Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

24/3/2023

Εργασία 2

On-line εκτίμηση άγνωστων παραμέτρων Μέθοδος Κλίσης- Μέθοδος Lyapunov

Μάθημα: Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων
Καθηγητής: Ροβιθάκης Γεώργιος

Όνομα: Τσιμπλιαρίδης Νικόλαος
ΑΕΜ: 9652
E-mail: tenikola@ece.auth.gr

Εαρινό εξάμηνο

2022-2023

Πίνακας περιεχομένων

Θέμα 1

Έχουμε το σύστημα: $\dot{x} = -a{\cdot}x + b{\cdot}u,\ \ x(0) = 0$, όπου:

x: Κατάσταση εισόδου

u: Είσοδος

α, b: Άγνωστες σταθερές που πρέπει να εκτιμηθούν on-line

Ερώτημα α) Σχεδιάστε έναν εκτιμητή πραγματικού χρόνου για a, b με την μέθοδο κλίσης και προσομοιώστε την λειτουργία του για u=10. (α=3, b=0.5)

Αρχικά θα πρέπει ο συντελεστής του x να είναι αρνητικά ημιορισμένος πίνακας για να είναι το σύστημα ευσταθές. Άρα: $-\alpha < 0 => \alpha > 0$, που ισχύει για το πραγματικό σύστημα, αφού α=3. Για να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο κλίσης θα πρέπει πρώτα να φέρουμε το σύστημα μας σε γραμμική παραμετρική μορφή:

$\dot{x} = -a{\cdot}x + b{\cdot}u \Leftrightarrow \dot{x} + a_m{\cdot}x = -a{\cdot}x + b{\cdot}u + a_m{\cdot}x \Leftrightarrow \dot{x} + a_m{\cdot}x = (a_m - a){\cdot}x + b{\cdot}u$

Μετασχηματισμός Laplace => $s \cdot X(s) + a_m \cdot X(s) = (a_m - a)\cdot X(s) + b\cdot U(s)$ =>

$(s + a_m)\cdot X(s) = (a_m - a)\cdot X(s) + b\cdot U(s) \Leftrightarrow X(s) = \frac{1}{(s+a_m)}\cdot((a_m - a)\cdot X(s) + b\cdot U(s))$

Οπότε καταλήγουμε στην μορφή: $X = \theta^{*T}\cdot\varphi$, όπου:

$$\theta^{*T} = [a_m - a \quad b] \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \varphi = \begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{1}{(s+a_m)}\cdot X\\ \dfrac{1}{(s+a_m)}\cdot U\end{bmatrix}$$

Άρα προκύπτει ότι και η εκτίμηση μας θα έχει την μορφή: $\hat{X} = \hat{\theta}^T\cdot\varphi$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις θα ορίσουμε το σφάλμα αναγνώρισης ως την διαφορά X και $\hat{X}$:

$e = X - \hat{X} = \theta^{*T}\cdot\varphi - \hat{\theta}^T\cdot\varphi = \left(\theta^{*T} - \hat{\theta}^T\right)\cdot\varphi => e = -\tilde{\theta}\cdot\varphi$, όπου:

$\tilde{\theta} = \hat{\theta}^T - \theta^{*T}$, είναι το παραμετρικό σφάλμα.

Η μέθοδος κλίσης για την εύρεση της αναδρομικής εκτίμησης $\hat{\theta}$, στηρίζεται στην ελαχιστοποίηση ως προς $\hat{\theta}$ κατάλληλα ορισμένης συνάρτησης κόστους e. Επιλέγουμε συνάρτηση κόστους:

$$K(\hat{\theta}) = \frac{e^2}{2} = \frac{(y - \hat{\theta}^T\cdot\varphi)^2}{2} \ \ \kappa\alpha\iota\ \theta\acute{\varepsilon}\lambda o\upsilon\mu\varepsilon\ \tau o\ argmin_\theta K(\hat{\theta})$$

Σύμφωνα με την μέθοδο κλίσης: $\dot{\hat{\theta}} = -\gamma\cdot\nabla K(\hat{\theta}) = \gamma\cdot e\cdot\varphi$,

$\mu\varepsilon\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}\ \gamma > 0$, ενώ επιλέγουμε και σαν αρχικό $\hat{\theta}(0) = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

Άρα τελικά: $\hat{a} = a_m - \hat{\theta}_1 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \hat{b} = \hat{\theta}_2$, όπου $\hat{\theta} = \begin{bmatrix}\hat{\theta}_1\\ \hat{\theta}_2\end{bmatrix}$,

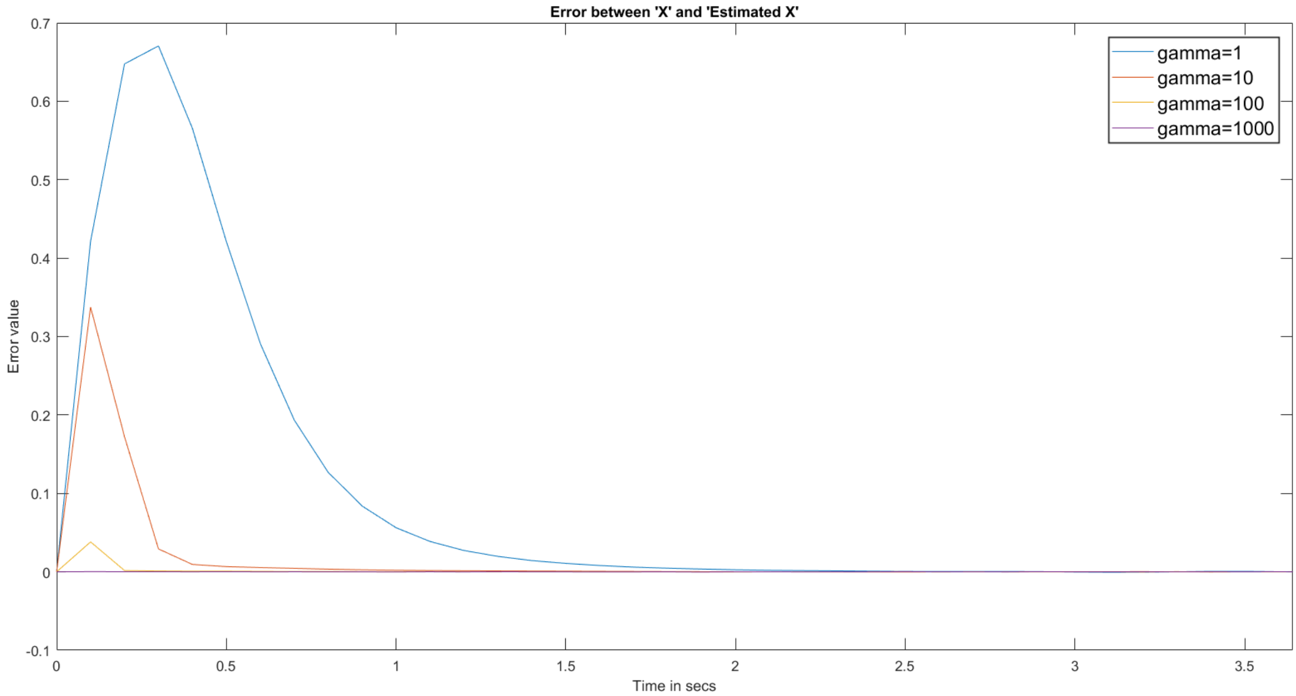
Οπότε θέτοντας $\begin{cases} x_1 = \dot{X} \\ x_2 = \dot{\varphi}_1 \\ x_3 = \dot{\varphi}_2, \\ x_4 = \dot{\hat{\theta}}_1 \\ x_5 = \dot{\hat{\theta}}_2 \end{cases}$ προκύπτει: $\begin{cases} x_1 = -a\cdot X + b\cdot U \\ x_2 = a_m\cdot\varphi_1 + X \\ x_3 = a_m\cdot\varphi_2 + X\ , \\ x_4 = \gamma\cdot e\cdot\varphi_1 \\ x_5 = \gamma\cdot e\cdot\varphi_2 \end{cases}$

έχοντας πάρει όλες τις αρχικές συνθήκες ίσες με μηδέν. Θα χρησιμοποιήσουμε μία συνάρτηση ode για να πάρουμε τις λύσεις του παραπάνω συστήματος ανάλογα με τις τιμές που ορίζουμε για τις μεταβλητές.

Είναι γνωστά από την εκφώνηση ότι: $\alpha = 3, b = 0.5, u = 10$

Το a_m θέλουμε να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στο α, άρα ιδανικά θα ίσχυε $a_m = 3$, δεν είναι όμως δυνατόν να γνωρίζουμε από πριν το α, οπότε θα θεωρήσουμε ότι ξέρουμε στο περίπου πόσο πρέπει να είναι και αυθαίρετα θα θέσουμε $a_m = 4$.

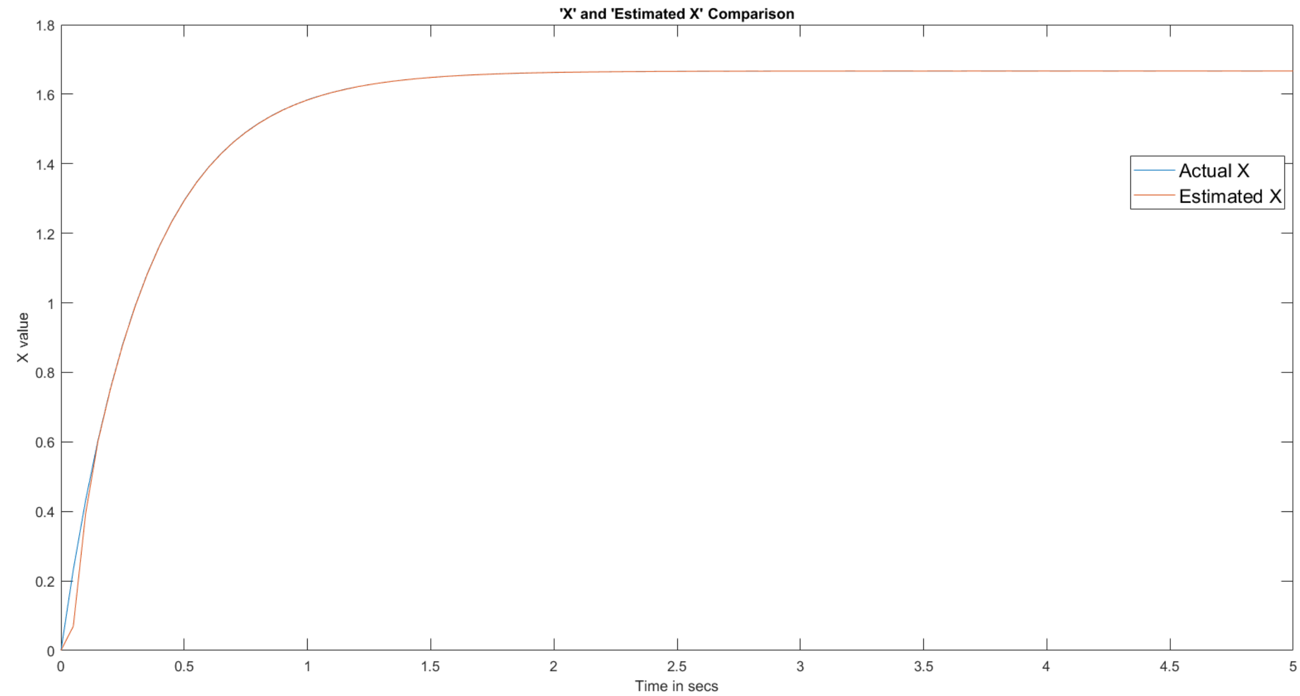
Άρα κρατώντας τα παραπάνω σταθερά θα δούμε πιο γ έχει την καλύτερη απόδοση:



Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται το γ, τόσο καλύτερη η εκτίμηση μας και τόσο πιο γρήγορα φτάνουμε σε πολύ κοντινές στο X τιμές μετά το αρχικό σφάλμα. Παρόλα αυτά, για γ=1000 ήταν εμφανής η χρονική διαφορά που έκανε ο κώδικας να τρέξει, άρα θα κρατήσουμε γ=100.

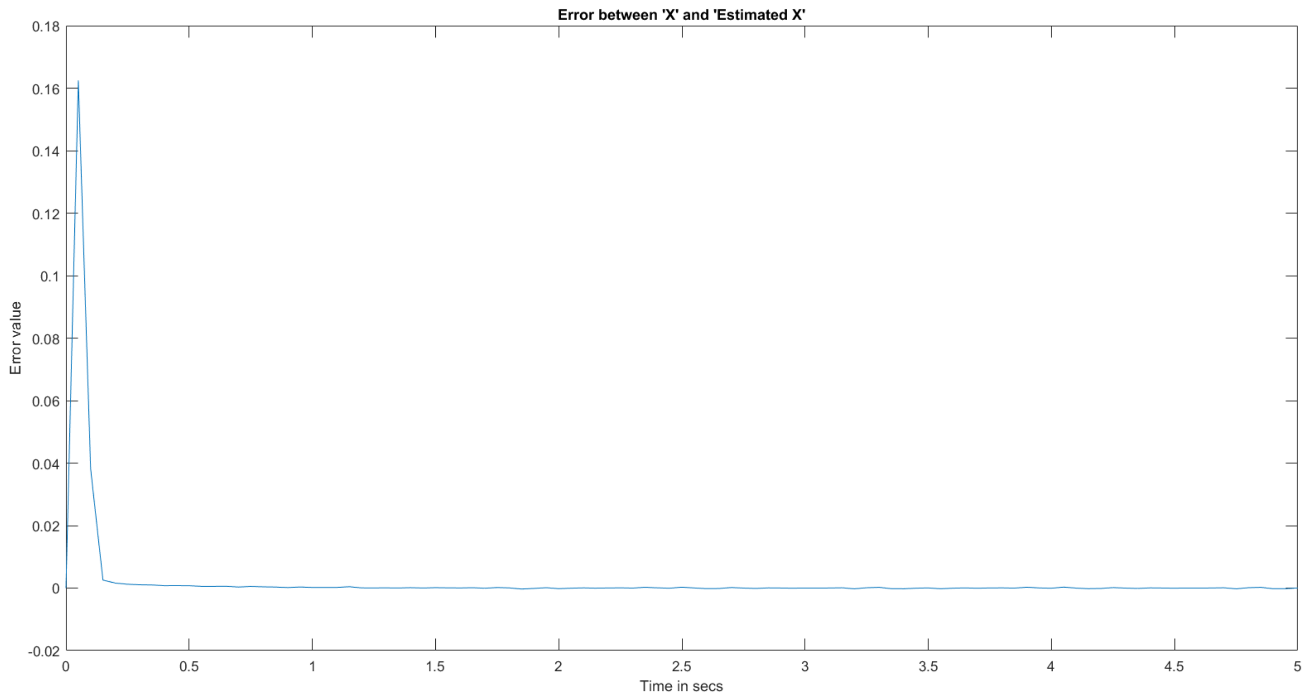
Για τις παραπάνω τιμές προκύπτουν:

1) Γραφική παράσταση X και $\hat{X}$:



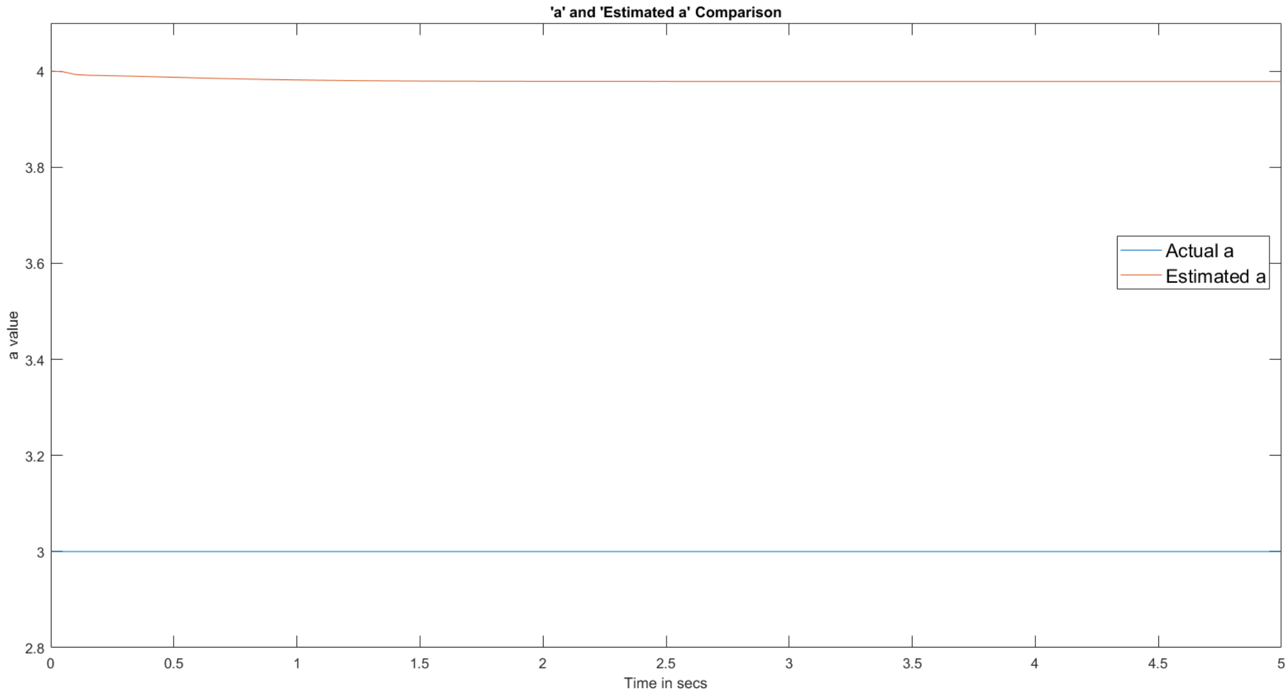
Όπως βλέπουμε οι τιμές είναι πολύ κοντά, με εξαίρεση ένα διάστημα στην αρχή.

2) Error μεταξύ X και $\hat{X}$:

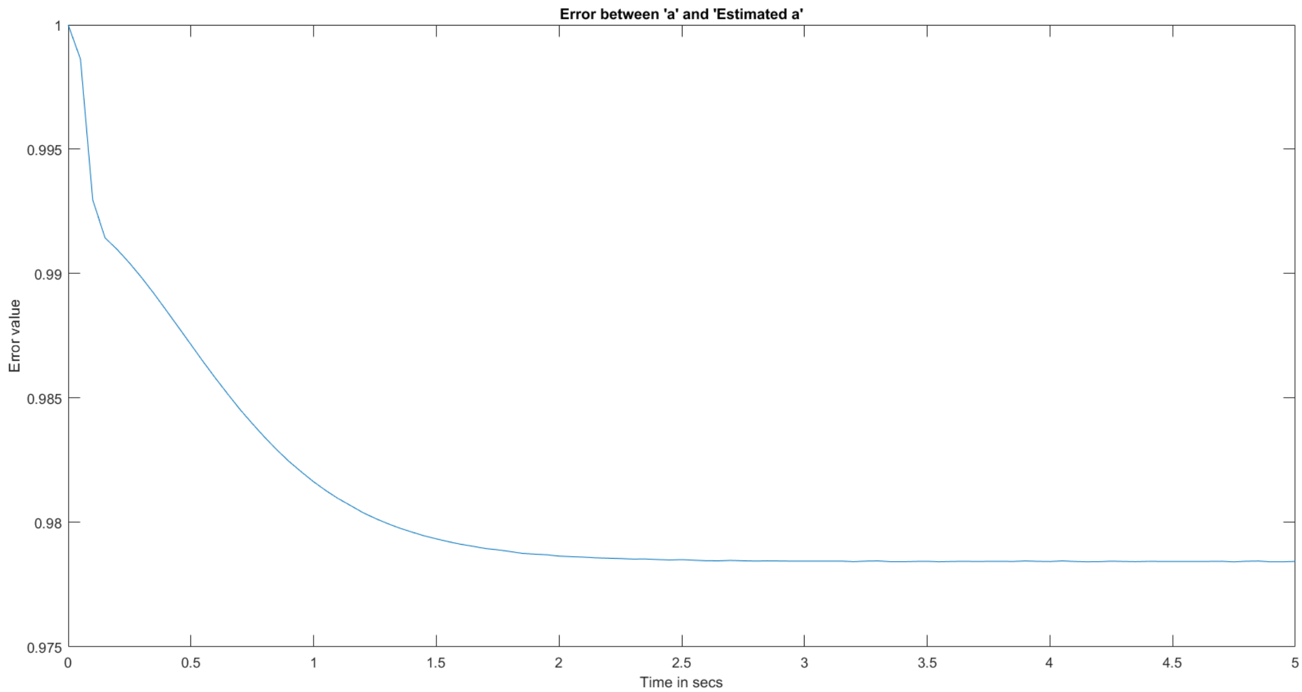


Επιβεβαιώνεται και από την γραφική παράσταση του σφάλματος, ότι μόνο για 0 έως 0.2sec υπάρχει κάποια απόκλιση.

3) Γραφική παράσταση α και $\hat{\alpha}$:

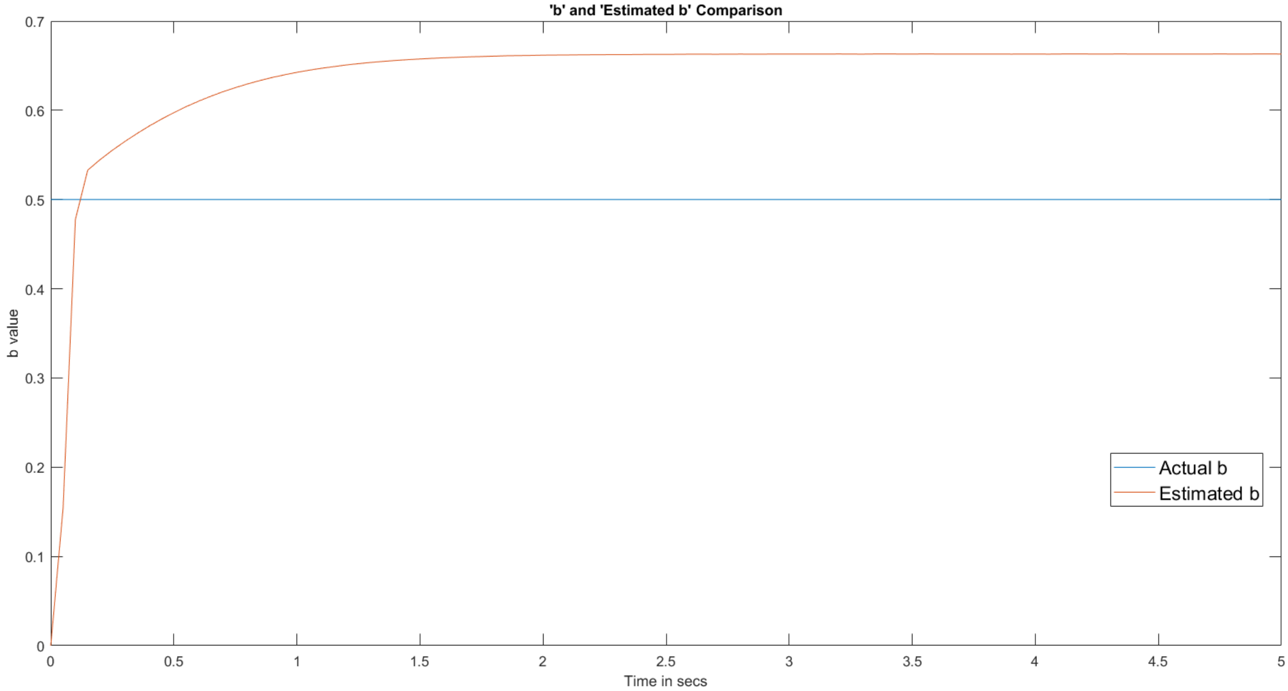


4) Error μεταξύ α και $\hat{\alpha}$:

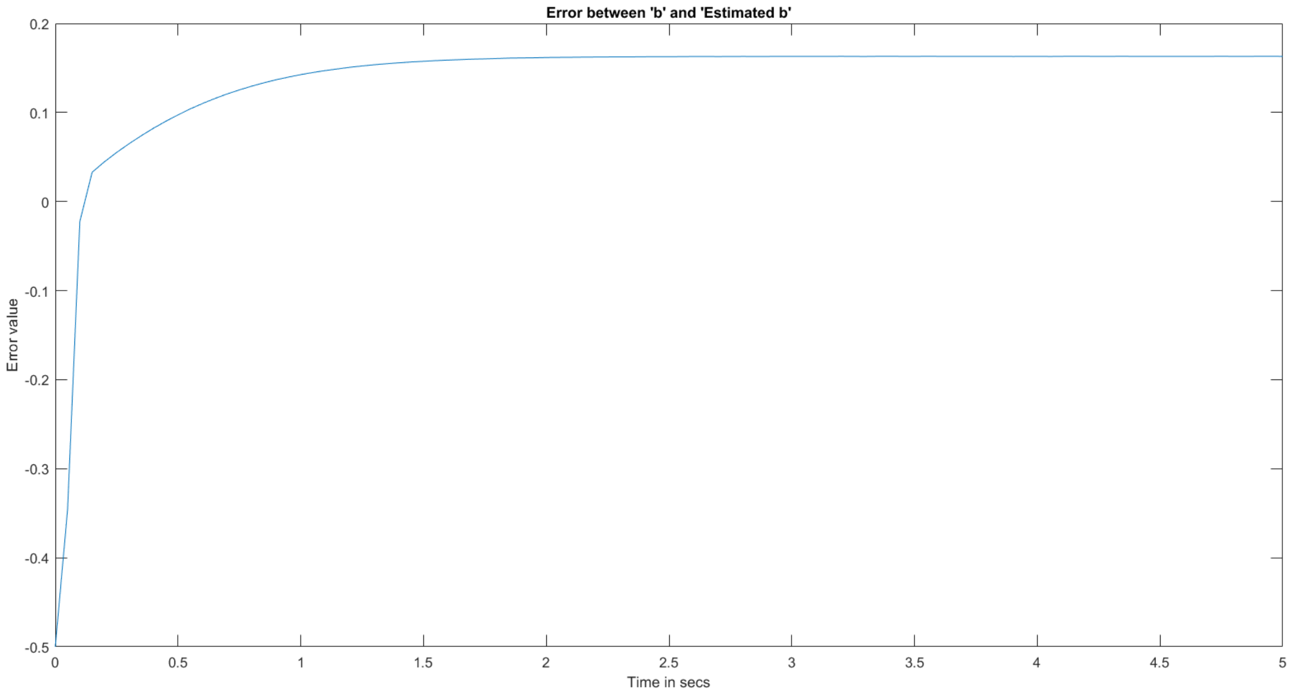


Όπως φαίνεται από τα διαγράμματα η εκτίμηση για α δεν έχει μεγάλη ακρίβεια, αλλά δεν φαίνεται να επηρεάζει την ποιότητα της εκτίμησης για X.

5) Γραφική παράσταση b και $\hat{b}$:



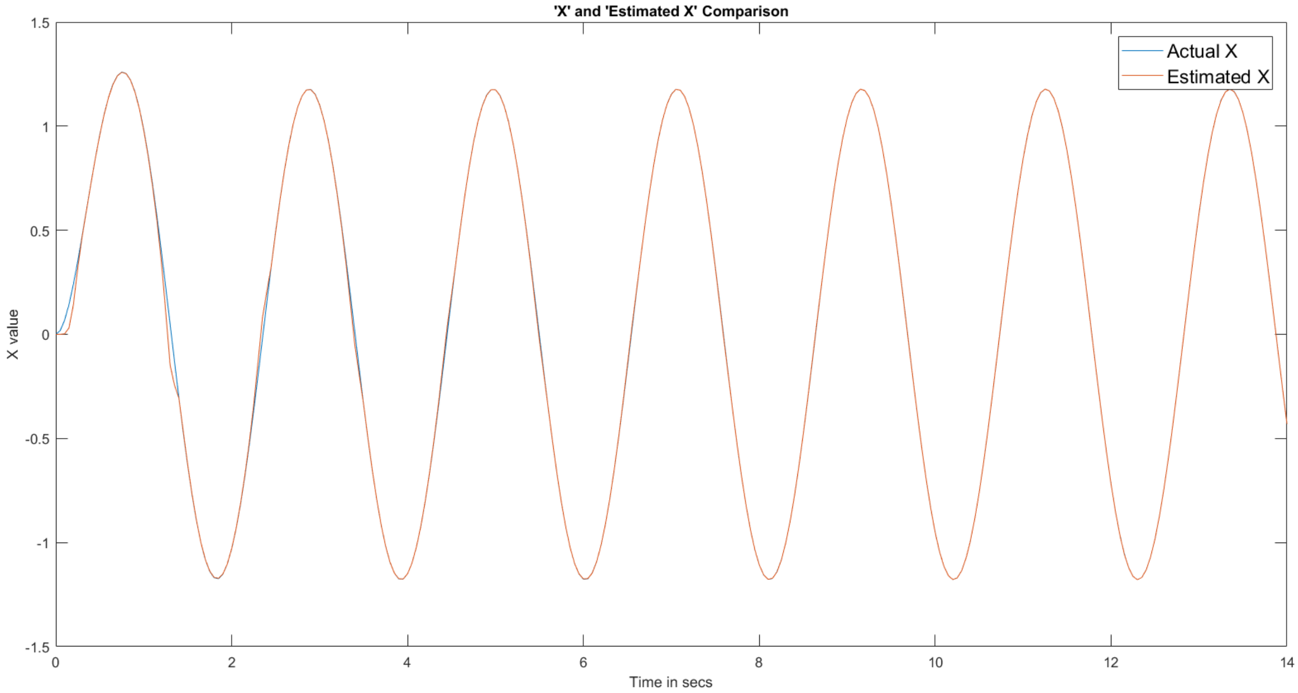
6) Error μεταξύ b και $\hat{b}$:



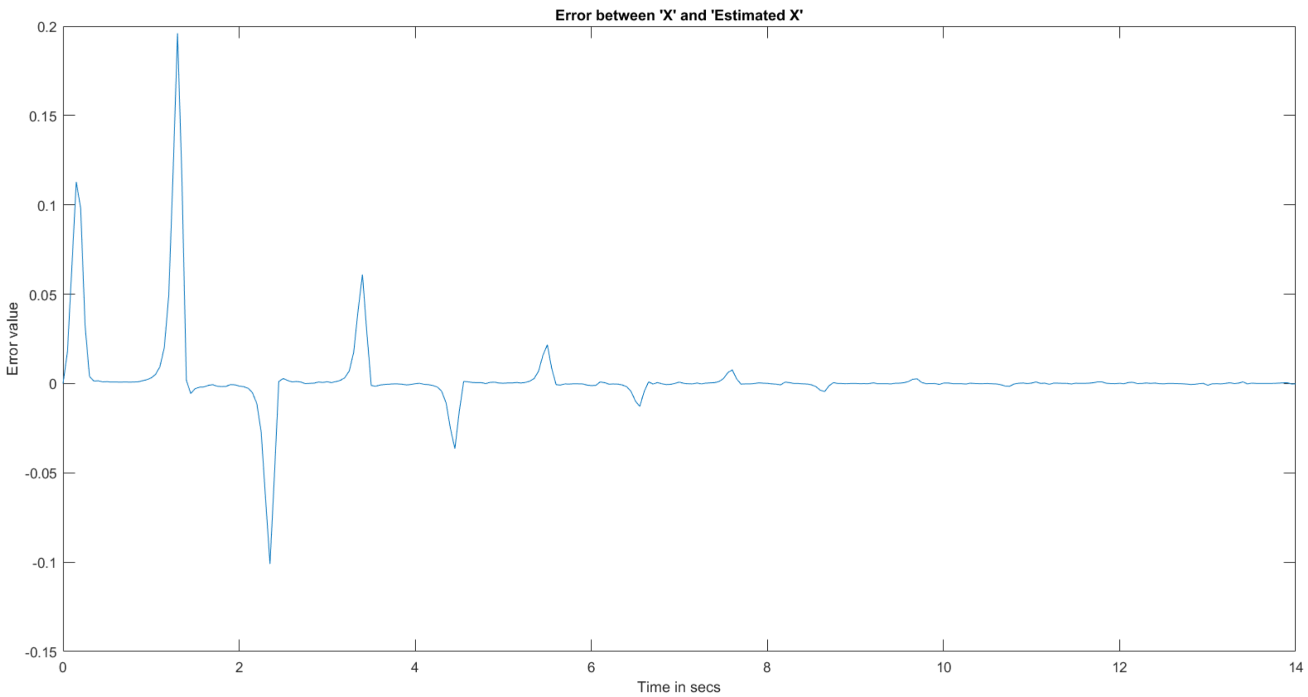
Ερώτημα β) Σχεδιάστε έναν εκτιμητή πραγματικού χρόνου για a, b με την μέθοδο κλίσης και προσομοιώστε την λειτουργία του για u=10sin(3t). (α=3, b=0.5)

Όπως και πάνω α=3, b=0.5, $a_m = 4$, γ = 100. Οπότε προκύπτουν τα εξής:

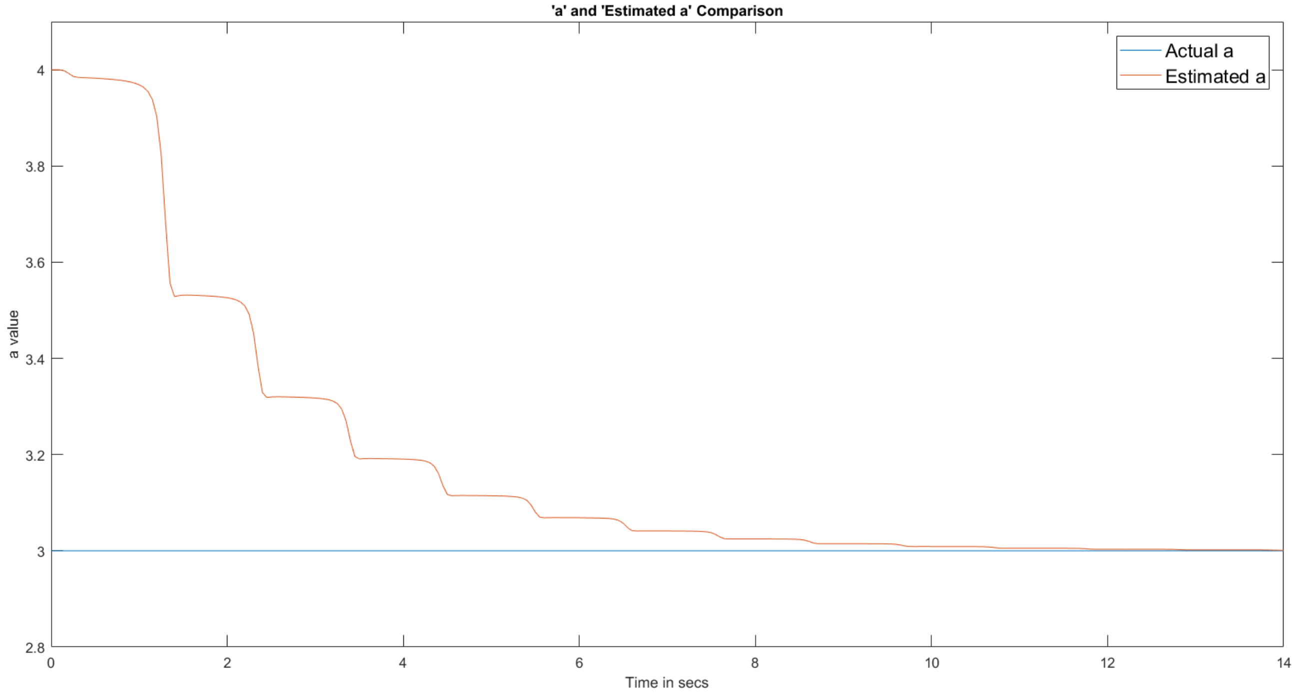
1) Γραφική παράσταση X και $\hat{X}$:



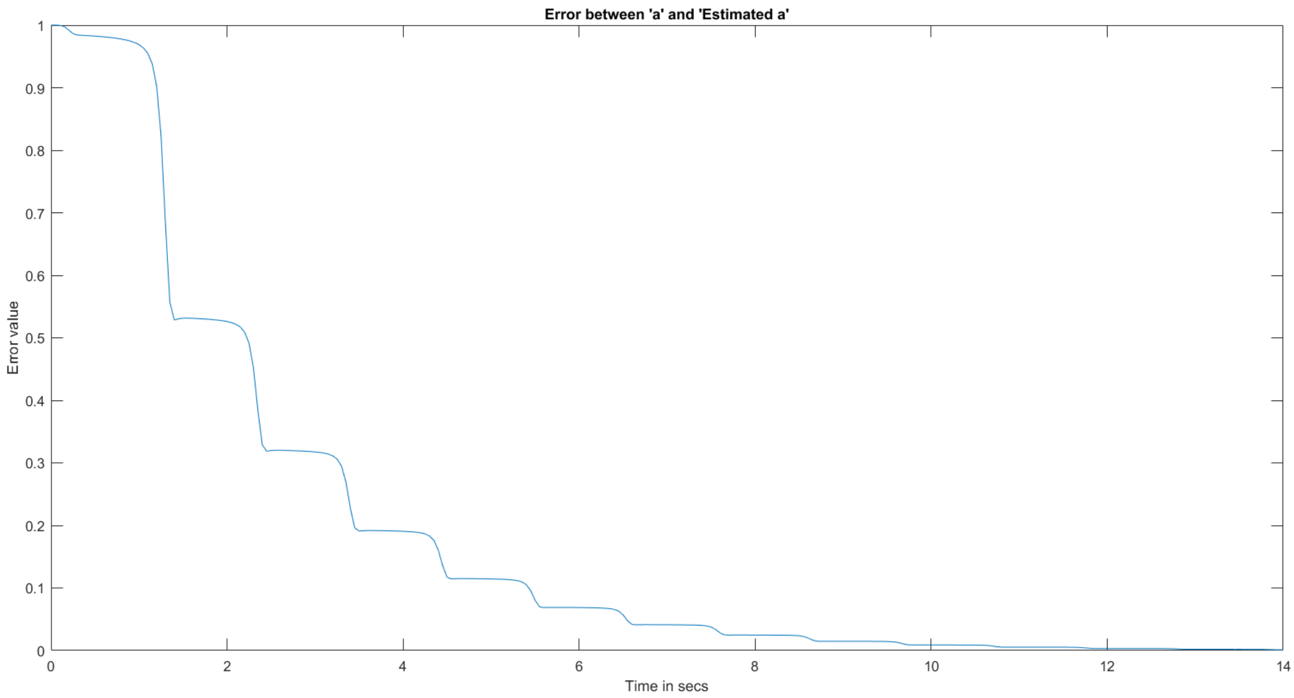
2) Error μεταξύ X και $\hat{X}$:



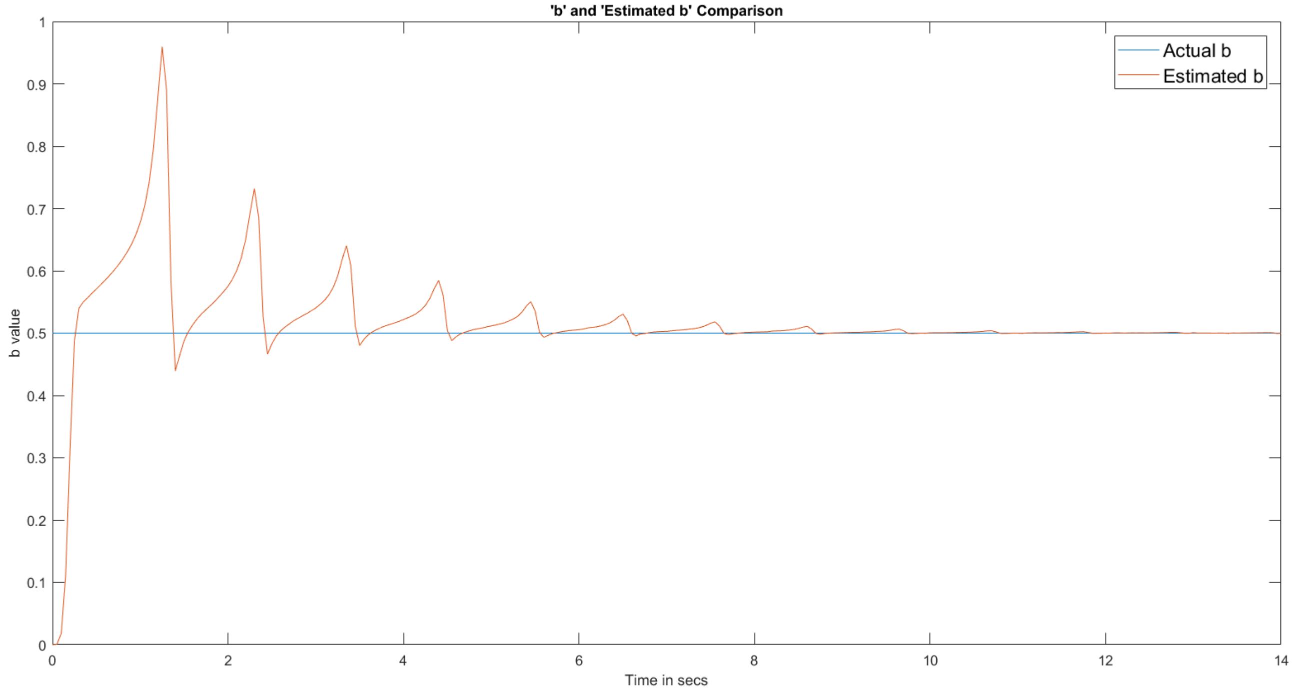
3) Γραφική παράσταση α και $\hat{\alpha}$:



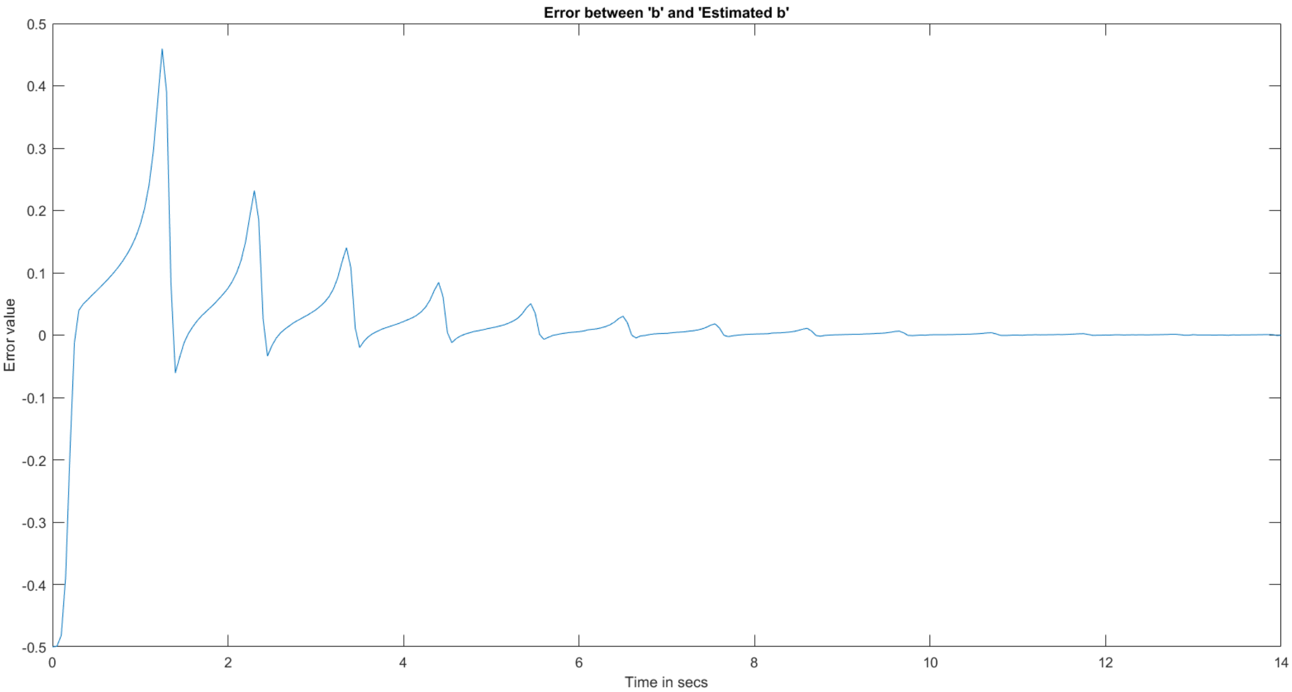
4) Error μεταξύ α και $\hat{\alpha}$:



5) Γραφική παράσταση b και $\hat{b}$:



6) Error μεταξύ b και $\hat{b}$:



Στην περίπτωση όπου η έξοδος είναι ημιτονοειδής παρατηρούμε ότι το σύστημα θέλει λίγο παραπάνω χρόνο για να σταθεροποιήσει τις εκτιμήσεις του, αλλά προσεγγίζει τα α και b με μεγαλύτερη ακρίβεια. Φαίνεται ότι η μέθοδος κλίσης δουλεύει καλύτερα για ημιτονοειδή είσοδο.

Θέμα 2

Σχεδιάστε έναν εκτιμητή πραγματικού χρόνου Lyapunov, με θόρυβο $\eta(t)=\eta_0\cdot\sin(2\pi f_t)$, με $\eta_0=0.5$ και f=40. Δημιουργήστε τις γραφικές παραστάσεις των $x, \hat{x}$ και τις διαφοράς αυτών καθώς και για α, b αντίστοιχα.

Ερώτημα α) Παράλληλης Δομής

Έχουμε σύστημα $\dot{x} = -a\cdot x + b\cdot u,\ \ x(0)$, που μπορεί να γραφτεί και ως: $\dot{x} = -\theta_1\cdot x + \theta_2\cdot u,\ \ x(0)$
Ορίζουμε το σύστημα αναγνώρισης: $\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1\cdot x + \hat{\theta}_2\cdot u,\ \ \hat{x}(0)$

Το σφάλμα για παράλληλη δομή είναι: $\dot{e} = -\theta_1\cdot x + \theta_2\cdot u + \hat{\theta}_1\hat{x} - \hat{\theta}_2 u + (\theta_1\hat{x} - \theta_1\hat{x}) \Leftrightarrow$

$\dot{e} = -\theta_1\cdot(x-\hat{x}) + \hat{x}\cdot\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right) - u\cdot(\hat{\theta}_2 - \theta_2) \Leftrightarrow$

$\dot{e} = -\theta_1\cdot e + \tilde{\theta}_1\cdot\hat{x} - \tilde{\theta}_2\cdot u,$ με $\tilde{\theta}_1 = \left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\ \textit{και}\ \tilde{\theta}_2 = \left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)$

Ορίζουμε συνάρτηση Lyapunov την $V = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2\gamma_1}\tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2\gamma_2}\tilde{\theta}_2^2\ \textit{με}\ \gamma_1, \gamma_2\ \textit{θετικές σταθερές}$, οπότε υπολογίζουμε ότι:

$$\dot{V} = -\theta_1\cdot e^2 - \tilde{\theta}_2\cdot e\cdot u + \tilde{\theta}_1\cdot e\cdot\hat{x} + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\cdot\dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\cdot\dot{\tilde{\theta}}_2$$

Επιλέγουμε:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\theta}}_1 = \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1\cdot e\cdot\hat{x} \\ \dot{\tilde{\theta}}_2 = \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2\cdot e\cdot x \end{cases}$$

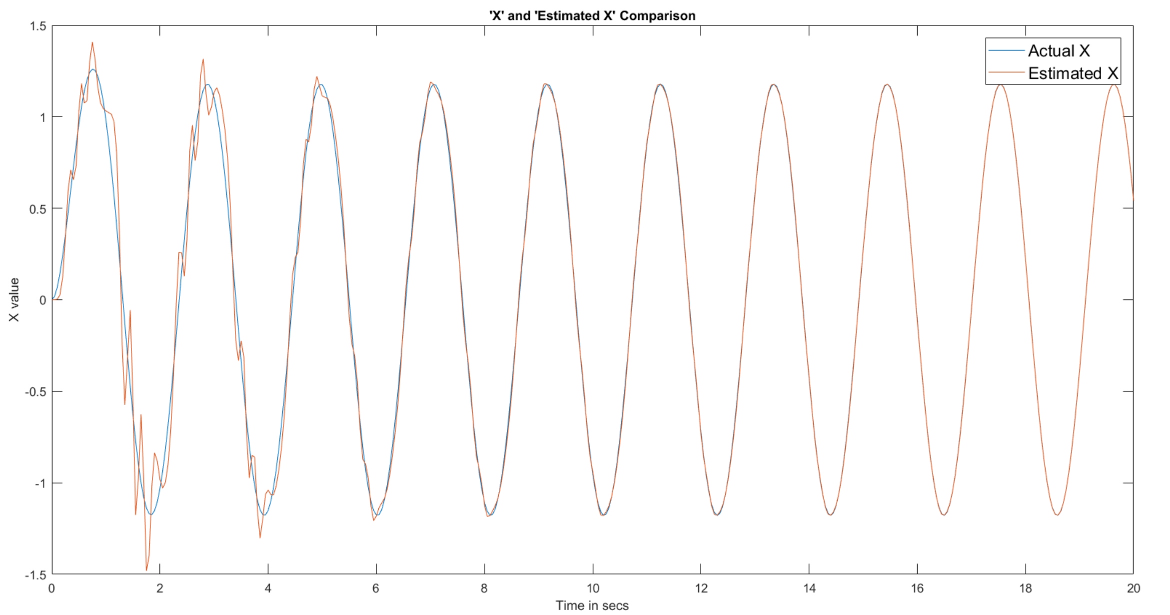
Έχουμε θόρυβο οπότε $e = x + \eta - \hat{x}$

Άρα προκύπτει:

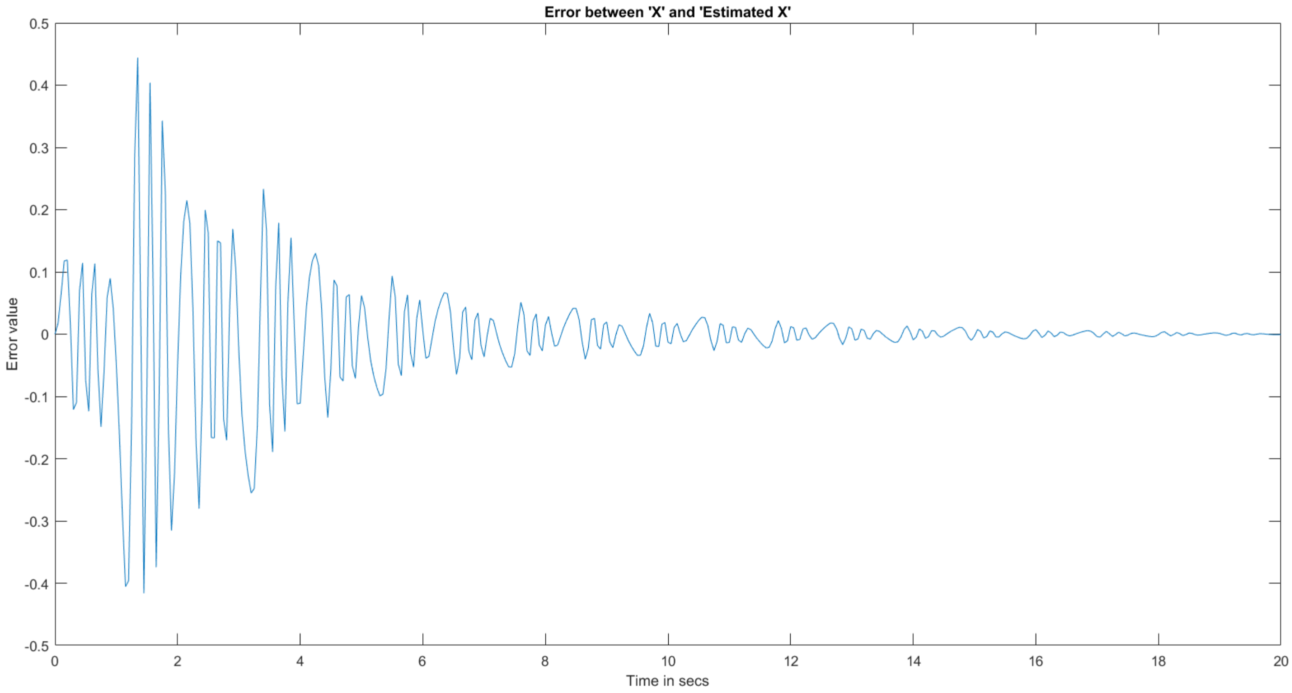
$$\begin{cases} \dot{x} = -a\cdot x + b\cdot u \\ \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1\cdot\hat{x}\cdot(x + \eta - \hat{x}) \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2\cdot u\cdot(x + \eta - \hat{x}) \\ \dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1\cdot\hat{x} + \hat{\theta}_2\cdot u \end{cases}$$

Επιλέγουμε $\gamma_1 = \gamma_2 = 10$, οπότε προκύπτουν τα εξής:

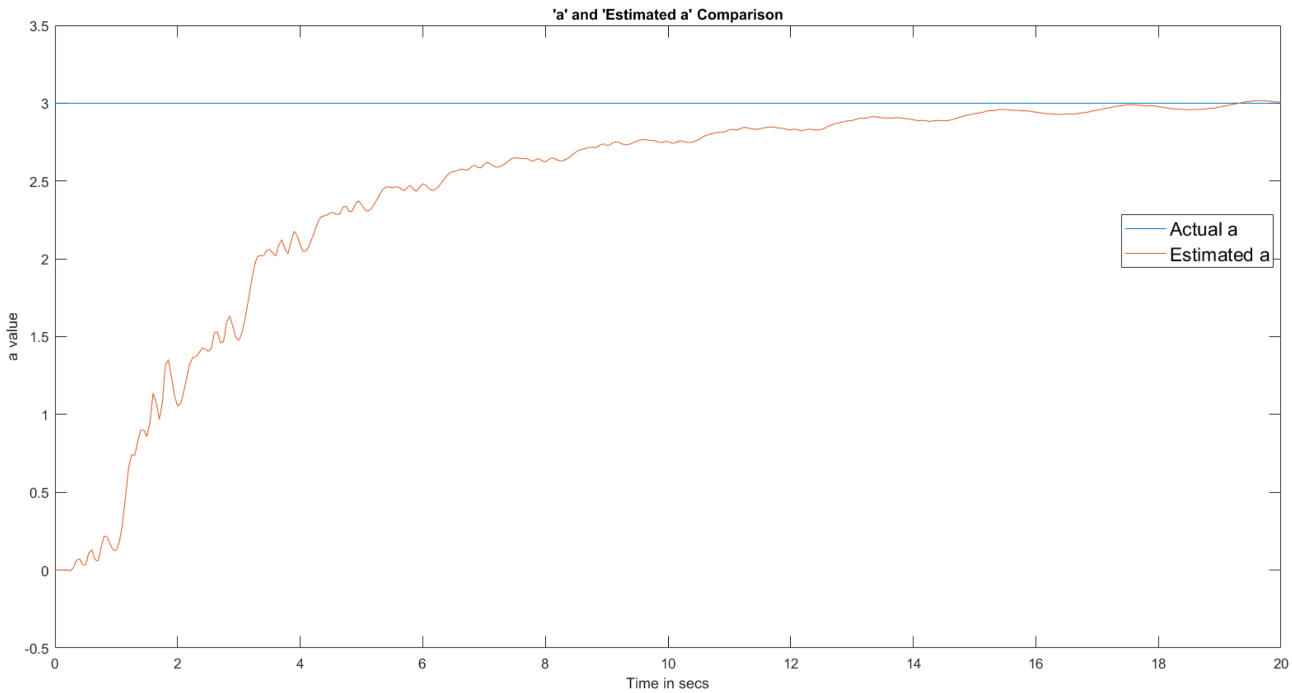
1) Γραφική παράσταση X και $\hat{X}$:



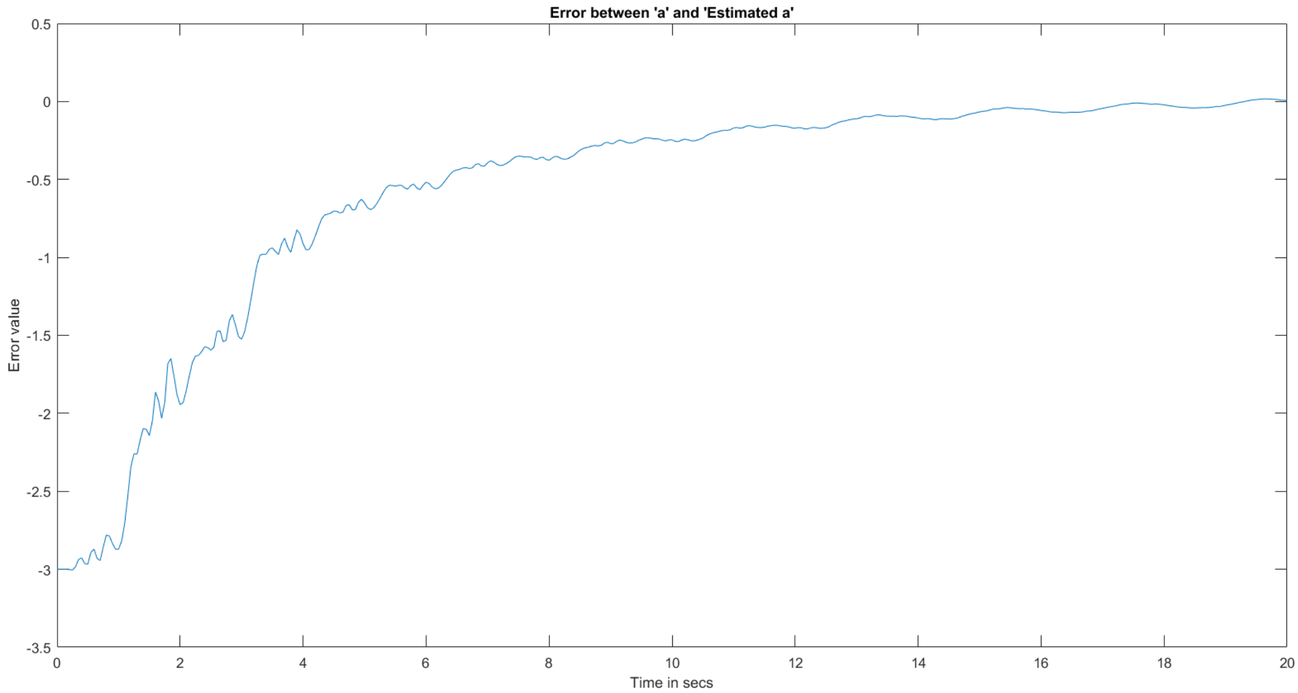
2) Error μεταξύ X και $\hat{X}$:



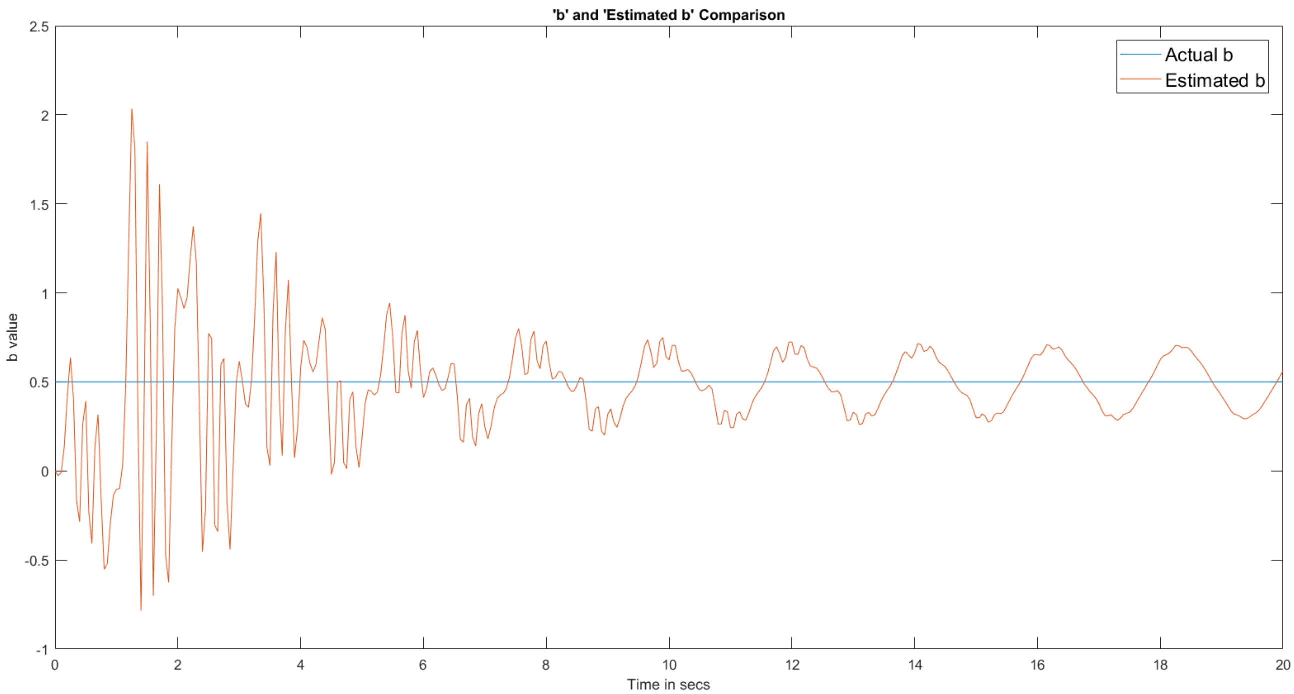
3) Γραφική παράσταση α και $\hat{\alpha}$:



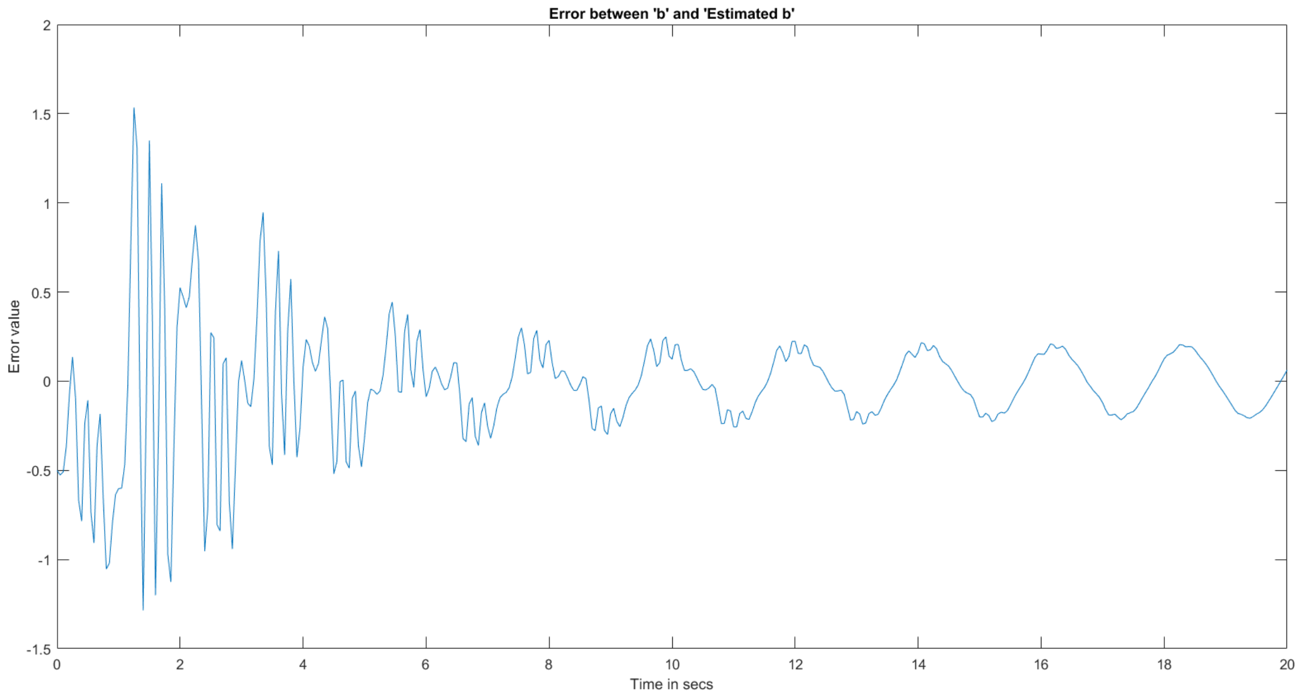
4) Error μεταξύ α και $\hat{\alpha}$:



5) Γραφική παράσταση b και $\hat{b}$:

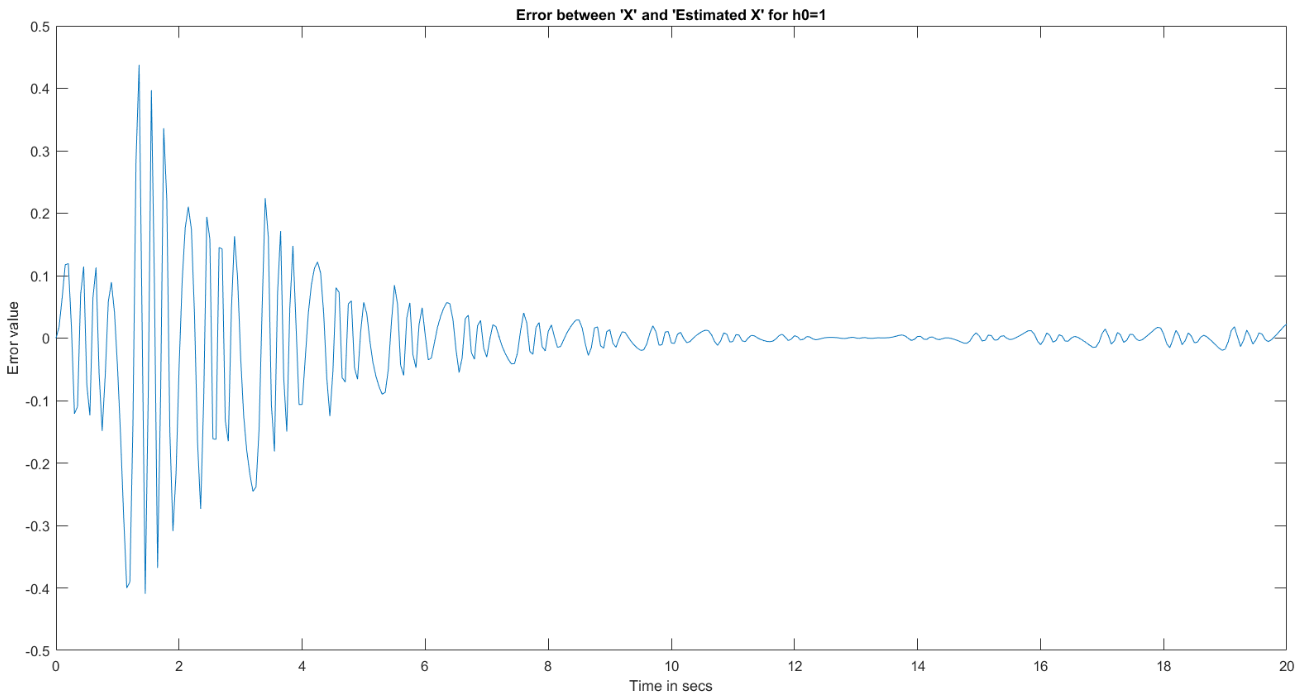


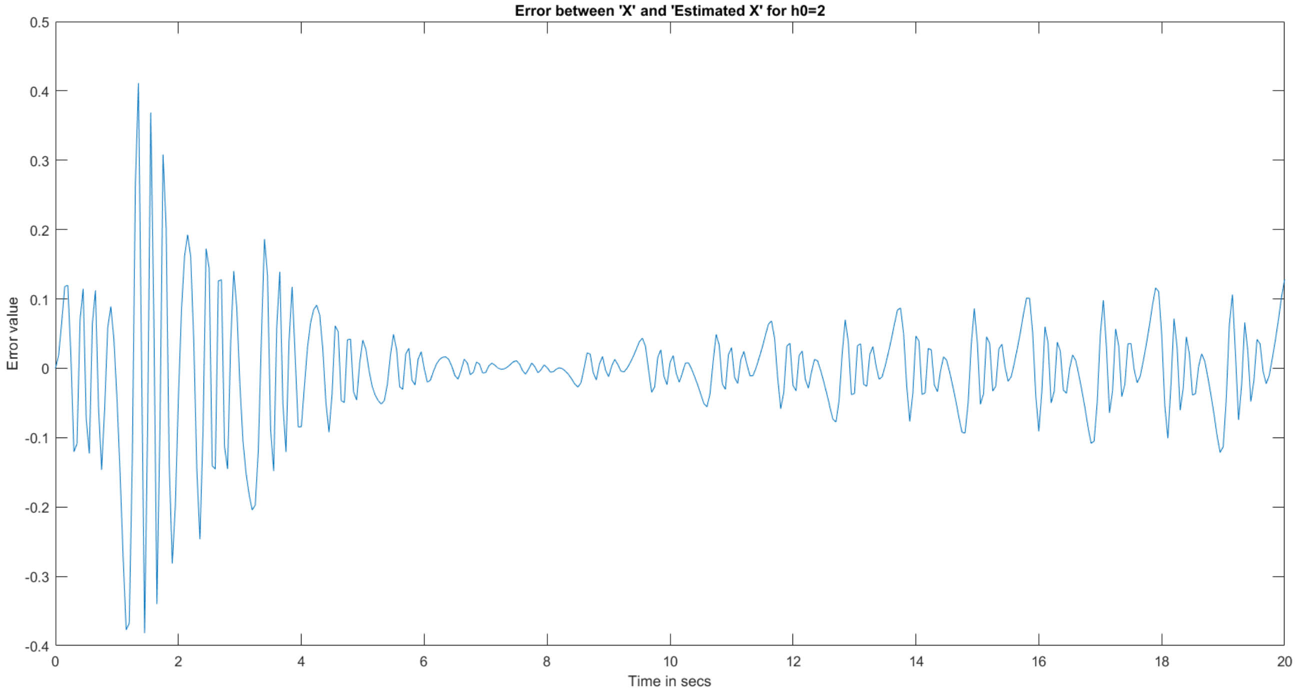
6) Error μεταξύ b και $\hat{b}$:

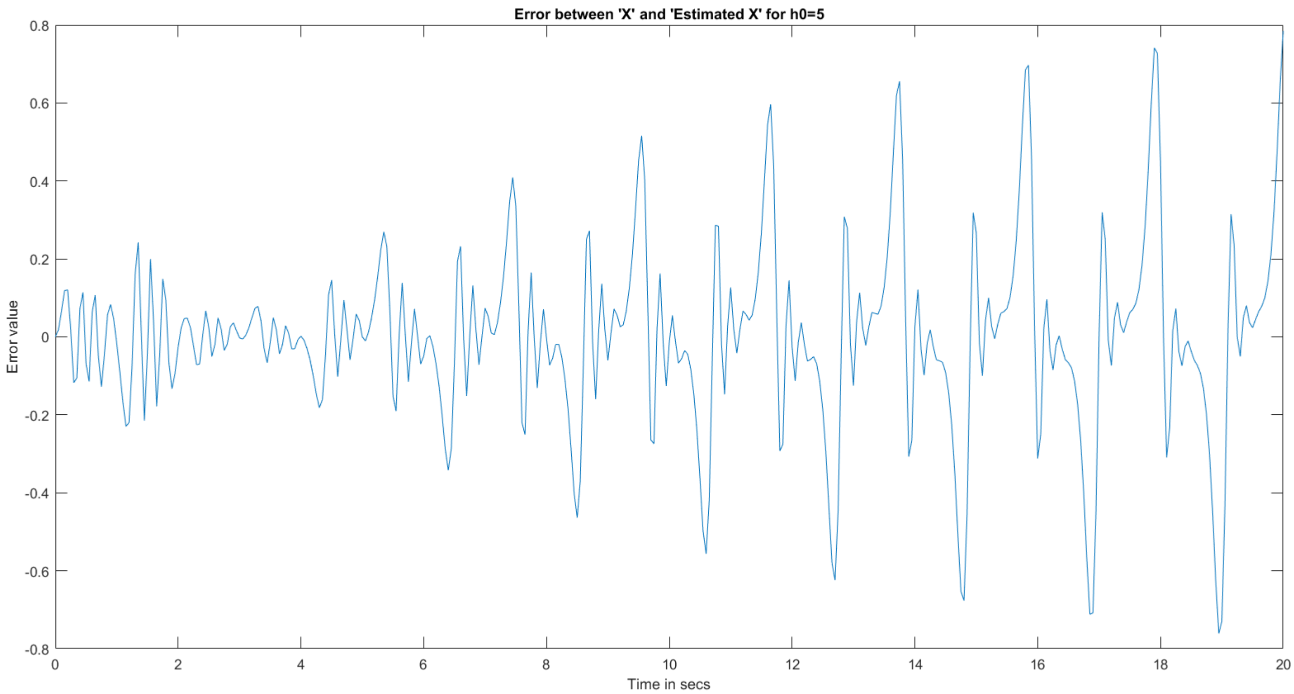


Αύξηση h_0

Θα δούμε το σφάλμα μεταξύ x και $\hat{x}$ για $h_0 = 1$, $h_0 = 2$, $h_0 = 5$





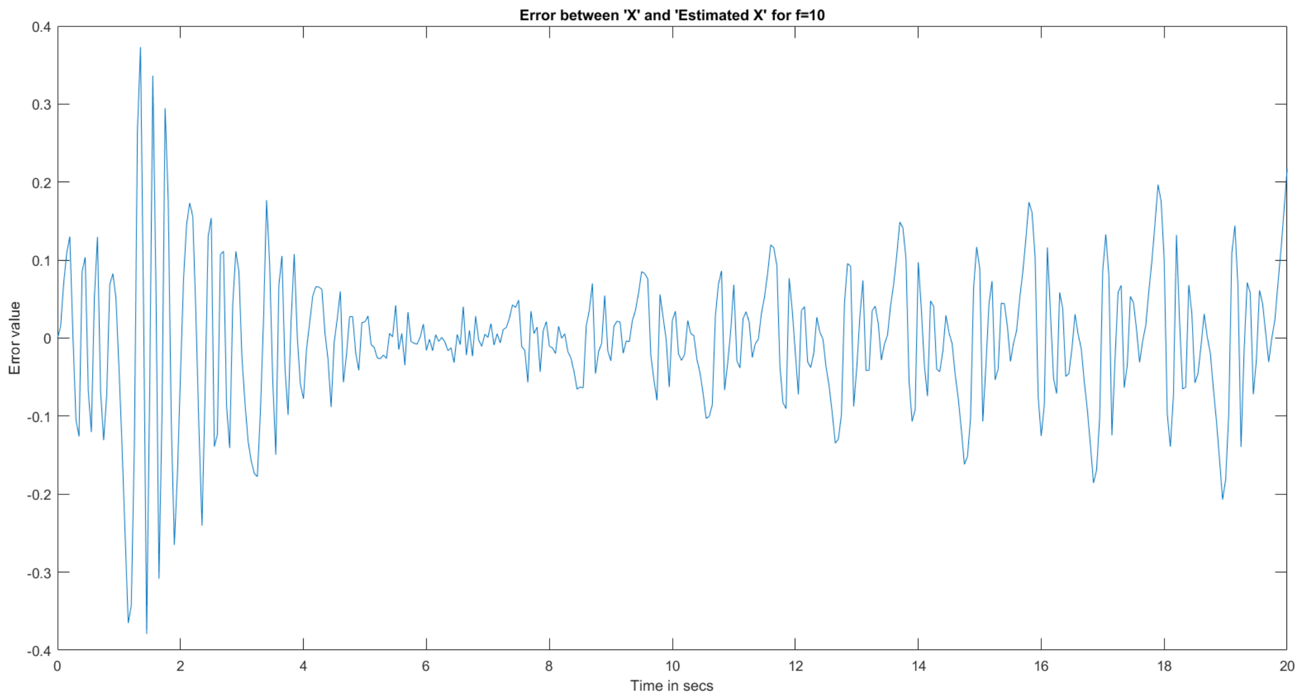


Όπως φαίνεται από τα παραπάνω διαγράμματα όσο μεγαλύτερος είναι το πλάτος του θορύβου, τόσο χειρότερη γίνεται η πρόβλεψη σε βάθος χρόνου. Για τα πρώτα δευτερόλεπτα συνεπώς βλέπουμε πως η εκτίμηση δεν έχει μεγάλη διαφορά, αλλά μετά από λίγη ώρα για μικρό πλάτος θορύβου μπορούμε να εκτιμήσουμε με καλή ακρίβεια το σήμα μας, ενώ για μεγάλο πλάτος το σφάλμα όλο και αυξάνεται.

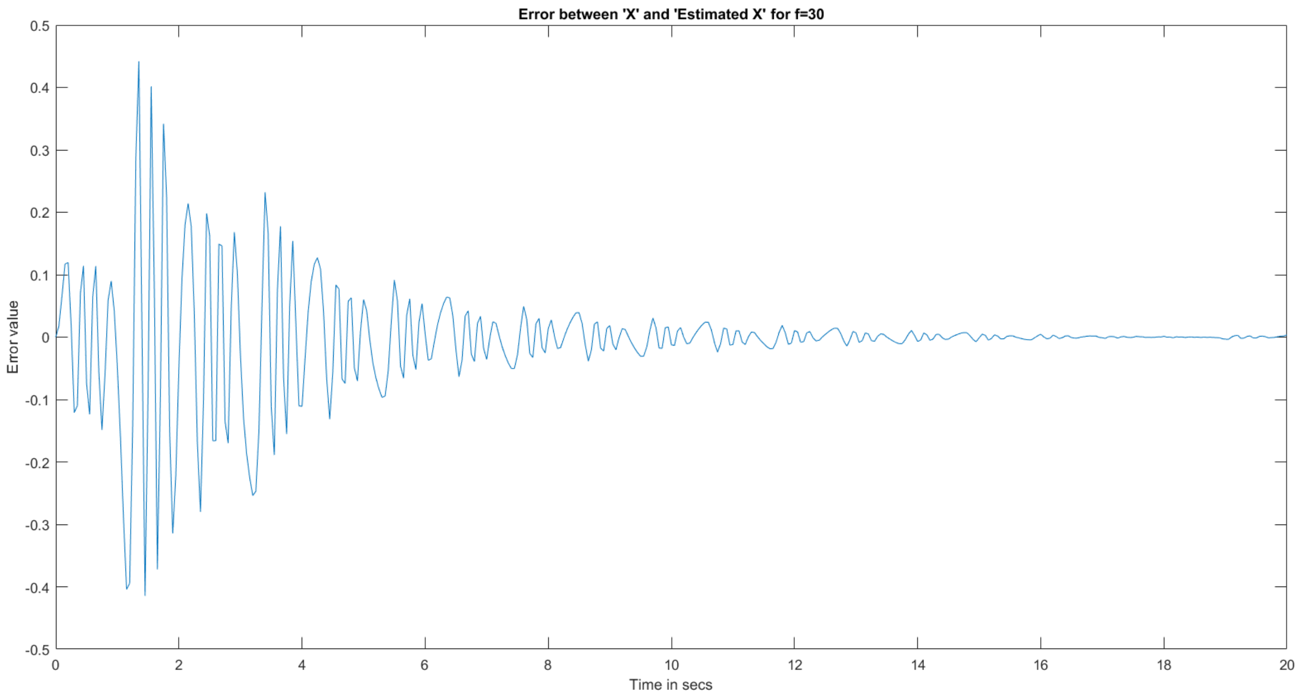
Μεταβολή f

Θα μελετήσουμε το σφάλμα μεταξύ x και $\hat{x}$ για f = 10, f = 30, f = 50, f=70, f=140

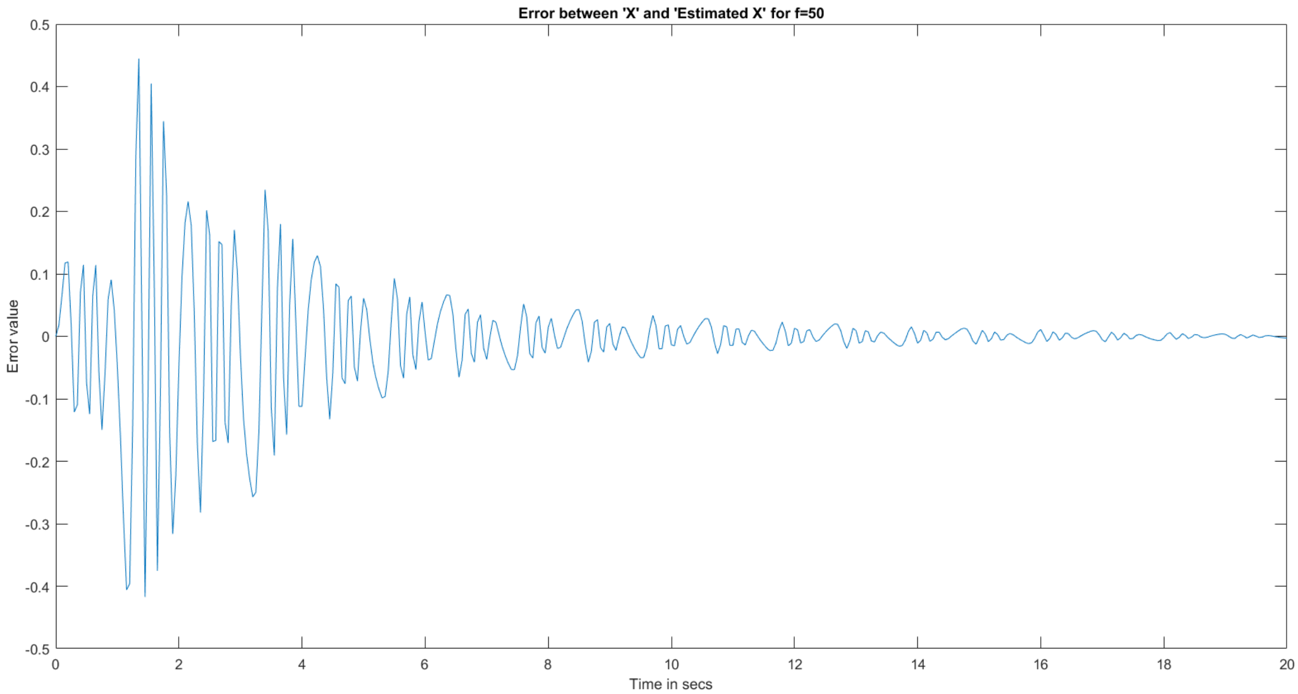
f=10



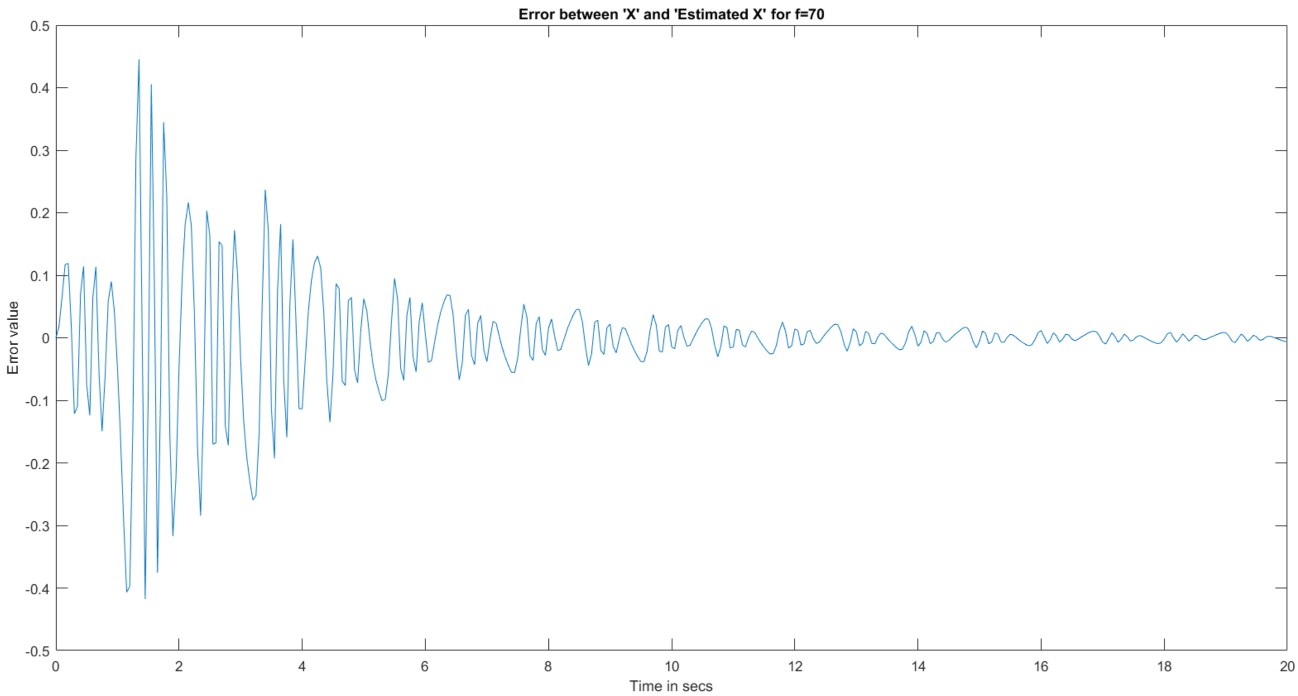
f=30



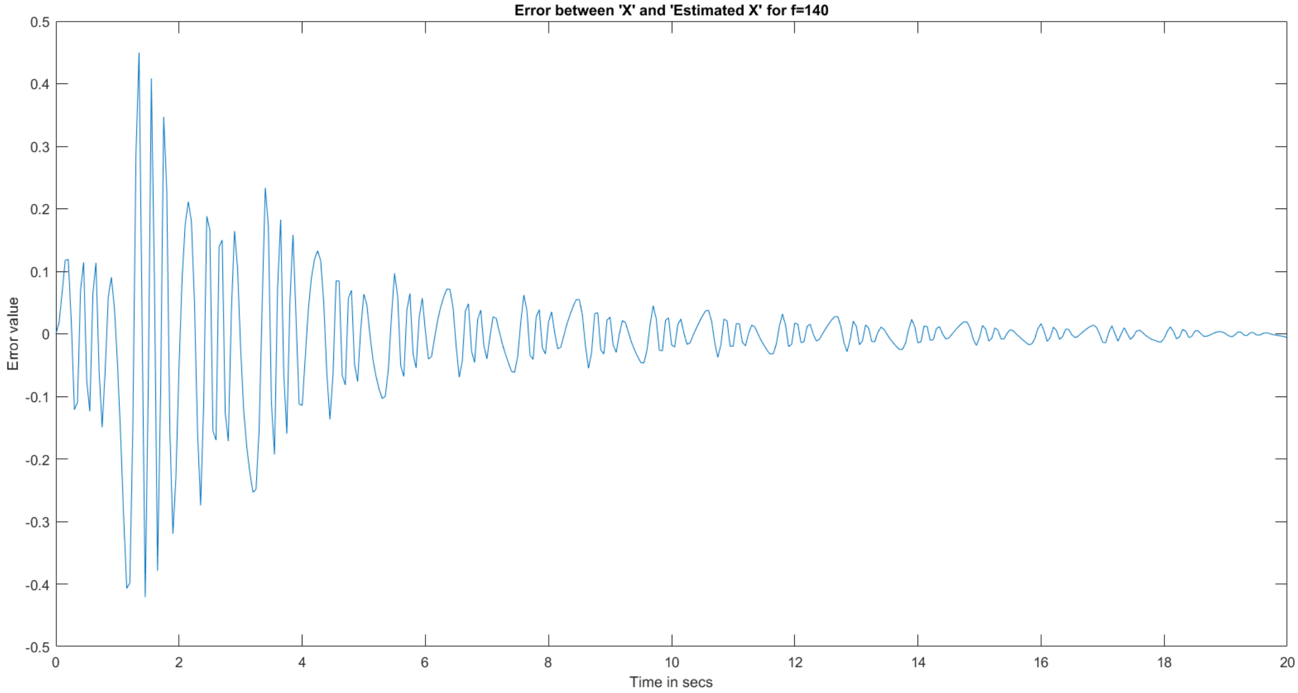
f=50


Error between 'X' and 'Estimated X' for f=50
Error value
Time in secs
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

f=70


Error between 'X' and 'Estimated X' for f=70
Error value
Time in secs
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

f=140



Από τα πάνω διαγράμματα παρατηρούμε, ότι για f <20 η εκτίμηση μας γίνεται όλο και χειρότερη όσο αυξάνεται ο χρόνος, ενώ για f>20, όποια τιμή και να επιλέξουμε δεν παρατηρούμε κάποια διαφορά.

Ερώτημα β) Μικτής Δομής

Έχουμε σύστημα $\dot{x} = -a\cdot x + b\cdot u,\ \ x(0)$, που μπορεί να γραφτεί και ως: $\dot{x} = -\theta_1\cdot x + \theta_2\cdot u,\ \ x(0)$
Ορίζουμε το σύστημα αναγνώρισης: $\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1\cdot x + \hat{\theta}_2\cdot u + \theta_m\cdot(x-\hat{x}),\ \ \hat{x}(0)$

Όπως και στο ερώτημα α) επιλέγουμε:

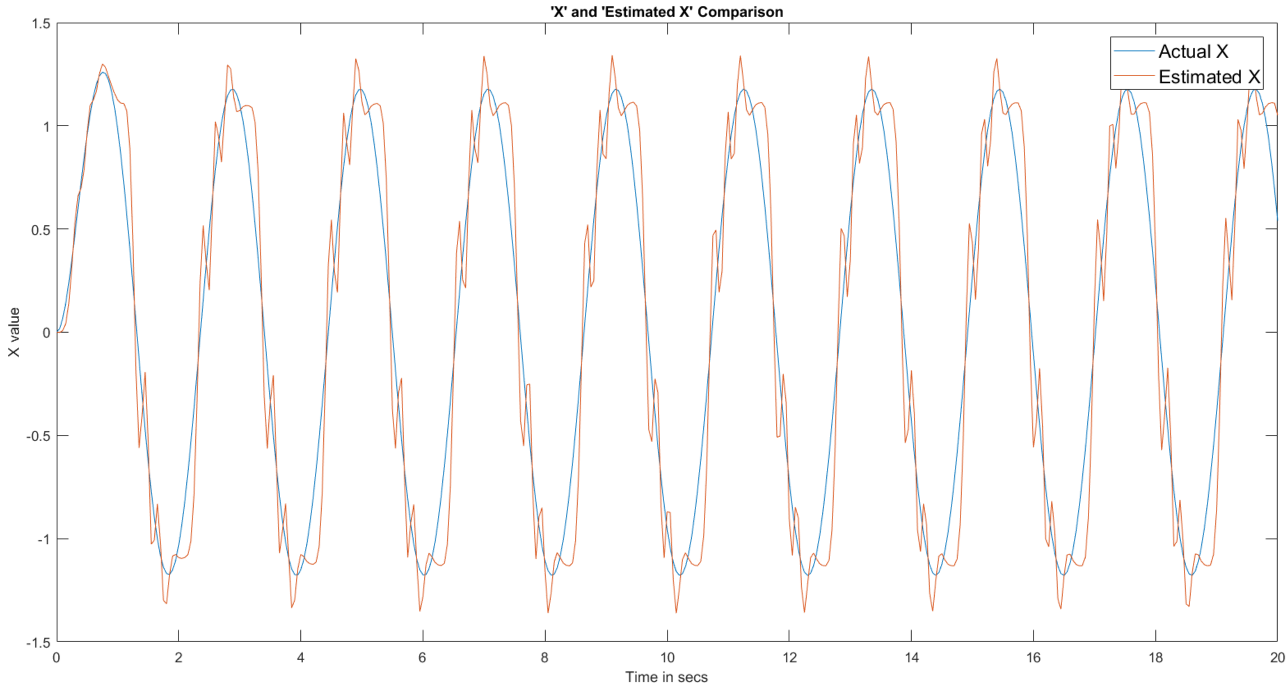
$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 = \dot{\tilde{\theta}}_1 = -\gamma_1\cdot e\cdot \hat{x} \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \dot{\tilde{\theta}}_2 = \gamma_2\cdot e\cdot x \end{cases}$$

Και έχουμε θόρυβο οπότε $e = x + \eta - \hat{x}$, οπότε τελικά θα προκύψει:

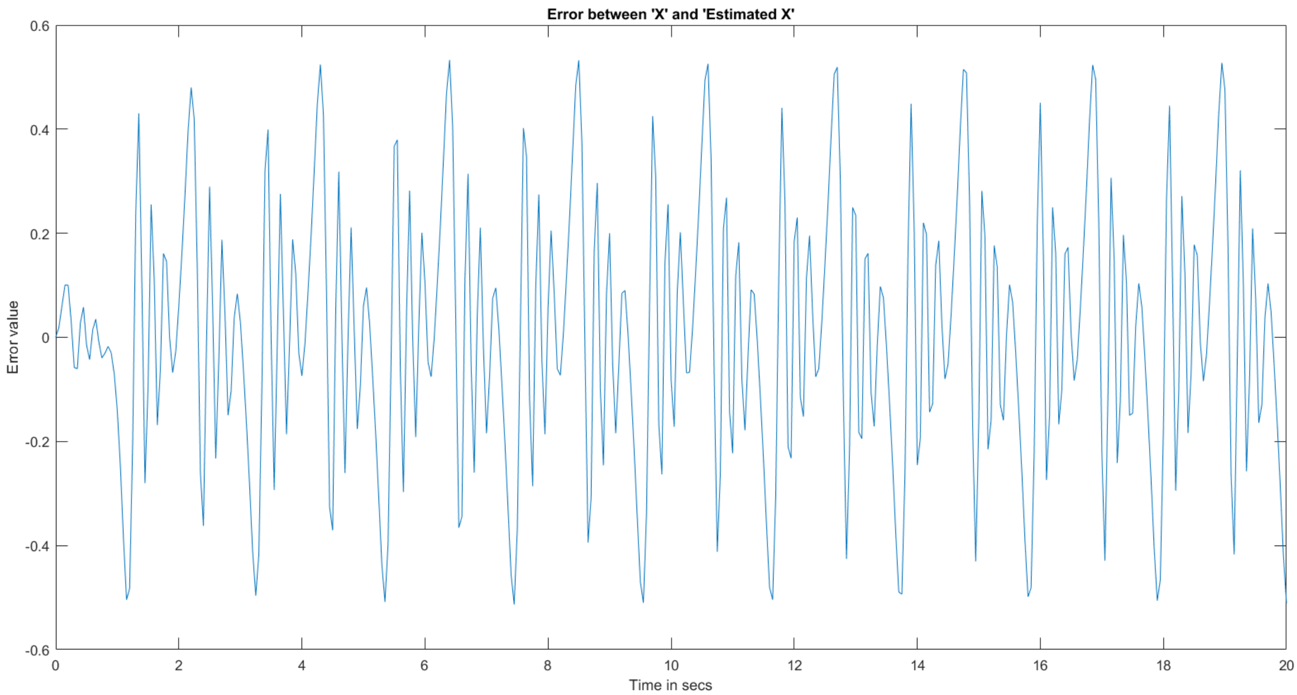
$$\begin{cases} \dot{x} = -a\cdot x + b\cdot u \\ \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1\cdot(x+h)\cdot(x+\eta-\hat{x}) \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2\cdot u\cdot(x+\eta-\hat{x}) \\ \dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1\cdot\hat{x} + \hat{\theta}_2\cdot u + \theta_m\cdot(x+\eta-\hat{x}) \end{cases}$$

Επιλέγουμε πάλι $\gamma_1 = \gamma_2 = 10$, και θ_μ=5 οπότε προκύπτουν τα εξής:

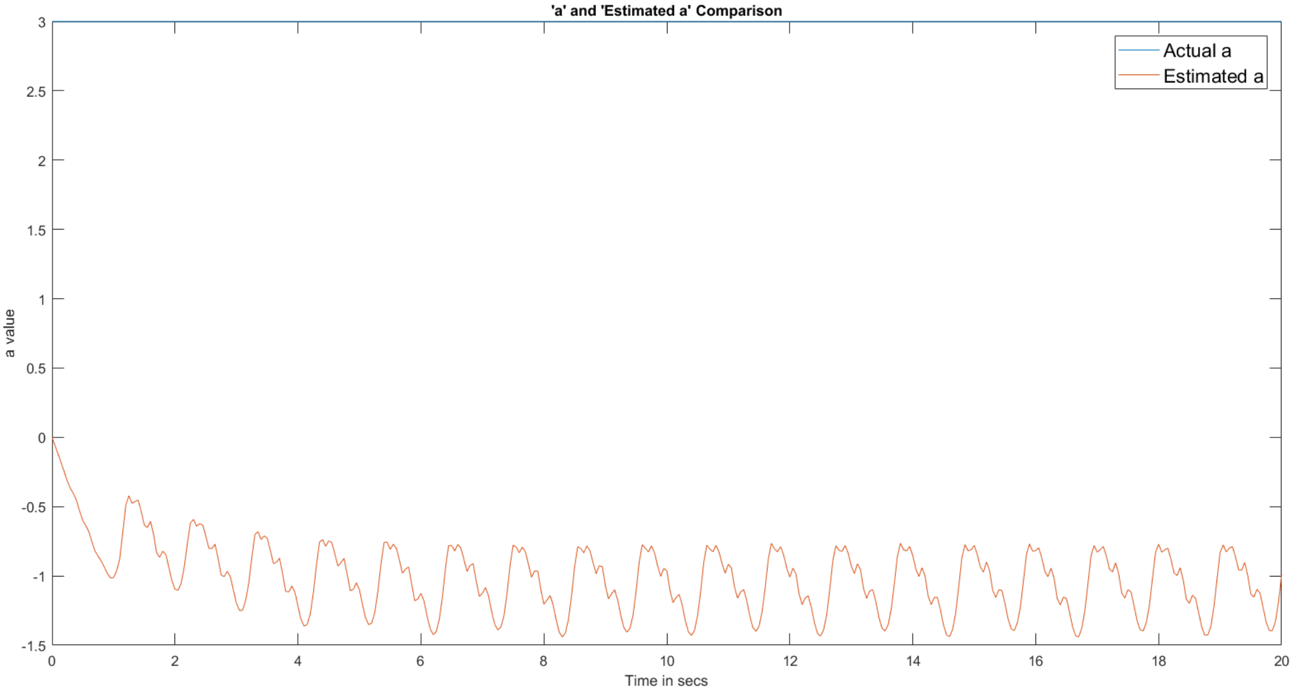
1) Γραφική παράσταση X και $\hat{X}$:



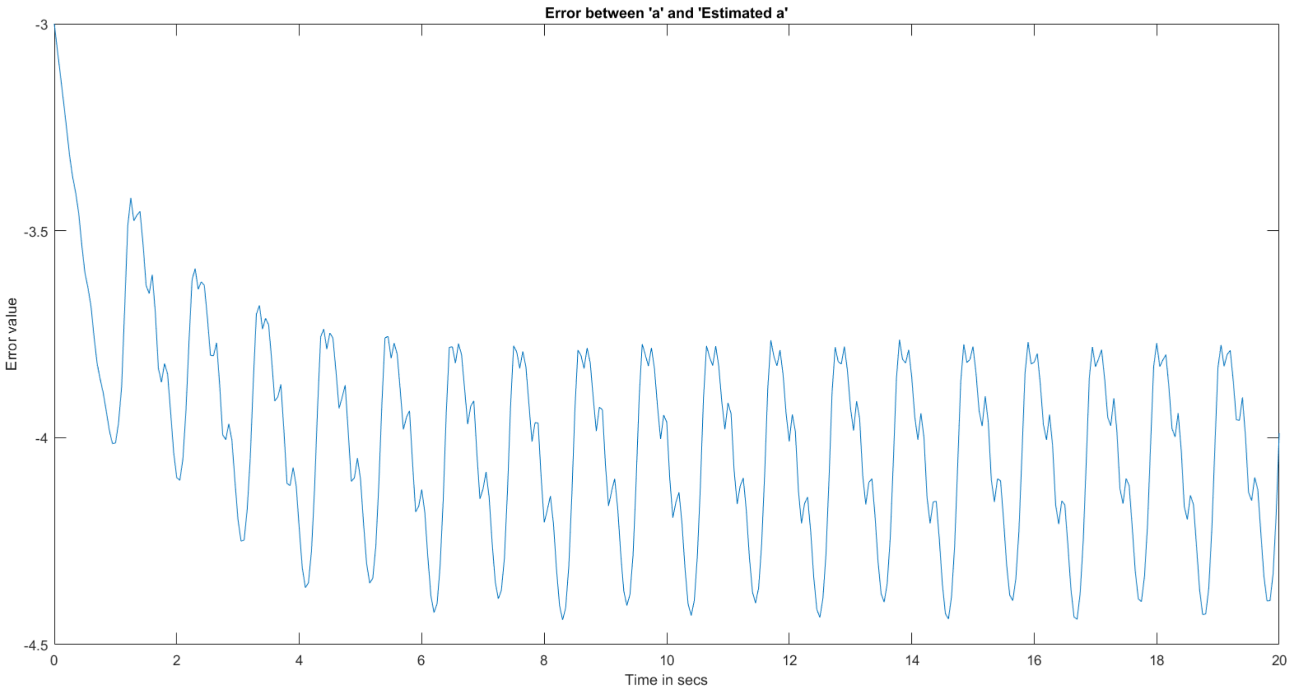
2) Error μεταξύ X και $\hat{X}$:



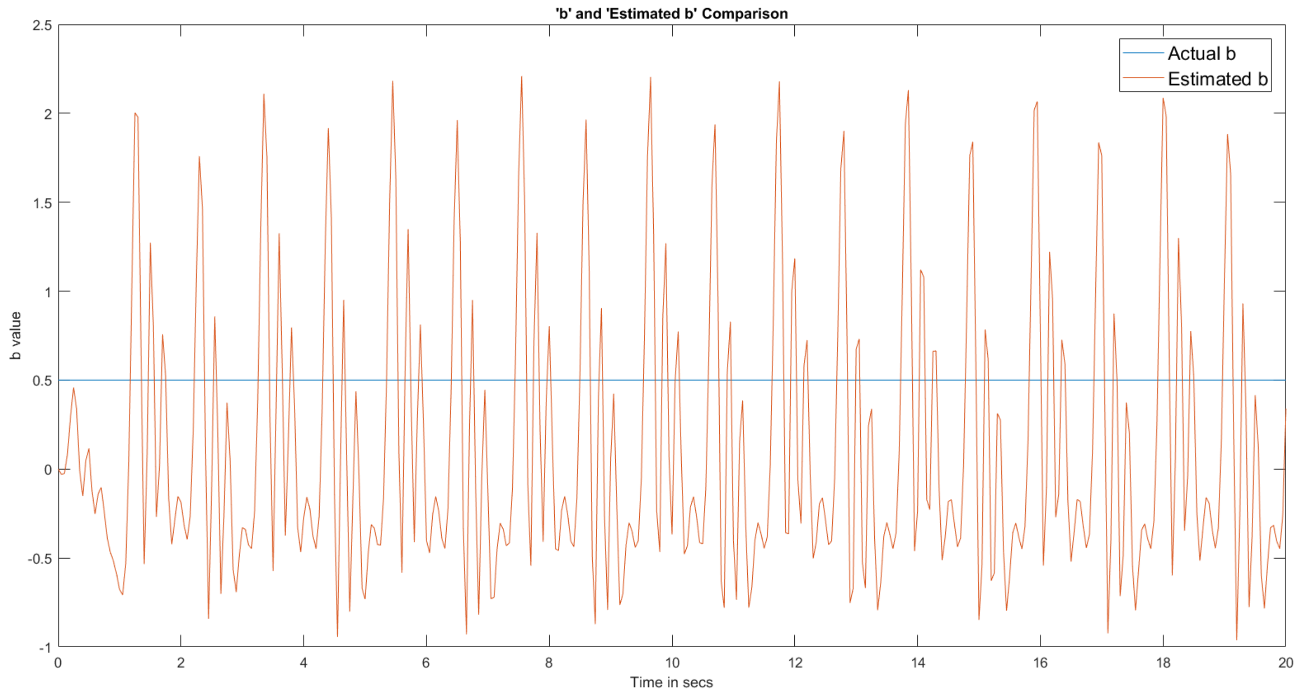
3) Γραφική παράσταση α και $\hat{\alpha}$:



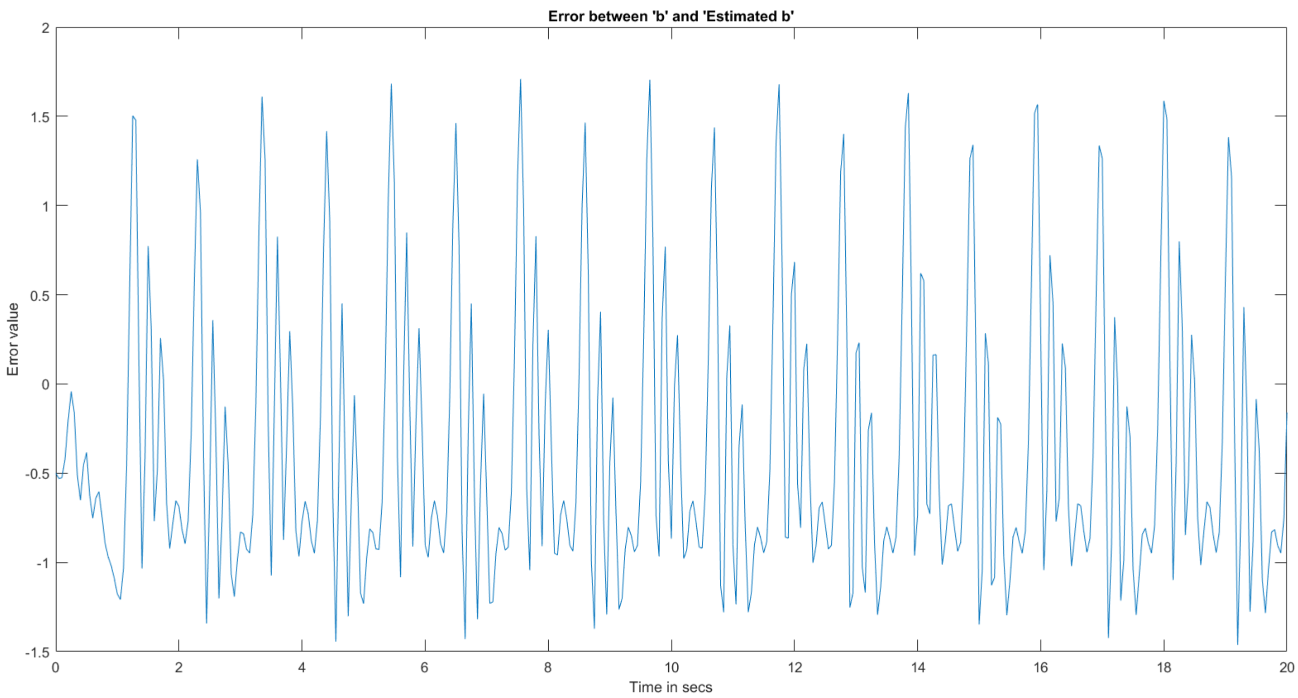
4) Error μεταξύ α και $\hat{\alpha}$:



5) Γραφική παράσταση b και $\hat{b}$:



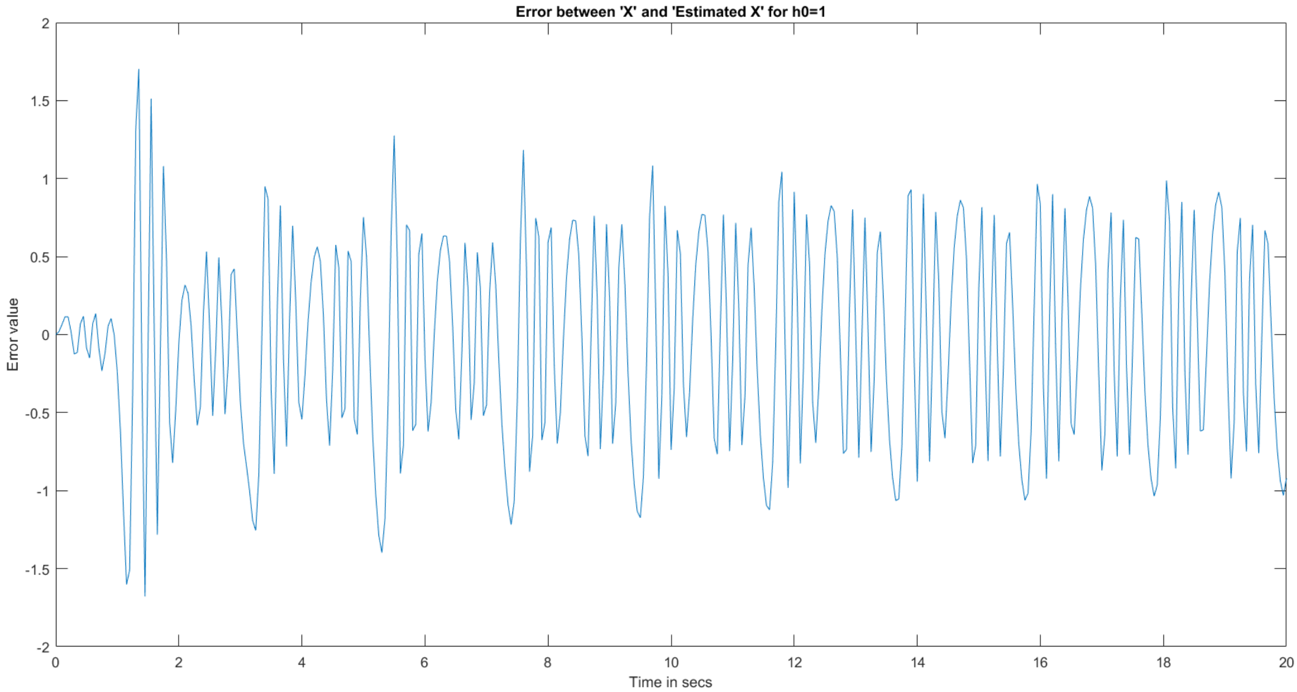
6) Error μεταξύ b και $\hat{b}$:



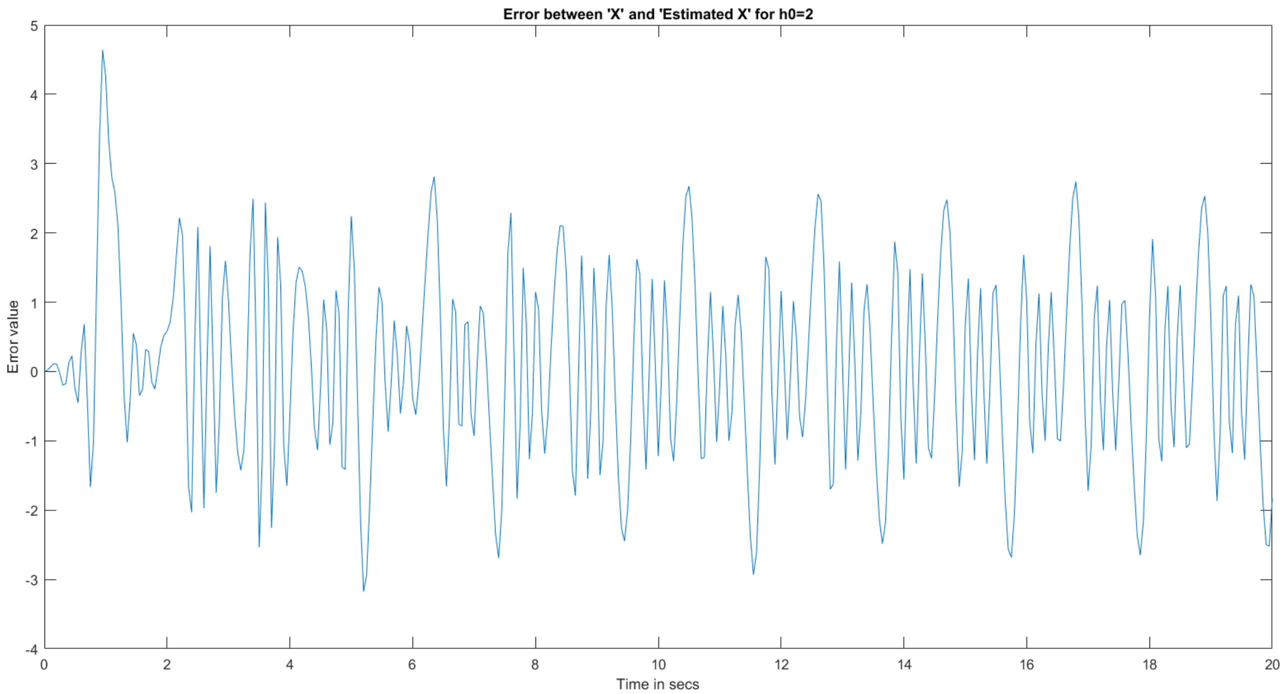
Αύξηση h_0

Θα μελετήσουμε το σφάλμα μεταξύ x και $\hat{x}$ για $h_0 = 1$, $h_0 = 2$, $h_0 = 5$

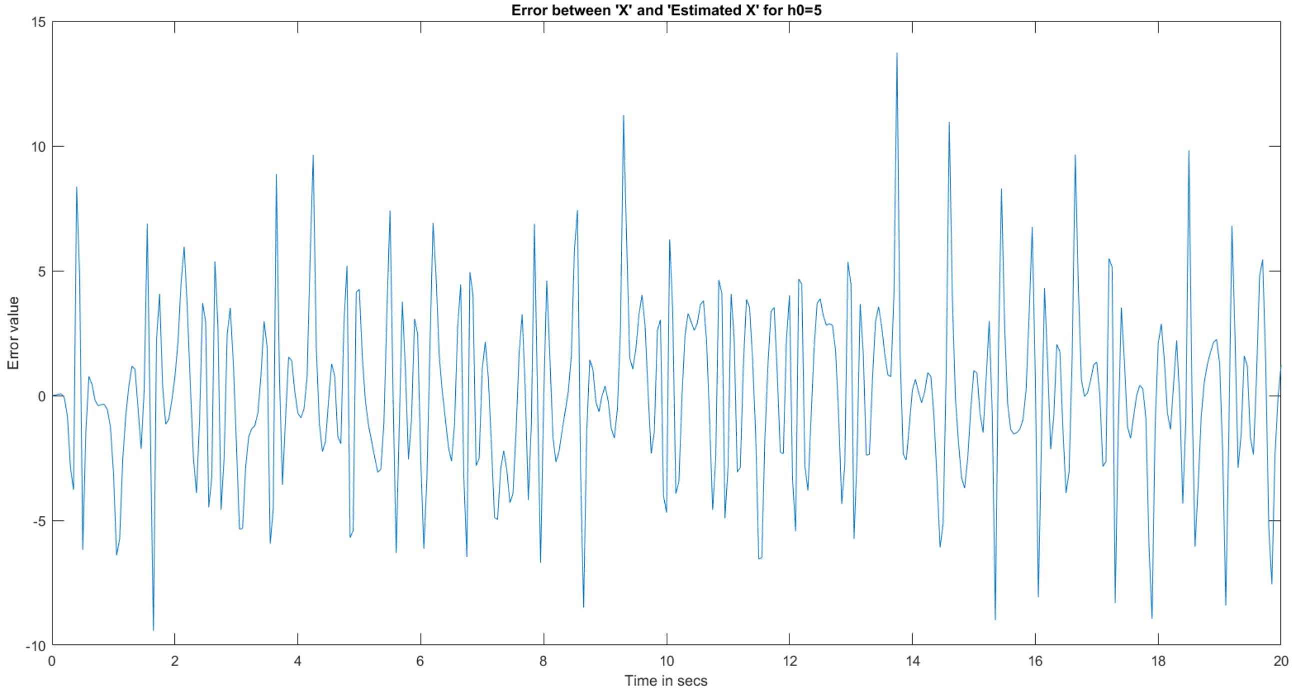
h_0=1



h_0=2



h_0=5

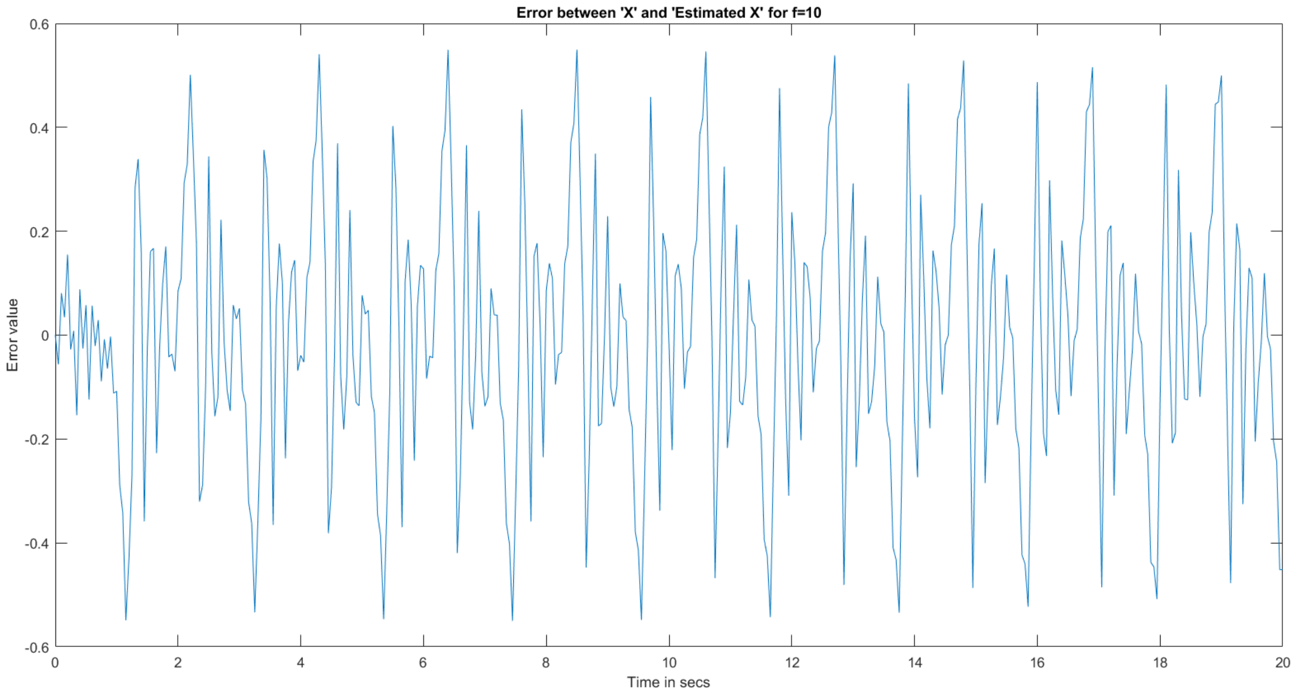


Παρατηρούμε ότι για αύξηση του πλάτους του θορύβου έχουμε και αρκετά μεγάλη αύξηση του σφάλματος, όχι σε βάθος χρόνου αλλά εξαρχής και χωρίς να αυξάνεται.

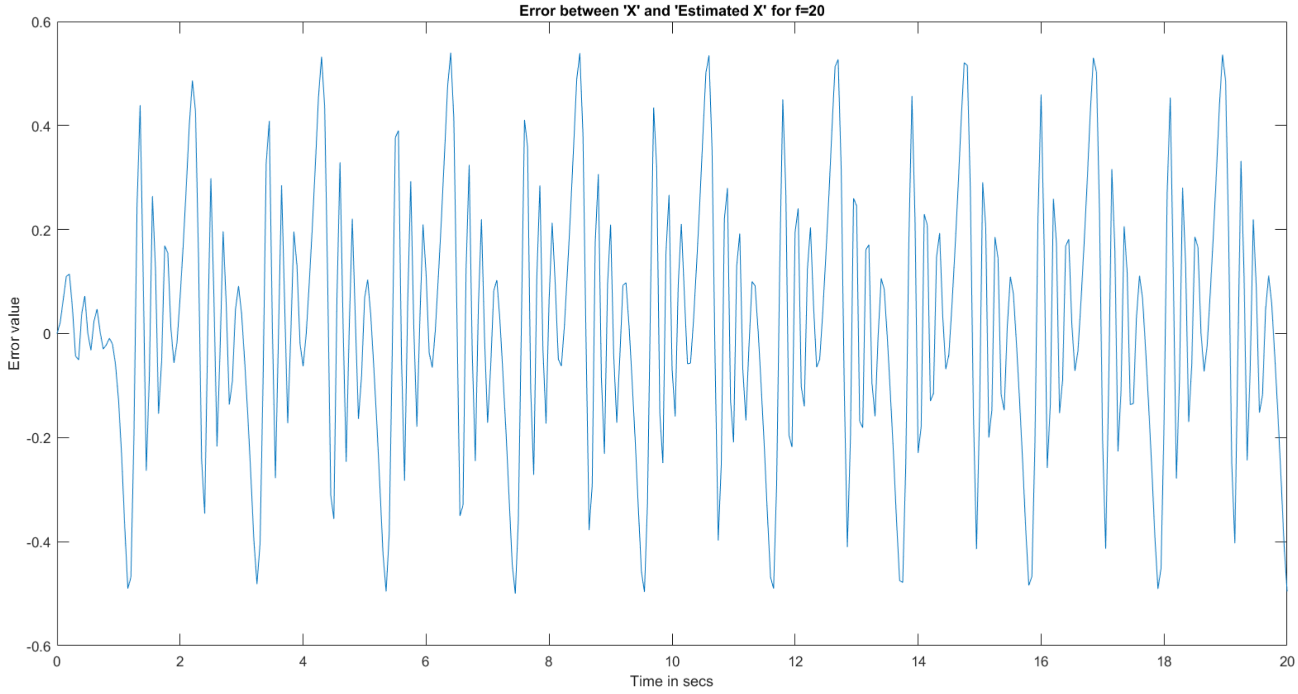
Μεταβολή f

Θα μελετήσουμε το σφάλμα μεταξύ x και $\hat{x}$ για f = 10, f = 20, f = 30, f=50, f=80

f=10

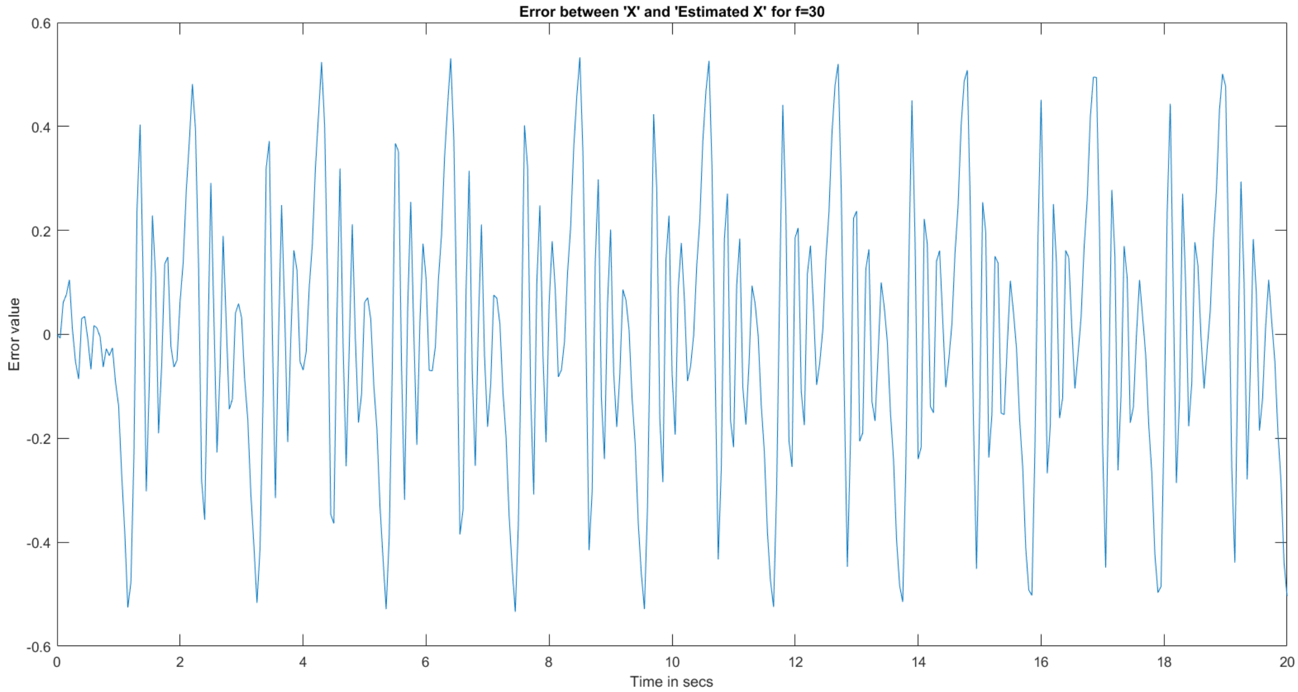


f=20



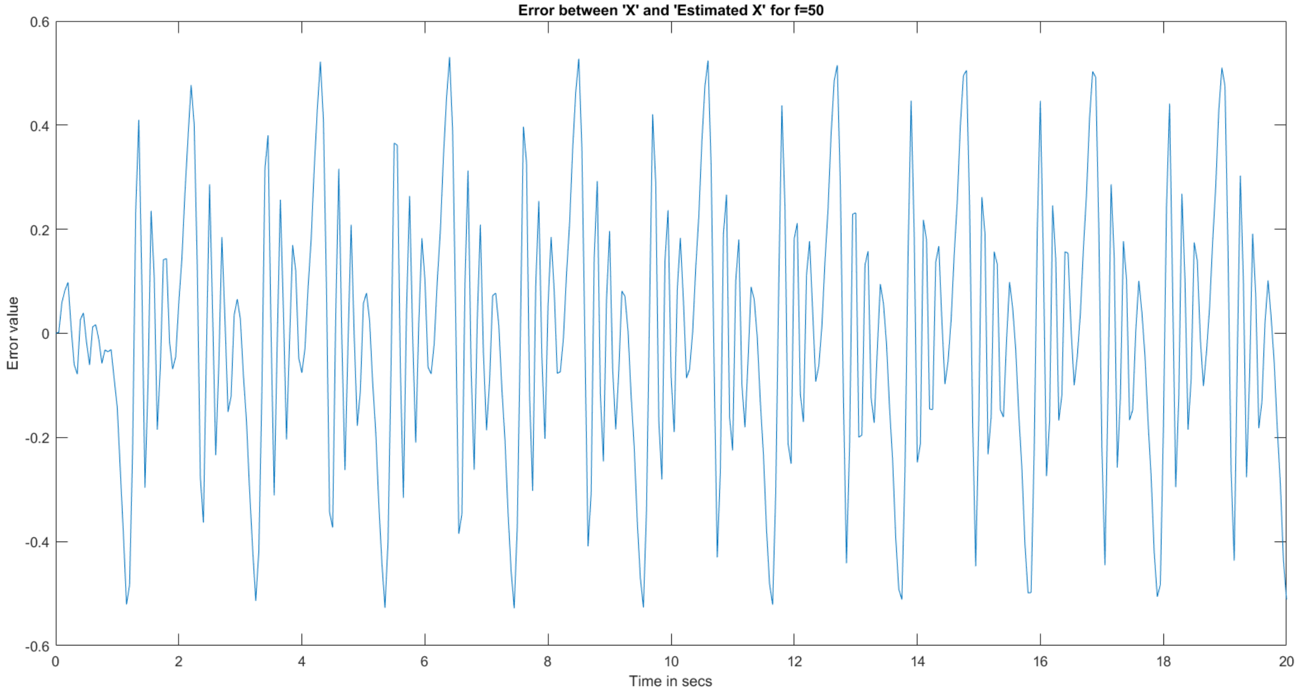
Error between 'X' and 'Estimated X' for f=20
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
Error value
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
Time in secs

f=30

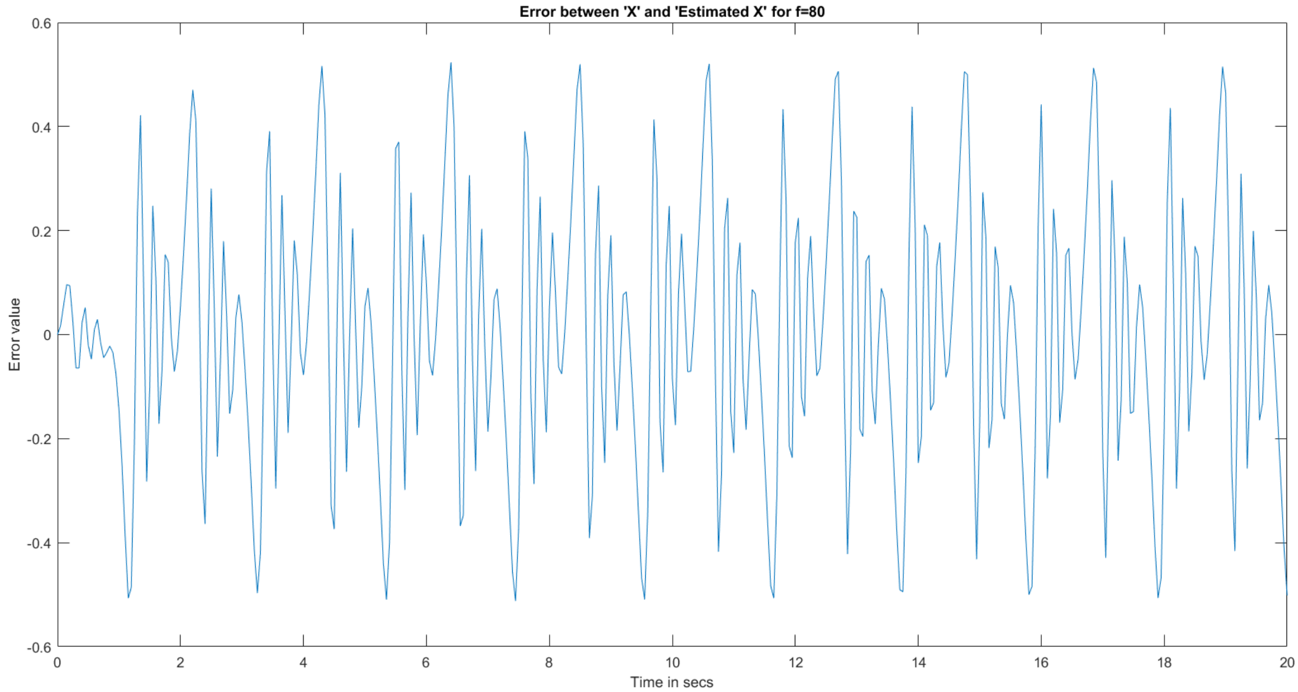


Error between 'X' and 'Estimated X' for f=30
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
Error value
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
Time in secs

f=50



f=80



Είναι προφανές από το παραπάνω διαγράμματα ότι η μεταβολή της συχνότητας f δεν επηρεάζει σημαντικά το σφάλμα εκτίμησης για τις τιμές γ_1, γ_2, θ_m που έχουμε επιλέξει.

Σύγκριση παράλληλης και μικτής δομής.

Συνολικά μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η μέθοδος Lyapunov με παράλληλη δομή, ξεκινάει με όχι και τόσο καλές εκτιμήσεις αλλά όσο περνάει ο χρόνος τόσο καλύτερες γίνονται. Αντίθετα στην μέθοδο Lyapunov με μικτή δομή η εκτίμηση φαίνεται να είναι το ίδιο καλή ανεξαρτήτως του χρόνου που έχει περάσει. Άρα σε περιπτώσεις που μια κακή αρχική εκτίμηση δεν θα είχε αρνητικό αντίκτυπο στο αποτέλεσμά μας, θα επιλέγαμε παράλληλη δομή ενώ αντίθετα θα επιλέγαμε την μικτή δομή. Επίσης η παράλληλη δομή φαίνεται να μην επηρεάζεται από την συχνότητα του θορύβου, άρα ίσως προτιμάται σε περιβάλλοντα που δεν είναι εύκολο να έχουμε μία εκτίμηση για τον εκτιμώμενο θόρυβο.

Θέμα 3

Έχουμε το σύστημα: $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$, με A<0

Δηλαδή: $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + [b_1 \quad b_2] \cdot u,$

Ενώ για την εκτίμηση με μικτή δομή ισχύει:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} + [\hat{b}_1 \quad \hat{b}_2] \cdot u - \theta_m \cdot \begin{bmatrix} x_1 - \hat{x}_1 \\ x_2 - \hat{x}_2 \end{bmatrix}$$

Ορίζουμε $e = \begin{bmatrix} x_1 - \hat{x}_1 \\ x_2 - \hat{x}_2 \end{bmatrix}$

Για να ισχύει το θεώρημα Lyapunov θα πρέπει να ισχύει:

$\dot{\hat{A}} = \gamma_1 \cdot e \cdot \hat{x}^T \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{\hat{a}}_{11} & \dot{\hat{a}}_{12} \\ \dot{\hat{a}}_{21} & \dot{\hat{a}}_{22} \end{bmatrix} = \gamma_1 \cdot \begin{bmatrix} x_1 - \hat{x}_1 \\ x_2 - \hat{x}_2 \end{bmatrix} \cdot [\hat{x}_1 \quad \hat{x}_2],$ και:

$\dot{\hat{B}}^T = \gamma_2 \cdot e \cdot u \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{\hat{b}}_1 \\ \dot{\hat{b}}_2 \end{bmatrix} = \gamma_2 \cdot \begin{bmatrix} x_1 - \hat{x}_1 \\ x_2 - \hat{x}_2 \end{bmatrix} \cdot u$

Οπότε τελικά θα προκύψει το σύστημα:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + b_1 \cdot u \\ \dot{x}_2 = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + b_2 \cdot u \\ \dot{\hat{x}}_1 = \hat{a}_{11} \cdot \hat{x}_1 + \hat{a}_{12} \cdot \hat{x}_2 + \hat{b}_1 \cdot u - \theta_m \cdot (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{a}_{21} \cdot \hat{x}_1 + \hat{a}_{22} \cdot \hat{x}_2 + \hat{b}_2 \cdot u - \theta_m \cdot (x_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{\hat{a}}_{11} = \gamma_1 \cdot \hat{x}_1 \cdot (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{a}}_{12} = \gamma_1 \cdot \hat{x}_2 \cdot (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{a}}_{21} = \gamma_1 \cdot \hat{x}_1 \cdot (x_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{\hat{a}}_{22} = \gamma_1 \cdot \hat{x}_2 \cdot (x_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{\hat{b}}_1 = \gamma_2 \cdot u \cdot (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{b}}_2 = \gamma_2 \cdot u \cdot (x_2 - \hat{x}_2) \end{cases}$$

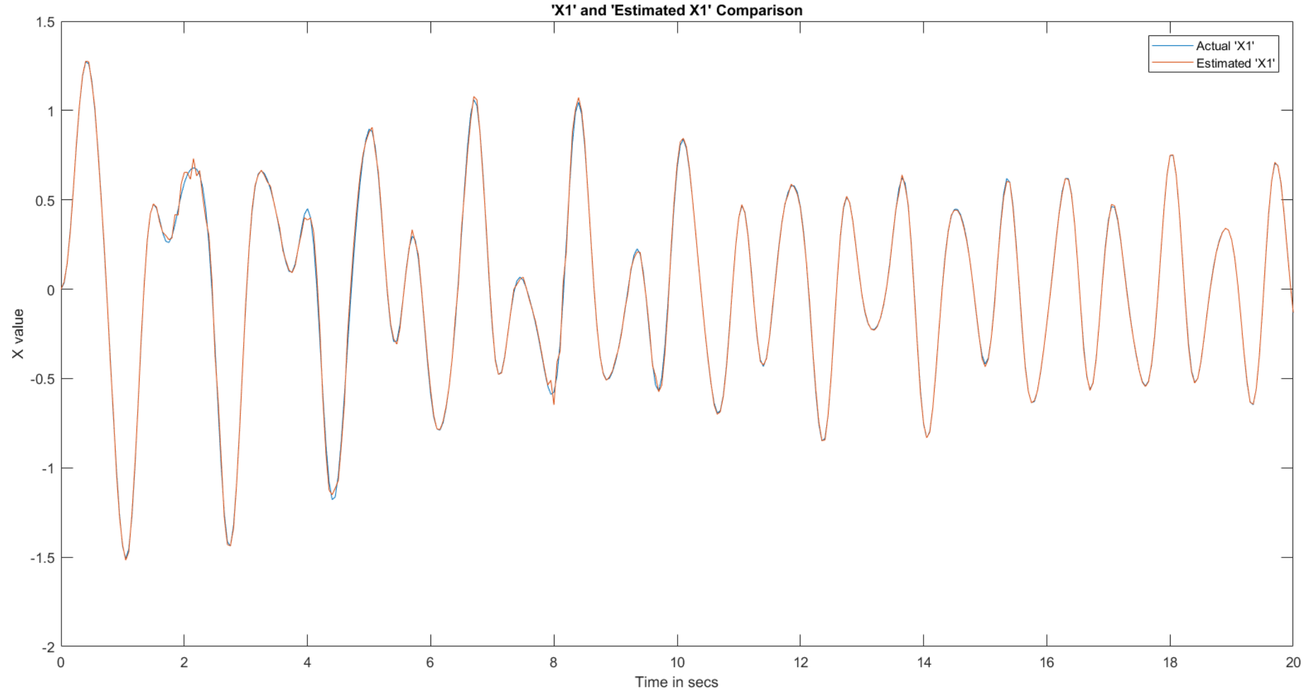
Μετά από δοκιμή διαφόρων τιμών παρατηρούμε ότι όσο αυξάνουμε τις τιμές των γ_1, γ_2 και όσο μειώνουμε την τιμή του θ_m τόσο καλύτερη γίνεται και η εκτίμηση των παραμέτρων μας. Παρατηρούμε όμως ότι μαζί με την απόδοση αυξάνεται και ο χρόνος υπολογισμού. Τελικά αποφασίζουμε να επιλέξουμε $\gamma_1 = \gamma_2 = 5000 \; \kappa\alpha\iota \; \theta_m = 0.5$, αφού μας δίνουν ικανοποιητική απόδοση, αρκετά γρήγορα.

Γνωρίζοντας και τις τιμές για τις παραμέτρους:

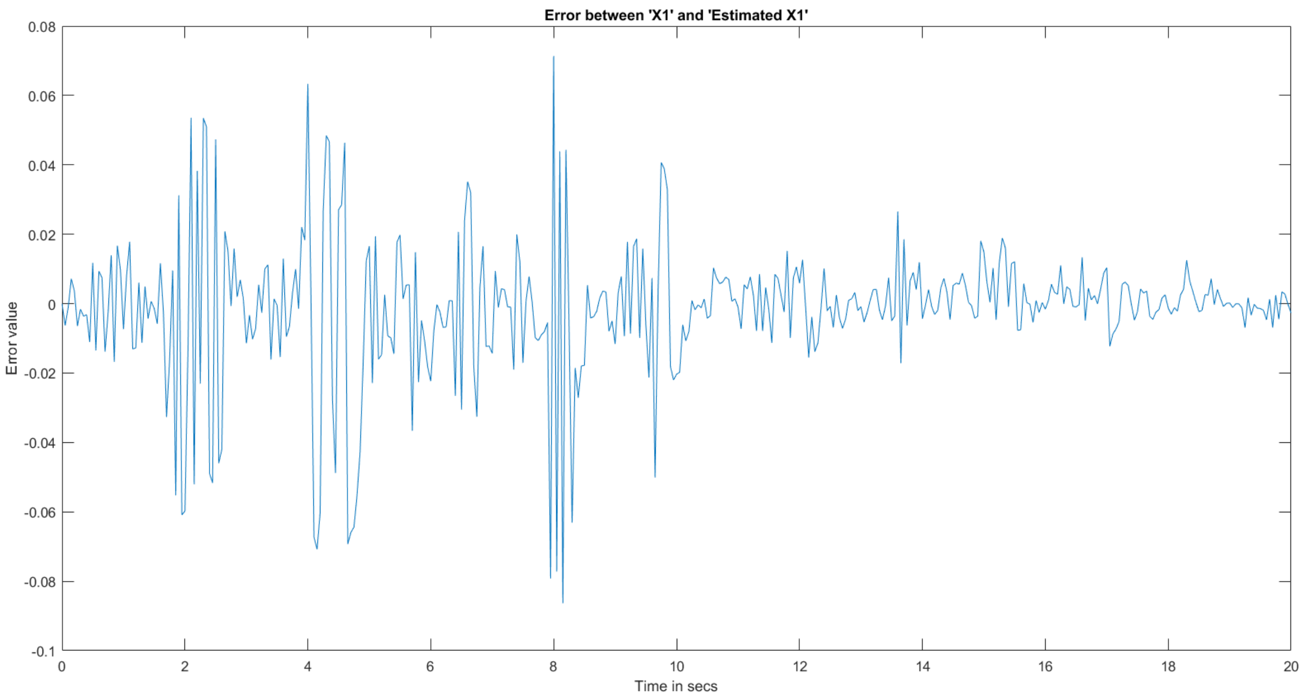
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 & 3 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}, \quad [b_1 \quad b_2] = [0.5 \quad 1.5], \quad u = 3.5\sin(7.2t) + 2\sin(11.7t)$$

Θα προκύψουν τα παρακάτω:

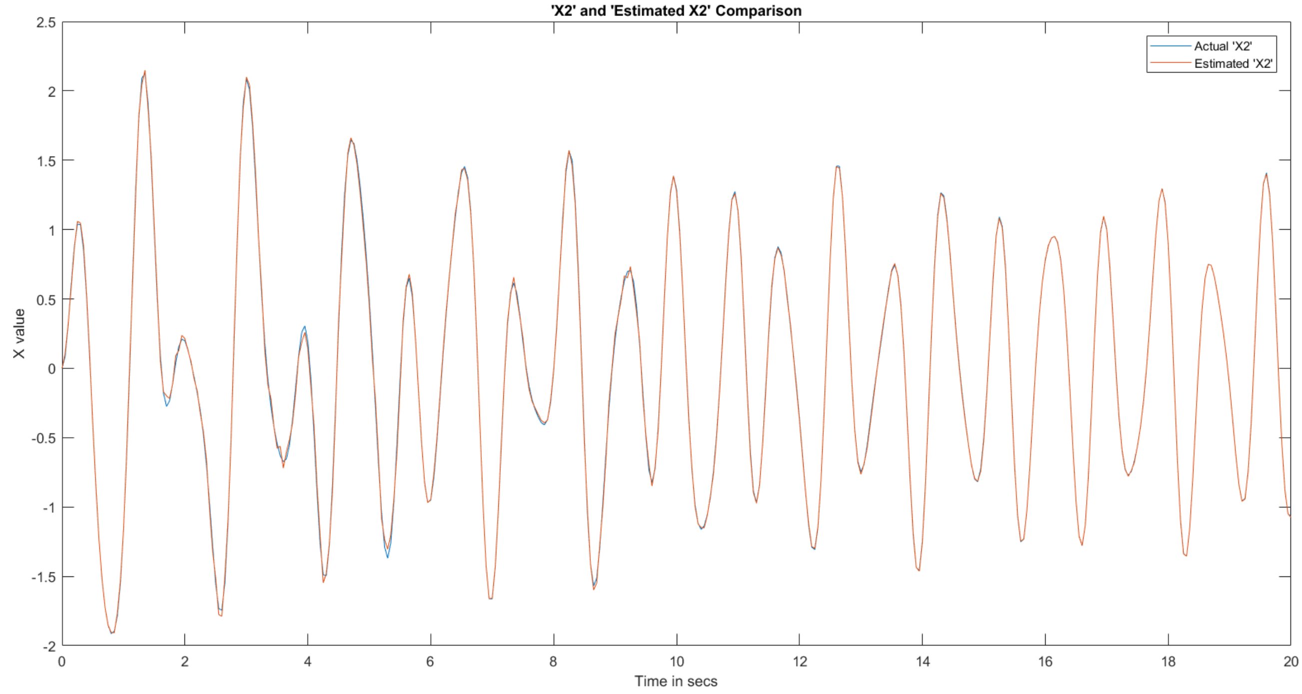
1) Γραφικές παραστάσεις x_1 $και$ $\hat{x}_1$



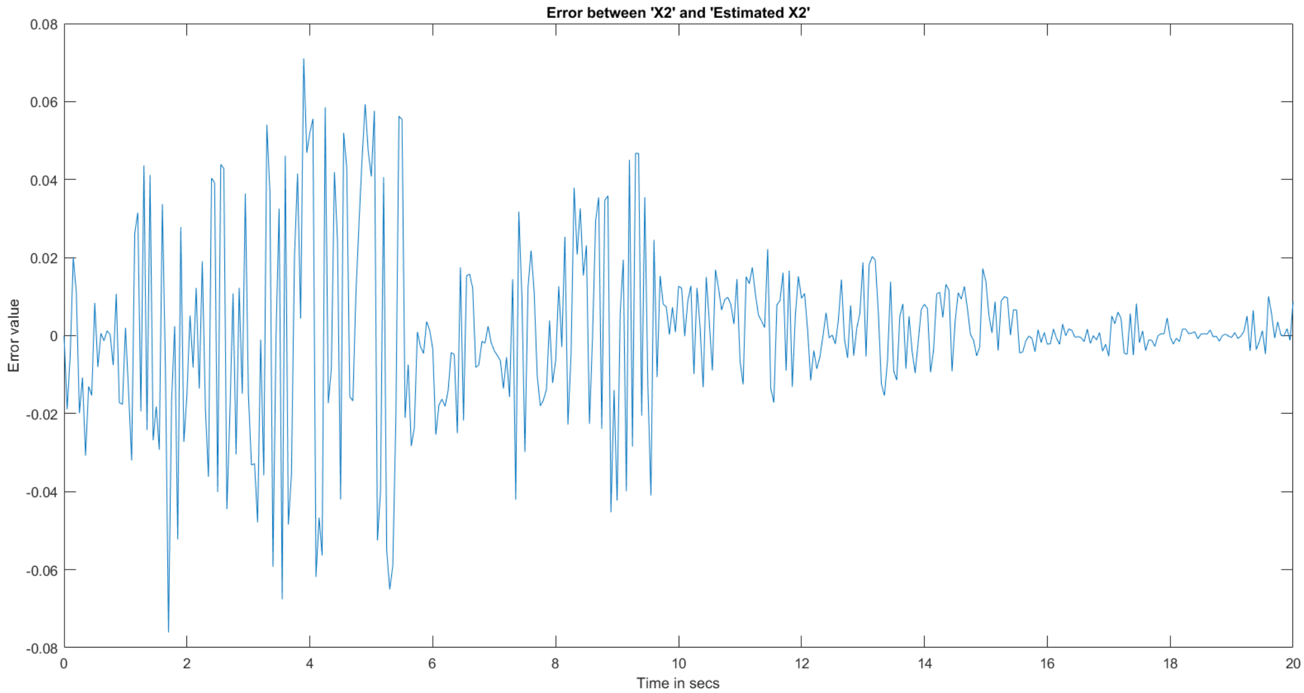
2) Error μεταξύ x_1 $και$ $\hat{x}_1$



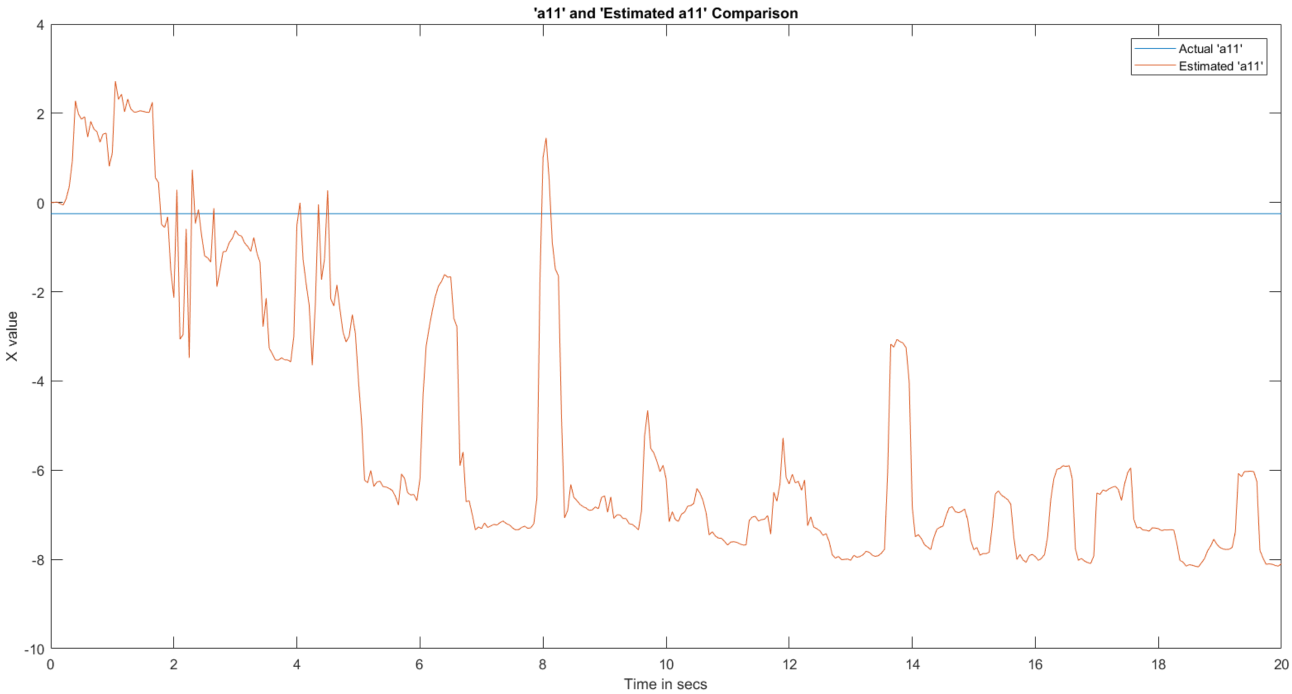
3) Γραφικές παραστάσεις x_2 $και$ $\hat{x}_2$



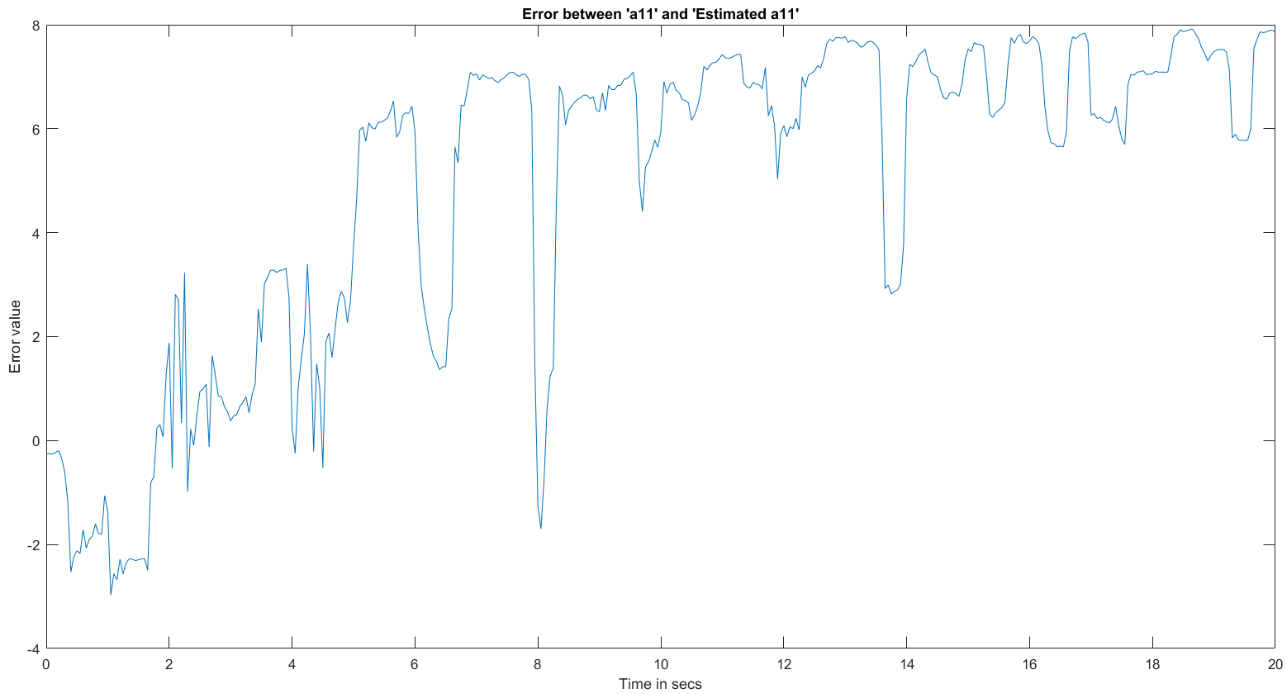
4) Error μεταξύ x_2 $και$ $\hat{x}_2$



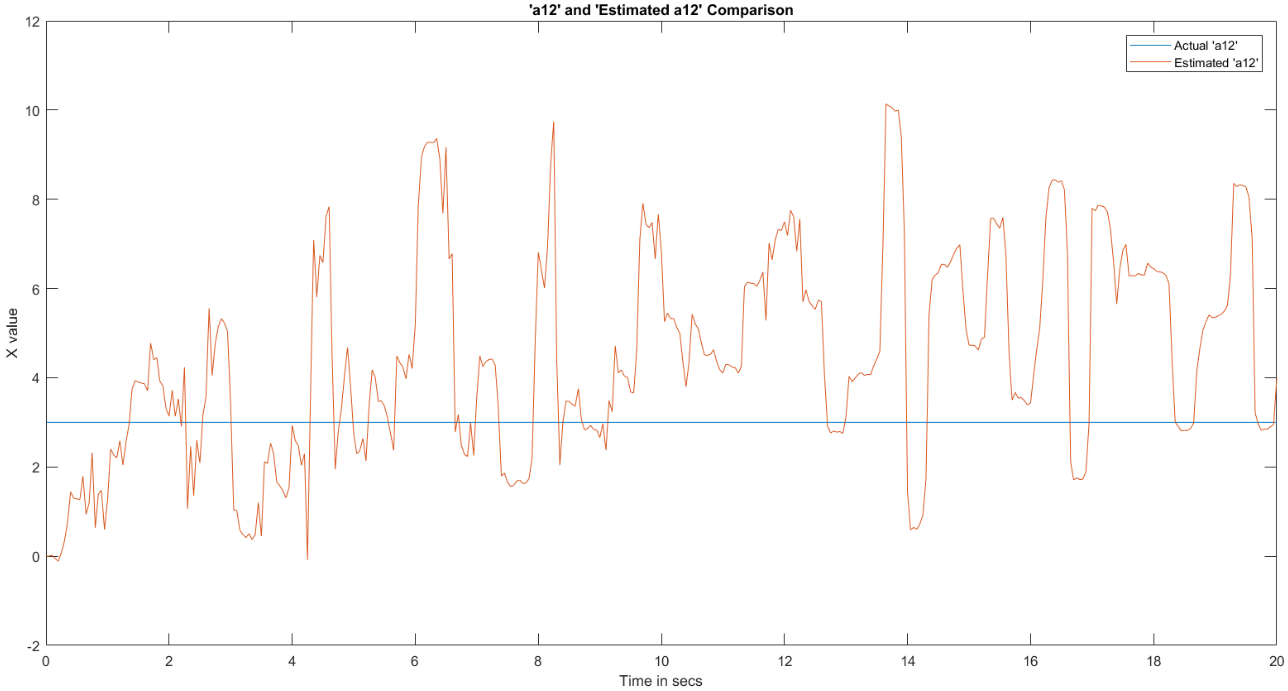
5) Γραφικές παραστάσεις α_{11} $\kappa\alpha\iota$ $\hat{\alpha}_{11}$



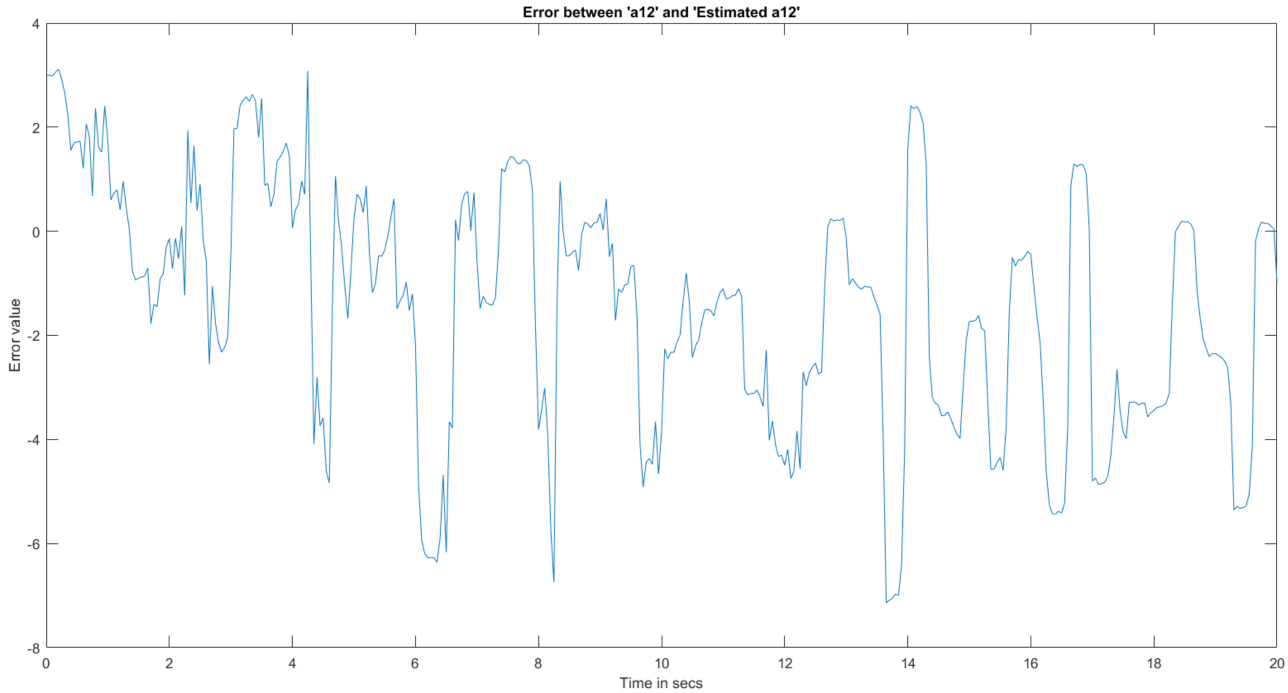
6) Error μεταξύ α_{11} $\kappa\alpha\iota$ $\hat{\alpha}_{11}$



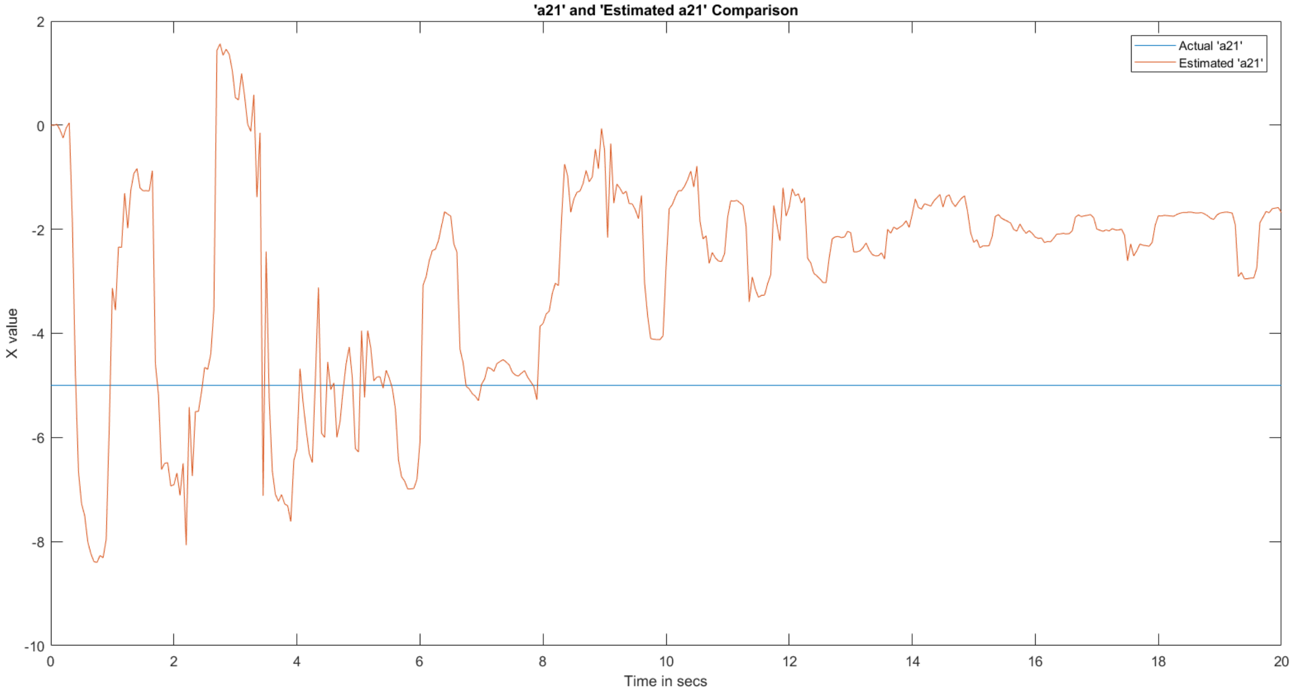
7) Γραφικές παραστάσεις α_{12} και $\hat{\alpha}_{12}$



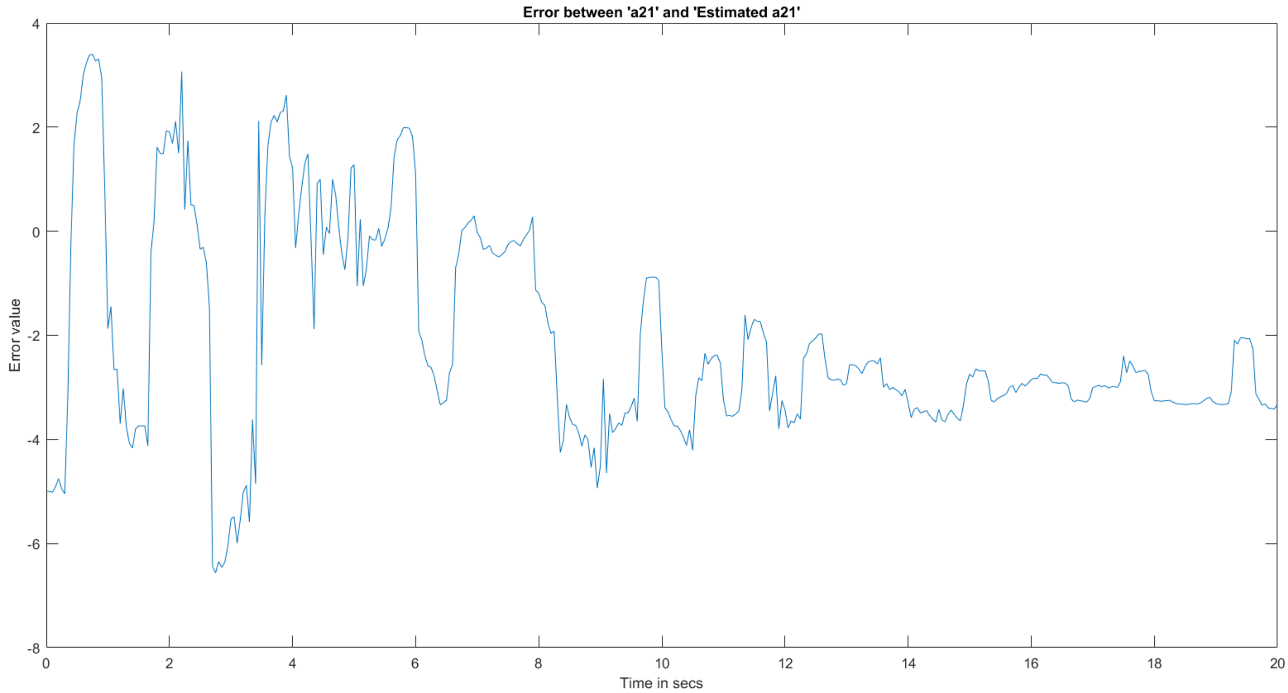
8) Error μεταξύ α_{12} και $\hat{\alpha}_{12}$



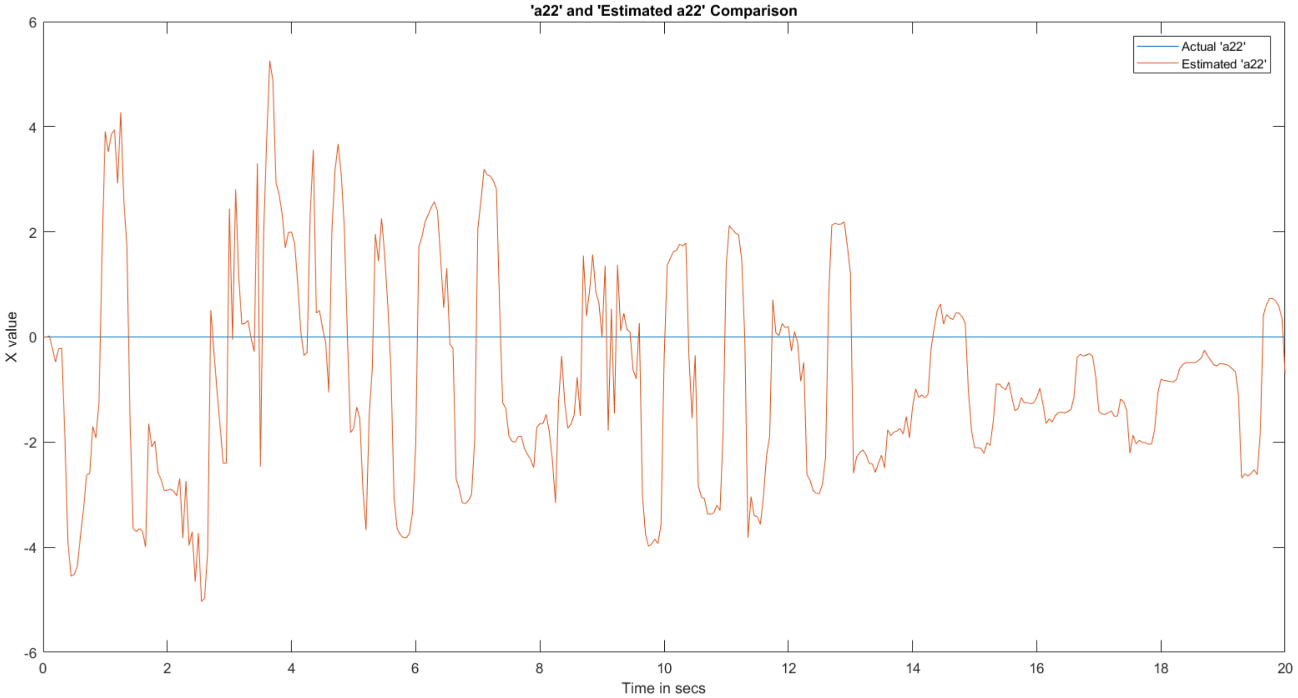
9) Γραφικές παραστάσεις α_{21} $\kappa\alpha\iota$ $\hat{\alpha}_{21}$



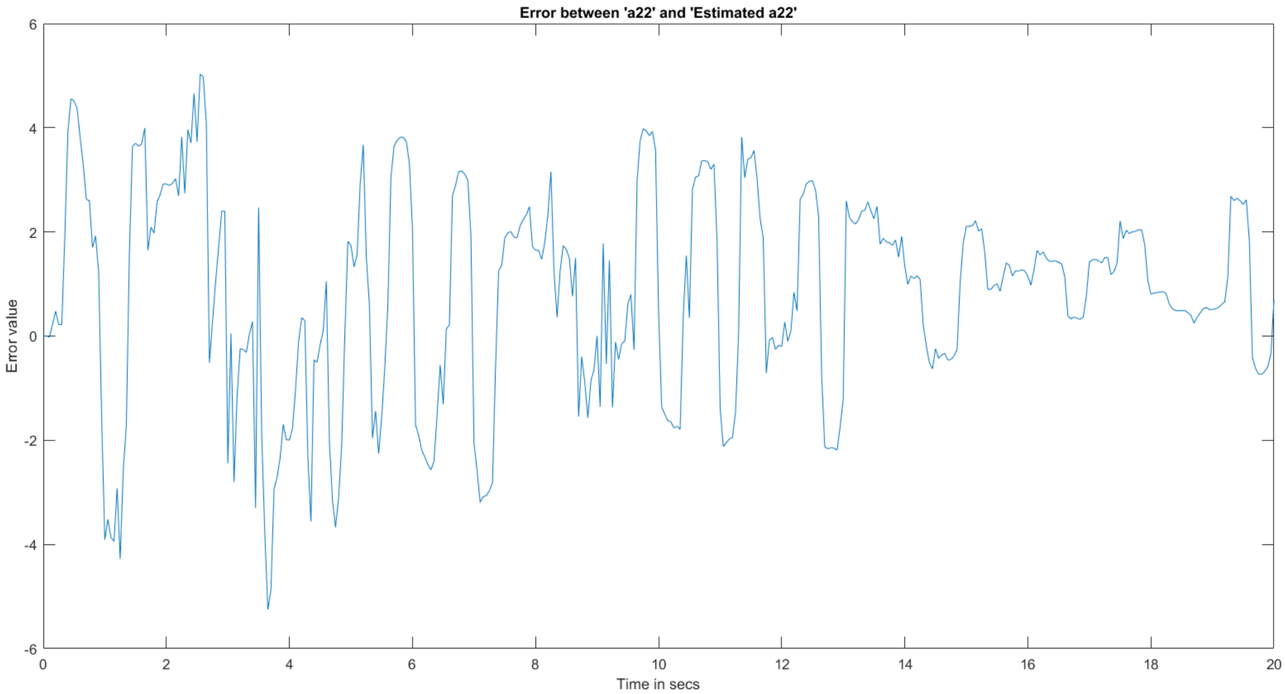
10) Error μεταξύ α_{21} $\kappa\alpha\iota$ $\hat{\alpha}_{21}$



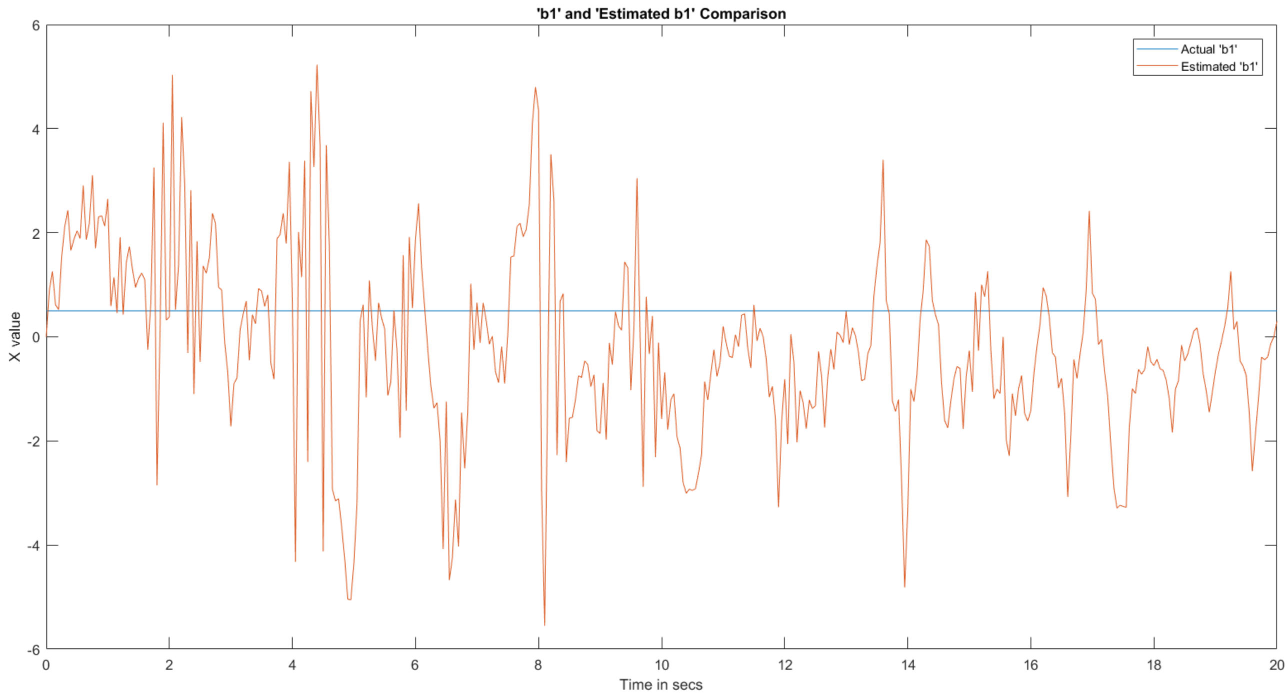
11) Γραφικές παραστάσεις α_{22} $\kappa\alpha\iota$ $\hat{\alpha}_{22}$



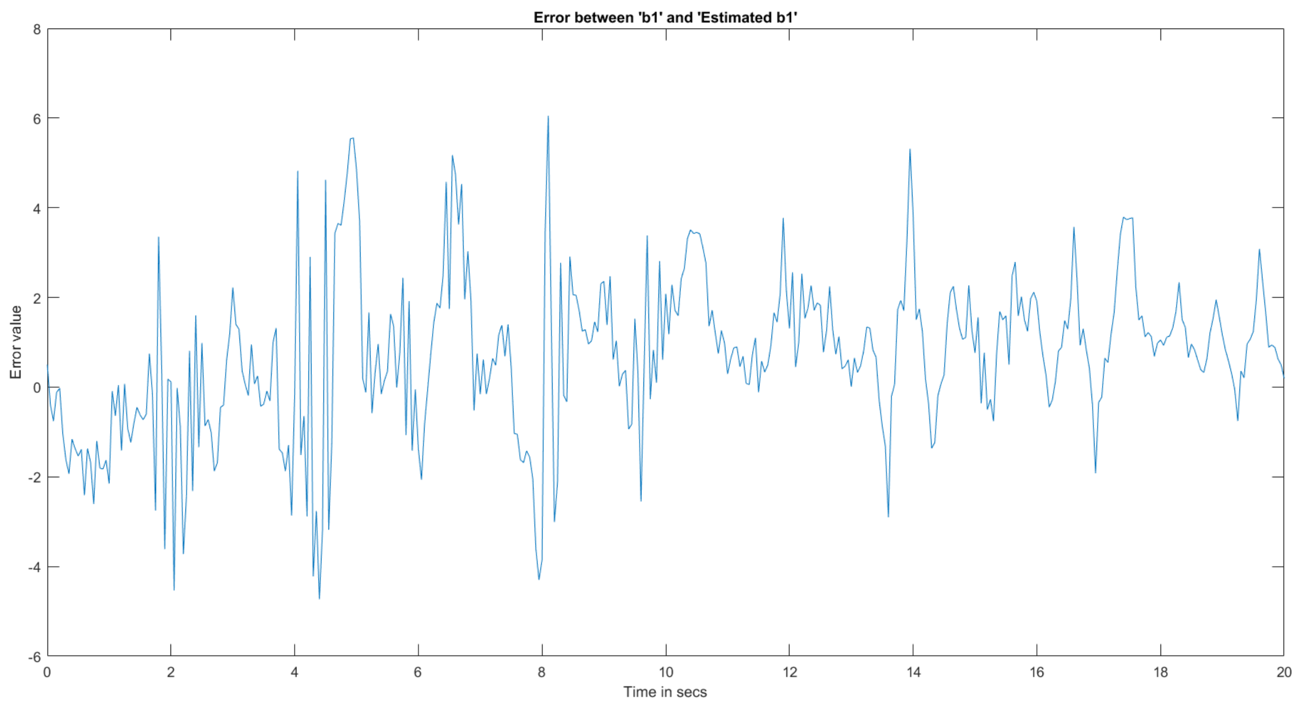
12) Error μεταξύ α_{22} $\kappa\alpha\iota$ $\hat{\alpha}_{22}$



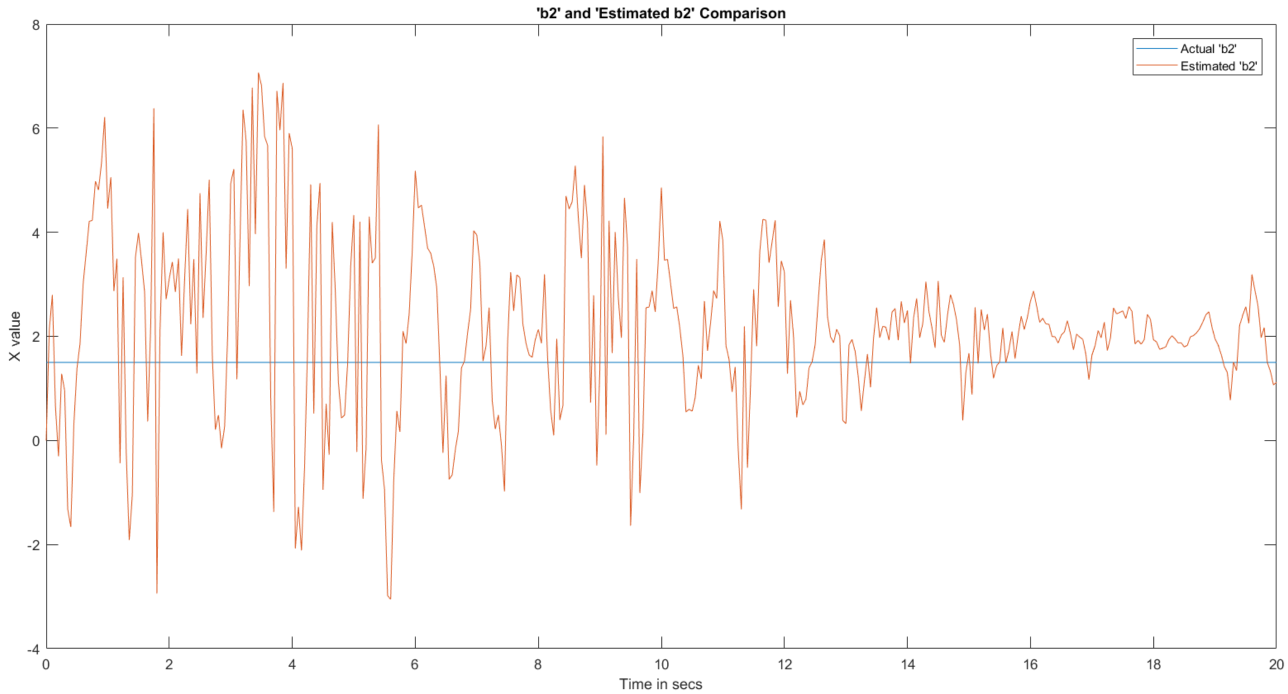
13) Γραφικές παραστάσεις b_1 $και$ $\hat{b}_1$



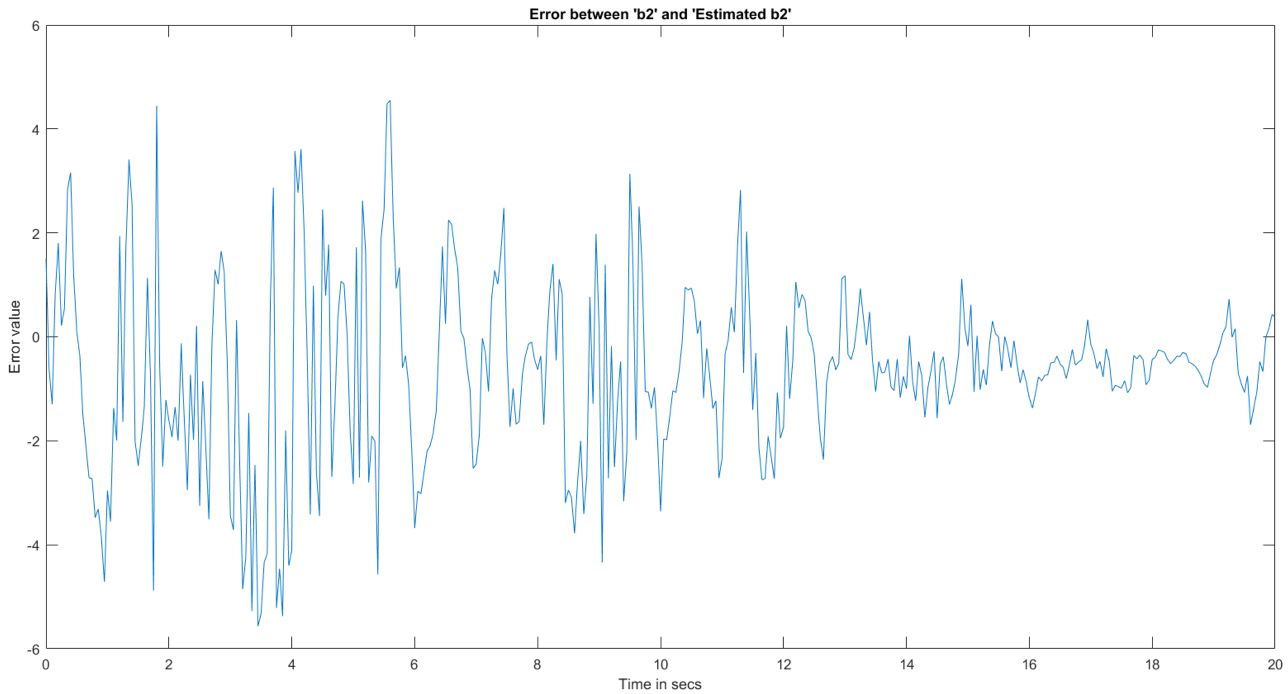
14) Error μεταξύ b_1 $και$ $\hat{b}_1$



15) Γραφικές παραστάσεις b_2 $και$ $\hat{b}_2$



16) Error μεταξύ b_2 $και$ $\hat{b}_2$



Όπως είναι προφανές από τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις καμία από τις παραμέτρους δε εκτιμάται με τεράστια ακρίβεια, αλλά φαίνεται σε βάθος χρόνου να τείνουν προς την πραγματική τους τιμή. Η εκτίμηση όμως για x_1 $και$ x_2 είναι πάρα πολύ κοντά στην πραγματική τιμή, και αν επιλέγαμε ακόμη μεγαλύτερα γ_1 $και$ γ_2 θα μπορούσε να είναι ακόμη καλύτερη. Όπως είναι λογικό οι εκτιμήσεις για X γίνονται καλύτερες όσο καλύτερη είναι η εκτίμηση των παραμέτρων.

Συμπεράσματα

Οι μέθοδοι Κλίσης, Lyapunov (με παράλληλη και μικτή δομή) έχουν ως στόχο την on-line εκτίμηση παραμέτρων και ως εκ τούτου είναι υπολογιστικά απλοί, ώστε να μπορούν να επεξεργαστούν γρήγορα της μετρήσεις που παρέχονται και να υπολογίσουν μία εκτίμηση. Η μέθοδος κλίσης προσπαθεί να βρει να το ελάχιστο μίας συνάρτησης κάνοντας μικρή βήματα προς την κατεύθυνση που η τιμή της συνάρτησης μειώνεται. Από την άλλη η σχεδίαση κατά Lyapunov χρησιμοποιεί της συνάρτηση Lyapunov για να καταλήξει σε σημεία ευστάθειας. Όπως μελετήσαμε παραπάνω και οι δύο μπορεί να έχουν αρκετά καλές προσεγγίσεις ανάλογα με το σύστημα που πρέπει να προσομοιωθεί.