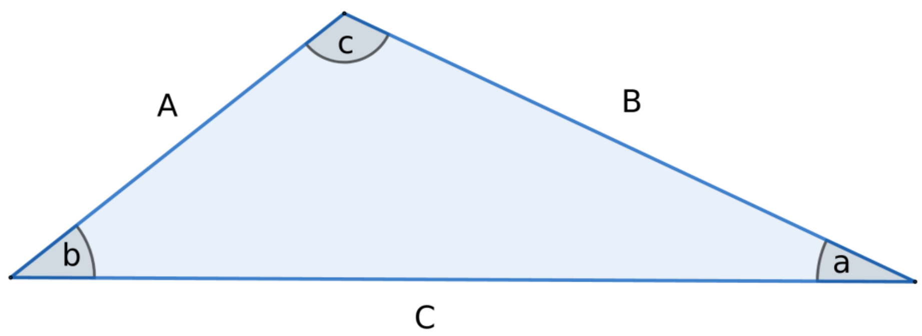
cosecante: $cosec\ \alpha = \dfrac{1}{sen\ \alpha}$; **secante:** $sec\ \alpha = \dfrac{1}{cos\ \alpha}$; **cotangente:** $cotg\ \alpha = \dfrac{1}{tg\ \alpha}$

3. Algunas relaciones para la resolución de triángulos

-La suma de los ángulos interiores de un triángulo plano, que puede ser rectángulo o no, siempre da 180°.
-Para un triángulo rectángulo se cumple el **teorema de Pitágoras**: $A^2 + B^2 = H^2$

-En el caso de triángulos que no son rectángulos, existen otros teoremas que nos permiten resolverlos, es decir calcular sus lados y sus ángulos. Veremos los **teoremas del seno y del coseno**. En las siguientes fórmulas, A, B y C representan los lados del triángulo, mientras que a, b y c son sus ángulos, tal como se ve en la figura.

Teorema del seno: $\dfrac{sen\ a}{A} = \dfrac{sen\ b}{B} = \dfrac{sen\ c}{C}$ **Teorema del coseno**: $A^2 = B^2 + C^2 - 2\,B\,C\,cos\ a$



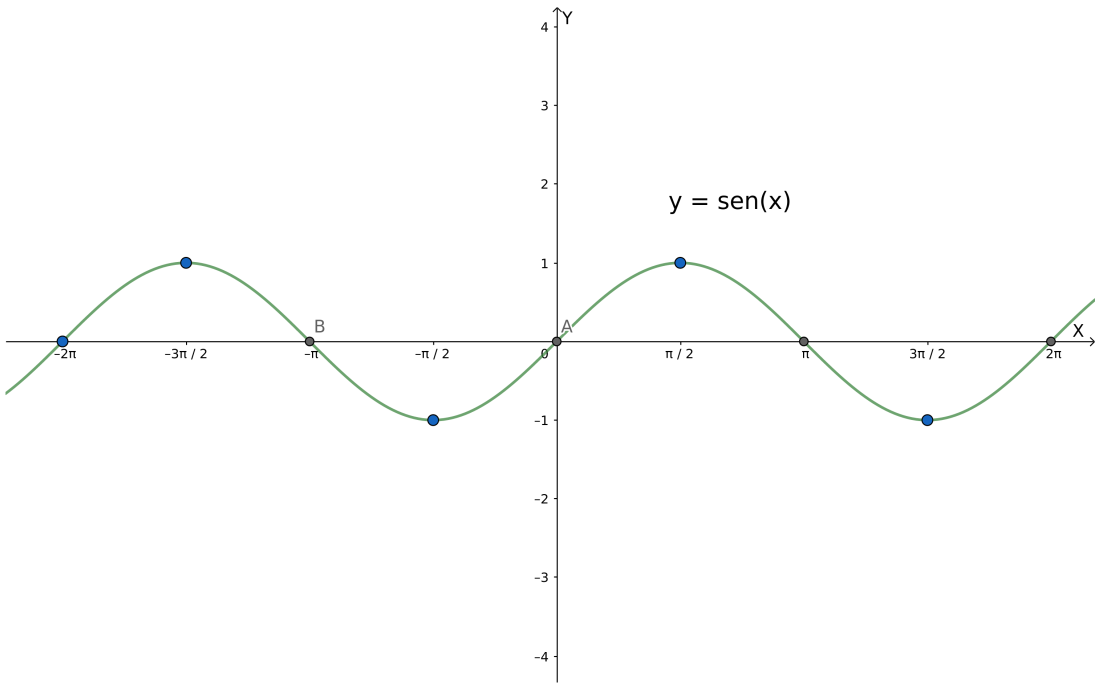
4. Representación de las funciones trigonométricas en el plano xy

Veamos cómo representar las funciones trigonométricas. Tomemos el ejemplo de la función seno. Para graficarla le damos valores a la variable "x" y, usando la calculadora, obtenemos el valor del sen x en cada caso. En la tabla mostramos un algunos valores de la variable x y de la función seno:

x	y = sen x
$-3\pi/2$	1
$-\pi$	0
$-\pi/2$	-1
$-\pi/4$	-0.707106781
0	0
$\pi/4$	0.707106781
$\pi/2$	1
π	0
$3\pi/2$	-1

Vemos que la función seno es una función periódica, con período 2π, es decir se vuelve a repetir exactamente cada 2π radianes. Los valores de esta función están comprendidos en el intervalo **[-1,1]**, es decir su imagen es el intervalo [-1,1], su dominio son los números reales.

De la misma manera se pueden graficar las funciones trigonométricas restantes.



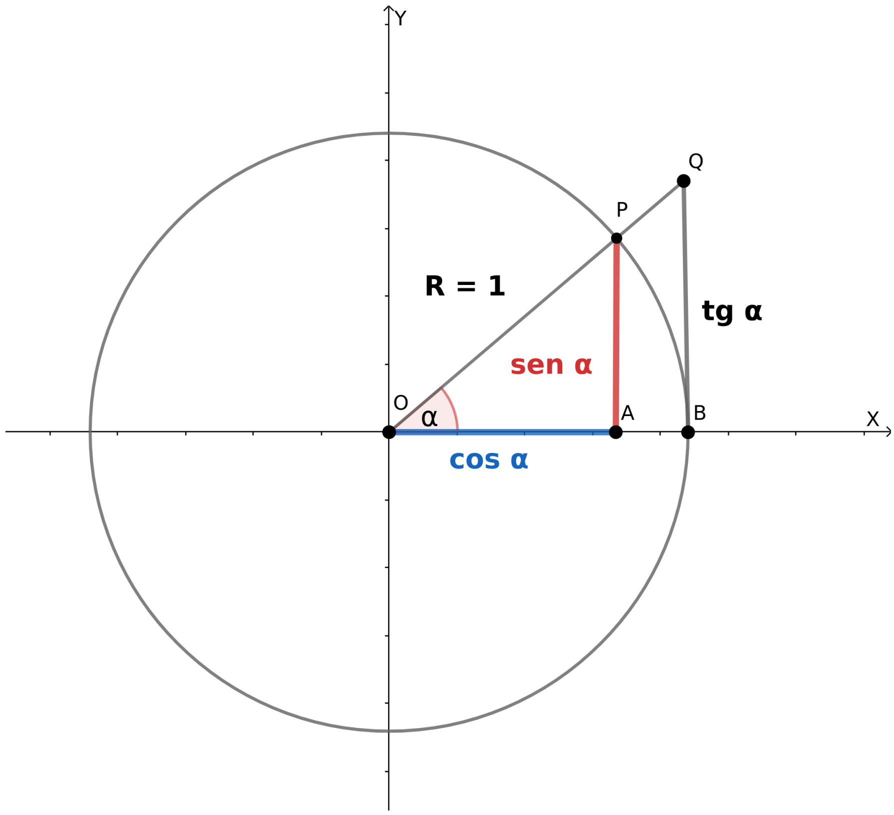
5. Circunferencia trigonométrica

Una forma útil de representar las funciones trigonométricas es mediante la circunferencia trigonométrica. Esta circunferencia tiene **radio unidad**, es decir, R = 1.

Para construirla dibujamos una circunferencia de radio 1, en un sistema de ejes cartesianos x,y, centrada en el punto (0,0).

Por convención, el **sentido positivo** de medida de los ángulos en la circunferencia trigonométrica es **antihorario** y el ángulo comienza a medirse desde la **parte positiva del eje x**. Así, si medimos el ángulo en el sentido antihorario, este será positivo, y si lo medimos en sentido horario, será negativo.

En la figura siguiente vemos la representación de las funciones sen α, cos α y tg α en la circunferencia trigonométrica. Como se muestra en la figura, ubicamos un punto P de coordenadas (x,y) sobre la circunferencia. El segmento OP equivale al radio de la circunferencia y, por lo tanto, vale 1. Indicamos con la letra α al ángulo formado por el segmento OP y la parte positiva del eje x.



Podemos entonces deducir, a partir de la figura, que:

$$\text{sen } \alpha = \frac{AP}{OP} = \frac{y}{1} = y \quad \text{y} \quad \cos \alpha = \frac{OA}{OP} = \frac{x}{1} = x$$

En resumen, las coordenadas (x,y) de un punto P sobre la circunferencia trigonométrica representan, respectivamente, el valor del coseno y del seno del ángulo formado entre el segmento OP y la parte positiva del eje x.

Vemos además que los valores del seno y del coseno de un ángulo siempre van a estar comprendidos entre **-1 y 1**, ya que las coordenadas x e y que pueden tener los puntos sobre la circunferencia no pueden ser mayores que 1 ni menores que -1.

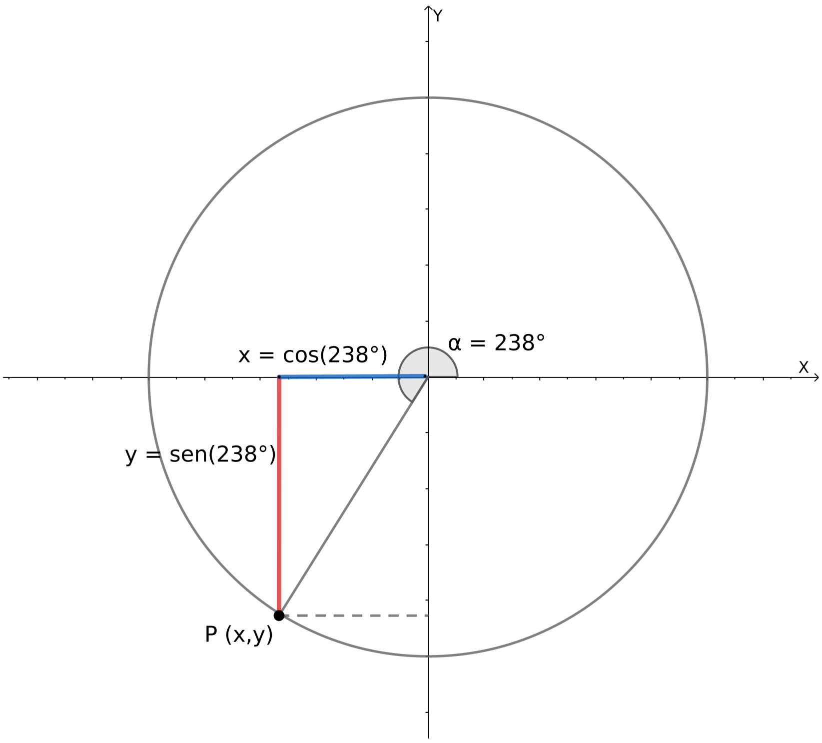
Para obtener la reprsentación de la tangente vemos que, dado que los triángulos de vértices OBQ y OAP son semejantes (ángulos iguales y lados proporcionales), se cumple que:

$$\frac{AP}{OA} = \frac{BQ}{OB} \quad \text{y entonces resulta:} \quad \frac{y}{x} = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\text{tg } \alpha}{1}$$

Entonces el valor de la tg α puede representarse por el segmento BQ en la circunferencia trigonométrica, como se ve en la figura.

* * *

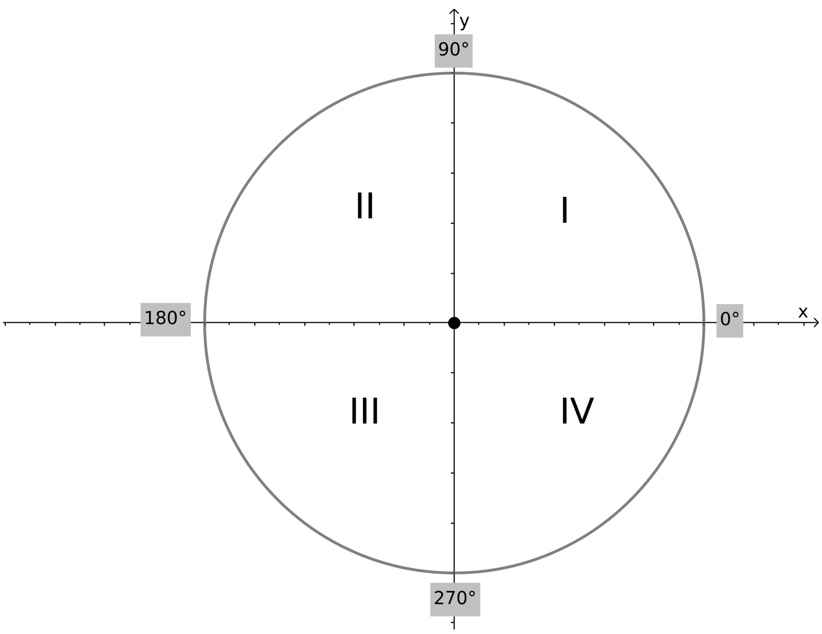
EJEMPLO: en la figura siguiente, vemos como se representa un ángulo de 238°, y los segmentos que representan el valor de sen(238°) (rojo) y de cos(238°) (azul). Notemos que, para el ángulo 238°, el valor del coseno y del seno de serán negativos.



* * *

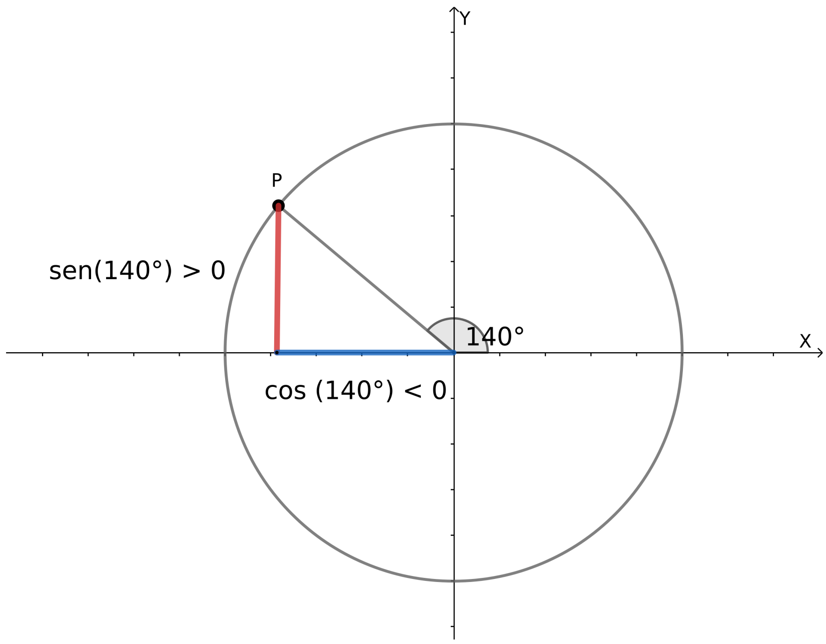
5.1 Cuadrantes

En la circunferencia trigonométrica se definen **cuatro cuadrantes** que se designan con números romanos. El cuadrante **I**, está delimitado por el eje x positivo y el eje y positivo. Le siguen los cuadrantes **II, III y IV** en el sentido contrario a las agujas del reloj. En la figura siguiente se muestra la circunferencia trigonométrica, indicando cada cuadrante y los valores de los ángulos que abarca cada uno de ellos.

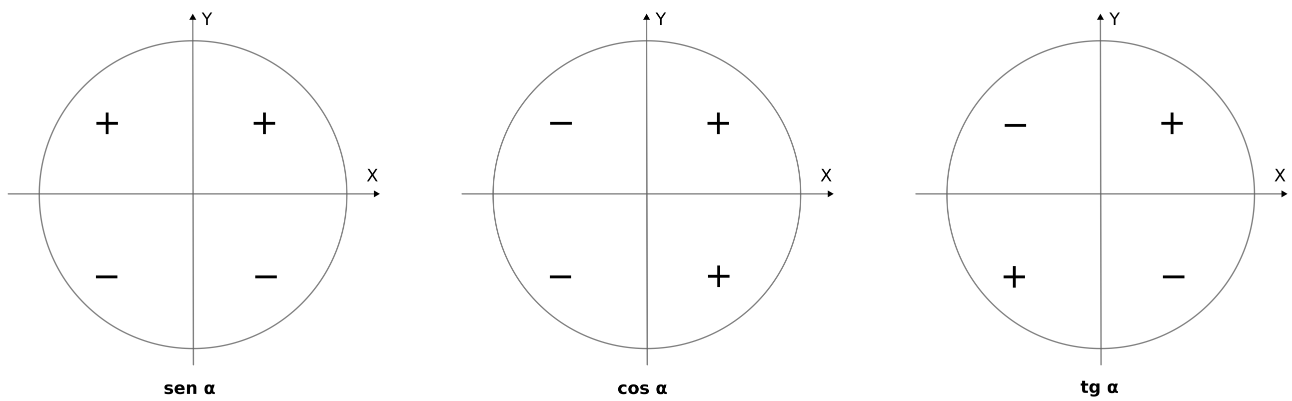


5.2 Signos de las funciones trigonométricas

Según el cuadrante en el que se encuentre el ángulo, los valores de sus funciones trigonométricas pueden ser positivos o negativos. Por ejemplo, en el caso de un ángulo de 140°, este pertenece al cuadrante II. Como se ve en la figura siguiente, el valor de su seno es positivo y el de su coseno es negativo. El valor de su tangente es negativo, por ser el cociente entre seno y coseno. Ocurrirá lo mismo para todos los ángulos del cuadrante II.



En las figuras siguientes se muestran los signos que adoptan las funciones seno, coseno y tangente en cada uno de los cuadrantes. Recordemos que el valor de sen α está representado por la coordenada y, y el de cos α por la coordenada x.



5.3 Ángulos mayores que 360°

En el caso de tener un ángulo mayor a 360°, se puede encontrar un ángulo equivalente, es decir, con los mismos valores de sus funciones trigonométricas, que esté comprendido ente 0° y 360°. Eso es posible ya que, luego de dar una vuelta completa, los valores de las funciones trigonométricas se repiten.

Entonces, dado un ángulo mayor que 360°, debemos restarle el número entero de vueltas (n veces 360°) y quedarnos con el resto, que será un ángulo equivalente comprendido entre 0° y 360°.

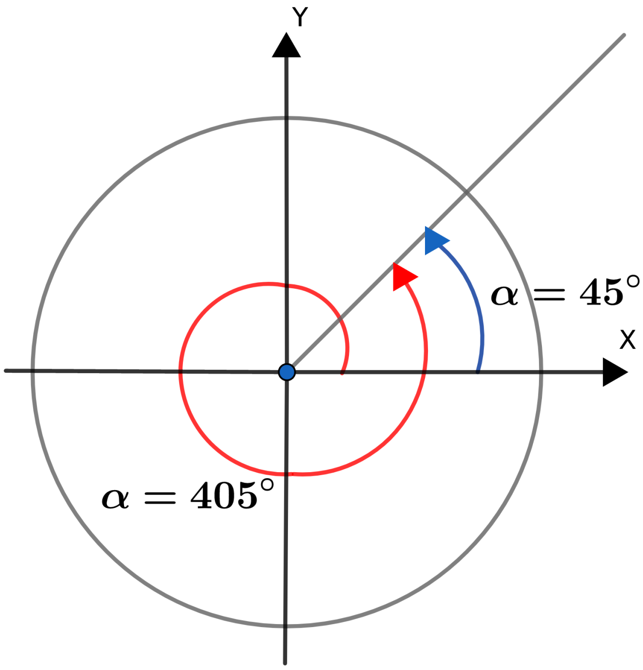
* * *

Ejemplo 1: Dado un ángulo igual a α =405 °, para ubicarlo sobre la circunferencia trigonométrica e indicar el valor del seno y del coseno, hacemos:

$$405° - 360° = 45°$$

y obtenemos el ángulo equivalente comprendido entre 0° y 360°, como se ve en la figura siguiente. Así:

$$\cos(405°) = \cos(45°)$$
$$\operatorname{sen}(405°) = \operatorname{sen}(45°)$$
$$\operatorname{tg}(405°) = \operatorname{tg}(45°)$$



Ejemplo 2: Dado $\beta = 1230°$, ¿cuál será el ángulo entre 0° y 360° que tenga los mismos valores de las funciones trigonométricas?

Dividimos por 360° para saber cuántas vueltas completas entran en 1230°.

$$\frac{1230°}{360°} = 3.416666667$$

Hacemos 1230°- 3 $\times$ 360° = 150° y vemos que un ángulo de 1230° equivale a uno de 150°.

Entonces:

$\cos(1230°) = \cos(150°)$
$\operatorname{sen}(1230°) = \operatorname{sen}(150°)$
$\operatorname{tg}(1230°) = \operatorname{tg}(150°)$

* * *

6. Dos soluciones entre 0° y 360°

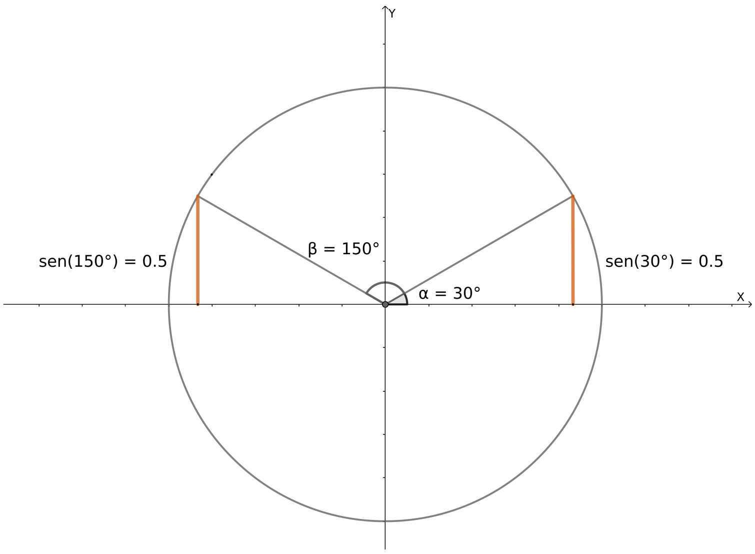
A partir de la observación de la circunferencia trigonométrica podemos deducir que siempre hay dos ángulos comprendidos entre 0° y 360°, que tienen el mismo valor del seno, del coseno, de la tangente, o de las funciones recíprocas.

Por ejemplo, si planteamos la siguiente ecuación:

$$\text{sen}\ \alpha = 0.5$$

Podemos deducir, a partir del signo del valor de sen α (que es positivo en este ejemplo), que el ángulo α puede pertenecer al cuadrante I o al cuadrante II. Esto se debe a que, como vimos antes, para un ángulo en los cuadrantes I y II el seno tiene valores positivos.

Si queremos encontrar el valor de α que satisface la ecuación anterior, podemos usar la calculadora para obtener la función inversa del seno, es decir arcsen(0.5) (que en la calculadora, en general, está como sen^{-1}). La calculadora nos dará como resultado 30°. Sin embargo, debemos tener en cuenta que existe otro ángulo comprendido entre 0° y 360° cuyo seno vale 0.5, que es 150°. Veámoslo en la circunferencia trigonométrica:



Entonces la ecuación sen $\alpha = 0.5$ tendrá **dos soluciones**: $\alpha_1 = 30°$ y $\alpha_2 = 150°$ comprendidas entre 0° y 360°. El valor de α_2 será $\alpha_2 = 180°$ - $30° = 150°$.

Conociendo el valor de una única función trigonométrica, siempre tendremos dos valores posibles del ángulo. Si conocemos simultáneamente dos funciones trigonométricas de α, por ejemplo, sen $\alpha = 0.5$ y cos $\alpha = 0.866025$, podemos decir que, en este caso, el ángulo pertenece al cuadrante I (donde seno y coseno son positivos) y la solución será ahora un solo valor: 30°. Así podemos definir un solo valor para α.