Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

24/3/2023

Εργασία 1

Γραμμική Παραμετροποίηση, Εκτίμηση Άγνωστων Παραμέτρων, Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων

Μάθημα: Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων
Καθηγητής: Ροβιθάκης Γεώργιος
Όνομα: Τσιμπλιαρίδης Νικόλαος
ΑΕΜ: 9652
E-mail: tenikola@ece.auth.gr

Εαρινό εξάμηνο
2022-2023

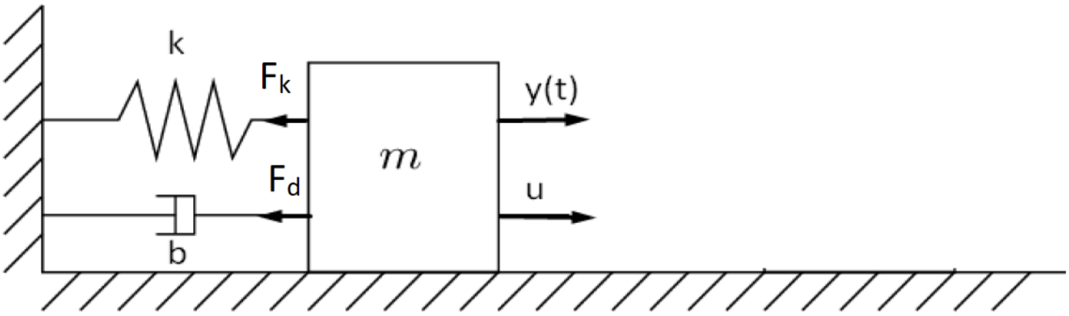
Πίνακας περιεχομένων

Εργασία 1

Θέμα 1

Ερώτημα α)

Θέλουμε να βρούμε το μαθηματικό μοντέλο που να περιγράφει γραμμικά την δυναμική συμπεριφορά του συστήματος, στην μορφή: y = $\theta^{*T} \cdot \zeta$



- $F_k = k \cdot y$
- $F_b = b \cdot \dot{y}$
- $\Sigma F = m \cdot a$
    - ⇔ $u - F_k - F_b = m \cdot \ddot{y}$
    - ⇔ $u - k \cdot y - b \cdot \dot{y} = m \cdot \ddot{y}$
    - ⇔ $\ddot{y} + \frac{b}{m} \cdot \dot{y} + \frac{k}{m} \cdot y = \frac{1}{m} \cdot u$

Συγκεντρώνοντας όλες τις παραμέτρους σε ένα διάνυσμα θ* και όλα τα σήματα εισόδου-εξόδου με τις παραγώγους τους σε ένα άλλο διάνυσμα Δ. Άρα προκύπτει ότι $y^{(2)} = \theta^{*T} \cdot \Delta$ με:

$$\theta^* = \begin{bmatrix} b/m \\ k/m \\ 1/m \end{bmatrix} \text{ και } \Delta = \begin{bmatrix} -\dot{y} \\ -y \\ u \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow y^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} & \frac{k}{m} & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\dot{y} \\ -y \\ u \end{bmatrix}$$

Στο συγκεκριμένο όμως παράδειγμα η παράγωγος της μετατόπισης δεν είναι διαθέσιμη, και δεν έχουν κάποιον τρόπο να την υπολογίσουμε. Για να ξεπεράσουμε το πρόβλημα αυτό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα ευσταθές φίλτρο ίδιας τάξης με την τάξη της παραγώγισης του y, δηλαδή 2. Οπότε χρησιμοποιούμε ευσταθές φίλτρο 2ης τάξης: $\frac{1}{\Lambda(s)}$ βρίσκοντας z = $\theta^{*T} \cdot \zeta$

Όπου z = $\frac{1}{\Lambda(s)} \cdot y^{(2)} = \frac{s^2}{\Lambda(s)} \cdot$ y   και

$$\zeta = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)} \cdot y & \frac{\Delta_0^T(s)}{\Lambda(s)} \cdot u \end{bmatrix}$$

$\Lambda(s) = s^2 + \lambda_1 \cdot s + \lambda_2$

Τόσο το z όσο και το ζ παράγονται χωρίς την χρήση διαφοριστών, απλά φιλτράροντας την είσοδο u και την είσοδο y με τα φίλτρα $\frac{s^i}{\Lambda(s)}$:

Λ(s) = $s^2 + \lambda^T \cdot \Delta_1(s)$ (σχέση 1), και λ = $[\lambda_1 \quad \lambda_2]^T$

Οπότε:

z = $\frac{1}{\Lambda(s)} \cdot y^2 = \frac{s^2}{\Lambda(s)} \cdot y$ ⇔ (σχέση 1)

z = y $- \frac{\lambda^T \Delta_1(s)}{\Lambda(s)} \cdot y$ ⇔ y = z + $\frac{\lambda^T \Delta_1(s)}{\Lambda(s)} \cdot y$ (Σχέση 2)

Όμως z = $\theta^{*T} \cdot \zeta$ και αν χωρίσουμε το ζ σε ζ_1 που έχουν να κάνουν με το y, και ζ_2 που έχουν να κάνουν με το u, δηλαδή:

z = $\theta_1^{*T} \cdot \zeta_1 + \theta_2^{*T} \cdot \zeta_2$, με $\theta_1^* = \begin{bmatrix} b/m \\ k/m \end{bmatrix}$, και $\theta_2^* = 1/m$

και $\zeta_1 = -\frac{\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)} \cdot y$, $\zeta_2 = \frac{\Delta_0^T(s)}{\Lambda(s)} \cdot y$

(Σχέση 2) ⇔ y = $\theta_1^{*T} \cdot \zeta_1 + \theta_2^{*T} \cdot \zeta_2 - \lambda^T \cdot \zeta_1$ ή y = $\theta_\lambda^T \cdot \zeta$

Με $\theta_\lambda = \begin{bmatrix} \theta_1^{*T} - \lambda^T \\ \theta_2^{*T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b/m - \lambda_1 \\ k/m - \lambda_2 \\ 1/m \end{bmatrix}$, και $\zeta = \begin{bmatrix} -\frac{s}{s^2 + \lambda_1 \cdot s + \lambda_2} \cdot y \\ -\frac{1}{s^2 + \lambda_1 \cdot s + \lambda_2} \cdot y \\ \frac{1}{s^2 + \lambda_1 \cdot s + \lambda_2} \cdot u \end{bmatrix}$

Ερώτημα β)

Υλοποίηση της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων για το πρόβλημά μας.

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων εφαρμόζεται σε γραμμικά παραμετροποιημένα μοντέλα της μορφής: y = $\theta^T \cdot \phi$. Έχουμε ήδη παραμετροποιήσει γραμμικά το σύστημα μας σε αυτήν την μορφή στο πρώτο ερώτημα με $\theta^T = \theta_\lambda^T$ και φ = ζ

Ο στόχος της μεθόδου αυτής είναι να βρούμε το κατάλληλο θ_0 που ελαχιστοποιεί την:

$$V(\theta, Z_N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \frac{1}{2} e^2(t, \theta)$$

$$ή \qquad \theta_0 = argmin_\theta \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \frac{e^2(t,\theta)}{2}$$

Όπου e(t,θ): το σφάλμα πρόβλεψης για παραμέτρους θ για χρονικά μεταβαλλόμενη είσοδο την στιγμή t. Στην πράξη θα έχουμε δείγματα ανά συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα και για αυτό θεωρούμε t = 1,2,…,N

Το σφάλμα ορίζεται ως e = y(t) - $\theta^T \cdot \phi(t)$, οπότε:

$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \frac{[y(t) - \theta^T \cdot \varphi(t)]^2}{2} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} y^2(t) + \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \frac{\theta^T \cdot \varphi(t) \cdot \varphi(t)^T \theta}{2} - \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \theta^T \cdot \varphi(t) \cdot y(t)$

Η $V_N(\theta)$ ελαχιστοποιείται όταν:

$\frac{\partial V_N(\theta)}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\theta_0} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \varphi(t) \varphi^T(t)\right) \cdot \theta_0 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \varphi(t)\, y(t)$ (Σχέση 3)

Και αν ο πίνακας στο πρώτο μέλος έχει αντίστροφο, λύνουμε ως προς θ_0 που είναι οι παράμετροι που ψάχνουμε:

$$\theta_0 = \left(\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \varphi(t)\cdot\varphi^T(t)\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \varphi(t)\cdot y(t)\right)$$

Στην υλοποίηση μας θα προτιμήσουμε να επιλύουμε την κανονική εξίσωση (Σχέση 3), καθώς ο πίνακας μπορεί να μην είναι αντιστρέψιμος ή ο υπολογισμός του να είναι χρονοβόρος και πολύπλοκος.

Οι συνιστώσες που καθορίζουν τις μετρήσεις έχουν την μορφή:

ϕ(t) = $[\varphi_1(t) \quad \varphi_2(t) \quad \varphi_3(t)]$ με t = 1, 2, …, N

Ενώ η έξοδος έχει την μορφή:

y(t) = [y(t)] με t = 1, 2, …, N

Ερώτημα γ)

Προσομοίωση του συστήματος και της εκτίμησης μέσω MATLAB.

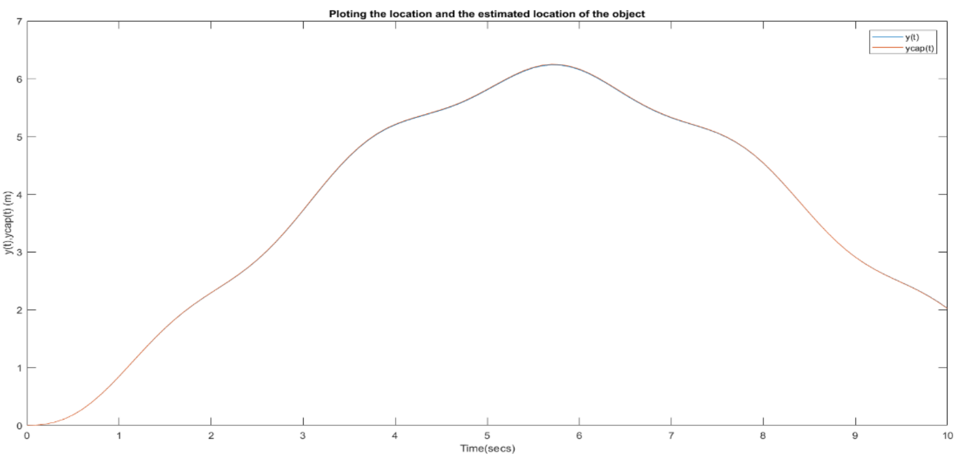
Έχουμε συνολικά 10secs και δείγματα ανά 0.1secs, οπότε N = 101 άρα αρχικά θα πρέπει να γεμίσουμε τους πίνακες ϕ(t) και y(t) δηλαδή έναν πίνακα 101x3 και έναν 101x1 αντίστοιχα.

Από αυτά που υπολογίσαμε στο ερώτημα β προκύπτει ότι:

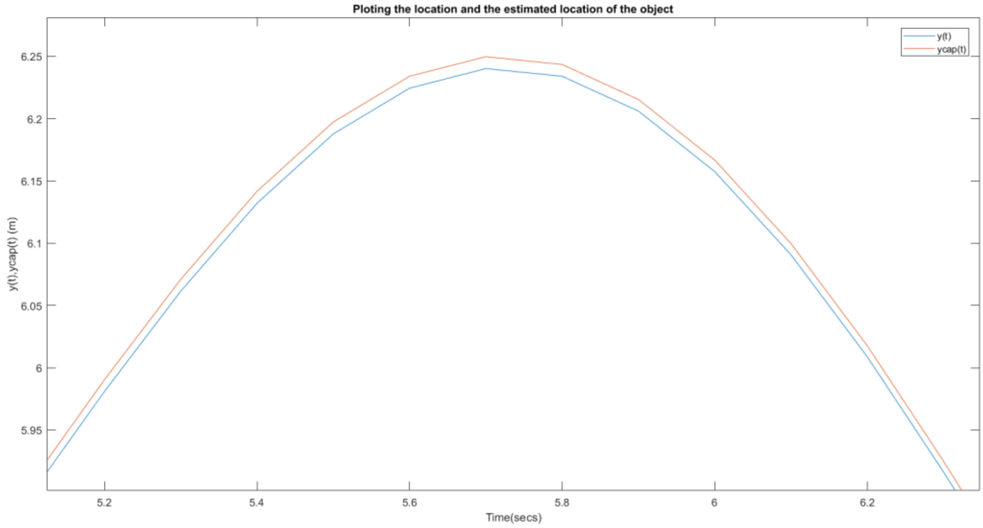
$$\theta_0 = \begin{bmatrix} {}^{b}/_{m} - \lambda_1 \\ {}^{k}/_{m} - \lambda_2 \\ {}^{1}/_{m} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b = (\theta_0(1) + \lambda_1)\cdot m \\ k = (\theta_0(2) + \lambda_2)\cdot m \\ m = {}^{1}/_{\theta_0(3)} \end{cases}$$

Χρησιμοποιούμε την ode45 αρχικά με τις τιμές που μας δίνονται για τις παραμέτρους (m =

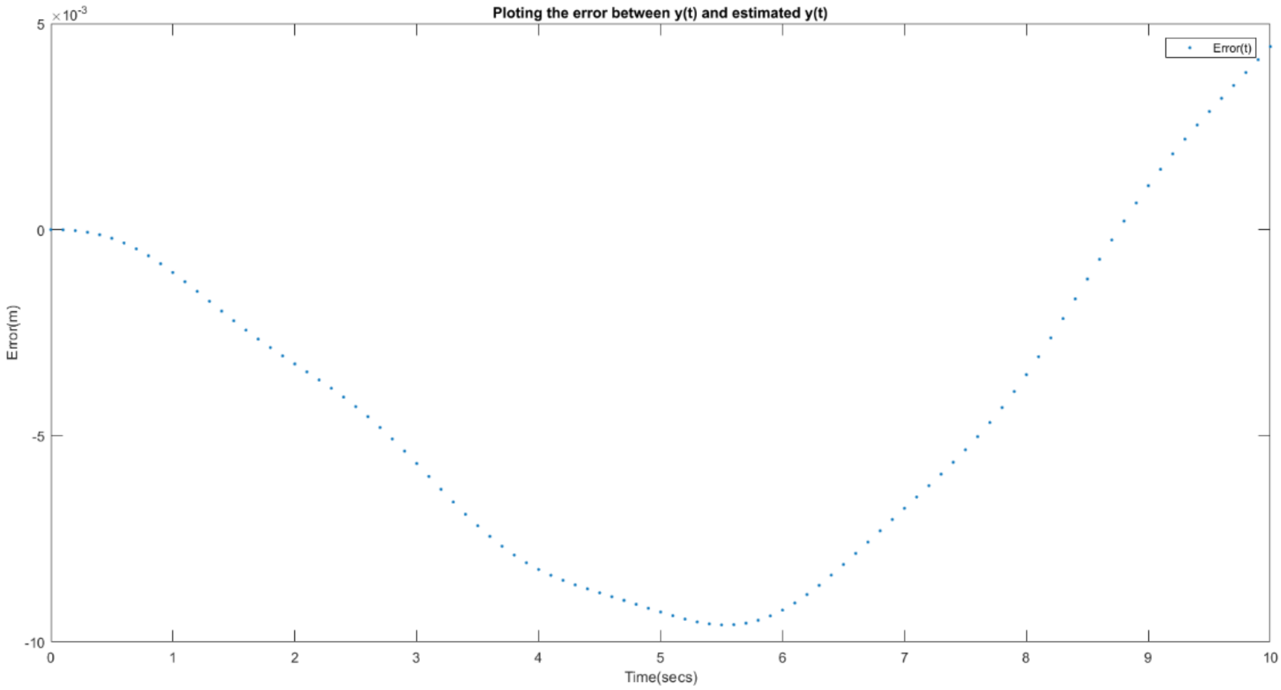
10kg, b = 0.5kg/s, k = 2.5kg/s^2), οπότε παίρνουμε το y(t) και έπειτα με τις τιμές που υπολογίσαμε από τον αλγόριθμο των ελαχίστων τετραγώνων, οπότε παίρνουμε το $\hat{y}(t)$. Όπως φαίνεται και στο παρακάτω διάγραμμα οι τιμές είναι πολύ κοντά, οπότε η εκτίμηση μας είναι αρκετά καλή.



Αν εστιάσουμε πιο κοντά φαίνεται ότι η διαφορά είναι περίπου της τάξης 10^{-3}



Αυτή η τάξη μεγέθους επαληθεύεται και όταν εκτυπώνουμε το σφάλμα ανάμεσα στην τιμή της μετατόπισης και την εκτιμώμενη τιμή της μετατόπισης:

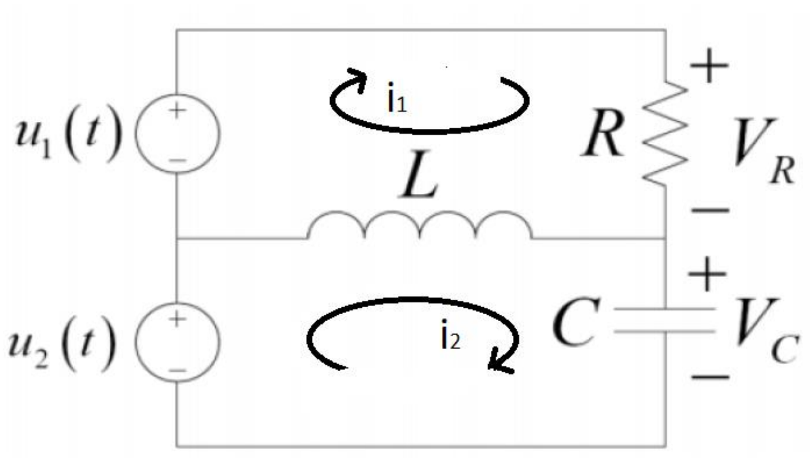


Οπότε στο συγκεκριμένο παράδειγμα θα λέγαμε ότι η κίνηση του αντικειμένου προσομοιάζεται με μεγάλη ακρίβεια με την χρήση του αλγορίθμου των ελαχίστων τετραγώνων.

Θέμα 2

Ερώτημα α)

Εκτίμηση με μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων και σύγκριση με μετρήσεις.



$i_1 = \frac{V_R}{R}$ και $i_2 = C\frac{dV_C}{dt}$

Το ρεύμα που περνάει από το L είναι: $i_L = i_1 - i_2 = \frac{V_R}{R} - C \cdot \frac{dV_C}{dt}$

Από εξισώσεις βρόχων:

- $u_1 = V_R + L \cdot \frac{di_L}{dt}$
- $u_2 = V_C - L \cdot \frac{di_L}{dt}$

Αθροίζοντας αυτές τις δύο σχέσεις ⇔ $u_1 + u_2 = V_R + V_C \Leftrightarrow V_R = u_1 + u_2 - V_C$ (Σχέση 1)

$$u_1 = V_R + L \cdot \frac{di_L}{dt} \Leftrightarrow u_1 = V_R + \frac{L}{R} \cdot \frac{dV_R}{dt} - L \cdot C \cdot \frac{d^2V_C}{dt^2} \Leftrightarrow$$
$$L \cdot C \cdot \frac{d^2V_C}{dt^2} + V_C = u_2 + \frac{L}{R} \cdot \left(\frac{d(-V_C)}{dt} + \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt}\right) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$$
$$\ddot{y} + \frac{1}{R \cdot C} \cdot \dot{y} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot y = \frac{1}{R \cdot C}\dot{u}_1 + \frac{1}{R \cdot C}\dot{u}_2 + \frac{1}{L \cdot C}u_2$$

Δηλαδή: $\ddot{y} = \theta^{*T} \cdot \Delta = \begin{bmatrix} \frac{1}{R \cdot C} & \frac{1}{L \cdot C} & \frac{1}{R \cdot C} & 0 & \frac{1}{R \cdot C} & \frac{1}{L \cdot C} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\dot{y} \\ -y \\ \dot{u}_1 \\ u_1 \\ \dot{u}_2 \\ u_2 \end{bmatrix}$

Χρησιμοποιούμε ξανά το ίδιο φίλτρο 2ης τάξης: $\frac{1}{\Lambda(s)}$

Με $\Lambda(s) = s^2 + \lambda_1 \cdot s + \lambda_2 = s^2 + 3 \cdot s + 2$ και φιλτράρουμε και τα δύο μέρη με αυτό ώστε να καταλήξουμε σε $z = \theta^{*T} \cdot \zeta$

- $z = \frac{1}{\Lambda(s)} \cdot y^2 = \frac{s^2}{\Lambda(s)} \cdot y$

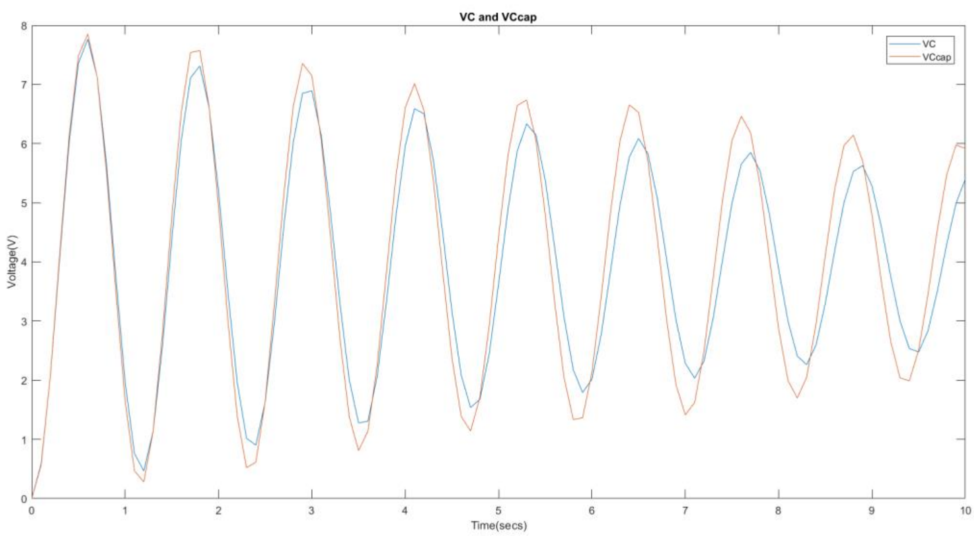
- θλ = … = … = $\begin{bmatrix} {}^{1}/_{(R\cdot C)} - \lambda_1 \\ {}^{1}/_{(L\cdot C)} - \lambda_2 \\ {}^{1}/_{(R\cdot C)} \\ 0 \\ {}^{1}/_{(R\cdot C)} \\ {}^{1}/_{(L\cdot C)} \end{bmatrix}$
- ζ = … = … = $\begin{bmatrix} -\frac{s}{s^2+\lambda_1\cdot s+\lambda_2}\cdot y \\ -\frac{1}{s^2+\lambda_1\cdot s+\lambda_2}\cdot y \\ -\frac{s}{s^2+\lambda_1\cdot s+\lambda_2}\cdot u_1 \\ -\frac{1}{s^2+\lambda_1\cdot s+\lambda_2}\cdot u_1 \\ -\frac{s}{s^2+\lambda_1\cdot s+\lambda_2}\cdot u_2 \\ -\frac{1}{s^2+\lambda_1\cdot s+\lambda_2}\cdot u_2 \end{bmatrix}$

Οπότε θ(1) = $\frac{1}{R\cdot C} - \lambda_1 \Leftrightarrow R\cdot C = \frac{1}{\theta(1)+\lambda_1}$

Και θ(2) = $\frac{1}{L\cdot C} - \lambda_2 \Leftrightarrow L\cdot C = \frac{1}{\theta(2)+\lambda_2}$

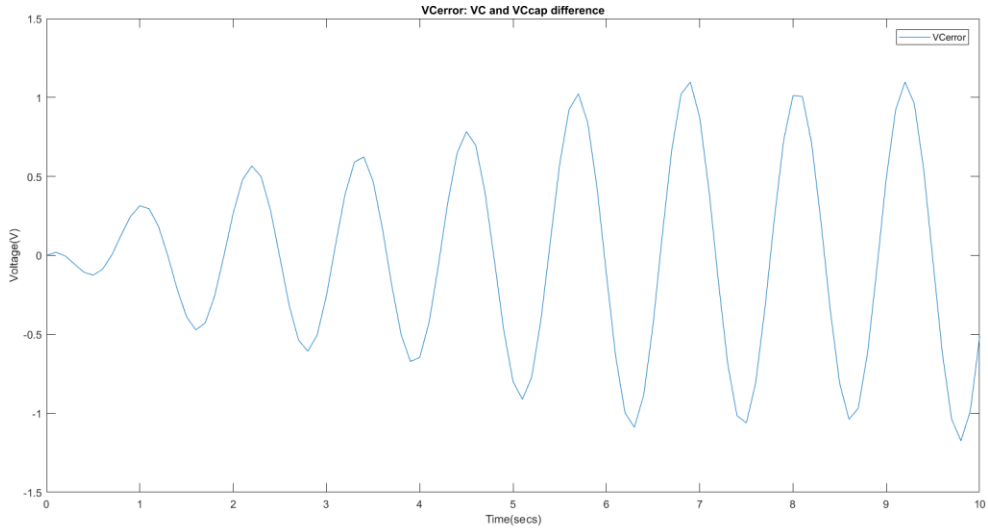
Εφαρμόζουμε την ίδια ακριβώς μεθοδολογία με το πρώτο ερώτημα και ξανά με την χρήση της ode45 παίρνουμε τις τιμές για $\hat{V}_C$ και $\hat{V}_R$, ενώ οι τιμές για V_C και V_R μας δίνονται από το αρχείο v.p οπότε προκύπτουν οι εξής γραφικές παραστάσεις:

1) Σύγκριση $\hat{V}_C$ και V_C



Όπως βλέπουμε γίνεται μία αρκετά καλή εκτίμηση για το V_C η οποία όμως φαίνεται να βγάζει όλο και χειρότερα αποτελέσματα όσο μεγαλύτερος είναι ο χρόνος.

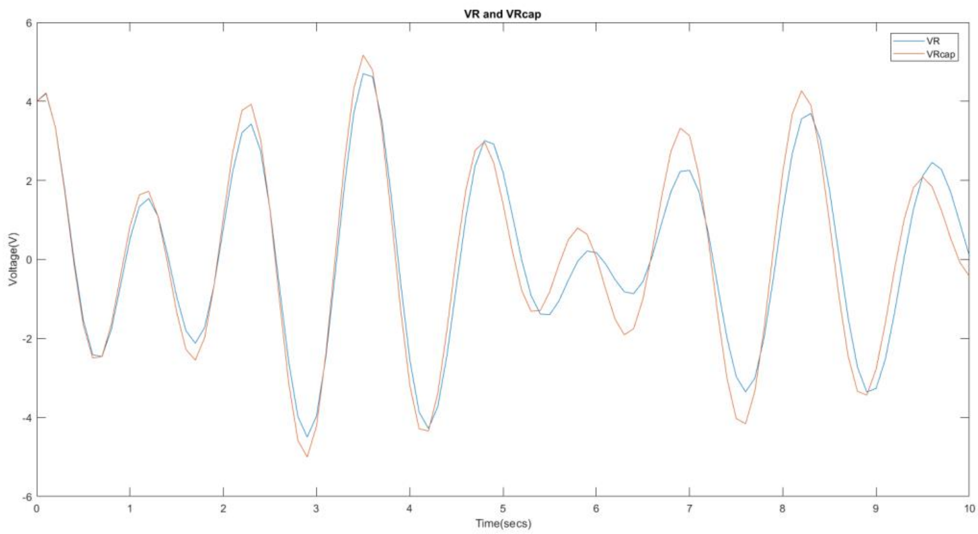
2) Error V_C



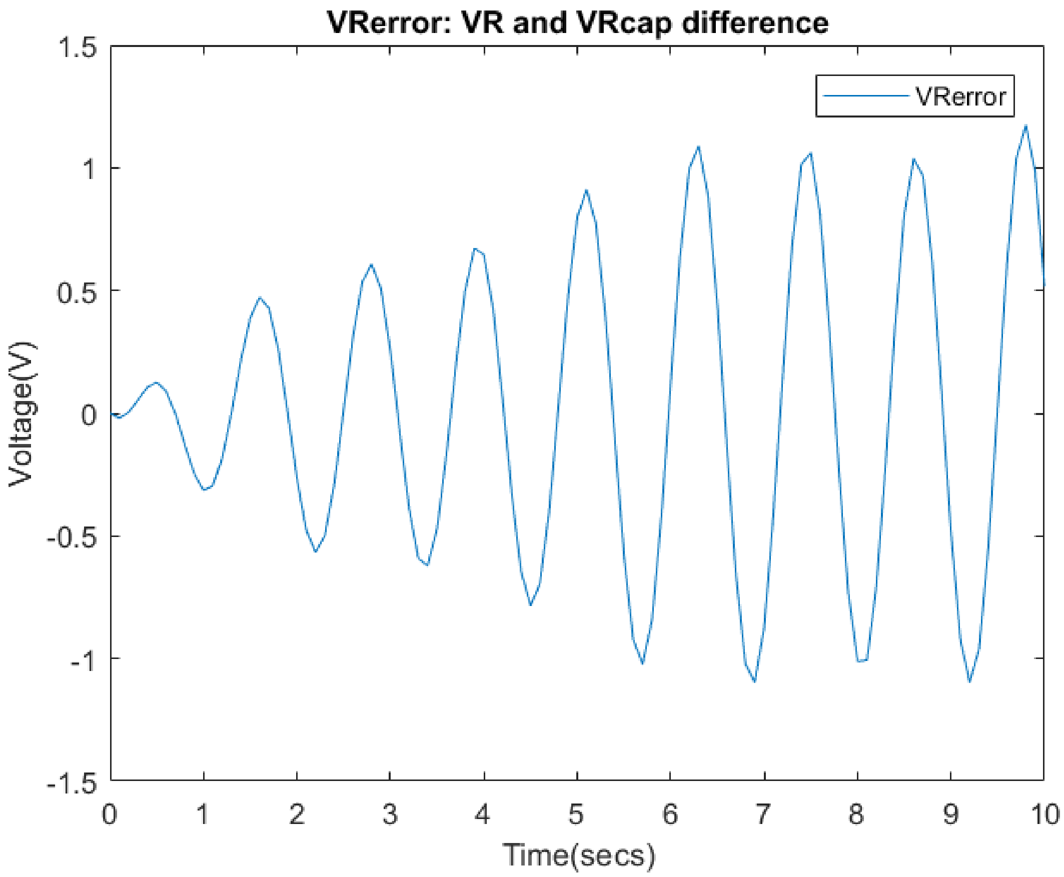
Η παραπάνω παρατήρηση φαίνεται να ισχύει αφού όπως βλέπουμε το σφάλμα έχει ημιτονοειδή μορφή αλλά με αυξανόμενο πλάτος ως προς τον χρόνο. Αυτό είναι λογικό αφού η κάθε τιμή εξαρτάται και από την προηγούμενη οπότε ξεκινάμε με πιο μικρό στις πρώτες τιμές και για επόμενη «κουβαλάμε» και το σφάλμα από τις προηγούμενες.

3) Σύγκριση $\widehat{V}_R$ και V_R

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται ότι η εκτίμηση για το V_R έχει παρόμοια αποτελέσματα με αυτήν για V_C. Δηλαδή ότι σαν εκτίμηση είναι αρχικά πολύ καλή αλλά όσο αυξάνεται ο χρόνος τόσο χειρότερη γίνεται.



4) Error V_R



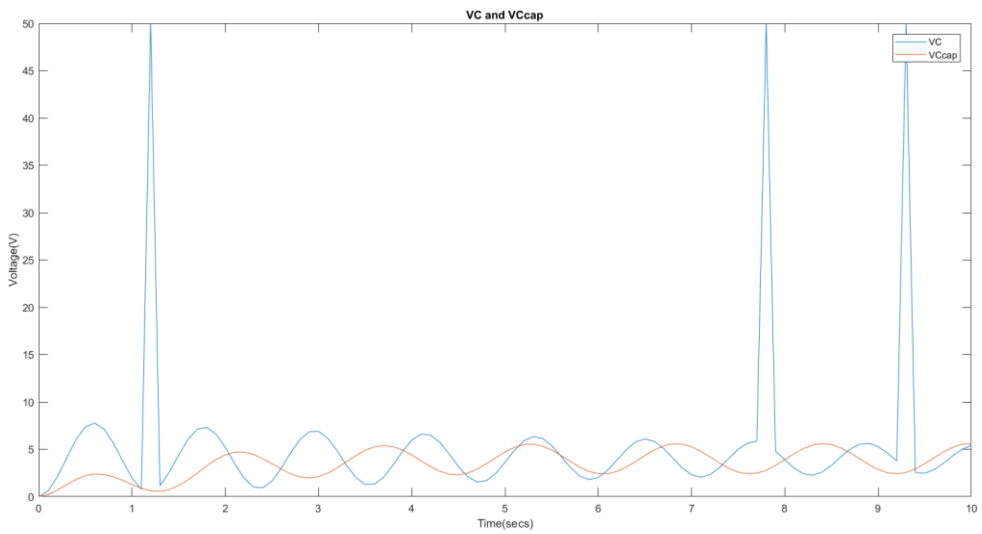
Επαληθεύεται και από εδώ ότι το σφάλμα αυξάνεται με τον χρόνο.

Ερώτημα β)

Αντίκτυπο σφάλματος στις μετρήσεις στην εκτίμηση με μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

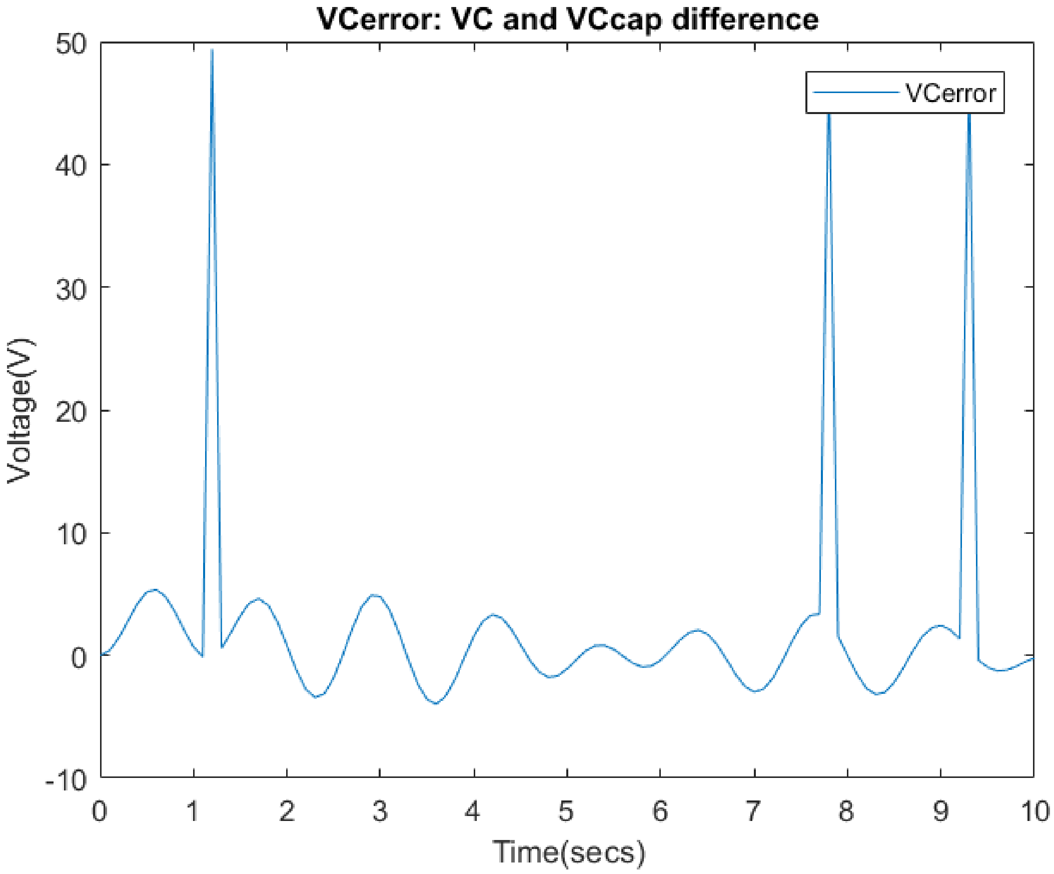
Έχοντας εισάγει εσκεμμένα πολύ μεγάλες τιμές ($V_R = V_c = 50V$) σε 3 τυχαίες χρονικές στιγμές θέλουμε να ελέγξουμε αν η εκτίμηση μας θα επηρεαστεί

1) Σύγκριση $\hat{V}_C$ και V_C

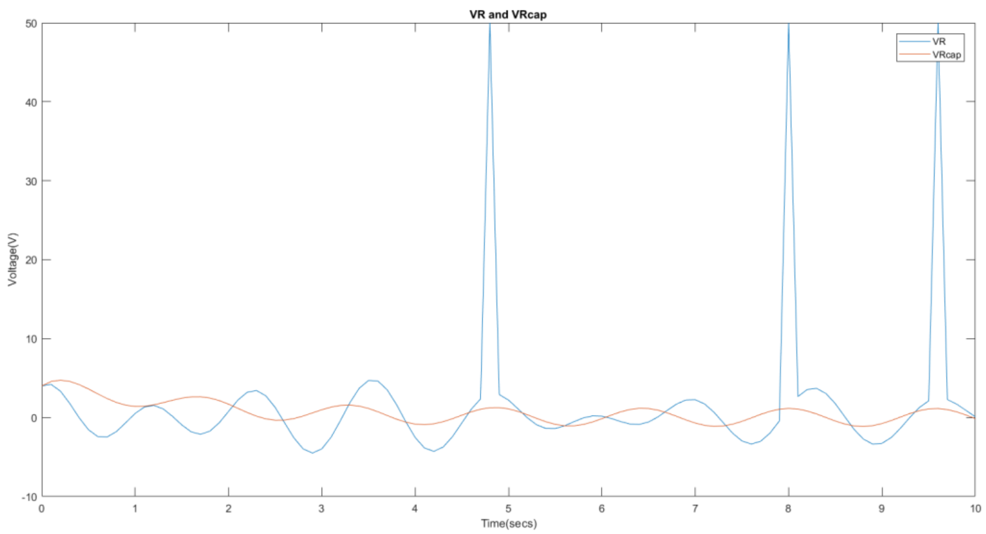


2) Error V_C

Οι τιμές στις οποίες εμφανίζονται τα spikes μπορούν να αγνοηθούν αφού είναι οι λάθος τιμές που έχουμε βάλει. Παρατηρούμε όμως ότι σε σύγκριση με το ερώτημα α) ότι η καμπύλη του σφάλματος έχει σχεδόν διπλασιαστεί. Κάτι τέτοιο είναι λογικό, αφού οι τιμές αυτές είναι αρκετά μεγαλύτερες από το φυσιολογικό, οπότε επηρεάζουν και σε μεγαλύτερο βαθμό από μία φυσιολογική τιμή τον αλγόριθμο ελαχίστων τετραγώνων.

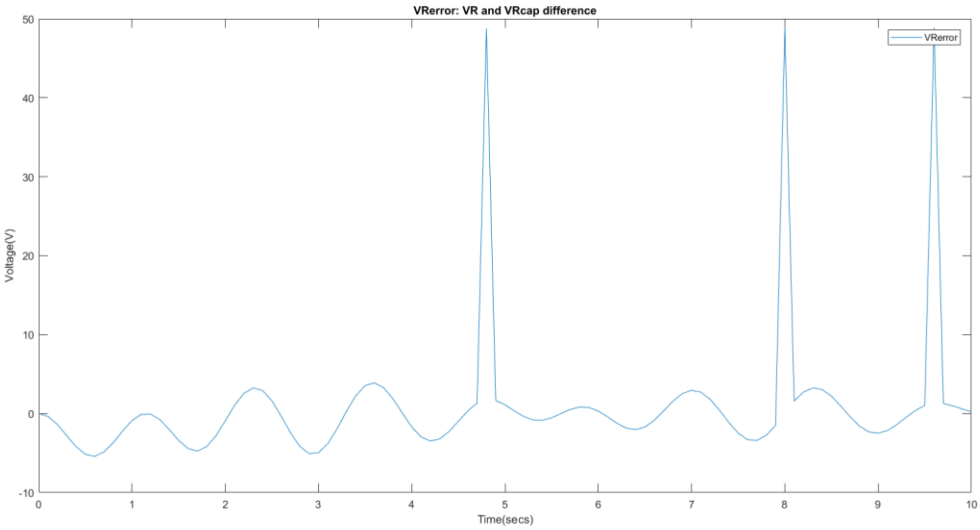


3) Σύγκριση $\hat{V}_R$ και V_R



4) Error V_R

Στο σφάλμα για την V_R επίσης βλέπουμε σημαντική διαφορά από το διάγραμμα του πρώτου ερωτήματος, αφού κι εδώ υπερδιπλασιάζεται σε ορισμένα σημεία.



Γίνεται εμφανές από τα παραπάνω διαγράμματα ότι επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό η ακρίβεια της εκτίμησης όταν έχουμε έστω και ελάχιστες τιμές πολύ μεγαλύτερες του φυσιολογικού. Αυτό συμβαίνει διότι η κάθε τιμή στον αλγόριθμο των ελαχίστων τετραγώνων έχει το ίδιο «βάρος» με τις υπόλοιπες. Οπότε μία τιμή που έχει μεγάλη διαφορά από το αναμενόμενο, συνεισφέρει παραπάνω στο αποτέλεσμα συγκριτικά με μία που έχει μικρή διαφορά.