Лекционни записки по Математически Анализ

проф. Надежда Рибарска
Набрани от Никола Юруков

25 октомври 2015 г.

Съдържание

1 Лекция 1 - преговор с разширение **3**
1.1 Евклидовото пространство $\mathbb{R}^n$ 3
1.2 Топология в $\mathbb{R}^n$ 4
1.3 Основни теореми 7

1 Лекция 1 - преговор с разширение

1.1 Евклидовото пространство $\mathbb{R}^n$

Като множество $\mathbb{R}^n$ е множеството $\{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, .., n\}$ от наредените n-торки реални числа. Ако го снабдим със стандартните линейни операции събиране на вектори и умножение на вектор с реално число, получаваме реално линейно пространство (спомнете си аксиомите от курса по линейна алгебра). Да напомним формалните дефиниции: сума на векторите $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ е векторът $x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, ..., x_n+y_n)$ (събирането е покоординатно). Произведение на скалара $\lambda \in \mathbb{R}$ с вектора x е векторът $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$ (умножението със скалар също е покоординатно). Ще означаваме с $\mathbf{0}$ нулевия вектор $(0, \ldots, 0)$.

За да можем да правим анализ (да говорим за граница, непрекъснатост, производна и т.н.), освен линейната структура ни е необходима и някаква "мярка на близост"в нашето пространство. Както помните от курса по ДИС2, стандартната мярка на близост между два вектора е евклидовото разстояние между тях:

$$\rho(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}\ , \text{ където } x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ y = (y_1, y_2, ..., y_n)\ .$$

Забележете, че в $\mathbb{R}^2$ това е просто питагоровата теорема. Това разстояние е добре съгласувано с линейната структура в смисъл, че $\rho(x, y) = \|x - y\|$, където в дясната част стои евклидовата норма (или дължината) на вектора $x - y$:

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ ,\ x = (x_1, x_2, ..., x_n)\ .$$

Да напомним, че една функция $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty)$ се нарича норма, ако за нея са в сила свойствата

1. $\|x\| = 0 \iff x = \mathbf{0}$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство на триъгълника)

В курса по ДИС2 е проверено, че евклидовата норма е норма. За упражнение проверете, че

- $\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$
- $\|(x_1, x_2)\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$
- $\|(x_1, x_2)\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p}$, $1 < p < \infty$

са норми в $\mathbb{R}^2$. По-общо, проверете, че

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}\ ,\ 1 \leq p < \infty \text{ е норма в } \mathbb{R}^n\ .$$

Разбира се, за целта трябва да използвате неравенството на Минковски от курса по ДИС2.

Евклидовата норма има по-хубави геометрични свойства от горните примери, защото е съгласувана със скаларното произведение

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ , \text{ където } x=(x_1,x_2,...,x_n) \text{ и } \ y=(y_1,y_2,...,y_n),$$

по стандартния начин $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$. Да напомним основното неравенство на Коши-Буняковски-Шварц:

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \ .$$

Да напомним също означенията

$$B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y-x\| < r\}$$

за отворено кълбо с център x и радиус r и

$$\overline{B}_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y-x\| \leq r\}$$

за затворено кълбо с център x и радиус r. Като упражнение можете да скицирате кълбата с радиус 1 и център началото на координатната система за нормите $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$ от предишното упражнение.

1.2 Топология в $\mathbb{R}^n$

Дефиниция 1.1. Подмножеството U на $\mathbb{R}^n$ се нарича отворено, ако за всяка точка x от U съществува $\epsilon > 0$ такова, че $B_\epsilon(x) \subset U$.

Основните свойства на отворените множества, проверени в курса по ДИС2, са

1. $\emptyset$ и $\mathbb{R}^n$ са отворени

2. Сечение на краен брой отворени множества е отворено, т.е. ако $U_1, U_2, ..., U_k$ са отворени, то $\bigcap_{i=1}^k U_i$ е отворено.

3. Обединение на произволна фамилия от отворени множества е отворено, т.е. ако U_α са отворени за всяко $\alpha \in I$, то $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ е отворено.

Пример 1.2. Отворените кълба са отворени множества.

Доказателство. Да разгледаме $B_r(x_0)$, $r > 0$. Взимаме си произволно x от кълбото, т.е. растоянието между x и x_0 е по-малко от r. Нека $\epsilon := r - \|x_0 - x\| > 0$. Тогава $B_\epsilon(x) \subset B_r(x_0)$. Наистина, нека $y \in B_\epsilon(x)$, т.е. $\|y-x\| < \epsilon$. Получаваме

$$\begin{aligned} \|x_0 - y\| &\leq \|x-y\| + \|x-x_0\| < \epsilon + \|x - x_0\| \\ \|x_0 - y\| &< r - \|x_0 - x\| + \|x - x_0\| \\ \|x_0 - y\| &< r \end{aligned}$$

$\square$

Пример 1.3. Нека функцията $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е **непрекъсната**. Тогава множеството $U = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) > 0\}$ е отворено.

Доказателство. Взимаме произволна точка $x_0 \in U$, следователно $\epsilon = g(x_0) > 0$. От непрекъснатостта на функцията получаваме, че съществува положително число δ такова, че $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon$ за всяко $x \in B_\delta(x_0)$. Следователно $g(x) > g(x_0) - \epsilon = 0$ и оттук $x \in U$ за всяко $x \in B_\delta(x_0)$. $\square$

Дефиниция 1.4. Едно подмножество F на $\mathbb{R}^n$ се нарича затворено, ако $\mathbb{R}^n \setminus F$ е отворено множество.

Основните свойства на затворените множества, проверени в курса по ДИС2, са

1. $\emptyset, \mathbb{R}^n$ са затворени.

2. Обединие на краен брой затворени множества е затворено, т.е. ако $F_1, F_2, ..., F_k$ са затворени, то $\bigcup_{i=1}^k F_i$ е затворено.

3. Сечение на произволна фамилия от затворени множества е затворено, т.е. ако F_α са затворени за всички $\alpha \in I$, то $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ е затворено.

Пример 1.5. Затворените кълба са затворени множества. Доказателството оставяме за упражнение.

Дефиниция 1.6. Контур на множеството $A \subset \mathbb{R}^n$ наричаме множеството

$$\partial A := \{x \in \mathbb{R}^n : \forall U \text{ отворено, } x \in U \text{ е в сила } U \cap A \neq \emptyset \text{ и } U \setminus A \neq \emptyset\}$$

Дефиниция 1.7. Затворена обвивка на множеството $A \subset \mathbb{R}^n$ наричаме най-малкото затворено множество, съдържащо A:

$$\overline{A} := \cap \{F \subset \mathbb{R}^n : \ F \supset A \text{ и } F \text{ е затворено } \}$$

В курса по ДИС2 е доказано, че

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \{x_m\}_{m=1}^\infty \subset A, \ x_m \to x\}$$

Лесно се проверява, че едно множество е затворено точно тогава, когато съвпада със затворената си обвивка. Връзките между контур на множество и затворена обвивка на множество са

$$\overline{A} = A \cup \partial A \ , \ \partial A = \overline{A} \cap \left(\overline{\mathbb{R}^n \setminus A} \right) \ .$$

Следователно контурът на произволно множество е винаги затворено множество. Също лесно се проверява, че

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \exists \{x_m\}_{m=1}^\infty \subset A, \ x_m \to x \text{ и } \exists \{y_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n \setminus A, \ y_m \to x\}$$

Дефиниция 1.8. Вътрешност на $A \subset \mathbb{R}^n$ наричаме най-голямото отворено множество, съдържащо се в A:

$$\mathring{A} = \cup \{U \subset \mathbb{R}^n : \ U \subset A \text{ и } U \text{ е отворено } \}$$

Друго означение за вътрешност на A е $intA$. Понятието за вътрешност е дуално на понятието за затворена обвивка, т.е.

$$intA = \mathbb{R}^n \setminus \left(\overline{\mathbb{R}^n \setminus A} \right) \ , \ \overline{A} = \mathbb{R}^n \setminus (int(\mathbb{R}^n \setminus A)) \ .$$

Едно от най-важните и често използвани понятия в топологията е понятието за компактност.

Дефиниция 1.9. Едно множество $A \subset \mathbb{R}^n$ се нарича компакт, ако от всяко негово отворено покритие можем да изберем крайно подпокритие, т.е. ако $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ е фамилия от отворени подмножества на $\mathbb{R}^n$, за която е в сила $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha \supset A$, то можем да изберем краен брой индекси $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in I$ такива, че $\cup_{i=1}^k U_{\alpha_i} \supset A$.

В курса по ДИС2 са доказани две важни и нетривиални характеризации на компактните подмножества на $\mathbb{R}^n$:

1. Едно подмножество A на $\mathbb{R}^n$ е компакт точно тогава, когато A е ограничено и затворено.

2. Едно подмножество A на $\mathbb{R}^n$ е компакт точно тогава, когато от всяка редица от негови елементи може да се избере сходяща подредица, чиято граница е също в множеството.

Сега въвеждаме първото разширение, т.е. понятие, за което не сте учили в курса по ДИС2: множество, релативно отворено в A. Ще го използваме по-нататък, за да говорим за множества, релативно отворени в някаква гладка двумерна повърхнина в тримерното евклидово пространство. Интуицията е, че забравяме за всичко извън множеството A.

Дефиниция 1.10. Нека $A \subset \mathbb{R}^n$. Едно подмножество U на A наричаме релативно отворено в A, ако съществува отворено множество $V \subset \mathbb{R}^n$ такова, че $U = A \cap V$.

Твърдение 1.11. *Множеството $U \subset A$ е релативно отворено в A точно тогава, когато за всяка негова точка $x \in U$ съществува $\epsilon > 0$ такова, че $B_\epsilon(x) \cap A \subset U$.*

Доказателство. Нека първо $U \subset A$ е релативно отворено в A и $x \in U$ е произволна. Тогава съществува отворено множество $V \subset \mathbb{R}^n$ с $U = A \cap V$. Тъй като $x \in U \subset V$, съществува $\epsilon > 0$ с $B_\epsilon(x) \subset V$ и оттук $B_\epsilon(x) \cap A \subset V \cap A = U$. В обратната посока, нека за всяка точка $x \in U$ съществува $\epsilon_x > 0$ такова, че $B_{\epsilon_x}(x) \cap A \subset U$. Полагаме $V := \cup_{x \in U} B_{\epsilon_x}(x)$. Очевидно V е отворено множество като обединение на отворени кълбета. Освен това

$$V \cap A = (\cup_{x \in U} B_{\epsilon_x}(x)) \cap A = \cup_{x \in U} \left(B_{\epsilon_x}(x) \cap A \right) \subset U \ .$$

От друга страна, всяка точка $x \in U$ принадлежи на $B_{\epsilon_x}(x) \subset V$, следователно $U \subset V$ и от $U \subset A$ следва $U \subset V \cap A$. С това $U = V \cap A$ и доказателството е завършено. □

Следното приложение на понятието за релативна отвореност е важно и изключително често използвано:

Твърдение 1.12. *Нека $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ е изображение с дефиниционна област $D \subset \mathbb{R}^n$ и стойности в $\mathbb{R}^m$. Твърдим, че f е непрекъсната в D точно тогава когато първообраз на всяко отворено в $\mathbb{R}^m$ множество е релативно отворено в D. Да напомним, че първообраз на $U \subset \mathbb{R}^m$ е множеството $f^{-1}(U) := \{x \in D : f(x) \in U\}$.*

Доказателство. Първо ще докажем, че ако първообраз на всяко отворено в $\mathbb{R}^m$ множество е релативно отворено в D, то f е непрекъсната. Избираме произволна точка x от D и произволно $\epsilon > 0$. Тъй като кълбото $B_\epsilon(f(x))$ е отворено в $\mathbb{R}^m$, първообразът $f^{-1}(B_\epsilon(f(x))$ ще е релативно отворен в D. Тогава $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)) = D \cap V$ за някое множество V, отворено в $\mathbb{R}^n$. Тъй като $x \in f^{-1}(B_\epsilon(f(x)) \subset V$, съществува $\delta > 0$ с $B_\delta(x) \subset V$. Нека $x' \in D$ е произволна точка с $\|x' - x\| < \delta$. Значи $x' \in D \cap B_\delta(x) \subset D \cap V = f^{-1}(B_\epsilon(f(x))$ и следователно $f(x') \in B_\epsilon(f(x))$, т.е. $\|f(x') - f(x)\| < \epsilon$.

За да докажем обратната посока, избираме произволно отворено $U \subset \mathbb{R}^m$. Нека $x \in f^{-1}(U)$. Тогава $f(x)$ принадлежи на отвореното множество U и следователно съществува $\epsilon > 0$ такова, че $B_\epsilon(f(x)) \subset U$. Тъй като f е непрекъсната в x, съществува $\delta > 0$ такова, че $\|f(x') - f(x)\| < \epsilon$ за всяко $x' \in D$, за което $\|x' - x\| < \delta$. Записано по друг начин това означава, че $f(B_\delta(x) \cap D) \subset B_\epsilon(f(x)) \subset U$, следователно $B_\delta(x) \cap D \subset f^{-1}(U)$. Така доказахме, че множеството $f^{-1}(U)$ е релативно отворено в D, защото изпълнява условието от предишното твърдение. □

1.3 Основни теореми

Теорема 1.13 (Теорема на Вайерщрас). *Непрекъснат образ на компакт е компакт. Формално записано, ако $f : K \longrightarrow \mathbb{R}^m$ е непрекъснато изображение с дефиниционна област компактното подмножество K на $\mathbb{R}^n$, то множеството $f(K) := \{f(x) : x \in K\}$ от стойностите на f е компактно подмножество на $\mathbb{R}^m$.*

Доказателство. Нека $\{y_l\}_{l=1}^\infty \subset f(K)$ е редица от елементи на $f(K)$. Тогава за всеки елемент y_l на тази редица съществува елемент x_l на K такъв, че $y(l) = f(x_l)$. Сега редицата $\{x_l\}_{l=1}^\infty$ се съдържа в компактното множество K. Следователно съществува нейна сходяща подредица $\{x_{l_k}\}_{k=1}^\infty$, чиято граница x_0 е елемент на K. Тъй като f е непрекъсната, от дефиницията на Хайне за непрекъснатост получаваме, че $f(x_{l_k}) = y_{l_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} f(x_0)$. Тъй като очевидно $f(x_0) \in f(K)$, остава да се позовем на характеризацията (2) на компактните множества. □

Хубаво упражнение е да се докаже теоремата на Вайерщрас, като се използва дефиницията на компакт и характеризацията на непрекъснатите изображения, която доказахме.

Друго добро упражнение е да се докаже теоремата на Вайерщрас от ДИС 1 (една непрекъсната функция върху краен затворен интервал има минимум и максимум) като следствие от тази форма на теоремата.

Теорема 1.14 (Теорема на Кантор). *Нека $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ е дефинирана в $D \subset \mathbb{R}^n$. Нека K е компактно подмножество на D. Ако f е непрекъсната в K, т.е. непрекъсната е във всяка точка от K, то твърдим, че за всяко $\epsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че за всяко $x \in K$ и за всички $x' \in D$, за които е изпълнено $\|x' - x\| < \delta$, е в сила $\|f(x) - f(x')\| < \epsilon$. Забележете, че заключението е малко по-силно от равномерна непрекъснатост на f върху K.*

Доказателство. Отново ще използваме характеризацията (2) на компактността чрез редици. Допускаме противното, т.е. съществува такова $\epsilon_0 > 0$, че за всички $\delta > 0$ съществуват точки $x_\delta \in K$ и $x'_\delta \in D$ такива, че

$$\|x_\delta - x'_\delta\| < \delta \text{ и } \|f(x_\delta) - f(x'_\delta)\| \geq \epsilon \ .$$

Даваме на δ стойности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ и преименуваме $x_{1/m}$ и $x'_{1/m}$ съответно на x_m и x'_m. Така се образуват две редици $\{x_m\}_{m=1}^\infty \subset K$ и $\{x'_m\}_{m=1}^\infty \subset D$. Знаем, че

$$\|x_m - x'_m\| < \frac{1}{m} \text{ и } \|f(x_m) - f(x'_m)\| \geq \epsilon_0 > 0$$

за всяко естествено m. Тъй като K е компакт, съществува сходяща подредица $x_{m_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0 \in K$ на $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset K$. От неравенствата

$$\|x'_{m_k} - x_0\| \leq \|x'_{m_k} - x_{m_k}\| + \|x_{m_k} - x_0\| < \frac{1}{m_k} + \|x_{m_k} - x_0\|$$

получаваме, че редицата $\{x'_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ също клони към точката $x_0 \in K$. Сега използваме непрекъснатостта на f в точката $x_0 \in K$ и получаваме, че

$$f(x_{m_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0) \text{ и } f(x'_{m_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0).$$

Като извадим тези две редици, получаваме $f(x_{m_k}) - f(x'_{m_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, което противоречи на $\|f(x_m) - f(x'_m)\| \geq \epsilon_0 > 0$ за всяко естествено m. Теоремата е доказана. $\square$