

ИЗПИТ

по Математически анализ, специалност "Приложна математика"

4 септември 2007г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Докажете, че криволинейните трапеци са измерими по Пеано-Жордан. Представете интеграла

$$\int \int_K f(x, y) dx dy$$

(тук K е множеството $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq |x - 1|\}$, а $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъснатата функция) като повторен веднъж с външно интегриране по x и веднъж с външно интегриране по y .

2. Формулирайте теоремата на Лебег за интегрируемост по Риман. Докажете с нейна помощ, че частното на две интегрируеми по Риман функции е функция, интегрируема по Риман, стига да съществува положително число ε_0 такова, че $|g(x)| \geq \varepsilon_0$ за всяко x , където g е функцията в знаменателя.

3. Дайте дефиниция на индикаторна (характеристична) функция на подмножество A на \mathbb{R}^n . Намерете (с обосновка) множеството от точките на прекъсване на тази функция.

4. Използвайте принципа на Кавалиери, за да пресметнете обема на четиримерното кълбо

$$B_r^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq r^2\}$$

с радиус r . (Използвайте наготово, че обемът на тримерното кълбо с радиус r е $\frac{4}{3}\pi r^3$.)

5. Нека $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ е двукратно гладка функция, дефинирана в област $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

(а) Пресметнете **rot grad** f .

(б) Нека F е гладко векторно поле в областта Ω . Формулирайте твърдения, еквивалентни на свойството интегралът от втори род от полето F да не зависи от кривата $\Gamma_{AB} \subset \Omega$, по която интегрираме, а само от началото и края ѝ. Каква е връзката между двете подточки?

6. Пресметнете криволинейния интеграл

$$\oint_{\Gamma} \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy,$$

където Γ е елипсата $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\}$, обикаляна в посока обратна на часовниковата стрелка.

7. Напишете формулата на Стокс и обяснете при какви условия тя е вярна. Формулирайте теорема в тримерното пространство, твърдяща, че при определени допълнителни условия върху областта необходимото условие за потенциалност на поле е и достатъчно. Докажете я.

8. Разгледайте хомогенна материална нишка с плътност 1, разположена по полуокръжност с радиус R (да мислим, че центърът ѝ е в началото на координатната система и тя е в горната полуравнина). Каква е гравитационната сила, с която материалната нишка притегля материална точка с маса m_0 , разположена в началото на координатната система?