Κεφάλαιο 1

Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά

1.1 Μετοχές και Δικαιώματα

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 *Μια μετοχή είναι η κατοχή μίας μονάδας του μετοχικού κεφαλαίου μιας εταιρείας.*

Η τιμή μιας μετοχής καθορίζεται μετά από ημερήσια διαπραγμάτευση. Οι μέτοχοι που θέλουν να πουλήσουν κάνουν μια ανάλογη δήλωση στο χρηματιστήριο (ενδεχομένως δίνοντας μία χαμηλότερη αποδεκτή τιμή πώλησης) και οι ενδιαφερόμενοι αγοράζουν. Αν το ενδιαφέρον για την αγορά μετοχών είναι μεγαλύτερο από εκείνα που πωλούνται τότε προφανώς η τιμή ανεβαίνει, διαφορετικά κατεβαίνει. Η τελευταία τιμή πώλησης τη συγκεκριμένη ημέρα είναι η τιμή της μετοχής εκείνη την ημέρα.
Είναι προφανές ότι κανείς δεν μπορεί να προβλέψει με βεβαιότητα την τιμή της μετοχής την επόμενη ημέρα, αλλά μπορεί κανείς να μαντέψει ότι πιθανόν αύριο θα υπάρχει μεγάλο ενδιαφέρον για αγορά γιατί η εταιρεία πρόκειται να επεκτείνει τις δραστηριότητές της κλπ. Παρόλα αυτά κανείς δεν μπορεί να προβλέψει πόσο πολύ θα ανέβει, αν αυτό τελικά συμβεί.
Φυσικά, μπορεί κανείς να βρει και άλλα χρηματοοικονομικά προϊόντα εκτός από τις μετοχές. Θα μελετήσουμε τα λεγόμενα παράγωγα (δικαιώματα προαίρεσης) τα οποία (γράφονται) σε μία μετοχή.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 *Ένα δικαίωμα αγοράς ή πώλησης είναι ένα συμβόλαιο που μεταβιβάζει στον κάτοχό του, το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, να αγοράσει ή να πουλήσει μία συγκεκριμένη ποσότητα ενός υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου σε μία καθορισμένη τιμή εξάσκησης σε ή πριν από μια καθορισμένη ημερομηνία, ανάλογα με το είδος του δικαιώματος.*

Θα περιγράψουμε τώρα με περισσότερη λεπτομέρεια αυτά τα δύο δικαιώματα. Ας υποθέσουμε τώρα μία μετοχή με τρέχουσα τιμή S_0, ένα ποσό K το οποίο καλείται τιμή εξάσκησης και μία μέλλουσα χρονική στιγμή (χρόνος εξάσκησης) T, για παράδειγμα 3 μήνες. Οι αποπληρωμές για αυτά τα δικαιώματα είναι

$$\begin{aligned}(S_T - K)^+ &= \max(S_T - K, 0) \quad \text{δικαίωμα αγοράς}\\ (K - S_T)^+ &= \max(K - S_T, 0) \quad \text{δικαίωμα πώλησης}\end{aligned}$$

Στην πραγματικότητα, ο γράφων το δικαίωμα αγοράς είναι υποχρεωμένος να παραδώσει στον αγοραστή μία μετοχή στην τιμή K, αν $S_T > K$, ενώ στην περίπτωση ενός δικαιώματος πώλησης είναι υποχρεωμένος να αγοράσει μία μετοχή στην τιμή K, αν $S_T < K$. Στην πρώτη περίπτωση ο αγοραστής μπορεί να πωλήσει τη μετοχή στην τρέχουσα τιμή και επομένως να κερδίσει το ποσό $(S_T - K)^+$. Στην δεύτερη περίπτωση μπορεί να αγοράσει μία μετοχή στην τιμή $S_T < K$ και να την πωλήσει στην τιμή K στον συντάκτη του δικαιώματος και επομένως να κερδίσει το ποσό $(K - S_T)^+$. Παρατηρήστε ότι στην παραπάνω περίπτωση ο γράφων του δικαιώματος έχει την υποχρέωση ενώ ο αγοραστής έχει την επιλογή να κάνει την αντίστοιχη κίνηση.

Για παράδειγμα, στην περίπτωση αγοράς ενός δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης $K = 220$ για $Y = 30$ τότε το κέρδος για τον κάτοχο του δικαιώματος τη στιγμή T θα είναι ίσο με

$$(S_T - K)^+ - Y = (S_T - 220)^+ - 30$$

Η τιμή S_T είναι άγνωστη και μπορεί να είναι ένας αριθμός μεγαλύτερος από ή ίσος με το μηδέν. Η συνάρτηση κέρδους θα είναι

$$\Pi(x) = (x - 220)^+ - 30.$$

Το γράφημα αυτής της συνάρτησης μπορεί να αναπαρασταθεί εύκολα με το κατάλληλο λογισμικό. Τότε γίνεται προφανές ότι μπορεί επίσης να λάβει αρνητικές τιμές, το οποίο σημαίνει ότι υπάρχει πιθανότητα ζημιάς.

Παραδειγμα 3 *Υποθέστε ότι η τωρινή τιμή της μετοχής είναι 406 Ευρώ και ότι υπάρχει στην αγορά ένα δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης $K = 400$ με $C(400) = 41$ Ευρώ. Θεωρήστε τις ακόλουθες δύο στρατηγικές: στην πρώτη στρατηγική αγοράζεται μία μετοχή στην τιμή 406 και στη δεύτερη στρατηγική αγοράζετε $\frac{406}{41}$ δικαιώματα αγοράς.*
Οι συναρτήσεις κέρδους τη στιγμή T (η λήξη του δικαιώματος) είναι οι ακόλουθες:

- $\Pi_1(x) = x - 406$
- $\Pi_2(x) = \frac{406}{41}(x - 400)^+ - 406$

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι αν η τιμή της μετοχής γίνει μεγαλύτερη από 445 τη στιγμή T τότε η δεύτερη στρατηγική θα έχει μεγαλύτερο κέρδος ενώ διαφορετικά η πρώτη θα είναι περισσότερο κερδοφόρα. Φυσικά μπορεί κανείς να συνδυάσει τις παραπάνω στρατηγικές καταλήγοντας σε ένα άπειρο αριθμό συνδυασμών! Λαμβάνοντας υπόψιν όλα τα υπαρκτά δικαιώματα αγοράς και πώλησης ο επενδυτής μπορεί να αποφασίσει πως ακριβώς θα επενδύσει τα χρήματά του. Για αυτό το σκοπό θα πρέπει να μελετήσει μαθηματικά τις συναρτήσεις κέρδους και τη συμπεριφορά τους.
Έπειτα από παρόμοια πειράματα με πραγματικά δεδομένα θα φτάσετε στο ακόλουθο συμπέρασμα: τα δικαιώματα αγοράς πολλαπλασιάζουν το κέρδος στην περίπτωση όπου η τιμή της μετοχής λάβει μία αρκετά μεγάλη τιμή αλλά στην περίπτωση όπου η τιμή της μετοχής πέσει κάτω από την τιμή εξάσκησης τότε τα χρήματα «χάνονται». Παρόμοια, τα δικαιώματα πώλησης δρουν ως ένας παράγοντας εξασφάλισης, με την έννοια ότι αν η τιμή της μετοχής πέσει κάτω από την τιμή εξάσκησης, τότε λαμβάνουμε το αντίστοιχο ποσ. □

Σχολιο 4 *Ας υποθέσουμε ότι έχετε αποφασίσει οτι θα επενδύσετε το ποσό V σε μετοχές μιας εταιρείας. Όπως διαπιστώσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα μπορείτε να τα επενδύσετε εξ ολοκλήρου σε αγορά μετοχών αλλά μπορείτε κα να ακολουθήσετε άπειρου πλήθους διαφορετικές στρατηγικές. Η κάθε μια στρατηγική πλεονεκτεί σε διαφορετικό σενάριο ως εκ τούτου προκειμένου να επιλέξετε την κατάλληλη για εσάς στρατηγική θα πρέπει να επιλέξετε ουσιαστικά σε ποιο σενάριο θα ποντάρετε τα χρήματα σας.* □

Αγοράζοντας ένα δικαίωμα προαίρεσης ενδέχεται να το κρατήσει κανείς ως τη λήξη του ή να το πουλήσει πριν τη λήξη του. Η τιμή πώλησης καθορίζεται σύμφωνα με το νόμο προσφοράς-ζήτησης. Επομένως, ενδέχεται να προκύψει κέρδος αν το πωλήσουμε νωρίτερα από την ημερομηνία λήξης του ώστε να λάβουμε την αντίστοιχη διαφορά.
Βεβαίως υπάρχουν και άλλα συμβόλαια τα οποία διαφέρουν κυρίως στην συνάρτηση αποπληρωμής. Επίσης ο τρόπος με τον οποίο τα εξασκούμε είναι διαφορετικός: αν το δικαίωμα πρόκειται να εξασκηθεί μόνο τη στιγμή T (στιγμή λήξης) τότε καλείται Ευρωπαϊκού τύπου. Αν το δικαίωμα μπορεί να εξασκηθεί οποιαδήποτε στιγμή ως τη στιγμή λήξης του τότε καλείται Αμερικάνικου τύπου ενώ αν μπορεί να εξασκηθεί μόνο σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές καλείται Bermudan.

Εκτός της χρηματιστηριακής αγοράς υπάρχει επίσης η αγορά (over-the-counter (OTC) market) όπου ένας μπορεί να αγοράσει περισσότερο περίπλοκα δικαιώματα προαίρεσης σε σχέση με τα γνωστά δικαιώματα αγοράς και πώλησης. Για παράδειγμα ένας επενδυτής μπορεί να μην είναι σίγουρος αν θέλει ένα δικαίωμα αγοράς ή πώλησης επομένως μπορεί να αγοράσει ένα δικαίωμα με αποπληρωμή

$$f(x) = \max\{(x - K_1)^+, (K_2 - x)^+\}$$

δηλαδή, θα λάβει το μεγαλύτερο από τα παραπάνω δύο ποσά. Η τιμή τέτοιου δικαιώματος θα καθοριστεί σύμφωνα με το νόμο προσφοράς και ζήτησης.
Ως τώρα, οι αποπληρωμές, εξαρτώνται από την τελική τιμή της μετοχής. Υπάρχουν και άλλου τύπου δικαιώματα προαίρεσης ται οποίοι εξαρτώνται από όλες τις τιμές της μετοχής (ή κάποιες) στο διάστημα $[0, T]$. Για παράδειγμα η συνάρτηση αποπληρωμής ενδέχεται να έχει τη μορφή

$$f(S_{t_1}, \cdots, S_{t_n}) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} S_{t_i}}{n} - K\right)^+$$

όπου $t_i \in [0, T]$. Αυτός ο τύπος δικαιωμάτων καλείται (path dependent).
Τα συμβόλαια με αποπληρωμές που εξαρτώνται από δύο ή περισσότερες μετοχές καλούνται (multi-asset options).Ένα παράδειγμα είναι το δικαίωμα με την ακόλουθη συνάρτηση αποπληρωμής

$$f(x, y) = \max\{x, y, K\}$$

όπου το x αναφέρεται στην τιμή της μετοχής S_1 τη στιγμή T ενώ το y αναφέρεται στην τιμή της μετοχής S_2 τη στιγμή T.

1.2 Προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού και εφαρμογές στην κατασκευή χαρτοφυλακίου

Παρακάτω θα δούμε ότι με κατάλληλη χρήση αυτών των χρηματοοικονομικών εργαλείων μπορούμε να κατασκευάσουμε σύνθετα χαρτοφυλάκια ώστε να έχουμε τις απαιτούμενες ιδιότητες. Προκύπτει ότι το αντίστοιχο μαθηματικό πρόβλημα θα είναι ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης.
Τώρα, θα περιγράψουμε ένα τύπο προβλήματος βελτιστοποίησης το οποίο καλείται πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.
Βρείτε x_1, x_2, x_3 τ.ω. η ποσότητα

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

να μεγιστοποιείται δεδομένων των ακόλουθων συνθηκών

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Το παραπάνω πρόβλημα συνήθως γράφεται ως

$$\begin{array}{ll} \max & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{δεδομένου ότι} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Ένα τέτοιο πρόβλημα ενδέχεται να έχει μία λύση (ή ακόμα και άπειρες λύσεις) ή και καμία. Εφαρμόζοντας την κατάλληλη διαδικασία επίλυσης προκύπτει ότι το μέγιστο επιτυγχάνεται όταν $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1$ και είναι ίσο με 13.
Τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού προκύπτουν κατά το πρόβλημα της κατασκευής ενός χαρτοφυλακίου ως εξής.
Έστω ότι $S_0 = 238$, $C(230) = 65$, $P(200) = 30$ όπου S_0 είναι η παρούσα αξία της μετοχής, $C(230)$ είναι η τιμή του δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης 230 και $P(200)$ είναι η τιμή του δικαιώματος πώλησης με τιμή εξάσκησης 200.
Υποθέστε ότι θέλετε να επενδύσετε 1.000 ευρώ στο παραπάνω. Για παράδειγμα, ένα χαρτοφυλάκιο μπορεί να κατασκευαστεί με συνάρτηση κέρδους

$$\Pi(x) = \frac{200}{238}x + \frac{300}{65}(x-230)^+ + \frac{500}{30}(200-x)^+ - 1000$$

Αν παραστήσουμε γραφικά τη συνάρτηση κέρδους θα παρατηρήσουμε ότι η μέγιστη πιθανή ζημιά σε όλα τα σενάρια (δηλαδή για όλα τα $x \geq 0$) είναι περίπου 832 ευρώ.

Ερώτημα 1 *Υπάρχει άραγε διαφορετική κατανομή του ποσού των 1.000 ευρών τ.ω. η μέγιστη πιθανή ζημιά να είναι μικρότερη; Αν ναι, ποια είναι η κατανομή που οδηγεί σε χαρτοφυλάκιο με τη μικρότερη πιθανή ζημιά;*

Το παραπάνω ερώτημα μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Ας διατυπώσουμε πρώτα την ακόλουθη παρατήρηση. Υποθέτουμε μία γραμμική συνάρτηση $f(x)$ η οποία ικανοποιεί την ιδιότητα $f(x) \geq -D$ για κάθε $x \geq 0$. Για αυτό το λόγο είναι αρκετό να θεωρήσουμε $f(0) \geq -D$ και $f^{'}(0+) \geq 0$. Αυτό το συμπέρασμα μπορεί να γενικευτεί σε μία συνάρτηση η οποία είναι κατά τμήματα γραμμική με πεπερασμένους κλάδους.
Η συνάρτηση κέρδους $\Pi(x)$ όπως περιγράφηκε προηγουμένως είναι κατά τμήματα γραμμική επομένως η ακόλουθη ισοδυναμία ισχύει

$$\Big(\Pi(x) \geq -D \ \text{ για κάθε } x \geq 0\Big) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \Pi(0) \geq -D, \\ \Pi(200) \geq -D, \\ \Pi(230) \geq -D, \\ \Pi^{'}(230+) \geq 0 \end{array} \right.$$

όπου

$$\Pi(x) = ax + b(x-230)^+ + c(200-x)^+ - 1000$$

για κάποιο D ή ισοδύναμα

$$\Big(\Pi(x) \geq -D \ \text{ για κάθε } x \geq 0\Big) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 200c - 1000 \geq -D, \\ 200a - 1000 \geq -D, \\ 230a - 1000 \geq -D, \\ a + b \geq 0 \end{array} \right.$$

Επομένως τα χαρτοφυλάκια με παραμέτρους a, b, c οι οποίες ικανοποιούν τις παραπάνω ανισότητες καθώς και την ισότητα $238a + 65b + 30c = 1000$ έχουν μία μέγιστη πιθανή ζημιά της τάξης D.

Ερώτημα 2 *Ποια είναι η μικρότερη τιμή του D τ.ω. να υπάρχει ένα χαρτοφυλάκιο με μέγιστη πιθανή ζημιά D;*

Για να βρούμε αυτήν την τιμή αρκεί να λύσουμε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

$$\begin{array}{lrr} \min & D & \\ \text{δεδομένου ότι} & 200c - 1000 + D \geq & 0 \\ & 200a - 1000 + D \geq & 0 \\ & 230a - 1000 + D \geq & 0 \\ & a + b \geq & 0 \\ & 238a + 65b + 30c = & 1000 \end{array}$$

Συμβολίζοντας με $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c, x_4 = D$ προκύπτει το ακόλουθο γραμμικό πρόβλημα προγραμματισμού

$$\begin{array}{lrr} \max & -x_4 & \\ \text{δεδομένου ότι} & 200x_3 - 1000 + x_4 \geq & 0 \\ & 200x_1 - 1000 + x_4 \geq & 0 \\ & 230x_1 - 1000 + x_4 \geq & 0 \\ & x_1 + x_2 \geq & 0 \\ & 238x_1 + 65x_2 + 30x_3 = & 1000 \end{array}$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος είναι περίπου $a = 4.9, b = -4.9, c = 5$ και η μέγιστη πιθανή ζημιά είναι περίπου 20 ευρώ. Αρνητικά πρόσημα αντιστοιχούν σε πώληση του υποκείμενου αγαθού. Αν όλες οι τιμές έχουν υποτεθεί θετικές τότε το πρόβλημα έχει λύση περίπου $a = 3.5, b = 0, c = 5$ με αντίστοιχη μέγιστη πιθανή ζημιά περίπου 286 ευρώ.

Στα παραπάνω περιγράφηκε πως ο επενδυτής μπορεί να κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο με τη μικρότερη πιθανή ζημιά. Ωστόσο, μπορεί να πιστεύει ότι η τιμή της μετοχής πρόκειται να ανέβει.

Ένας τρόπος κατασκευής του αντίστοιχου κερδοφόρου χαρτοφυλακίου είναι να απαιτήσουμε η κλίση της γραμμής του τελευταίου κλάδου να είναι αρκετά μεγάλη. Δηλαδή, $x_1 + x_2 \geq M$ για κάποιο $M > 0$. Όσο μεγαλύτερο είναι το M τόσο περισσότερο κέρδος θα προκύψει στο ενδεχόμενο αύξησης της τιμής της μετοχής. Ωστόσο, η μέγιστη πιθανή ζημιά θα αυξηθεί. Επομένως, ο επενδυτής είναι αυτός που θα αποφασίσει να κατασκευάσει το χαρτοφυλάκιο που του ταιριάζει.

Για παράδειγμα, επιλέγοντας $M = 6.5$ προκύπτει ότι $a = 2.84, b = 3.65, c = 2$ ενώ η μέγιστη πιθανή ζημιά γίνεται τώρα 432 ευρώ.

Ένας άλλος τρόπος κατασκευής του χαρτοφυλακίου εξαρτάται από την πρόβλεψη του επενδυτή για την τιμή της μετοχής τη στιγμή T. Υποθέτουμε ότι η τιμή της μετοχής βρίσκεται στο διάστημα (a, b).

Για παράδειγμα, υποθέτουμε ότι ο επενδυτής πιστεύει ότι η τιμή της μετοχής θα βρίσκεται στο διάστημα $(220, 250)$. Τότε θέλει να κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο είναι επικερδές στο ενδεχόμενο ότι πράγματι η τιμή θα βρεθεί σε αυτό το διάστημα. Για αυτό το σκοπό, πρέπει να ισχύει $\Pi(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (220, 250)$.

Συγκεκριμένα, το ακόλουθο πρόγραμμα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να επιλυθεί.

$$\begin{array}{lrr} \max & x_4 + x_5 + x_6 & \\ \text{δεδομένου ότι} & 200x_3 - 500 \geq & 0 \\ & 200x_1 - 500 \geq & 0 \\ & 220x_1 - 1000 - x_4 \geq & 0 \\ & 230x_1 - 1000 - x_5 \geq & 0 \\ & 250x_1 + 20x_2 - 1000 - x_6 \geq & 0 \\ & x_1 + x_2 \geq & 0 \\ & 238x_1 + 65x_2 + 30x_3 = & 1000 \end{array}$$

Επιλύοντας αυτό το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού θα καταλήξει με ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο θα έχει ζημιά μικρότερη ή ίση των 500 ευρώ και την ίδια στιγμή το μεγαλύτερο πιθανό κέρδος αν η τιμή της μετοχής βρεθεί στο παραπάνω διάστημα. Οι παραπάνω ανισότητες είναι μία συνέπεια του ακόλουθου: εφόσον είναι επιθυμητό ένα επικερδές χαρτοφυλάκιο στο διάστημα $(220, 250)$ τότε πρέπει να υποτεθεί ότι $\Pi(220) \geq D_1, \Pi(230) \geq D_2, \Pi(250) \geq D_3$ με D_1, D_2, D_3 τα μεγαλύτερα δυνατά.
Από την άλλη μεριά, για να έχει το παραπάνω χαρτοφυλάκιο έχει ζημιά η οποία δεν είναι περισσότερη από 500 ευρώ πρέπει να υποτεθεί ότι $\Pi(x) \geq -500$ για κάθε $x \geq 0$. Για αυτό το λόγο πρέπει να υποτεθεί ότι $\Pi(0) \geq -500, \Pi(200) \geq -500, \Pi^{'}(230+) \geq 0$.
Αν υπάρχουν n δικαιώματα αγοράς και πώλησης στην χρηματιστηριακή αγορά με τιμές εξάσκησης $K_1 < \cdots < K_n$ τότε ισχύουν οι ακόλουθες ισοδυναμίες

$$\Big(\Pi(x) \geq -D \ \ \text{για κάθε } x \geq 0\Big) \Longleftrightarrow \begin{cases} \Pi(0) \geq -D, \\ \Pi(K_1) \geq -D, \\ \vdots \\ \Pi(K_n) \geq -D, \\ \Pi^{'}(K_n+) \geq 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\Big(\Pi(x) \geq 0 \ \ \text{για κάθε } x \in (a,b)\Big) \Longleftrightarrow \begin{cases} \Pi(K_i) \geq D_i, \ \text{για κάθε } K_i \in (a,b) \\ \Pi(a) \geq D_a, \\ \Pi(b) \geq D_b, \ \text{αν } b < +\infty \\ \Pi^{'}(K_n+) \geq M \ \text{αν } b = +\infty \\ D_i, D_a, D_b, M \geq 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

όπου τα D_a, D_b, D_i, M πρέπει να είναι θετικά. Υποθέτουμε ότι ένας επενδυτής θέλει να επενδύσει το ποσό Y σε μία μετοχή και το αντίστοιχα δικαιώματα αγοράς και πώλησης. Υποθέτουμε ότι προβλέπει ότι η τιμή της μετοχής θα βρίσκεται στο διάστημα (c, v) τη στιγμή T. Τότε μπορεί να τοποθετήσει το ποσό Y αφού επιλύσει το ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.
Δεδομένης μία αποδεκτής ζημιάς D βρείτε τους συντελεστές $a, b, \gamma_i, \delta_i, D_c, D_v, D_i, M$

$$\begin{aligned} &\max && w_c D_c + w_1 D_1 + \cdots w_l D_l + w_v D_v + w_M M \\ &\text{δεδομένου ότι} && \Pi(x) \geq -D \text{ για κάθε } x \geq 0 \\ & && \Pi(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in (c,v) \\ & && ax + be^{rT} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i C(K_i) + \delta_i P(K_i) = Y \end{aligned} \tag{1.3}$$

όπου w_c, w_v, w_i, w_M είναι τα, επιλεγμένα από τον επενδυτή, βάρη.
Στην περίπτωση που το παραπάνω πρόβλημα είναι μη φραγμένο, μπορεί κανείς να βάλει κάποιους περιορισμούς στους συντελεστές, για παράδειγμα $\gamma_i \in [-H, H]$ για κάποιον επιλεγμένο από τον επενδυτή αριθμό H.

Σχολιο 5 *Σημειώστε ότι όσο μεγαλύτερο είναι το σύνολο πρόβλεψης τόσο περισσότερες τιμές εξάσκησης θα βρίσκονται σε αυτό. Το γεγονός αυτό θα προσθέσει και άλλους περιορισμούς στο πρόβλημα της βελτιστοποίησης με συνέπεια να υπάρχουν λιγότερα χαρτοφυλάκια που ικανοποιούν αυτούς τους περιορισμούς. Αυτό με τη σειρά του θα οδηγήσει σε μια λύση η οποία θα έχει και λιγότερο κέρδος. Άρα, μικρό ρίσκο - μικρό κέρδος, μεγάλο ρίσκο - μεγάλο κέρδος, κάτι το οποίο είναι προφανές διαισθητικά.* □

Παραδειγμα 6 **(Butterfly Strategy)** *Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει στην αγορά ένα περιουσιακό στοιχείο με σημερινή τιμή $S_0 = 248$ και τα ακόλουθα δικαιώματα αγοράς: $C(150) = 110, C(200) =$*

$63.4, C(300) = 12.7$. *Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτά τα τρία δικαιώματα αγοράς για να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο τύπου Butterfly αγοράζοντας ένα call με τιμή εξάσκησης* 150, *ένα call με τιμή εξάσκησης* 300 *και να πουλήσουμε δύο call με τιμή εξάσκησης* 200. *Κατασκευάζοντας αυτό το χαρτοφυλάκιο θα έχουμε στην τσέπη μας 4,1 ευρώ ενώ η μέγιστη πιθανή απώλεια είναι 45,9 ευρώ.*
Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω θεωρία για να καταλήξουμε στο ίδιο χαρτοφυλάκιο; Ναι, μπορούμε λύνοντας το ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\begin{aligned} & \max D \\ \textit{δεδομένου ότι} \quad & \Pi(x) \geq -45.9 \ \textit{για κάθε}\ x \geq 0 \\ & \Pi(x) \geq D \ \textit{για κάθε}\ x \in (150, 200) \\ & 110a + 63.4b + 12.7c = -4.1 \\ & D \geq 0 \\ & a, b, c \in [-2, 2] \end{aligned}$$

όπου η συνάρτηση κέρδους είναι

$$\Pi(x) = a(x-150)^+ + b(x-200)^+ + c(x-300)^+ + 4.1$$

Τώρα θα λάβουμε υπόψη ότι μπορούμε να αγοράσουμε και μετοχές. Τότε θα μπορούμε να λύσουμε το ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\begin{aligned} & \max D \\ \textit{δεδομένου ότι} \quad & \Pi(x) \geq -45.9 \ \textit{για κάθε}\ x \geq 0 \\ & \Pi(x) \geq D \ \textit{για κάθε}\ x \in (150, 200) \\ & 248a + 110b + 63.4c + 12.7d = -4.1 \\ & D \geq 0 \\ & a, b, c, d \in [-2, 2] \end{aligned}$$

όπου η συνάρτηση κέρδους τώρα είναι

$$\Pi(x) = ax + b(x-150)^+ + c(x-200)^+ + d(x-300)^+ + 4.1$$

Το χαρτοφυλάκιο που προκύπτει αποδίδει καλύτερα από το στρατηγική Butterfly, αλλά θα πρέπει να αγοράσουμε/πωλήσουμε κλασματικό πλήθος μετοχών και δικαιωμάτων προαίρεσης. Στην πράξη μπορούμε να αγοράσουμε/πωλήσουμε μεγαλύτερο (και ακέραιο) πλήθος μετοχών και δικαιωμάτων προαίρεσης προκειμένου να επιτύχουμε καλύτερα αποτελέσματα. Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης θα καταλήξουμε στο καλύτερο δυνατό χαρτοφυλάκιο. □

Η παραπάνω κατασκευή μπορεί να εφαρμοστεί ώστε το προκύπτον χαρτοφυλάκιο να είναι επικερδές σε οποιοδήποτε υποσύνολο του $\mathbb{R}_+$ και όχι απαραίτητα σε ένα διάστημα. Στην πραγματικότητα, όσο μικρότερο είναι το υποσύνολο τόσο μεγαλύτερο είναι το κέρδος του επενδυτή στην περίπτωση όπου οι προβλέψεις του επαληθευτούν. Επομένως, για το πρόβλημα της κατασκευής ενός επικερδούς χαρτοφυλακίου η πρόβλεψη του επενδυτή και η ακρίβειά της, παίζουν ένα σημαντικό ρόλο. Απλές κατασκευές που βασίζονται στην παραπάνω μεθοδολογία είναι τα bull spread, bear spread, butterfly και straddle στρατηγικές μεταξύ άλλων.

Σχολιο 7 *Αν σε ένα μαθηματικό πρόβλημα χρηματοοικονομικών εμφανίζεται το επιτόκιο* r *τόσο ως επιτόκιο δανεισμού όσο και επένδυσης τότε θα πρέπει να το σκεφτόμαστε ως το επιτόκιο του προσωπικού μας τραπεζικού λογαριασμού. Αν τοποθετήσουμε χρήματα στον τραπεζικό μας λογαριασμό θα έχουμε επιτόκιο* r *ενώ αν αποταμιεύσουμε ένα ποσό και το ξαναεπιστρέψουμε τότε είναι σαν να δανειζόμαστε με επιτόκιο* r *πάλι.*

Σχολιο **8** *Παρατηρήστε ότι δε θα αναφερθούμε εδώ σε τεχνικές πρόβλεψης, παρά τη σημασία τους. Αντίθετα, δεδομένης μίας πρόβλεψης, η προσπάθεια μας θα είναι η κατασκευή ενός βέλτιστου χαρτοφυλακίου το οποίο θα είναι όσο το δυνατό πιο επικερδές στο σενάριο της πρόβλεψης αλλά ταυτόχρονα η ζημιά να μην υπερβαίνει ένα καθορισμένο ποσό στο «κακό» σενάριο.*

Με την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης προκύπτουν και άλλου είδους χαρτοφυλάκια. Για παράδειγμα, ένας επενδυτής ενδιαφέρεται για την κατασκευή ενός χαρτοφυλακίου όπου η μέγιστη πιθανή ζημιά είναι μικρότερη ή ίση από 500 ευρώ. Όπως συζητήθηκε, τέτοια χαρτοφυλάκια υπάρχουν και μάλιστα αρκετά σε αριθμό. Μεταξύ όλων των χαρτοφυλακίων μπορεί να επιλεγεί αυτό με τη μικρότερη διασπορά ή κάποια άλλη παρόμοια ιδιότητα. Για αυτό το σκοπό, πρέπει να υποτεθεί ότι η S_T ακολουθεί μία γνωστή κατανομή και επομένως πρέπει να γίνει μία πρόβλεψη της μελλοντικής συμπεριφοράς της τιμής της μετοχής. Εδώ, ο τύπος πρόβλεψης είναι διαφορετικός από την προηγούμενη περίπτωση. Επομένως, το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης μπορεί να επιλυθεί.

$$\begin{array}{lrr}
\min & w_1 \operatorname{Var}\Pi(S_T) - w_2\mathbb{E}(\Pi(S_T)|S_T \in G) & \\
\text{δεδομένου ότι} & 200c - 1000 + 500 \geq & 0 \\
 & 200a - 1000 + 500 \geq & 0 \\
 & 230a - 1000 + 500 \geq & 0 \\
 & a + b \geq & 0 \\
 & 238a + 65b + 30c = & 1000
\end{array}$$

όπου $G \subseteq \mathbb{R}_+$ είναι ένα σύνολο όπου ο επενδυτής προβλέπει ότι η τιμή της μετοχής θα βρεθεί τη στιγμή T ενώ w_1, w_2 είναι τα επιλεγόμενα βάρη από τον επενδυτή.
Το προκύπτον χαρτοφυλάκιο θα έχει μία μέγιστη πιθανή ζημιά μικρότερη ή ίση με 500 ευρώ σε όλα τα πιθανά σενάρια. Αυτή η κατασκευή είναι μία γενίκευση της κατασκευής του Markowitz η οποία θα συζητηθεί παρακάτω, εφόσον λαμβάνονται υπόψιν τα διαθέσιμα συμβόλαια πώλησης.
Στο πρόβλημα κατασκευής χαρτοφυλακίου η έννοια της πρόβλεψης παίζει σημαντικό ρόλο αφού το κέρδος του επενδυτή είναι τόσο μεγαλύτερο όσο πιο ακριβής είναι η πρόβλεψη, δεδομένου, προφανώς, ότι επαληθεύεται. Σε αυτό το πρόβλημα επομένως, η θεωρία πιθανοτήτων, η στατιστική, η στοχαστική ανάλυση και συγκεκριμένα οι στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις, η μηχανική μάθηση κ.τ.λ. παίζουν σημαντικό ρόλο.

1.3 Arbitrage

Υποθέτουμε ότι η παρούσα αξία της μετοχής είναι S_0 και ότι υπάρχει ένα δικαίωμα αγοράς με τιμή $C(K)$ και δικαίωμα πώλησης $P(K)$. Υποθέτουμε επίσης ότι είναι διαθέσιμος ένας τραπεζικός λογαριασμός με μηδενικό επιτόκιο για ευκολία.
Κατασκευάστε ένα χαρτοφυλάκιο επενδύοντας 100 ευρώ στα παραπάνω με τη μικρότερη πιθανή ζημιά. Παρατηρήστε ότι το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού δεν είναι φραγμένο το οποίο σημαίνει (θεωρητικά) ότι είναι πιθανό άπειρο κέρδος! Λύστε το ίδιο πρόβλημα υποθέτοντας ότι το πλήθος των συμβολαίων βρίσκεται στο διάστημα $[-1, 1]$. Τότε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού θα οδηγήσει σε ένα χαρτοφυλάκιο με τη μικρότερη πιθανή ζημιά η οποία τις περισσότερες φορές θα είναι αρνητική το οποίο αντιστοιχεί σε επιβεβαιωμένο κέρδος. Αυτό το πρόβλημα θα πρέπει να επιλυθεί λαμβάνοντας υπόψιν όλα τα συμβόλαια δικαιωμάτων τα οποία είναι διαθέσιμα στην αγορά ώστε να βρεθεί ο βέλτιστος συνδυασμός.

Ορισμος **9 (Arbitrage)** *Θα λέμε ότι υπάρχει μία ευκαιρία σίγουρου κέρδους στην αγορά (Arbitrage) αν μπορεί να κατασκευαστεί ένα χαρτοφυλάκιο με συνάρτηση κέρδους το οποίο ικανοποιεί το* *παρακάτω*

$$\begin{aligned} \Pi(x) &\geq 0 \quad \textit{για κάθε } x \geq 0 \\ \Pi(x) &> 0 \quad \textit{για κάποιο } x \geq 0 \end{aligned}$$

Για καλύτερα αποτελέσματα, θα πρέπει να ληφθούν υπόψιν όλα τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης τα οποία οδηγούν στο ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού το οποίο πρέπει να επιλυθεί: βρείτε τις παραμέτρους $a, b, \gamma_i, \delta_i, D$ οι οποίες είναι τ.ω. να ισχύουν τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} & \min D \\ \text{δεδομένου ότι} \quad & aS_0 + b + \sum_{i=1}^{n} (\gamma_i C(K_i) + \delta_i P(K_i)) = Y \\ & \Pi(x) \geq -D \text{ για κάθε } x \geq 0 \\ & \gamma_i, \delta_i \in [-1, 1] \end{aligned} \tag{1.4}$$

όπου $C(K_i), P(K_i)$ είναι οι σημερινές τιμές των δικαιωμάτων.
Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία μετοχή στην αγορά με τιμή S_0, ένα δικαίωμα αγοράς με τιμή $C(K)$, ένα δικαίωμα πώλησης με τιμή $P(K)$ και ένας τραπεζικός λογαριασμός με επιτόκιο r. Αυτά τα συμβόλαια έχουν ως υποκείμενο αγαθό αυτήν την μετοχή όπως και την ίδια ημερομηνία λήξης.
Τότε αν η ακόλουθη σχέση (put - call parity) δεν είναι αληθής

$$C(K) + Ke^{-rT} = S_0 + P(K) \text{ (put - call parity)}$$

υπάρχει ευκαιρία σίγουρου κέρδους. Η απόδειξη είναι απλή.
Υποθέτουμε ότι

$$C(K) + Ke^{-rT} > S_0 + P(K)$$

Τότε μπορεί να αγοραστεί ένα δικαίωμα πώλησης και μία μετοχή και να πωληθεί ένα δικαίωμα αγοράς. Το ποσό (είτε αρνητικό είτε θετικό) θα τοποθετηθεί/δανειστεί σε/από τραπεζικό λογαριασμό. Τη στιγμή T θα είναι διαθέσιμο σίγουρο κέρδος.
Αν

$$C(K) + Ke^{-rT} < S_0 + P(K)$$

τότε μπορεί να αγοραστεί ένα δικαίωμα αγοράς και μία μετοχή και να πωληθεί ένα δικαίωμα πώλησης. Το ποσό (είτε αρνητικό είτε θετικό) θα τοποθετηθεί/δανειστεί σε/από τραπεζικό λογαριασμό. Τη στιγμή T θα είναι διαθέσιμο σίγουρο κέρδος.

Συμπέρασμα 1 *Πως σχετίζεται η put - call parity φόρμουλα με τη λύση του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού 1.4; Αυτό το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι μία γενίκευση της put - call parity εφόσον θα ανιχνεύσει το χαρτοφυλάκιο με τη μεγαλύτερη ευκαιρία arbitrage λαμβάνοντας υπόψιν όλα τα διαθέσιμα συμβόλαια προαίρεσης.*

Στην πράξη, αν υπάρξει απόπειρα επανάληψης αυτής της διαδικασίας άπειρες φορές τότε αυτό θα οδηγήσει σε μία αλλαγή τιμών και συνεπώς σε απώλεια της ευκαιρίας arbitrage. Επιπλέον, στην πράξη θα πρέπει να συμπεριληφθούν στην ανάλυση κόστη συναλλαγής, καθώς και bid - ask spread, μερίσματα (dividends) κτλ.

1.4 Θεωρία επιλογής κατά Markowitz και Value at Risk

Για την ανάπτυξη αυτής της θεωρίας θα παρουσιαστούν αρχικά τα βασικά μαθηματικά εργαλεία το οποία αναδύονται από τη θεωρία πιθανοτήτων.
Αρχικά περιγράφεται η έννοια της συνδιακύμανσης δύο τυχαίων μεταβλητών X, Y η οποία περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο η μεταβολή των τιμών της μίας τ.μ. επιδρά την άλλη. Ορίζεται ως

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))$$

Μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Οι ακόλουθες ιδιότητες ισχύουν για την συνδιακύμανση.

- $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$,
- $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$,
- $\mathrm{Cov}(X+Y,Z) = \mathrm{Cov}(X,Z) + \mathrm{Cov}(Y,Z)$,
- $\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{m} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} Cov(X_i, Y_i)$,
- $\mathrm{Cov}(aX, bY) = ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$
- $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

Υποθέτουμε ότι το ποσό V μπορεί να επενδυθεί σε n εταιρίες. Δηλαδή, σκοπός είναι να αγοραστούν k_i μετοχές της εταιρίας S_i όπου $i = 1, \cdots, n$. Συμβολίζουμε με

$$w_i = \frac{k_i S_i^0}{\sum_{j=1}^{n} k_j S_j^0}$$

όπου προφανώς ισχύει ότι

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

δηλαδή το ποσό $w_i V$ θα χρησιμοποιηθεί για την αγορά k_i μετοχών της S_i. Εστιάζουμε στις τιμές των βαρών w_i ώστε το κέρδος τη στιγμή T να είναι το μεγαλύτερο με το μικρότερο πιθανό κίνδυνο.
Η απόδοση κάθε μετοχής μ_i στο διάστημα $[0,T]$ είναι μία τ.μ. τ.ω.

$$\frac{S_i^T}{S_i^0} = 1 + \mu_i$$

όπου S_i^0 και S_i^T είναι η τιμή της μετοχής τη στιγμή 0 και T αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι η αναμενόμενη τιμή m_i της απόδοσης μ_i, η διασπορά σ_i της απόδοσης καθώς και η συνδιακύμανση σ_{ij} των αποδόσεων των μετοχών των εταιρειών S_i και S_j εκτιμώνται από ιστορικά δεδομένα. Επίσης, υποθέτουμε ότι οι ίδιες τιμές ισχύουν για το χρονικό διάστημα $[0,T]$. Ο στόχος μας είναι η κατασκευή ενός χαρτοφυλακίου τη στιγμή 0 τ.ω. τη στιγμή T να έχει τη μέγιστη αναμενόμενη απόδοση m και την ελάχιστη πιθανή διασπορά.

Η (ολική) απόδοση μ του χαρτοφυλακίου θα είναι τ.ω.

$$\frac{V^T}{V} = 1 + \mu$$

άρα

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n k_i(S_i^T - S_i^0)}{V} = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i k_i S_i^0}{V} = \sum_{i=1}^n \mu_i w_i$$

Επομένως, η αναμενόμενη τιμή της απόδοσης του χαρτοφυλακίου θα είναι

$$m = \mathbb{E}(\mu) = \sum_{i=1}^n w_i \mathbb{E}(\mu_i)$$

Η διασπορά της απόδοσης του χαρτοφυλακίου θα είναι ίση με

$$\sigma = \mathrm{Var}(\mu) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n w_i \mu_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}$$

Θέτοντας $\mathbf{w}^t = (w_1, \cdots, w_n)$, $\mathbf{\Sigma} = [\sigma_{ij}]$ και $\mathbf{m}^t = (m_1, \cdots, m_n)$ τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{1}^t\mathbf{w} &= 1, \\ \mathbf{w}^t\mathbf{m} &= m, \\ \mathbf{w}^t\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} &= \sigma \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{1}^t = (1, \cdots, 1)$ και $\mathbf{w}^t$ είναι ο ανάστροφος του $\mathbf{w}$. Παρατηρήστε ότι, εφόσον η διασπορά του χαρτοφυλακίου είναι πάντα ένας θετικός αριθμός, ο πίνακας συνδιακύμανσης Σ είναι θετικά ορισμένος.

Το πρόβλημα έχει αναχθεί σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης με περιορισμούς. Θεωρούμε m_0 ως μία απαιτούμενη μέση απόδοση του χαρτοφυλακίου. Ο στόχος είναι να υπολογιστούν τα w_i έτσι ώστε να επιτευχθεί η ελάχιστη πιθανή διασπορά του χαρτοφυλακίου, δηλαδή να επιλυθεί το ακόλουθο πρόβλημα

$$\min \quad \mathbf{w}^t\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}$$

υπό τις συνθήκες

$$\begin{aligned} \mathbf{1}^t\mathbf{w} &= 1, \\ \mathbf{w}^t\mathbf{m} &= m_0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange λαμβάνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις

$$\begin{aligned} 2\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} &= \lambda_1\mathbf{1} + \lambda_2\mathbf{m}, \\ \mathbf{1}^t\mathbf{w} &= 1, \\ \mathbf{w}^t\mathbf{m} &= m_0 \end{aligned}$$

Αν ο πίνακας $\mathbf{\Sigma}$ είναι αντιστρέψιμος τότε επιλύοντας την πρώτη εξίσωση ως προς $\mathbf{w}$ συνεπάγεται ότι

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}\mathbf{\Sigma}^{-1}\left(\lambda_1\mathbf{1} + \lambda_2\mathbf{m}\right) = \frac{1}{2}\Sigma^{-1}[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

Οι εξισώσεις $\mathbf{1}^t\mathbf{w} = 1$ και $\mathbf{w}^t\mathbf{m} = m_0$ γράφονται επίσης ως

$$[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]^t\mathbf{w} = \begin{pmatrix} m_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας την 1.6 με $[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]^t$ προκύπτει ότι

$$[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]^t\mathbf{w} = \frac{1}{2}[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]^t\mathbf{\Sigma}^{-1}[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}] \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Θέστε $\mathbf{A} = [\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]^t\mathbf{\Sigma}^{-1}[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]$ και (εύκολα) αποδείξτε ότι είναι θετικά ορισμένος. Πράγματι,

$$[y_1 \quad y_2]\mathbf{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = [y_1\mathbf{m} + y_2\mathbf{1}]^t\mathbf{\Sigma}^{-1}[y_1\mathbf{m} + y_2\mathbf{1}]^t$$

επομένως το συμπέρασμα συνεπάγεται εφόσον ο πίνακας $\mathbf{\Sigma}^{-1}$ είναι θετικά ορισμένος.
Παρατηρήστε ότι ο $\mathbf{\Sigma}$ είναι αντιστρέψιμος αν $\mathbf{w}^t\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} = \sigma > 0$ εφόσον προκύπτει ότι όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{\Sigma}$ είναι αυστηρά θετικές και από τις αντίστοιχες ιδιότητες των ιδιοτιμών προκύπτει ότι είναι αντιστρέψιμος. Επιπλέον, ο αντίστροφός του θα έχει τις $\frac{1}{\lambda_i}$ ως ιδιοτιμές οι οποίες επίσης θα είναι όλες θετικές και άρα για μία ακόμη φορά προκύπτει ότι θα είναι επίσης θετικά ορισμένος. Αντικαθιστώντας τον $\mathbf{A}$ προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2}\mathbf{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Αντιστρέφοντας τον $\mathbf{A}$ υπολογίζεται το διάνυσμα $\mathbf{w}$ και προκύπτει ότι

$$\mathbf{w} = \mathbf{\Sigma}^{-1}[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]\mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} m_0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Η διασπορά μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας το διάνυσμα $\mathbf{w}$. Έχουμε

$$\sigma^2 = \mathbf{w}^t\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} = \frac{A_{11} - 2A_{12}m_0 + A_{14}m_0^2}{|A|}$$

όπου ο $\mathbf{A}$ είναι ο 2×2 πίνακας που ορίστηκε παραπάνω, Επιλύοντας ως προς m_0 λαμβάνουμε δύο λύσεις.
Κατά την επίλυση του παραπάνω προβλήματος βελτιστοποίησης κάποια από τα w_i ενδέχεται να είναι αρνητικά. Αυτό συνεπάγεται ότι ο επενδυτής θα δανειστεί ένα πλήθος μετοχών της i εταιρείας, θα τις πωλήσει στην τρέχουσα χρηματιστηριακή τιμή αλλά θα είναι υποχρεωμένος να τις επιστρέψει στον δανειστή του στο μέλλον (short selling). Αυτή η κίνηση ενδέχεται να προκαλέσει απεριόριστη ζημιά στον επενδυτή, εφόσον η τιμή της μετοχής μπορεί (θεωρητικά) να αυξηθεί απεριόριστα στο μέλλον ενώ ο επενδυτής θα αναγκαστεί να αγοράσει σε πολύ υψηλή τιμή τις μετοχές που δανείστηκε και πρέπει να επιστρέψει.
Η πιθανή ζημιά του επενδυτή μπορεί να είναι άνω φραγμένη, αν αγοράσει επίσης ένα συμβόλαιο αγοράς, ανά μετοχή που δανείστηκε, ώστε να εξασφαλιστεί. Τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης έχουν κυρίως το ρόλο της εξασφάλισης του επενδυτή. Ωστόσο, μπορούν ακόμα να χρησιμοποιηθούν για κερδοσκοπικούς σκοπούς όπως οι μετοχές, ειδικά όταν εκείνα τα συμβόλαια διαπραγματεύονται στο χρηματιστήριο.
Στην περίπτωση όπου υποτεθεί ότι $w_i \geq 0$ τότε αυτό πρέπει να συμπεριληφθεί στις συνθήκες 1.5.
Στις ακόλουθες τρεις εκδοχές του χαρτοφυλακίου βελτιστοποίησης θα δοθεί η επιπλέον υπόθεση ότι είναι $w_i \geq 0$, θεωρώντας χαρτοφυλάκια με μικρό πλήθος μετοχών ώστε οι υπολογισμοί να είναι εφικτοί.

Υποθέστε ότι το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς αποτελείται από τρεις μετοχές. Η διασπορά της απόδοσης του χαρτοφυλακίου είναι

$$\begin{aligned} \sigma &= f(w_1, w_2, w_3) \\ &= w_1^2\sigma_1 + w_2^2\sigma_2 + w_3^2\sigma_3 + 2w_1w_2\sigma_{12} + 2w_1w_3\sigma_{13} + 2w_2w_3\sigma_{23} \end{aligned}$$

όπου $\sigma_i = \sigma_{ii}$. Η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι ίση με

$$m_1w_1 + m_2w_2 + m_3w_3 = m_0 \tag{1.8}$$

Στην περίπτωση όπου $m_1 = m_2 = m_3$ δεν απαιτούνται επιπλέον υπολογισμοί, άρα, χ.β.γ. θα υποτεθεί ότι $m_1 \neq m_2$.
Προφανώς τα ακόλουθα πρέπει να ισχύουν

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1 \tag{1.9}$$

Από τις 1.8 και 1.9 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{t(m_2 - m_3) + m_0 - m_2}{m_1 - m_2} \\ w_2 &= \frac{t(m_3 - m_1) + m_1 - m_0}{m_1 - m_2} \end{aligned}$$

όπου $t = w_3$. Στα ακόλουθα τα w_1, w_2 αντικαθίστανται στην $f(w_1, w_2, w_3)$ οδηγώντας σε μία συνάρτηση μίας μεταβλητής, τη μεταβλητή t. Δηλαδή, η συνάρτηση πρέπει να ελαχιστοποιηθεί ως προς t για όλο το $\mathbb{R}$ αν δεν απαιτείται άλλη συνθήκη για τα w_1, w_2, w_3.
Αν επιπλέον τα w_1, w_2, w_3 υποτεθούν θετικά τότε το t πρέπει να βρίσκεται μέσα σε ένα κατάλληλο υποσύνολο του $[0, 1]$ στο οποίο τα w_1, w_2 είναι θετικά και άρα η διασπορά του πρέπει να ελαχιστοποιηθεί σε αυτό το διάστημα. Αν $m_1 - m_2 > 0$ τότε το $w_1 \geq 0$ συνεπάγεται ότι $t(m_2 - m_3) + m_0 - m_2 \geq 0$ και το $w_2 \geq 0$ συνεπάγεται ότι $t(m_3 - m_1) + m_1 - m_0 \geq 0$. Τώρα το διάστημα επιλέγεται στον οποίο βρίσκεται το t ώστε να είναι υποσύνολο του $[0, 1]$ και την ίδια στιγμή όλες οι συνθήκες να ικανοποιούνται. Αν αυτό δεν είναι εφικτό τότε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης δεν έχει λύση. Παρόμοια βήματα ακολουθούνται στην περίπτωση όπου $m_1 - m_2 < 0$.
Μία άλλη οπτική του προβλήματος βελτιστοποίησης είναι η εύρεση του διανύσματος $w = (w_1, w_2)$ τ.ω. η διασπορά του χαρτοφυλακίου να είναι ίση με ένα δεδομένο αριθμό σ_0 και η μεγιστοποίηση της μέσης αποτελεσματικότητας του χαρτοφυλακίου. Επομένως το μαθηματικό πρόβλημα ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \max_{(w_1,w_2)} (w_1m_1 + w_2m_2) \\ \text{δεδομένου ότι} \\ \sigma = \sigma_1w_1^2 + \sigma_2w_2^2 + 2\sigma_{12}w_1w_2 = \sigma_0 \\ w_1 + w_2 = 1 \\ w_1 \geq 0, \quad w_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος θέτουμε $w_2 = t$ και αντίστοιχα $w_1 = 1 - t$ και αντικαθιστούμε στην ισότητα που περιέχει τη διασπορά. Τότε το πρόβλημα μεγιστοποίησης γίνεται

$$\begin{aligned} \max_{t\in[0,1]}(m_1(1 - t) + m_2t) \\ \sigma_1(1 - t)^2 + \sigma_2t^2 + 2\sigma_{12}(1 - t)t - \sigma_0 = 0 \end{aligned}$$

Η δεύτερη ισότητα πιθανόν θα έχει δύο λύσεις, έστω t_1, t_2. Επιλέγουμε αυτήν την οποία βρίσκεται στο διάστημα $[0, 1]$ (αν υπάρχει) και την ίδια στιγμή μεγιστοποιεί την επιθυμητή ποσότητα.
Ένας άλλος τρόπος επίλυσης του προβλήματος είναι η μεγιστοποίηση της διαφοράς μεταξύ της αναμενόμενης τιμής και της διασποράς, δηλαδή

$$\max_{(w_1,w_2)} \big(m_1 w_1 + m_2 w_2 - \lambda(\sigma_1 w_1^2 + \sigma_2 w_2^2 + 2\sigma_{12} w_1 w_2)\big)$$
$$\text{δεδομένου ότι } w_1 + w_2 = 1$$
$$w_1 \geq 0, \quad w_2 \geq 0$$

για ένα δεδομένο $\lambda > 0$. Για την επίλυση αυτού του προβλήματος θέτουμε ξανά $w_2 = t$ έτσι ώστε $w_1 = 1 - t$. Τότε το αρχικό πρόβλημα ανάγεται στο

$$\max_{t\in[0,1]} (m_1(1-t) + m_2 t - \lambda(\sigma_1(1-t)^2 + \sigma_2 t^2 + 2\sigma_{12}(1-t)t))$$

Υποθέτουμε ότι κατασκευάζεται ένα χαρτοφυλάκιο όπου η αναμενόμενη τιμή και η διασπορά έχουν υπολογιστεί. Αυτές οι τιμές αναφέρονται σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, π.χ. μία ημέρα, ένα μήνα, κτλ. Μία ενδιαφέρουσα ερώτηση είναι η εξής: ποια είναι η μέγιστη ζημιά (σε ευρώ) ανά ημέρα με πιθανότητα a;
Συμβολίζοντας με V_0 την παρούσα τιμή του χαρτοφυλακίου και με V_t την αυριανή τιμή τότε η παραπάνω ερώτηση εκφράζεται από το ακόλουθο μαθηματικό πρόβλημα: ποιο είναι το $x > 0$ (ποσό σε ευρώ) τ.ω.

$$P(V_t - V_0 \leq -x) = 1 - a$$

Χρησιμοποιώντας την απόδοση του χαρτοφυλακίου, η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως

$$P\left(\frac{V_t - V_0}{V_0} \leq -\frac{x}{V_0}\right) = 1 - a$$

όπου $\mu_t = \frac{V_t - V_0}{V_0}$ είναι η αυριανή απόδοση του χαρτοφυλακίου.
Η μέση τιμή m_0 και η διασπορά σ^2 της απόδοσης είναι γνωστές (ακριβέστερα τις έχουμε υποθέσει) και θεωρούμε ότι ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή m_0 και διασπορά σ^2. Αυτή η υπόθεση επιτρέπει τον υπολογισμό του κατάλληλου $x > 0$, συνήθως συμβολίζεται με $VaR_a(t)$ όπου t είναι το χρονικό διάστημα ενδιαφέροντος, π.χ. μία ημέρα.
Εφόσον η απόδοση ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή m_0 και διασπορά σ^2 τότε

$$P\left(\frac{V_t - V_0}{V_0} \leq -\frac{x}{V_0}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{V_0}} e^{-\frac{(t-m_0)^2}{2\sigma^2}} dt \tag{1.10}$$

Τα παραπάνω μπορούν να σχετιστούν με τη συνάρτηση σφάλματος $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ μέσω της σχέσης

$$P(Y \leq x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x - m_0}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

όπου η Y ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή m_0 και διασπορά σ^2.

Αυτή η σχέση μπορεί να αποδειχτεί ως εξής

$$\begin{aligned} P(Y \leq x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m_0)^2}{2\sigma^2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m_0}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-y^2} \sigma\sqrt{2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m_0}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-y^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-y^2} dy + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\frac{x-m_0}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-y^2} dy \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x-m_0}{\sigma\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Επιστρέφοντας στην 1.10 λαμβάνουμε ότι

$$g(x) = P\left(\frac{V_t - V_0}{V_0} \leq -\frac{x}{V_0}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{-\frac{x}{V_0} - m_0}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

Η αναμενόμενη ζημιά δεδομένου ότι αυτή προσπερνάει ένα δοσμένο ποσό $p < 0$ μπορεί να υπολογιστεί. Έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(V_t - V_0 | \{V_t - V_0 < p\}) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi V^2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{p} x e^{-\frac{(x-m_0V)^2}{2V^2\sigma^2}} dx}{\frac{1}{\sqrt{2\pi V^2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{p} e^{-\frac{(x-m_0V)^2}{2V^2\sigma^2}} dx}$$

Οι παραπάνω υπολογισμοί είναι μέρος της λεγόμενης **μέτρησης κινδύνου** η οποία συνδέεται με ένα χαρτοφυλάκιο. Προφανώς, η μέθοδος της μέτρησης του κινδύνου είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την επιλογή του μέτρου πιθανότητας και τις υποθέσεις για τις κατανομές και τις παραμέτρους και επομένως είναι υποκειμενική.
Από την άλλη μεριά, η τεχνική της κατασκευής ενός χαρτοφυλακίου το οποίο αποτελείται επιπλέον από δικαιώματα αγοράς και πώλησης, είναι ένα μέρος της λεγόμενης **διαχείρισης κινδύνου** η οποία συνδέεται με ένα χαρτοφυλάκιο. Βέβαια η διαχείριση κινδύνου έχει ένα αντικειμενικό χαρακτήρα εφόσον δεν εξαρτάται από την επιλογή του μέτρου πιθανότητας.
Στη θεωρία κατά Markowitz δεν είχε ληφθεί υπόψιν το γεγονός ότι ο επενδυτής ενδέχεται να αγοράσει κάποια δικαιώματα αγοράς και πώλησης. Άρα, το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας και συγκεκριμένα σύμφωνα με τις προβλέψεις που έχουν γίνει ή διαφορετικά ως προς το μέτρο πιθανότητας και την κατανομή των τυχαίων μεταβλητών που έχουν επιλεγεί. Αυτό συνεπάγεται ότι για το ίδιο χαρτοφυλάκιο διαφορετικοί επενδυτές καταλήγουν με διαφορετική πιθανότητα χρεοκοπίας διότι έχει γίνει διαφορετική πρόβλεψη!
Με άλλα λόγια, αν έχει κατασκευαστεί ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από n μετοχές τότε διαφορετικές πιθανότητες χρεοκοπίας θα σχετιστούν με αυτό από διάφορους χρηματοοικονομικούς αναλυτές και συγκεκριμένα θα βρίσκονται σε όλο το $(0, 1)$.
Η παραπάνω συζήτηση μας παροτρύνει ουσιαστικά να εφοδιάζουμε τα χαρτοφυλάκιά μας με κατάλληλα δικαιώματα αγοράς και πώλησης, αν υπάρχουν. Αυτό θα οδηγήσει από την μία μεριά σε ένα πολυπλοκότερο μαθηματικό πρόβλημα αλλά από την άλλη μεριά σε αποτελεσματικότερα χαρτοφυλάκια (από οικονομικής άποψης) και ασφαλέστερα αποτελέσματα.
Επομένως για την κατασκευή ενός χαρτοφυλακίου το οποίο αποτελείται από n μετοχές, θα πρέπει να προβλεφθεί εξαρχής το πιο κερδοφόρο σενάριο. Για παράδειγμα, η πρόβλεψη του επενδυτή μπορεί να είναι η ακόλουθη

$$(S_1^T, S_2^T, \cdots, S_n^T) \in G \subseteq \mathbb{R}_+^n$$

Αυτό συνεπάγεται ότι η πρόβλεψη πρέπει να γίνει για τις τιμές των μετοχών τη στιγμή T. Επομένως, το πρόβλημα κατασκευής χαρτοφυλακίου μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με μία λύση η οποία προτείνει το κατάλληλο χαρτοφυλάκιο με το μέγιστο κέρδος για το συγκεκριμένο σενάριο.

Παρατηρήστε ότι όσο πιο μικρό είναι το σύνολο G, τόσο πιο μεγάλο θα είναι το κέρδος του επενδυτή, στην περίπτωση όπου το σενάριο έχει πραγματοποιηθεί. Αν ο επενδυτής επιλέξει $G = \mathbb{R}_+^n$ τότε για το προτεινόμενο χαρτοφυλάκιο μπορεί να υπάρχει βέβαιο κέρδος χωρίς κίνδυνο (arbitrage) το οποίο όμως είναι πολύ μικρό, ακόμα μικρότερο από τα αντίστοιχα κόστη συναλλαγής.

Ένας διαφορετικός τύπος πρόβλεψης είναι μέσω της κατανομής που ακολουθεί το διάνυσμα των τμ $(S_1^T, S_2^T, \cdots, S_n^T)$. Βασιζόμενοι σε αυτήν την κατανομή θα κατασκευαστεί ένα χαρτοφυλάκιο όπου μπορεί να μεγιστοποιηθεί μία ποσότητα η οποία θα περιέχει για παράδειγμα την αναμενόμενη τιμή του κέρδους, τη διασπορά, κτλ.

Άρα ο επενδυτής μπορεί να λύσει το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\begin{aligned} \min \quad & \operatorname{Var}(\Pi(S_1^T, S_2^T, \cdots, S_d^T)) \\ \text{δεδομένου ότι} \quad & \mathbb{E}(\Pi(S_1^T, S_2^T, \cdots, S_d^T)) \geq m_0 \\ & \sum_{i=1}^{d} a_i S_i^0 + \sum \gamma_j C_j = V \\ & \Pi(x_1, \cdots, x_d) \geq -D \text{ για κάθε } (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}_+^d \end{aligned} \tag{1.11}$$

όπου C_j είναι όλα τα διαθέσιμα δικαιώματα αγοράς και πώλησης τα οποία αντιστοιχούν στις d μετοχές. Αυτό το χαρτοφυλάκιο θα έχει, εν γένει, μικρότερη διασπορά και μεγαλύτερη μέση τιμή από την περίπτωση όπου δεν ληφθούν υπόψιν τα διαθέσιμα δικαιώματα αγοράς και πώλησης και επιπλέον είναι βέβαιο ότι η ζημιά δε θα ξεπεράσει το ποσό D.

Η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με ένα πεπερασμένο σύνολο γραμμικών ανισοτήτων όπως ακριβώς στην περίπτωση μίας μετοχής. Θα πρέπει να ληφθούν υπόψιν όλα τα σημεία όπου η συνάρτηση Π αλλάζει συμπεριφορά καθώς θα πρέπει και οι μερικές παράγωγοι σε κάθε κατεύθυνση να είναι θετικές.

Επομένως, η value at risk ενδέχεται να αποδειχτεί εντελώς άχρηστη, ειδικά στην περίπτωση όπου υπάρχουν πολλά διαθέσιμα συμβόλαια. Αν δεν υπάρχουν διαθέσιμα παράγωγα στην αγορά τότε το παραπάνω πρόβλημα ανάγεται σε αυτό της θεωρίας κατά Markowitz.

Σχολιο **10** *Λύνοντας το παραπάνω πρόβλημα βελτιστοποίησης θα προκύψει ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο θα είναι κερδοφόρο σε ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}_+$ και θα έχει, εν γένει, ζημιά στο συμπληρωματικό του. Αυτό ισοδυναμεί με το να προβλέψει κάποιος ότι η αξία της μετοχής θα βρεθεί στο σύνολο A και να κατασκευάσει το αντίστοιχο χαρτοφυλάκιο. Στην παραπάνω περίπτωση όμως η κατανομή που θα επιλέξει ο επενδυτής εξαρτάται από τα παρελθοντικά δεδομένα. Για παράδειγμα, τα δεδομένα αυτά μπορεί να δείχνουν πτωτική πορεία της μετοχής αλλά αυτό δεν σημαίνει κατά ανάγκη ότι θα συμβεί και στο επόμενο χρονικό διάστημα. Αντιθέτως, ο επενδυτής μπορεί να προβλέπει, αξιολογώντας πρόσφατα γεγονότα, ότι η αξία της μετοχής θα έχει ανοδική πορεία και επομένως, αντίθετα με τα παρελθοντικά δεδομένα, να κατασκευάσει το αντίστοιχο χαρτοφυλάκιο.* □

Σε όλα τα παραπάνω πρέπει να συμπεριληφθούν τα κόστη συναλλαγής, το bid - ask spread, τα μερίσματα κτλ.

Σχολιο **11** *Η μεθοδολογία της θεωρίας κατά Markowitz οδηγεί στην κατασκευή κερδοφόρων χαρτοφυλακίων σε πολύ ειδικές περιπτώσεις. Θα είναι κερδοφόρο όταν η τιμή της μετοχής ανεβαίνει, ωστόσο θα είναι περισσότερο κερδοφόρο αν αγοραστούν κάποια δικαιώματα αγοράς. Παρομοίως, όταν η τιμή της μετοχής πέσει θα είναι προτιμότερο να αγοραστούν κάποια δικαιώματα πώλησης. Ακόμα χειρότερα, όλα αυτά βασίζονται στη μελέτη ιστορικών δεδομένων και όχι σε οποιαδήποτε άλλη πρόσφατη πληροφορία.*

Από την άλλη μεριά, η παραπάνω θεωρία κατασκευής χαρτοφυλακίων μπορεί να παράξει κερδοφόρα χαρτοφυλάκια για κάθε πρόβλεψη στην οποία επενδύσει ο επενδυτής. Αυτό συμβαίνει εφόσον το χαρτοφυλάκιο εφοδιάζεται, εκτός από τις μετοχές, με όλα τα παράγωγα τα οποία μπορεί να αγοράσει ή να πωλήσει. Υπό αυτήν την οπτική η προτεινόμενη μεθοδολογία κατασκευής χαρτοφυλακίου είναι μία γενίκευση της θεωρίας κατά Markowitz. Ο μόνο λόγος για να μη λάβει υπόψιν του ο επενδυτής όλα τα διαθέσιμα χρηματοοικονομικά εργαλεία για την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης, είναι απλώς το γεγονός ότι δεν έχει το απαραίτητο μαθηματικό λογισμικό το οποίο μπορεί να εκτελέσει αυτούς τους υπολογισμούς. Πράγματι αυτή είναι η περίπτωση, εφόσον η αντίστοιχη βιβλιογραφία σε αυτό το σημείο είναι απαρχαιωμένη και επομένως το ίδιο ισχύει για το ελεύθερο διαθέσιμο λογισμικό. □

ΣΧΟΛΙΟ **12** *Έστω ότι έχετε αποφασίσει να επενδύσετε το ποσό V σε d διαφορετικές εταιρείες έχοντας εφαρμόσει μια θεωρία σαν του Markowitz για να υπολογίσετε τη σύσταση του χαρτοφυλακίου σας. Ο υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας στηρίζετε στα παρακάτω:*

- *Στην υπόθεση ότι οι εμπλεκόμενες τυχαίες μεταβλητές ακολουθούν μια συγκεκριμένη κατανομή με συγκεκριμένες παραμέτρους.*
- *Οι παράμετροι έχουν υπολογισθεί με βάση συγκεκριμένα ιστορικά δεδομένα, π.χ. ενός συγκεκριμένου παρελθοντικού χρονικού διαστήματος $[T_1, T_2]$.*

Σημειώστε ότι διαφορετική επιλογή του παρελθοντικού χρονικού διαστήματοες θα δώσει διαφορετικές παραμέτρους. Οι παράμετροι είναι δηλαδή συνάρτηση του γραφήματος των παρελθοντικών δεδομένων που χρησιμοποιήσατε. Πιστεύετε πραγματικά ότι το μελλοντικό γράφημα τιμών εξαρτάται από το παρελθοντικό γράφημα τιμών ή μήπως από τα μελλοντικά γεγονότα; Σημειώστε ότι θα τοποθετήσετε πραγματικά χρήματα και η ζημιά θα είναι πραγματική! Σκεπτόμενοι λίγο βαθύτερα θα καταλήξετε στο συμπέρσμα ότι είναι προτιμότερο να αγοράσετε και μερικά put options ανά μετοχή (αντί για Value at Risk) αλλά και μερικά call options για να μεγιστοποίησετε το κέρδο σας. Πόσα όμως από το καθένα; □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ **13** *Υποθέτουμε ότι θέλουμε να επενδύσουμε 1.000 ευρώ σε μετοχές της Tesla, και της Apple και έστω ότι το αντίστοιχο χαρτοφυλάκιο (σύμφωνα με τη θεωρία κατά Markowitz) αποτελείται από 300 της Apple, και 700 της Tesla. Τότε για παράδειγμα μπορεί να υπολογιστεί, όπως περιγράφηκε παραπάνω, η πιθανότητα ζημιάς μεγαλύτερης των 600 ευρώ στο τέλος της μίας περιόδου.*
Ας ελέγξουμε την επίδραση της αγοράς κάποιων δικαιωμάτων πώλησης πριν τον παραπάνω υπολογισμό. Υποθέτουμε ότι

$$P^{Tesla}(135) = 4, P^{Apple}(120) = 1.25$$
$$C^{Tesla}(300) = 34.3, C^{Apple}(240) = 3$$

ενώ οι παρούσες τιμές των μετοχών είναι $S_0^{Tesla} = 269, S_0^{Apple} = 198$. Μπορούμε να τοποθετήσουμε 600 Ευρώ σε μετοχές της Tesla αντί για 700 και 200 Ευρώ σε μετοχές της Apple αντί για 300. Τα υπόλοιπα να κατανεμηθούν σε call and put options. Η κατανομή αυτή προφανώς είναι τυχαία και μπορεί κανείς να την αλλάξει όπως θέλει.
Η συνάρτηση κέρδους θα είναι η ακόλουθη

$$\begin{aligned}
&\Pi(x,y)\\
&= \frac{600}{269}x + \frac{200}{198}y\\
&+\frac{60}{4}(135-x)^+ + \frac{60}{1.25}(120-y)^+ + \frac{40}{34.3}(x-300)^+ + \frac{40}{3}(y-240)^+ - 1.000
\end{aligned}$$

Τη στιγμή T η τιμή της Tesla θα αντικαταστήσει το x, η τιμή της Apple θα αντικαταστήσει το y. Υπολογίζοντας το ελάχιστο της συνάρτησης κέρδους οδηγούμαστε στην εύρεση της μέγιστης πιθανής ζημιάς.
Επιβεβαιώνεται ότι στο χειρότερο δυνατό σενάριο θα χαθούν όχι περισσότερο από 578 ενώ το μέγιστο κέρδος για $x \leq 400, y \leq 400$ είναι 2686 Ευρώ. Δηλαδή με την αγορά call options πολλαπλασιάζουμε το κέρδος και με την αγορά put options η μέγιστη δυνατή ζημιά δεν είναι τα 1000 Ευρώ. Αυτό σημαίνει ότι ο επενδυτής θα πρέπει πρώτα να αποφασίσει ποια είναι η μέγιστη πιθανή ζημιά αλλά και σε ποιο σενάριο θέλει να έχει κέρδος και στη συνέχεια να επιλέξει την κατάλληλη κατανομή του ποσού των 1000 Ευρώ. Αυτό θα οδηγήσει στη κατασκευή (και επίλυση) άπειρων διαφορετικών προβλημάτων βελτιστοποίησης ανάλογα με τα κριτήρια που θα θέσει ο επενδυτής, όπως ακριβώς δηλαδή και με την κατασκευή χαρτοφυλακίου που αποτελείται από μετοχές μιας εταιρείας. Στην περίπτωση χαρτοφυλακίων με δυο ή περισσότερες εταιρείες τα κριτήρια θα είναι ακόμη περισσότερα και πολυπλοκότερα αφού μπορεί να ληφθεί υπόψη και η συνδιακύμανση των τιμών.
Στο χαρτοφυλάκιο που κατασκευάσαμε προφανώς δεν έχει νόημα να υπολογίσουμε την πιθανότητα να χάσουμε περισσότερα από 578 Ευρώ. Ίσως έχει νόημα να υπολογίσουμε την πιθανόητα να χάσουμε περισσότερα από 400 Ευρώ κ.τ.λ. αλλά θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας και το χάσιμο χρόνου! □

Συμπέρασμα 2 *Εν τέλει, ο επενδυτής πρέπει να προβλέψει που περίπου θα βρεθούν οι τιμές των μετοχών καθώς και το μέγεθος της μέγιστης αποδεκτής ζημιάς ώστε να βρει το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο.*

Όπως έχει ήδη συζητηθεί αυτό το πρόβλημα μετασχηματίζεται σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού ώστε να βρεθεί η περισσότερο κατάλληλη στρατηγική επένδυσης η οποία επιτυγχάνει το επιθυμητό αποτέλεσμα.
Εφοδιάζοντας το χαρτοφυλάκιο με τα κατάλληλα δικαιώματα αγοράς και πώλησης. μεταξύ άλλων, μεταφέρει μέρος του ρίσκου σε άλλους επενδυτές. Στα Ασφαλιστικά -Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά, η μεταφορά κινδύνου γίνεται μέσω της αντασφάλισης. Ακριβώς όπως στη θεωρία κατά Markowitz δεν έχει νόημα ο υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας χωρίς την επιλογή εκ των προτέρων της κατάλληλης στρατηγικής αντιστάθμισης με δικαιώματα αγοράς και πώλησης, έτσι και σε όρους ασφαλιστικών δεν έχει νόημα ο υπολογισμός παρόμοιων πιθανοθεωρητικών ποσοτήτων αν δεν έχουμε προηγουμένως επιλέξει την κατάλληλη στρατηγική αντασφάλισης.

Σχολιο 14 *Ας υποθέσουμε ότι έχουμε κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο χρησιμοποιώντας τη θεωρία κατά Markowitz. Μετά από μία χρονική περίοδο, λαμβάνοντας υπόψιν τα νέα δεδομένα, το χαρτοφυλάκιο το οποίο θα κατασκευάσουμε θα έχει μία διαφορετική σύνθεση (περισσότερο ή λιγότερο διαφορετική). Προφανώς οι μέσες τιμές των αποδόσεων όπως και οι συνδιακυμάνσεις εξαρτώνται από τα δεδομένα τα οποία σε μία διαφορετική χρονική στιγμή θα είναι διαφορετικά. Αν δεν μεταβάλλονται τότε θα είναι παγκόσμιες σταθερές! Αυτό σημαίνει ότι η θεωρία κατά Markowitz (και όλες οι παρόμοιες αυτής) θα πρέπει να εφαρμοστεί για μικρά χρονικά διαστήματα ώστε οι αντίστοιχες ποσότητες να μην μεταβάλλονται αρκετά.*

Σχολιο 15 *Αν κάποιος θέλει να επενδύσει για ένα σύντομο χρονικό διάστημα θα πρέπει να λάβει υπόψιν προηγούμενα δεδομένα αλλά επίσης και πρόσφατα γεγονότα και πόσο πρόκειται να επηρεάσουν την τιμή του υποκείμενου αγαθού. Σε αυτό το σημείο η μηχανική μάθηση μπορεί να αποδειχτεί σημαντικό εργαλείο. Αν κάποιος θέλει να επενδύσει για μεγάλο χρονικό διάστημα, τότε πρέπει να μετρήσει την ευρωστία των αντίστοιχων εταιρειών, την ποιότητα του προϊόντος, τους ανταγωνιστές, κτλ. Αυτοί οι δείκτες θα δώσουν μία μελλοντική εικόνα της κάθε εταιρείας αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι δε θα υπάρχουν ενδιάμεσα σκαμπανεβάσματα στην τιμή της μετοχής.*
Σε καμία όμως περίπτωση η υπερανάλυση παρελθοντικών δεδομένων δεν θα δώσει καμία επιπλέον πληροφορία απλώςθα είνιαι χάσιμο χρόνου (και χρήματος!) αν δεν αξιολογηθούν πρόσφατα γεγονότα και άλλοι δείκτες.

Ερώτημα 3 *Ποια άλλα προβλήματα βελτιστοποίησης μπορούμε να διατυπώσουμε θεωρώντας το πρόβλημα κατασκευής χαρτοφυλακίου το οποίο εμπεριέχει n αγαθά (και τα παράγωγά τους) μαζί με τα δικαιώματα αγοράς και πώλησής τους; Πως μπορούμε να επιλύσουμε αυτά τα προβλήματα βελτιστοποίησης;*

Σχολιο **16** *Γενικά, για την κατασκευή ενός χαρτοφυλακίου το οποίο θα αποτελείται από πολλές μετοχές μπορούμε να κάνουμε δυο ειδών προβλέψεις. Η πρώτη μορφή πρόβλεψης είναι η από κοινού κατανομή των τιμών των μετοχών δεδομένου ενός χρονικού ορίζοντα. Με μια τέτοια πρόβλεψη μπορούμε να λύσουμε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης όπου θα ελαχιστοποιούμε μια ποσότητα που περιέχει την διακύμανση, τη μέση τιμή κ.τ.λ. του κέρδους. Η δεύτερη μορφή πρόβλεψης είναι η εκτίμηση ενός συνόλου $G \subseteq \mathbb{R}^d$ (όπου d το πλήθος των εταιρειών) στο οποίο προβλέπει ο επενδυτής ότι θα βρεθούν οι τιμές των μετοχών των εταιρειών. Πάλι, επιλύοντας ένα κατάλληλο πρόβλημα βελτιστοποίησης θα υπολογίσουμε το κατάλληλο (για εμάς) χαρτοφυλάκιο.*
Προσθέτοντας μερικά συμβόλαια προαίρεσης ανά εταιρεία είναι προφανές ότι αυξάνουμε τη διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου μας. Αν η μέγιστη δυνατή απώλεια (δηλαδή το D) δεν είναι αρκετά μικρή τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα η απώλεια να ξεπεράσει ένα ζητούμενο ποσό. ***Αυτό που ουσιαστικά έχουμε κάνει είναι να διαχωρίσουμε το πρόβλημα της πρόβλεψης από αυτό της κατασκευής του βέλτιστου χαρτοφυλακίου. Το δεύτερο είναι ένα πρόβλημα των Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών ενώ το πρόβλημα της πρόβλεψης είναι αντικείμενο αντίστοιχων προγνωστικών τεχνικών (μηχανική μάθηση κ.α.) Έτσι ο επενδυτής έχει τη δυνατότητα να εφαρμόσει προηγμένες τεχνικές πρόβλεψης και στη συνέχεια να εφαρμόσει την παραπάνω μεθοδολογία για την κατασκευή του βέλτιστου χαρτοφυλακίου. Όπως είπαμε και προηγούμενα, η μέθοδος του Markowitz στηρίζεται σε παρωχημένες τεχνικές πρόβλεψης αλλά ακόμη χειρότερα δεν κατασκευάζει στη συνέχεια το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο αφού δεν λαμβάνει υπόψη τα διαθέσιμα συμβόλαια προαίρεσης.*** □

Περισσότερα για το πρόβλημα κατασκευής χαρτοφυλακίου αναφέρονται στα [2], [4] και τις αναφορές εκεί.

1.5 Δυναμικές Συναλλαγές

Σε αυτήν την ενότητα θα περιγράψουμε μία δυναμική στρατηγική συναλλαγών η οποία βασίζεται στην αρχή «πούλα υψηλά - αγόρασε χαμηλά» (και «δανείσου υψηλά - επέστρεψε χαμηλά» . Υποθέτουμε ότι ένας επενδυτής έχει αποφασίσει να ξοδέψει το ποσό Y αγοράζοντας a μετοχές μίας εταιρείας δανειζόμενος το ποσό b από τον δικό του τραπεζικό λογαριασμό με επιτόκιο (χωρίς κίνδυνο) ίσο με r. Ας υποθέσουμε επίσης ότι έχει αποφασίσει να επανακατασκευάσει το χαρτοφυλάκιό του τις στιγμές $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = T$ και ότι η σημερινή τιμή του αγαθού είναι ίση με S_0. Θα κατασκευάσουμε μία ακολουθία a_k η οποία θα αποτελεί τον αριθμό των μετοχών κάθε στιγμή t_k, με $a_0 = a$. Αν το $a > 0$ τότε ο επενδυτής μπορεί να αγοράσει ή να πωλήσει τη στιγμή t_k ένα πλήθος μετοχών ώστε

$$a_k = a_{k-1} - a_{k-1}\delta\left(\frac{S_{t_k}}{S_0}\right) + (a - a_{k-1})\mathbb{I}_{\{S_0 > S_{t_k}\}} \tag{1.12}$$

ενώ αν $a < 0$

$$a_k = a_{k-1} - a_{k-1}\delta\left(\frac{S_0}{S_{t_k}}\right) + (a - a_{k-1})\mathbb{I}_{\{S_{t_k} > S_0\}} \tag{1.13}$$

Μπορούμε για παράδειγμα να επιλέξουμε $\delta(x)$ ως εξής

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{z_1(x-1)^{z_2}}{z_1(x-1)^{z_2}+z_3}, & \text{όταν } x > 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

για κάποια $z_1, z_2, z_3 > 0$. Υπάρχουν, φυσικά, άπειρες επιλογές της συνάρτησης δ και η επιλογή πρέπει να γίνει από τον επενδυτή. Για παράδειγμα κάποιος μπορεί να επιλέξει ως δ την ακόλουθη συνάρτηση

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{για } x > M \\ p(x), & \text{για } x \in (1, M) \\ 0, & \text{για } x \leq 1 \end{cases}$$

όπου $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ είναι τ.ω. $p(M) = 1$ και $p(1) = 0$.

Ερώτημα 4 *Εξαρτάται η επιλογή της καλύτερης συνάρτησης $\delta(x)$ από την τιμή του αγαθού ή υπάρχει κάποια συνάρτηση που έχει την καλύτερη επίδοση για οποιαδήποτε τέτοια συμπεριφορά;*

Αν ληφθούν υπόψιν τα κόστη συναλλαγής τότε θα πρέπει να βρούμε ένα κατάλληλο $\varepsilon > 0$ και να ορίσουμε τη συνάρτηση $\delta(x)$ ως εξής

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{z_1(x-(1+\varepsilon))^{z_2}}{z_1(x-(1+\varepsilon))^{z_2}+z_3}, & \text{όταν } x > 1+\varepsilon \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Υποθέτουμε ότι τη στιγμή t η τιμή S_t είναι κάτω από S_0, δηλαδή $S_t < S_0$. Αν ο επενδυτής αυτή τη στιγμή αγοράσει κάποιες μετοχές τις οποίες ήδη πούλησε (αν υπάρχουν) τότε μπορεί να ορίσει εκ νέου το S_0 σύμφωνα με μία μικρότερη τιμή. Μπορούμε να κατασκευάσουμε επίσης μία διαφορετική στρατηγική συναλλαγών θέτοντας όταν $a > 0$,

$$a_k = a_{k-1} - a_{k-1}\delta\left(\frac{S_{t_k}}{S_0}\right) \tag{1.14}$$

και όταν $a < 0$,

$$a_k = a_{k-1} - a_{k-1}\delta\left(\frac{S_0}{S_{t_k}}\right) \tag{1.15}$$

Τέλος, μία όμοια με την παραπάνω στρατηγική συναλλαγών προκύπτει θέτοντας όταν $a > 0$,

$$a_k = a_{k-1} - a_{k-1}\delta\left(\frac{S_{t_k}}{S_0}\right) + (a - a_{k-1})\delta\left(\frac{S_0}{S_{t_k}}\right)$$

και όταν $a < 0$,

$$a_k = a_{k-1} - a_{k-1}\delta\left(\frac{S_0}{S_{t_k}}\right) + (a - a_{k-1})\delta\left(\frac{S_{t_k}}{S_0}\right)$$

Στην παραπάνω στρατηγική συναλλαγών κάποιος μπορεί να επιλέξει διαφορετικές συναρτήσεις δ ανά περίπτωση.

Επομένως, τη στιγμή T η τιμή του χαρτοφυλακίου θα είναι ίση με, θεωρώντας για παράδειγμα τη στρατηγική συναλλαγών (1.14) και (1.15) και λαμβάνοντας υπόψιν τα κόστη συναλλαγών,

$$\Pi = a_N S_T + \sum_{k=1}^{N} S_{t_k}(1-\varepsilon)(a_k - a_{k-1})e^{r(T-t_k)} + be^{rT}$$

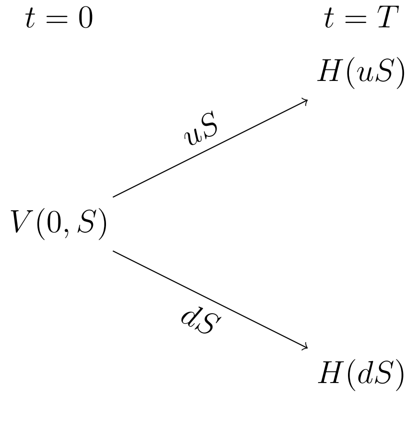
Ερώτημα 5 *Για την επιλογή της βέλτιστης στρατηγικής συναλλαγών μπορεί να υποτεθεί ότι η τιμή του αγαθού ακολουθεί μία στοχαστική διαφορική εξίσωση. Θα είναι χρήσιμη η εφαρμογή των αριθμητικών σχημάτων που διατηρούν τη θετικότητα σε αυτή τη στοχαστική διαφορική εξίσωση. Έπειτα θα πρέπει να κατασκευάσουμε ένα κατάλληλο πρόβλημα βελτιστοποίησης ώστε να βρούμε τη βέλτιστη στρατηγική συναλλαγών, δηλαδή να βρούμε τις καλύτερες παραμέτρους της συνάρτησης* δ.
Η παραπάνω μελέτη μπορεί να γίνει θεωρώντας ένα χαρτοφυλάκιο n αγαθών και υποθέτοντας ότι η τιμή κάθε αγαθού ακολουθεί μία στοχαστική διαφορική εξίσωση λαμβάνοντας υπόψιν τις πιθανές συνδιακυμάνσεις. Ο στόχος μας δεν είναι απλώς η εύρεση των καλύτερων παραμέτρων της συνάρτησης δ *αλλά επίσης και το πόσο συχνά πρέπει να γίνεται η ανακατασκευή του χαρτοφυλακίου. Ένα ενδιαφέρον μαθηματικό πρόβλημα αποτελεί η θεώρηση δυναμικών συναλλαγών σε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο περιέχει n αγαθά μαζί με όλα τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης. Για την επίλυση αυτού του προβλήματος κάποιος θα πρέπει να χρησιμοποιήσει στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις, στοχαστική ανάλυση, αριθμητική ανάλυση στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων κτλ.*

1.6 Τιμολόγηση Δικαιωμάτων

Υποθέστε ότι θέλετε να αγοράσετε ή να πουλήσετε ένα δικαίωμα αγοράς. Υπάρχει μία δίκαια τιμή για αυτό το δικαίωμα; Θα συζητήσουμε αυτό το πρόβλημα το οποίο καλείται πρόβλημα τιμολόγησης δικαιωμάτων. Θα μελετήσουμε δύο κύριες θεωρίες: το διωνυμικό μοντέλο και το μοντέλο των Black-Scholes. Θα δούμε ότι αυτές οι δύο θεωρίες δεν μπορούν να εφαρμοστούν στην πράξη και θα αποδείξουμε ότι στην πραγματικότητα δεν υπάρχει μοναδική δίκαια τιμή. Αυτό που μπορούμε στην πραγματικότητα να υπολογίζουμε είναι ένα διάστημα τιμών χωρίς arbitrage .

1.6.1 Διωνυμικό Μοντέλο

Το διωνυμικό μοντέλο βασίζεται στην κατασκευή ενός χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης σε διακριτό χρόνο. Ο στόχος μας είναι η κατασκευή ενός χαρτοφυλακίου τη στιγμή μηδέν τ.ω. να έχει τη στιγμή T την ίδια τιμή με την αποπληρωμή του δικαιώματος. Περισσότερες λεπτομέρειες για τη θεωρία τιμολόγησης δικαιωμάτων σύμφωνα με το διωνυμικό μοντέλο παραπέμπονται στο [3] και τις αναφορές εκεί.

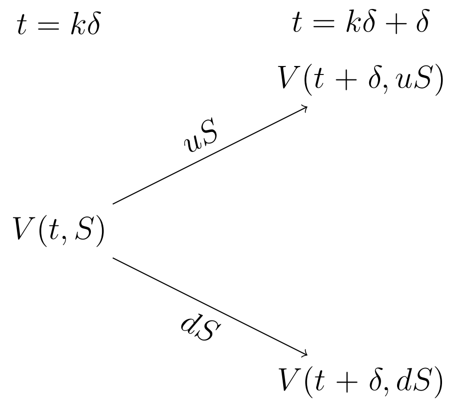


Σχήμα 1.1: Διωνυμικό μοντέλο μίας περιόδου.

Στο διωνυμικό μοντέλο υποθέτουμε ότι η τιμή της μετοχής είτε θα ανέβει με ρυθμό u και πιθανότητα p είτε θα κατέβει με ρυθμό d και πιθανότητα $1 - p$. Η τιμή του χαρτοφυλακίου τη στιγμή 0 είναι $V_0 = aS + b$ όπου a είναι ο αριθμός των μετοχών και b το ποσό της επένδυσης χωρίς κίνδυνο. Αν οι αποπληρωμές τη στιγμή T υποτεθούν να είναι $H(uS)$ και $H(dS)$ τότε

$$a = \frac{H(uS) - H(dS)}{(u-d)S} \quad \text{και} \quad b = \frac{H(dS)u - H(uS)d}{(u-d)e^{rT}}$$

όπου r το επιτόκιο την επένδυση χωρίς κίνδυνο. Το παραπάνω μπορεί να γενικευτεί σε n περιόδους.



Σχήμα 1.2: Διωνυμικό μοντέλο πολλών περιόδων.

Αν οι τιμές του χαρτοφυλακίου τη στιγμή $t = k\delta + \delta$ υποτεθεί να είναι ίσο με $V(t+\delta, uS)$ και $V(t+\delta, dS)$ τότε η ελάχιστη τιμή του χαρτοφυλακίου τη στιγμή $t = k\delta$ είναι ίση με $V(t,S) = e^{-r\delta}\Big(qV(t+\delta, uS) + (1-q)V(t+\delta, dS)\Big)$ όπου $q = \frac{e^{r\delta}-d}{u-d}$ όταν $d \leq e^{r\delta} \leq u$. Παρατηρήστε ότι $V(t,S) = aS + b$ όπου a είναι ο αριθμός των μετοχών τη στιγμή t και b είναι το ποσό τη στιγμή t στην επένδυση χωρίς κίνδυνο με επιτόκιο συνεχούς χρόνου r. Στο διωνυμικό μοντέλο υποθέτουμε ότι η τιμή της μετοχής θα ανέβει με πιθανότητα p και θα πέσει με πιθανότητα $1-p$.
Εργαζόμενοι αναδρομικά και με βήματα προς τα πίσω, η αρχική τιμή του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης μπορεί να υπολογιστεί καθώς και η στρατηγική επένδυσης (a,b). Αυτή η κατασκευή είναι πρακτικά εφικτή όμως με ένα μεγάλο μειονέκτημα.

Σχολιο 17 *Στο διωνυμικό μοντέλο έχουμε υποθέσει ότι η επόμενη τιμή της μετοχής θα είναι είτε uS είτε dS αν σήμερα είναι ίση με S. Αυτή η πρόβλεψη δε μπορεί ποτέ να επιβεβαιωθεί άρα η τελική τιμή του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης σίγουρα δε θα είναι ίση με την απολαβή σχεδόν βεβαίως! Στην πραγματικότητα, η κατάσταση γίνεται ακόμη χειρότερη όσο προστίθενται περισσότερες περίοδοι στο διωνυμικό μοντέλο, δείτε Θεώρημα 21 παρακάτω. Αυτά τα προβλήματα προέρχονται από την υπόθεση ότι η μετοχή μπορεί να λάβει δύο τιμές στην επόμενη περίοδο.*

Ερωτημα 18 *Αν η τιμή της μετοχής ανέβει με ρυθμό $u^* \neq u$ τότε ποια είναι ουσιαστικά η συνέπεια για την τιμή του χαρτοφυλακίου και τα κέρδη; Παρομοίως, τι συμβαίνει ότι πέσει αλλά με ρυθμό $d^* \neq d$;*

Λημμα 19 *Υποθέτουμε ότι ο γράφων έχει εφαρμόσει το διωνυμικό μοντέλο μίας περιόδου για την αποτίμηση ενός δικαιώματος αγοράς ή πώλησης με τιμή εξάσκησης K. Τότε θα επιλέξει τους ρυθμούς d, u τ.ω. $uS_0 > K$ και $dS_0 < K$.*

Αποδειξη. Για το δικαίωμα αγοράς ο γράφων θα προτιμήσει d τ.ω. $dS_0 < K$ (και προφανώς $uS_0 > K$). Πράγματι, αν $dS_0 > K$ τότε είναι εύκολο να δούμε ότι $a = 1$ και $be^{rT} = -K$. Επομένως το κέρδος Π θα είναι

$$\begin{aligned}
\Pi &= aS_T + be^{rT} - (S_T - K)^+ \\
&= S_T - K - (S_T - K)^+
\end{aligned}$$

Αν $S_T > K$ τότε $\Pi = 0$ ενώ αν $S_T \leq K$ τότε $\Pi \leq 0$, δηλαδή η πώληση σε καμία περίπτωση δε θα αποφέρει κέρδος.
Παρομοίως, για το δικαίωμα πώλησης θα επιλέξει u τ.ω. $uS_0 > K$ (και προφανώς $dS_0 < K$). Πράγματι, αν $uS_0 < K$ τότε $a = -1$ και $be^{rT} = K$ άρα το κέρδος θα είναι το παρακάτω

$$\begin{aligned} \Pi &= aS_T + be^{rT} - (K - S_T)^+ \\ &= K - S_T - (K - S_T)^+ \end{aligned}$$

Αν $S_T < K$ τότε $\Pi = 0$ ενώ αν $S_T \geq K$ τότε $\Pi \leq 0$, δηλαδή ο γράφων δε θα κερδίσει σε καμία περίπτωση. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 20 *Υποθέτουμε ότι ο γράφων έχει εφαρμόσει το μοντέλο μίας περιόδου για την αποτίμηση δικαιώματος αγοράς ή πώλησης με τιμή εξάσκησης K και ρυθμούς d, u όπως παραπάνω. Τότε θα κερδίσει αν $\frac{S_T}{S_0} \in (d, u)$ ενώ θα ζημιωθεί αν $\frac{S_T}{S_0} \notin (d, u)$. Το πιθανό κέρδος φράσσεται από την ποσότητα $\frac{(uS_0 - K)(K - dS_0)}{(u-d)S_0}$ ενώ η πιθανή ζημιά είναι μη φραγμένη.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε ένα δικαίωμα αγοράς με $a \in (0, 1)$ και έστω $uS_0 > K$ και $dS_0 < K$. Τότε το κέρδος θα είναι ίσο με

$$\Pi = aS_T + be^{rT} - (S_T - K)^+$$

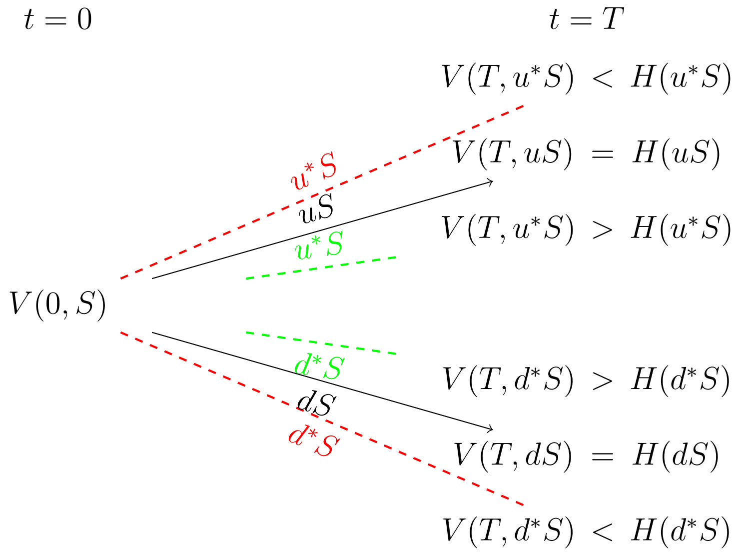
Αν $S_T > K$ τότε θα έχουμε $\frac{S_T}{S_0} > d$ και

$$\begin{aligned} \Pi &= a\left(\frac{S_T}{S_0} - u\right) S_0 + auS_0 + be^{rT} - (uS_0 - K) - \left(\frac{S_T}{S_0} - u\right) S_0 \\ &= \left(\frac{S_T}{S_0} - u\right) S_0(a - 1) \end{aligned}$$

εφόσον $auS_0 + be^{rT} - (uS_0 - K) = 0$. Επομένως στην περίπτωση $\frac{S_T}{S_0} \in (d, u)$ ισχύει ότι $\Pi > 0$ ενώ αν $\frac{S_T}{S_0} > u$ ισχύει ότι $\Pi < 0$. Παρατηρήστε ότι αν $\frac{S_T}{S_0} \to \infty$ τότε $\Pi \to -\infty$.
Αν $S_T < K$ τότε έχουμε $\frac{S_T}{S_0} < u$ και

$$\begin{aligned} \Pi &= a\left(\frac{S_T}{S_0} - d\right) S_0 + adS_0 + be^{rT} \\ &= a\left(\frac{S_T}{S_0} - d\right) S_0 \end{aligned}$$

εφόσον $adS_0 + be^{rT} = 0$. Επιπλέον, αν $\frac{S_T}{S_0} \in (d, u)$ ισχύει ότι $\Pi > 0$ ενώ αν $\frac{S_T}{S_0} < d$ έχουμε $\Pi < 0$. Το ίδιο ισχύει για το δικαίωμα πώλησης εφόσον σε αυτήν την περίπτωση $a \in (-1, 0)$. □



Σχήμα 1.3: Αν ανέβει με ρυθμό u^* τ.ω. $u^* \in (d, u)$ ή κατέβει με ρυθμό $d^* \in (d, u)$ τότε η τελική τιμή του χαρτοφυλακίου θα είναι μεγαλύτερη από τις αποπληρωμές για ένα δικαίωμα αγοράς ή πώλησης ενώ σε διαφορετική περίπτωση θα είναι μικρότερη.

Ερώτημα 6 *Ποια είναι η συμπεριφορά του κέρδους όταν εφαρμόζουμε το διωνυμικό μοντέλο για παραπάνω από μία περιόδους;*

Μία μερική απάντηση θα δοθεί στο ακόλουθο θεώρημα.

Υπόθεση 1 *Αν η σημερινή τιμή του αγαθού είναι S_0 τότε η τιμή τη στιγμή T είναι τέτοια ώστε*

$$S_T = S_0 + m \int_0^T S_r dr + \sigma \int_0^T S_r dW_r$$

όπου $m, \sigma \in \mathbb{R}_+$ είναι παράμετροι προς καθορισμό από τον γράφων.

ΘΕΩΡΗΜΑ **21** *Θεωρούμε ένα δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης K. Υποθέτουμε ότι ο γράφων το έχει τιμολογήσει χρησιμοποιώντας το ρεαλιστικό διωνυμικό μοντέλο n-περιόδων υπό την υπόθεση 1 με*

$$u = e^{\sigma z_p \sqrt{\frac{T}{n}} + (m - \sigma^2/2)\frac{T}{n}}, \quad d = e^{-\sigma z_p \sqrt{\frac{T}{n}} + (m - \sigma^2/2)\frac{T}{n}}$$

Εδώ z_p είναι τέτοιο ώστε $\frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{T}{n}}} \int_{-z_p \frac{T}{n}}^{z_p \frac{T}{n}} e^{\frac{-t^2}{2\frac{T}{n}}} dt = p$ όπου το p έχει επιλεγεί από τον γράφων και είναι τ.ω. $u > 1$ και $d < 1$. Τότε η πιθανότητα κέρδους στο τελευταίο βήμα $\mathbb{P}(\Pi \geq 0) \to 0$ καθώς $n \to \infty$ υποθέτοντας ότι ο γράφων κατασκευάζει το χαρτοφυλάκιο όπως το είχε σχεδιάσει αρχικά τοποθετώντας ή αφαιρώντας τα αντίστοιχα χρηματικά ποσά.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας υποθέσουμε ότι ο γράφων κατασκευάζει το χαρτοφυλάκιο όπως το σχεδίασε αρχικά τοποθετώντας ή αφαιρώντας αντίστοιχα χρηματικά ποσά. Αυτό συμβαίνει επειδή η τιμή του αγαθού δε θα λάβει σχεδόν ποτέ τις εκτιμώμενες τιμές.
Το κέρδος τη στιγμή T είναι

$$\Pi = a_{n-1} U S_0 + b_{n-1} - H(U S_0)$$

όπου $H(x) = (x - K)^+$ και a_{n-1}, b_{n-1} είναι τέτοια ώστε $a_{n-1} u S_{n-1} + b_{n-1} = H(u S_{n-1})$ και $a_{n-1} d S_{n-1} + b_{n-1} = H(d S_{n-1})$. Τελικά η $U = e^{\sigma W_T + (m - \sigma^2/2)T}$ είναι η πραγματική τιμή του αγαθού τη στιγμή T μετά από κάποια ανοδικά και καθοδικά άλματα. Από εδώ και στο εξής θα συμβολίζουμε με a, b τα a_{n-1} και b_{n-1} και με S_{n-1} την εκτιμώμενη τιμή του αγαθού έπειτα από τα ίδια ανοδικά και καθοδικά άλματα.

Υποθέτουμε ότι $dS_{n-1} < US_0 < K$. Τότε το κέρδος είναι

$$\begin{aligned}\Pi &= aUS_0 + b - H(US_0)\\ &= a(US_0 - dS_{n-1}) + H(dS_{n-1}) - H(US_0)\\ &= (US_0 - dS_{n-1})\left(a - \frac{H(US_0) - H(dS_{n-1})}{US_0 - dS_{n-1}}\right)\end{aligned}$$

και έπεται ότι $\Pi \geq 0$. Αν $US_0 < dS_{n-1} < K$ τότε $\Pi \leq 0$ και αν $US_0 < K < dS_{n-1}$ τότε $\Pi \leq 0$ επειδή $a = 1$ και $\frac{H(US_0)-H(dS_{n-1})}{US_0-dS_{n-1}} \leq 1$. Παρομοίως, αν $K < US_0$, έπεται ότι $\Pi \geq 0$ αν $US_0 \leq uS_{n-1}$ και $\Pi \leq 0$ αν $US_0 \geq uS_{n-1}$.

Επομένως το κέρδος είναι μη-αρνητικό στην περίπτωση όπου $dS_{n-1} \leq US_0 \leq uS_{n-1}$ και μη θετικό διαφορετικά.

Η πιθανότητα κέρδους είναι τότε

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(dS_{n-1} \leq US_0 \leq uS_{n-1}\right) &= \\ \sum_{k=0}^{n-1} q^k(1-q)^{n-1-k}\mathbb{P}(u^k d^{n-1-k}(dS_0) \leq US_0 \leq u^k d^{n-1-k}(uS_0))\end{aligned}$$

Αλλά

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(u^k d^{n-1-k}(dS_0) \leq US_0 \leq u^k d^{n-1-k}(uS_0))\\ = \;& \mathbb{P}\left(e^{\sigma z_p\sqrt{\frac{T}{n}}(2k-n)+(m-\sigma^2/2)T} \leq e^{\sigma W_T + (m-\sigma^2/2)T} \leq e^{\sigma z_p\sqrt{\frac{T}{n}}(2k+2-n)+(m-\sigma^2/2)T}\right)\\ = \;& \mathbb{P}\left(\sigma z_p\sqrt{\frac{T}{n}}(2k-n) \leq \sigma W_T \leq \sigma z_p\sqrt{\frac{T}{n}}(2k+2-n)\right)\\ = \;& \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_{\sigma z_p\sqrt{\frac{T}{n}}(2k-n)}^{\sigma z_p\sqrt{\frac{T}{n}}(2k+2-n)} e^{-t^2/(2T)}dt\\ \leq \;& \frac{2\sigma z_p}{\sqrt{2\pi n}}\end{aligned}$$

Επομένως

$$\mathbb{P}\left(dS_{n-1} \leq US_0 \leq uS_{n-1}\right) \leq \frac{2\sigma z_p}{\sqrt{2\pi n}}\sum_{k=0}^{n-1} q^k(1-q)^{n-1-k} = \frac{2\sigma z_p}{(1-q)\sqrt{2\pi n}}$$

Επομένως, η πιθανότητα κέρδους στο τελευταίο βήμα γίνεται μικρότερη καθώς $n \to \infty$ και βεβαίως αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα ζημιάς γίνεται μεγαλύτερη. □

Συμπέρασμα 3 *Επομένως δεν υπάρχει λόγος εφαρμογής του διωνυμικού μοντέλου για την τιμολόγηση δικαιωμάτων. Αυτό ισχύει κυρίως λόγω του ότι η επιλογή των d, u είναι μία προσωπική υπόθεση με την οποία δε θα συμφωνήσουν οι άλλοι επενδυτές και φυσικά δεν είναι ρεαλιστική η υπόθεση ότι η τιμή του αγαθού θα λάβει μόνο δύο τιμές.*

Βέβαια μπορεί να εφαρμοστεί το παραπάνω μοντέλο ως μία στρατηγική αντιστάθμισης όπου ο γράφων θα έχει κέρδος αν $S_T \in (dS_0, uS_0)$ και ζημιά διαφορετικά. Το μειονέκτημα σε αυτήν την περίπτωση είναι ότι η πιθανή ζημιά είναι μη φραγμένη και συνεπώς θα προτιμηθεί η κατασκευή ενός πιο περίπλοκου χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης όπως αυτά που περιγράφηκαν ήδη ώστε η πιθανή ζημιά να γίνει φραγμένη.

Εδώ θα περιγραφεί μία απλή στρατηγική αντιστάθμισης όπου δεν είναι μόνο η ζημιά φραγμένη αλλά επίσης το κέρδος είναι μη φραγμένο.
Ας υποθέσουμε ότι ένα δικαίωμα αγοράς πωλείται στην τιμή $C(K)$. Τότε μπορεί να αγοραστεί ένα άλλο δικαίωμα αγοράς στην τιμή $C(K^{'}) < C(K)$ όπου $K^{'} > K$. Τότε θα περισσέψει το ποσό $Y = C(K) - C(K^{'})$. Αυτό το ποσό θα χρησιμοποιηθεί για την αγορά $\frac{Y}{S_0}$ αριθμού μετοχών.
Επομένως, η συνάρτηση κέρδους αυτού του χαρτοφυλακίου είναι

$$\Pi(x) = \frac{Y}{S_0}x + (x - K^{'})^{+} - (x - K)^{+}$$

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, τη στιγμή T όπου λήγουν τα δικαιώματα, η τιμή της μετοχής S_T θα αντικαταστήσει το x παρέχοντας έτσι την αποτίμηση του κέρδους.

- Αν $S_T < K < K^{'}$ τότε $\Pi(S_T) = \frac{Y}{S_0}S_T > 0$, δηλαδή υπάρχει κέρδος.
- Αν $K < S_T < K^{'}$ τότε $\Pi(S_T) = \frac{Y}{S_0}S_T - S_T + K = S_T(\frac{Y}{S_0} - 1) + K$. Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει ότι $\Pi(S_T) \geq K^{'}(\frac{Y}{S_0} - 1) + K$ αν $\frac{Y}{S_0} - 1 < 0$, δηλαδή η ζημιά είναι φραγμένη.
- Αν $S_T > K^{'}$ τότε $\Pi(S_T) = \frac{Y}{S_0}S_T + K - K^{'} \geq \frac{Y}{S_0}K^{'} + K - K^{'}$ δηλαδή για ακόμη μία φορά η ζημιά είναι φραγμένη. Παρατηρήστε όμως ότι $\Pi(S_T) \to +\infty$ καθώς $S_T \to +\infty$ άρα το κέρδος είναι τώρα μη φραγμένο.

Επομένως έχει δειχτεί ότι θεωρώντας επιπλέον την επιλογή αγοράς άλλου δικαιώματος αγοράς δεν πετύχαμε απλώς τον περιορισμό της πιθανής ζημιάς, αλλά πετύχαμε επίσης την απεριόριστη αύξηση του κέρδους, σε αντίθεση με το διωνυμικό μοντέλο όπου η ζημιά είναι απεριόριστη και το κέρδος περιορισμένο.
Το παραπάνω παράδειγμα παρέχει αιτιολόγηση του λόγου που κάποιος θέλει να δημιουργήσει (να γράψει όπως λέγεται) και έπειτα να πωλήσει ένα δικαίωμα αγοράς. Με αυτό το ποσό θα κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο, πιο περίπλοκο, το οποίο θα είναι επικερδές σε κάθε σενάριο το οποίο πιστεύει ότι θα πραγματοποιηθεί.
Τι γίνεται στην περίπτωση όπου έχει πωληθεί ένα δικαίωμα αγοράς αλλά δεν υπάρχει άλλο διαθέσιμο δικαίωμα αγοράς στο χρηματιστήριο;
Σε αυτήν την περίπτωση, το αντίστοιχο ποσό μπορεί να δανειστεί για την αγορά μίας μετοχής. Άρα, η μέγιστη πιθανή ζημιά θα είναι το δανειζόμενο ποσό. Αν επιπλέον μετοχές πρόκειται να αγοραστούν τότε το πιθανό κέρδος θα είναι μη φραγμένο.
Τελικά, στην περίπτωση όπου δεν υπάρχουν άλλα διαθέσιμα δικαιώματα αγοράς και δεν μπορούν να αγοραστούν άλλες μετοχές τότε η πιθανότητα αγοράς άλλων μετοχών θα πρέπει να εξεταστεί οι οποίες όμως έχουν παρόμοια συμπεριφορά. Αν επίσης αυτό δεν είναι εφικτό τότε η πιθανότητα κινδύνου μπορεί να υπολογιστεί πριν την πώληση τέτοιου συμβολαίου ακόμα και αν αυτή η αποτίμηση δεν εξασφαλίζει τίποτα.

1.6.2 Μοντέλο των Black-Scholes

Τώρα, θα παρουσιαστεί η θεωρία των Black-Scholes σε αυτό το θέμα. Αυτή η θεωρία υποθέτει ότι η τιμή της μετοχής του υποκείμενου αγαθού ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown με παραμέτρους m, σ, δηλαδή,

$$S_t = S_0 + m\int_0^t S_r dr + \sigma\int_0^t S_r dW_r.$$

Ο σκοπός του πωλητή, σύμφωνα με αυτήν τη θεωρία, είναι η κατασκευή ενός χαρτοφυλακίου τη στιγμή πώλησης του συμβολαίου ($t = 0$) τ.ω. τη στιγμή T το χαρτοφυλάκιο να έχει τιμή ίση με το ποσό που έχει δοθεί στον αγοραστή. Το χαρτοφυλάκιο αποτελείται από ένα αριθμό μετοχών και ένα ποσό σε τραπεζικό λογαριασμό με ετήσιο επιτόκιο ίσο με r (δηλαδή, το 1 ευρώ μετά από χρόνο t θα γίνει e^{rt}). Συμβολίζοντας με $a(t, S_t)$ τον αριθμό των μετοχών και με $b(t, S_t)$ το ποσό στον τραπεζικό λογαριασμό στο χαρτοφυλάκιο, τότε η τιμή του χαρτοφυλακίου θα είναι ίση με

$$V_t = a(t, S_t)S_t + b_t e^{rt}.$$

Ο σκοπός του γράφοντος είναι η εύρεση της κατάλληλης στρατηγικής $(a(t,S_t), b(t,S_t))$ κατασκευής χαρτοφυλακίου ώστε $V_T = P_T$. Ρευστοποιώντας το χαρτοφυλάκιο θα δώσει τα χρήματα στον αγοραστή.
Αυτό το χαρτοφυλάκιο καλείται επίσης στρατηγική αντιστάθμισης. Καλείται αυτοχρηματοδοτούμενη αν το ακόλουθο ισχύει

$$V_t = V_0 + \int_0^t (ma(s,S_s)S_s + rb(s,S_s)B_s)ds + \int_0^t \sigma a(s,S_s)S_s dW_s.$$

Οι αρνητικές τιμές για τα a, b δηλώνουν δανεισμό.

ΘΕΩΡΗΜΑ 22 *Έστω ότι η (a,b) είναι μία αυτοχρηματοδοτούμενη Μαρκοβιανή στρατηγική. Τότε, αν υπάρχει μία $u(t,x) \in C^{1,2}(D)$ (όπου $D = (0,T) \times (0,+\infty)$) τ.ω. $u(t,S_t) = V_t$, τότε η $u(t,x)$ είναι μία λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης*

$$\frac{\sigma^2 x^2}{2} u_{xx}(t,x) + rxu_x(t,x) + u_t(t,x) = ru(t,x)$$

με $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+$. Επιπλέον, $a(t,x) = u_x(t,x)$. Η παραπάνω μερική διαφορική εξίσωση καλείται διαφορική εξίσωση των **Black-Scholes**.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εφόσον η (a,b) είναι αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική τότε ισχύει ότι

$$V_t = V_0 + \int_0^t (ma(s,S_s)S_s + rb(s,S_s)B_s)ds + \int_0^t \sigma a(s,S_s)S_s dW_s.$$

Η φόρμουλα Itô εφαρμόζεται στην $u(t,S_t)$ και καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned} u(t,S_t) = \quad & u(0,S_0) \\ + \quad & \int_0^t (u_t(s,S_s) + mS_s u_x(s,S_s) + \frac{\sigma^2 S_s^2}{2} u_{xx}(s,S_s))ds \\ + \quad & \int_0^t \sigma S_s u_x(s,S_s) dW_s. \end{aligned}$$

Επομένως η V_t γράφεται ως μία διαδικασία Itô με δύο διαφορετικούς τρόπους και χρησιμοποιώντας τη μοναδικότητα της διάσπασης Doob-Meyer στη διαφορά τους (η οποία είναι μηδέν), προκύπτει ότι και τα δύο ολοκληρώματα είναι μηδέν.
Επομένως προκύπτει η επόμενη ισότητα

$$a(t,S_t) = u_x(t,S_t) \text{ και άρα } b(t,S_t)B_t = u(t,S_t) - S_t u_x(t,S_t)$$

Για να γίνει μηδέν το ολοκλήρωμα ως προς ds τότε αναγκαστικά θα πρέπει η $u(t,x)$ να ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση

$$\frac{\sigma^2 x^2}{2} u_{xx}(t,x) + rxu_x(t,x) + u_t(t,x) = ru(t,x)$$

έχοντας αντικαταστήσει κατάλληλα το $b(t,S_t)B_t$, εφόσον το ολοκλήρωμα πρέπει να είναι μηδέν για οποιαδήποτε τροχιά της S_t. Σε αυτό το σημείο η υπόθεση ότι $u \in C^{1,2}(D)$ είναι επίσης χρήσιμη. □

Μπορεί να αποδειχτεί ότι η ακόλουθη μερική διαφορική εξίσωση έχει μία μοναδική λύση

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2 x^2}{2} u_{xx}(t,x) + rxu_x(t,x) + u_t(t,x) &= ru(t,x) \\ u(T,x) &= \max\{x-K, 0\}. \end{aligned}$$

Επομένως το χαρτοφυλάκιο το οποίο είναι τ.ω. $V_T = P_T$ θα είναι

$$V_t = a(t, S_t)S_t + b(t, S_t)e^{rt}$$

με τα a, b όπως επιλέχθηκαν στο παραπάνω θεώρημα και $u(t, x)$ η λύση της εξίσωση των Black-Scholes.
Το μειονέκτημα σε αυτήν τη θεωρία είναι ότι αυτό το χαρτοφυλάκιο δεν μπορεί πρακτικά να κατασκευαστεί εφόσον θα πρέπει να ανακατασκευαστεί ακαριαία! Πράγματι, ο αριθμός των μετοχών πρέπει να αλλάζει καθώς η μεταβλητή t αλλάζει αλλά αυτό είναι αδύνατο στην πραγματικότητα εφόσον κάθε παραγγελία αγοράς παίρνει κάποιο χρόνο για να επεξεργαστεί. Επιπλέον, όταν η τιμή της μετοχής αλλάζει από $S(t)$ σε $S(t + h)$ η ανακατασκευή του χαρτοφυλακίου πρέπει να γίνει στιγμιαία.
Ας υποθέσουμε προς στιγμήν ότι η κατασκευή αυτού του χαρτοφυλακίου είναι εφικτή. Η παράμετρος σ δεν είναι σταθερή και εξαρτάται επίσης και από το χρόνο. Θα έχει διαφορετική τιμή αν χρησιμοποιηθούν ιστορικά δεδομένα τριών μηνών ή 6 μηνών κτλ. Επομένως, η επιλογή του σ είναι ξεκάθαρα ένα προσωπικό ζήτημα (είναι μία προσωπική εικασία) και επομένως η έννοια της δίκαιης τιμής ή της μίας και μοναδικής no arbitrage τιμής καταρρίπτεται! Η επιλογή του σ μέσω της επαγόμενης μεταβλητότητας δεν έχει κάποια λογική.

Σχόλιο 23 *Η μεταβλητότητα σ η οποία αντιστοιχεί στην μελλοντική τιμή του αγαθού εξαρτάται από τη μεταβλητότητα της συνάρτησης των τιμών της μετοχής στο μελλοντικό χρονικό διάστημα $(0, T)$. Αλλά η μελλοντική μεταβλητότητα δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή επομένως επιλέγοντας κάποιο σ σήμερα ισοδυναμεί με την πρόβλεψη της μελλοντικής μεταβλητότητας!* □

Παρόλα αυτά, αν το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης ήταν εφικτό, ο γράφων θα μπορούσε να μαντέψει το εύρος των τιμών για τα οποία θα βρισκόταν το σ στο μέλλον και θα κατασκεύαζε αυτό το χαρτοφυλάκιο βασιζόμενος σε ένα κατάλληλο (για αυτόν) σ. Αν η εικασία για το εύρος του σ ήταν σωστή τότε θα είχε κέρδος ενώ διαφορετικά ζημιά. Δηλαδή, στην περίπτωση όπου το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης ήταν εφικτό, ένας τρόπος κατασκευής χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης θα ήταν διαθέσιμος, δηλαδή μία στρατηγική αντιστάθμισης, αλλά μία δίκαιη τιμή δε θα ήταν διαθέσιμη εφόσον κάθε επενδυτής εν γένει προβλέπει διαφορετικά το μέλλον.

Συμπέρασμα 4 *Οποιαδήποτε απόπειρα ορισμού μίας δίκαιης τιμής θα είναι λανθασμένη στην πραγματικότητα αν εξαρτάται σε μία υπόθεση για την μελλοντική κίνηση της τιμής του υποκείμενου αγαθού.*

Αυτή η στρατηγική θα μπορούσε να εφαρμοστεί, με συχνές ανακατασκευές του χαρτοφυλακίου. Οι συχνές ανακατασκευές του χαρτοφυλακίου δεν εξασφαλίζουν ότι το αποτέλεσμα θα είναι κοντά στο επιθυμητό, ακόμη και χωρίς να ληφθούν υπόψιν κόστη συναλλαγής. Το αντίστροφο, έχει αποδειχτεί ότι ενδέχεται να οδηγήσει τον γράφοντα σε καταστροφή.

Σχόλιο 24 *Εφαρμόζοντας τη στρατηγική αντιστάθμισης των Black-Scholes σε διακριτό χρόνο ή τη στρατηγική αντιστάθμισης του διωνυμικού μοντέλου πολλών περιόδων θα αγοράζουμε υψηλά και θα πωλούμε χαμηλά! Αυτό έρχεται σε αντίθεση στην πούλα υψηλά - αγόρασε χαμηλά στρατηγική η οποία φυσικά είναι μία παγκοσμίως αποδεκτή στρατηγική συναλλαγών.* □

Όλα τα παραπάνω έχουν ως συνέπεια ότι αυτή η θεωρία δεν εφαρμόζεται από τους επαγγελματίες και συνεπώς πρέπει να σχεδιαστούν άλλοι τρόποι για τη (μερική) λύση του προβλήματος.
Έπειτα, θα περιγράψουμε αποτελεσματικούς τρόπους για την τιμολόγηση και αντιστάθμιση δικαιωμάτων αλλά θα αποδείξουμε επίσης ότι, εν γένει, δεν υπάρχει μία και μοναδική δίκαια τιμή ενός δικαιώματος.

1.6.3 Διάστημα Arbitrage Free Τιμών

Υποθέστε ότι ένα συμβόλαιο πρόκειται να αγοραστεί ή να πωληθεί με συνάρτηση αποπληρωμής $f(x)$. Για παράδειγμα για το δικαίωμα αγοράς είναι $f(x) = (x - K)^+$ ενώ για το δικαίωμα πώλησης $f(x) = (K - x)^+$. Προφανώς η τιμή του συμβολαίου καθορίζεται από το νόμο προσφοράς και ζήτησης. Ωστόσο, αποφασιστικό ρόλο θα έχει η παρουσία ευκαιρίας σίγουρου κέρδους. Άρα, στην πράξη για την αποτίμηση του διαστήματος τιμών απουσίας ευκαιρίας σίγουρου κέρδους κάποιος θα πρέπει να λάβει υπόψιν τουλάχιστον όλα τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης και να λύσει τα ακόλουθα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού.

$$\begin{aligned} & \min Y \\ \text{δεδομένου ότι} \quad & aS_0 + b + \sum_{i=1}^{n} (\gamma_i C(K_i) + \delta_i P(K_i)) = Y \\ & \Pi^{writer}(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \geq 0 \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned} & \max Y \\ \text{δεδομένου ότι} \quad & aS_0 + b + \sum_{i=1}^{n} (\gamma_i C(K_i) + \delta_i P(K_i)) = -Y \\ & \Pi^{buyer}(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \geq 0 \end{aligned} \tag{1.17}$$

όπου

$$\Pi^{writer}(x) = ax + be^{rT} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (x - K_i)^+ + \delta_i (K_i - x)^+ - f(x)$$

$$\Pi^{buyer}(x) = ax + be^{rT} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (x - K_i)^+ + \delta_i (K_i - x)^+ + f(x)$$

Η λύση του πρώτου προβλήματος παρέχει το μικρότερο απαιτούμενο ποσό για την κατασκευή ενός χαρτοφυλακίου (από τον γράφοντα του δικαιώματος) με μηδενική πιθανή ζημιά σε όλα τα σενάρια. Παρομοίως λύνοντας το δεύτερο πρόβλημα βρίσκουμε το μέγιστο ποσό για τον αγοραστή ώστε να αγοράσει το δικαίωμα κατασκευάζοντας ένα χαρτοφυλάκιο με μηδενική πιθανή ζημιά.
Έστω ότι η λύση του πρώτου προβλήματος είναι η Y^{writer} ενώ η λύση του δεύτερου είναι Y^{buyer}. Τότε το διάστημα των τιμών όπου δεν υπάρχουν ευκαιρίες σίγουρου κέρδους είναι (Y^{buyer}, Y^{writer}) εφόσον $Y^{buyer} < Y^{writer}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ **25** *Καλούμε το διάστημα* (Y^{buyer}, Y^{writer}) *ως το διάστημα τιμών απουσίας ευκαιριών σίγουρου κέρδους για το δικαίωμα με αποπληρωμή* $f(x)$.

Επομένως, αργά ή γρήγορα η τιμή του συμβολαίου θα βρίσκεται εντός αυτού του διαστήματος. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι ότι οι τιμές των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης είναι, εν γένει, διατεταγμένες. Αν επομένως πρόκειται να γράψεις ή να αγοράσεις ένα δικαίωμα τότε μία λογική τιμή θα βρίσκεται σε αυτό το διάστημα και άρα ο υπολογισμός του παρέχει μία τάξη μεγέθους της τιμής αυτού του συμβολαίου.

Συμπέρασμα 5 *Οποιαδήποτε τιμή πώλησης εκτός του διαστήματος τιμών μη ευκαιριών σίγουρου κέρδους δημιουργεί ευκαιρίες σίγουρου κέρδους είτε για τον γράφοντα είτε για τον αγοραστή και άρα* ***δεν είναι δίκαιο*** *για το μέρος το οποίο δεν μπορεί να εκμεταλλευτεί την ευκαιρία σίγουρου κέρδους.*

ΣΧΟΛΙΟ **26** *Οι θεωρίες τιμολόγησης δικαιωμάτων του διωνυμικού και των Black-Scholes μας παρέχουν τιμές οι οποίες, εν γένει, είναι εκτός του διαστήματος τιμών απουσίας ευκαιριών σίγουρου κέρδους και συνεπώς δεν είναι δίκαιες τιμές! Αυτό είναι αληθές επειδή αυτές οι θεωρίες δεν λαμβάνουν υπόψιν τα υπαρκτά παράγωγα. Προσπαθήστε για παράδειγμα να τιμολογήσετε, χρησιμοποιώντας αυτές τις θεωρίες, ένα δικαίωμα αγοράς (ή ακόμη χειρότερα ένα πιο περίπλοκο) όταν υπάρχουν ήδη στην αγορά άλλα δικαιώματα αγοράς και πώλησης και άλλα παράγωγα. Όχι μόνο δε θα πάρετε μία τιμή τιμών χωρίς ευκαιρία σίγουρου κέρδους αλλά ακόμη χειρότερα, τα χαρτοφυλάκια αντιστάθμισης που θα προκύψουν θα είναι χρηματοοικονομικώς επικίνδυνα.*

Στην περίπτωση αποτίμησης συμβολαίου Αμερικάνικου τύπου, ο αγοραστής καθώς και ο γράφων μπορούν να εφοδιάσουν τα χαρτοφυλάκια αντιστάθμισης τους με δικαιώματα Αμερικάνικου τύπου. Σε αυτήν την περίπτωση όμως το ακόλουθο γεγονός θα πρέπει να ληφθεί υπόψιν: μπορούν να εξασκήσουν το δικαίωμά τους οποιαδήποτε στιγμή για όλα τα συμβόλαια τα οποία έχουν αγοράσει αλλά δεν μπορούν να υποχρεώσουν τους αγοραστές των συμβολαίων στους οποίους τα έχουν πουλήσει να κάνουν το ίδιο την ίδια στιγμή. Άρα, τα χαρτοφυλάκια θα πρέπει να περιέχουν δικαιώματα Αμερικάνικου τύπου αλλά μόνο από τη μεριά του αγοραστή ώστε να μπορούν να εξασκήσουν το δικαίωμά τους όποτε επιθυμούν.

1.6.4 Δεν υπάρχει μία μοναδική δίκαια τιμή ενός δικαιώματος!

Θα αποδείξουμε τώρα ότι μπορούμε να ορίσουμε διαφορετικές έννοιες δίκαιων τιμών οι οποίες μας οδηγούν, εν γένει, σε διαφορετικές τιμές. Αυτό σημαίνει ότι ο αγοραστής θα επιλέξει την έννοια η οποία δίνει την μικρότερη τιμή ενώ ο γράφων θα επιλέξει την έννοια η οποία δίνει την υψηλότερη τιμή!
Έστω ένα δικαίωμα με συνάρτηση αποπληρωμής $f(x)$ το οποίο είναι κατά τμήματα γραμμικό με πεπερασμένους κλάδους. Δοθέντος ενός ποσού Y θεωρούμε τα ακόλουθα δύο προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού: βρείτε τις παραμέτρους $a, b, \gamma_i, \delta_i, D$ ώστε να ισχύει το ακόλουθο

$$\begin{aligned} & \min D \\ \text{υπό την}\quad & aS_0 + b + \sum_{i=1}^{n} (\gamma_i C(K_i) + \delta_i P(K_i)) = Y \\ & \Pi^{writer}(x) \geq -D \text{ για όλα τα } x \geq 0 \end{aligned} \tag{1.18}$$

όπου $C(K_i), P(K_i)$ είναι οι σημερινές τιμές των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης.
Εδώ η $\Pi^{writer}(x)$ είναι η ακόλουθη συνάρτηση

$$\Pi^{writer}(x) = ax + be^{rT} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (x - K_i)^+ + \delta_i (K_i - x)^+ - f(x)$$

Αυτή η συνάρτηση καλείται συνάρτηση κέρδους εφόσον αν αντικαταστήσουμε το x με το S_T θα λάβουμε το κέρδος του γράφοντα.
Λύνοντας το παραπάνω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού θα βρούμε το χαρτοφυλάκιο όπου η μέγιστη πιθανή ζημιά είναι η ελάχιστη δυνατή.
Μπορούμε βέβαια να συμπεριλάβουμε στο παραπάνω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού την bid - ask spread. Για να το κάνουμε αυτό, αντικαθιστούμε την ισότητα

$$aS_0 + b + \sum_{i=1}^{n} (\gamma_i C(K_i) + \delta_i P(K_i)) = Y$$

από την ακόλουθη

$$aS_0 + b + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^{ask} C^{ask}(K_i) - \gamma_i^{bid} C^{bid}(K_i) + \delta_i^{ask} P^{ask}(K_i)) - \delta_i^{bid} P^{bid}(K_i) = Y$$

Η συνάρτηση κέρδους θα αλλάξει στην ακόλουθη

$$\begin{aligned} &\Pi^{writer}(x) = \\ &ax + be^{rT} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^{ask}(x - K_i)^+ - \gamma_i^{bid}(x - K_i)^+ \\ &+\delta_i^{ask}(K_i - x)^+ - \delta_i^{bid}(K_i - x)^+ - f(x) \end{aligned}$$

Στο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού θα πρέπει τότε να προσθέσουμε ότι

$$\gamma_i^{bid}, \gamma_i^{ask}, \delta_i^{bid}, \delta_i^{ask} \geq 0$$

Μία παρόμοια κατασκευή μπορεί να προκύψει από τον αγοραστή λύνοντας το ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$\begin{aligned} &\min D \\ \text{υπό την} \quad &aS_0 + b + \sum_{i=1}^{n}(\gamma_i C(K_i) + \delta_i P(K_i)) = -Y \\ &\Pi^{buyer}(x) \geq -D \text{ για όλα τα } x \geq 0 \end{aligned} \tag{1.19}$$

όπου

$$\Pi^{buyer}(x) = ax + be^{rT} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(x - K_i)^+ + \delta_i(K_i - x)^+ + f(x)$$

Ορισμος 27 *Ορίζουμε το ποσό Y ως τη δίκαια τιμή αν $D^{writer} = D^{buyer} =: D^*$. Σε αυτήν την περίπτωση συμβολίζουμε αυτήν τη δίκαιη τιμή ως Y^{D^*}.*

Παρατηρήστε ότι υπάρχει το πολύ ένα Y με αυτήν την ιδιότητα. Λύνοντας τα παραπάνω δύο προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού δε θα βρούμε μόνο το D^* (αν υπάρχει) αλλά επίσης και τα αντίστοιχα στατικά χαρτοφυλάκια αντιστάθμισης. Αυτά τα χαρτοφυλάκια είναι εφικτά στην πράξη και η δίκαια τιμή Y εξαρτάται μόνο από τις σημερινές τιμές του αγαθού και τα αντίστοιχα παράγωγα. Για τον υπολογισμό της δίκαιας τιμής δεν χρειάζεται οποιαδήποτε εικασία σχετικά με τη μελλοντική συμπεριφορά του αγαθού.

Τα παραπάνω μπορούν να επεκταθούν εύκολα σε συμβόλαια γραμμένα σε πολλά υποκείμενα αγαθά. Αν το συμβόλαιο είναι Αμερικάνικου τύπου τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επίσης δικαιώματα αγοράς και πώλησης Αμερικάνικου τύπου.

Υπάρχουν επίσης πολλοί άλλοι τρόποι ορισμού διαφορετικών δίκαιων τιμών. Δοθέντος πολυμεταβλητής συνάρτησης F ορίζουμε

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}^{writer}(a, b, \gamma_i, \delta_i) = \\ &F\left(D, \int_0^{\infty} (\Pi^{writer}(x))^- dx, \int_0^{K_{max}} (\Pi^{writer}(x))^+ dx, \int_0^{K_{max}} \Pi^{writer}(x) dx, \cdots, \right) \end{aligned}$$

Για ένα δεδομένο ποσό Y ο γράφων μπορεί να λύσει το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\begin{aligned} &\min \mathcal{F}^{writer}(a, b, \gamma_i, \delta_i) \\ \text{υπό την} \quad &aS_0 + b + \sum_{i=1}^{n}(\gamma_i C(K_i) + \delta_i P(K_i)) = Y \\ &\Pi^{writer}(x) \geq -D \text{ για όλα τα } x \geq 0 \end{aligned}$$

ενώ ο αγοραστής ένα παρόμοιο πρόβλημα

$$\begin{aligned}
& \min \mathcal{F}^{buyer}(a, b, \gamma_i, \delta_i) \\
\text{υπό την} \quad & aS_0 + b + \sum_{i=1}^{n}(\gamma_i C(K_i) + \delta_i P(K_i)) = -Y \\
& \Pi^{buyer}(x) \geq -D \text{ για όλα τα } x \geq 0
\end{aligned}$$

Τότε, μπορούμε να πούμε ότι η $Y^{\mathcal{F}}$ είναι η δίκαια τιμή αν

$$\min \mathcal{F}^{writer}(a, b, \gamma_i, \delta_i) = \min \mathcal{F}^{buyer}(a, b, \gamma_i, \delta_i)$$

Συμπέρασμα 6 *Εφόσον έχουμε ήδη ορίσει διαφορετικές δίκαιες τιμές συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει καμία δίκαιη τιμή για ένα δικαίωμα εκτός από την περίπτωση όπου όλοι οι ορισμοί οδηγούν σε μία μοναδική τιμή. Αλλά γνωρίζουμε ότι αν $D^* > 0$ τότε η δίκαιη τιμή Y^{D^*} είναι επίσης χωρίς ευκαιρία σίγουρου κέρδους. Θεωρώντας οποιαδήποτε άλλη δίκαια τιμή $Y^{\mathcal{F}}$ θα πρέπει να ελεγχθεί αν είναι. Ο αγοραστής ενός δικαιώματος θα επιλέξει ένα ορισμό ο οποίος θα δώσει μία τιμή κοντά στο Y^{buyer} ενώ ο γράφων θα επιλέξει ένα ορισμό ο οποίος θα δώσει μία τιμή κοντά στο Y^{writer}. Αν για κάποιες περιπτώσεις υπάρχει μία μοναδική δίκαια και μη ευκαιρίας σίγουρου κέρδους τιμή τότε αυτή είναι η τιμή Y^{D^*}.* □

Ερώτημα 7 *Σε ποιες περιπτώσεις η τιμή Y^{D^*} είναι η μοναδική δίκαια και χωρίς ευκαιρία σίγουρου κέρδους τιμής; Ποιο είναι το σύνολο των δίκαιων και χωρίς ευκαιρία σίγουρου κέρδους τιμών συγκριτικά με το μη ευκαιρίας σίγουρο κέρδους διάστημα; Αν το σύνολο των δίκαιων και χωρίς ευκαιρία σίγουρου κέρδους τιμών είναι πολύ μικρότερο από το σύνολο των μη ευκαιρίας σίγουρου κέρδους τιμών τότε έχουμε υπολογίσει ένα περισσότερο εστιασμένο σύνολο πιθανών τιμών.*

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ 28 (Μοναδικότητα Δίκαιης Τιμής) *Η δίκαιη τιμή Y^{D^*} είναι η μοναδική από όλες τις δίκαιες τιμές η οποία εκ κατασκευής είναι και arbitrage free. Αυτό σημαίνει ότι οι επενδυτές μπορούν να υπολογίσουν αυτή την τιμή για να έχουν μια τάξη μεγέθους της αξίας του συμβολαίου η οποία θα είναι χρήσιμη στη διαδικασία διαπραγμάτευσης. Σημειώστε ότι οι «δίκαιες» τιμές των στοχαστικών μοντέλων (π.χ. Black-Scholes, Binomial) δεν είναι ούτε δίκαιες στον πραγματικό κόσμο (αφού τα προτεινόμενα αντισταθμιστικά χαρτοφυλάκια δεν είναι πραγματοποιήσιμα στην πράξη) αλλά ούτε και arbitrage free αφού, εν γένει, δε βρίσκονται στο διάστημα των arbitrage free τιμών. Προκειμένου να επιλυθεί ένα πραγματικό φαινόμενο με μαθηματικά εργαλεία θα πρέπει πρώτα να γίνει η κατάλληλη μαθηματική μοντελοποίηση και στη συνέχεια η επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων. Στα παραπάνω μοντέλα, ενώ η επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων τους είναι σωστή, το κομμάτι της μοντελοποίησης του φαινομένου είναι λάθος, για αυτό προκύπτουν μη φυσικά αποτελέσματα.* ***Σημειώστε ότι η προσπάθεια κατασκευής αυτών των αντισταθμιστικών χαρτοφυλακίων στην πράξη οδηγεί τον επενδυτή στο να «πουλά φθηνά - αγοράζει ακριβά» κάτι το οποίο βεβαίως αντιβαίνει στην κοινά αποδεκτή αρχή «πούλα ακριβά - αγόρασε φθηνά». Αυτό θα πρέπει να γίνει προφανώς κατανοητό από τον επενδυτή αλλά και από τον φοιτητή!*** □

Θεωρώντας το πρόβλημα τιμολόγησης δικαιωμάτων για ένα δικαίωμα με κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις με πεπερασμένους κλάδους κάποιος μπορεί να βρει την τιμή Y^{D^*}, αν υπάρχει, και το χωρίς ευκαιρία σίγουρου κέρδους διάστημα (Y^{buyer}, Y^{writer}). Αυτή η τιμή είναι χωρίς ευκαιρία σίγουρου κέρδους και δίκαια υπό κάποια έννοια. Έχοντας αυτήν την τιμή υπόψιν, οι επενδυτές μπορούν να τη χρησιμοποιήσουν στο στάδιο της διαπραγμάτευσης. Είναι εξαιρετικά χρήσιμο στην πράξη να γνωρίζουμε το Y^{D^*} διότι έχουμε γνώση του μεγέθους της τάξης της τιμής του δικαιώματος καθώς και ένα εφικτό χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης στη διάθεσή μας. Η πραγματική τιμή θα διαμορφωθεί από το νόμο προσφοράς και ζήτησης! Θυμηθείτε ότι είναι δύσκολο να προβλεφθεί η πραγματική

τιμή του δικαιώματος εφόσον εξαρτάται, τουλάχιστον από την τιμή του αγαθού. Η πρόβλεψη της τιμής του αγαθού είναι πολύ δύσκολη.
Πωλώντας/αγοράζοντας ένα δικαίωμα στην τιμή Y ο γράφων/αγοραστής μπορεί να κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο υποδεικνύεται από την τιμή Y^{D^*}, δηλαδή με την μικρότερη πιθανή ζημιά. Αλλά μπορεί να επενδύσει αυτό το ποσό όπως επιθυμεί, κατασκευάζοντας για παράδειγμα ένα χαρτοφυλάκιο λύνοντας ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης όπως το 1.3 για ένα αγαθό ή ένα πρόβλημα όπως το 1.11 για ένα δικαίωμα επί πολλών αγαθών. Σε αυτήν την περίπτωση οι συναρτήσεις κέρδους θα πρέπει να συμπεριλαμβάνουν επίσης την αποπληρωμή του δικαιώματος.

Ερωτημα **29 (Path Dependent Options)** *Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα είναι η αντιστάθμιση path dependent options. Μια πιθανή προσέγγιση σε αυτό το πρόβλημα είναι η εφαρμογή μιας κατάλληλης στρατηγικής «πουλάω ακριβά - αγοράζω φθηνά» όπου οι παράμετροι της στρατηγικής αυτής θα εξαρτώνται από τη μορφή της συνάρτησης απολαβής. Για παράδειγμα, ο πωλητής, θα μπορούσε να υπολογίσει το μικρότερο Y για το οποίο υπάρχουν οι κατάλληλες παράμετροι για την επιλεγμένη στρατηγική «πουλάω ακριβά - αγοράζω φθηνά» έτσι ώστε*

$$\mathbb{E}(a_n S_{t_n} + b_n) \geq \mathbb{E} f(S_0, S_1, \cdots, S_{t_n}) \tag{1.20}$$

όπου f είναι η συνάρτηση απολαβής του path dependent option. Για να εφαρμοσθεί η παραπάνω ιδέα ο επενδυτής θα πρέπει να κάνει μια υπόθεση για τη μελλοντική κίνηση της μετοχής η οποία να περιλαμβάνει ιδιαιτέρως τη μελλοντική διακύμανση. Προφανώς, η απλούστερη τέτοια υπόθεση είναι ότι ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown με κάποιες παραμέτρους. Υπολογίζοντας την παραπάνω τιμή Y θα έχει μια τάξη μεγέθους της αξίας αυτού του συμβολαίου η οποία θα είναι χρήσιμη στο στάδιο της διαπραγμάτευσης. Θα έχει όμως και μια δυναμική στρατηγική που μπορεί να ακολουθήσει η οποία είναι σε διακριτό χρόνο και ταυτόχρονα ρεαλιστική προκειμένου να αντισταθμίσει, εν μέρει, το ρίσκο που ανέλαβε.
Ασφαλώς η παραπάνω ιδέα μπορεί να γενικευθεί συμπεριλαμβάνοντας και όλα τα διαθέσιμα call and put options με κατάλληλο τρόπο. □

Υπάρχουν αρκετά ακόμη ερωτήματα τα οποία προκύπτουν από ρεαλιστικά χρηματοοικονομικά προβλήματα, δείτε [4], προτού μελετήσουμε θεωρητικά χρηματοοικονομικά προβλήματα!
Στη σελίδα του εργαστηρίου https://www.samos.aegean.gr/actuar/nick/ActFinLab.htm μπορείτε να βρείτε κώδικες Python οι οποίοι υλοποιούν πολλά από τα παραπάνω, μεταξύ αυτών, τη θεωρία του Markowitz, τη θεωρία των Black-Scholes και διωνυμικού μοντέλου. Εφαρμόζοντας τη θεωρία του Markowitz θα διαπιστώσετε ότι τα αποτελέσματα είναι συνάρτηση του πλήθους των ιστορικών δεδομένων. Επομένως, η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι επίσης συνάρτηση των παρελθοντικών δεδομένων και ως εκ τούτου ο επενδυτής δεν είναι κατοχυρωμένος με κανένα τρόπο. Παρόμοια, εφαρμόζοντας τη θεωρία των Black-Scholes και διωνυμικού μοντέλου διαπιστώνει κανείς ότι η μεταβλητότητα είναι συνάρτηση του πλήθους των παρελθοντικών δεδομένων. Η «δίκαιη» τιμή λοιπόν θα είναι επίσης συνάρτηση των δεδομένων, και ακόμη χειρότερα ο επενδυτής δεν έχει στα χέρια του μια υλοποιήσιμη στρατηγική αντιστάθμισης!

Βιβλιογραφία

[1] Halidias, Nikolaos and Stamatiou, Ioannis, *Stochastic Analysis: Financial Mathematics with Matlab®*, De Gruyter, 2026.

[2] N. Halidias, *A novel portfolio optimization method and its application to the hedging problem*, Monte Carlo Methods and Applications, vol. 30, no. 3, 2024, pp. 249-267.

[3] N. Halidias, *On the Option Pricing by the Binomial Model*, Asian J. Math. Appl. (2022) 2022:9.

[4] N. Halidias, *Modern Portfolio Theory*, ResearchGate, 2025.