# Лекционни записки по Математически Анализ

проф. Надежда Рибарска
Набрани от Никола Юруков

12 декември 2015 г.

# Съдържание


**1 Лекция 1: Преговор с разширение** **3**

1.1 Евклидовото пространство $\mathbb{R}^n$ . . . 3

1.2 Топология в $\mathbb{R}^n$ . . . 4

1.3 Основни теореми . . . 7

**2 Лекция 2: Кратен Риманов интеграл - въвеждане и основни свойства** **8**

2.1 Паралелотопи в $\mathbb{R}^n$ и тяхната мярка . . . 8

2.2 Въвеждане на Риманов интеграл чрез подхода на Дарбу . . . 10

2.3 Суми на Риман и граница на суми на Риман . . . 13

2.4 Еквивалентност на подхода чрез суми на Дарбу и на подхода чрез суми на Риман . . . 14

**3 Лекция 3: Множества, пренебрежими по Лебег и критерий на Лебег за интегруемост по Риман** **17**

3.1 Множества, пренебрежими по Лебег . . . 17

3.2 Критерий на Лебег за интегруемост по Риман . . . 20

3.3 Основни свойства на интеграла на Риман върху паралелотоп . . . 22

# 1 Лекция 1: Преговор с разширение

## 1.1 Евклидовото пространство $\mathbb{R}^n$

Като множество $\mathbb{R}^n$ е множеството $\{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, .., n\}$ от наредените $n$-торки реални числа. Ако го снабдим със стандартните линейни операции събиране на вектори и умножение на вектор с реално число, получаваме реално линейно пространство (спомнете си аксиомите от курса по линейна алгебра). Да напомним формалните дефиниции: сума на векторите $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ е векторът $x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, ..., x_n+y_n)$ (събирането е покоординатно). Произведение на скалара $\lambda \in \mathbb{R}$ с вектора $x$ е векторът $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$ (умножението със скалар също е покоординатно). Ще означаваме с $\mathbf{0}$ нулевия вектор $(0, \dots, 0)$.

За да можем да правим анализ (да говорим за граница, непрекъснатост, производна и т.н.), освен линейната структура ни е необходима и някаква "мярка на близост"в нашето пространство. Както помните от курса по ДИС2, стандартната мярка на близост между два вектора е евклидовото разстояние между тях:

$$\rho(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}\ ,\ \text{където } x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ y = (y_1, y_2, ..., y_n)\ .$$

Забележете, че в $\mathbb{R}^2$ това е просто питагоровата теорема. Това разстояние е добре съгласувано с линейната структура в смисъл, че $\rho(x, y) = \|x - y\|$, където в дясната част стои евклидовата норма (или дължината) на вектора $x - y$:

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ ,\ x = (x_1, x_2, ..., x_n)\ .$$

Да напомним, че една функция $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty)$ се нарича норма, ако за нея са в сила свойствата

1. $\|x\| = 0 \iff x = \mathbf{0}$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство на триъгълника)

В курса по ДИС2 е проверено, че евклидовата норма е норма. За упражнение проверете, че

- $\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$
- $\|(x_1, x_2)\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$
- $\|(x_1, x_2)\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p}$, $1 < p < \infty$

са норми в $\mathbb{R}^2$. По-общо, проверете, че

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}\ ,\ 1 \leq p < \infty \text{ е норма в } \mathbb{R}^n\ .$$

Разбира се, за целта трябва да използвате неравенството на Минковски от курса по ДИС2.

Евклидовата норма има по-хубави геометрични свойства от горните примери, защото е съгласувана със скаларното произведение

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ , \text{ където } x = (x_1, x_2, ..., x_n) \text{ и } \ y = (y_1, y_2, ..., y_n),$$

по стандартния начин $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Да напомним основното неравенство на Коши-Буняковски-Шварц:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \ .$$

Да напомним също означенията

$$B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\}$$

за отворено кълбо с център $x$ и радиус $r$ и

$$\overline{B}_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq r\}$$

за затворено кълбо с център $x$ и радиус $r$. Като упражнение можете да скицирате кълбата с радиус 1 и център началото на координатната система за нормите $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$ от предишното упражнение.

## 1.2 Топология в $\mathbb{R}^n$

**Дефиниция 1.1.** Подмножеството $U$ на $\mathbb{R}^n$ се нарича отворено, ако за всяка точка $x$ от $U$ съществува $\varepsilon > 0$ такова, че $B_\varepsilon(x) \subset U$.

Основните свойства на отворените множества, проверени в курса по ДИС2, са

1. $\emptyset$ и $\mathbb{R}^n$ са отворени

2. Сечение на краен брой отворени множества е отворено, т.е. ако $U_1, U_2, ..., U_k$ са отворени, то $\bigcap_{i=1}^k U_i$ е отворено.

3. Обединение на произволна фамилия от отворени множества е отворено, т.е. ако $U_\alpha$ са отворени за всяко $\alpha \in I$, то $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ е отворено.

**Пример 1.2.** Отворените кълба са отворени множества.

*Доказателство.* Да разгледаме $B_r(x_0)$, $r > 0$. Взимаме си произволно $x$ от кълбото, т.е. растоянието между $x$ и $x_0$ е по-малко от $r$. Нека $\varepsilon := r - \|x_0 - x\| > 0$. Тогава $B_\varepsilon(x) \subset B_r(x_0)$. Наистина, нека $y \in B_\varepsilon(x)$, т.е. $\|y - x\| < \varepsilon$. Получаваме

$$\begin{aligned}
\|x_0 - y\| &\leq \|x - y\| + \|x - x_0\| < \varepsilon + \|x - x_0\| \\
\|x_0 - y\| &< r - \|x_0 - x\| + \|x - x_0\| \\
\|x_0 - y\| &< r
\end{aligned}$$

$\square$

**Пример 1.3.** Нека функцията $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е **непрекъсната**. Тогава множеството $U = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) > 0\}$ е отворено.

*Доказателство.* Взимаме произволна точка $x_0 \in U$, следователно $\varepsilon = g(x_0) > 0$. От непрекъснатостта на функцията получаваме, че съществува положително число $\delta$ такова, че $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ за всяко $x \in B_\delta(x_0)$. Следователно $g(x) > g(x_0) - \varepsilon = 0$ и оттук $x \in U$ за всяко $x \in B_\delta(x_0)$. $\square$

**Дефиниция 1.4.** Едно подмножество $F$ на $\mathbb{R}^n$ се нарича затворено, ако $\mathbb{R}^n \setminus F$ е отворено множество.

Основните свойства на затворените множества, проверени в курса по ДИС2, са

1. $\emptyset, \mathbb{R}^n$ са затворени.

2. Обединие на краен брой затворени множества е затворено, т.е. ако $F_1, F_2, ..., F_k$ са затворени, то $\bigcup_{i=1}^k F_i$ е затворено.

3. Сечение на произволна фамилия от затворени множества е затворено, т.е. ако $F_\alpha$ са затворени за всички $\alpha \in I$, то $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ е затворено.

**Пример 1.5.** Затворените кълба са затворени множества. Доказателството оставяме за упражнение.

**Дефиниция 1.6.** Контур на множеството $A \subset \mathbb{R}^n$ наричаме множеството

$$\partial A := \{x \in \mathbb{R}^n : \forall U \text{ отворено, } x \in U \text{ е в сила } U \cap A \neq \emptyset \text{ и } U \setminus A \neq \emptyset\}$$

**Дефиниция 1.7.** Затворена обвивка на множеството $A \subset \mathbb{R}^n$ наричаме най-малкото затворено множество, съдържащо $A$:

$$\overline{A} := \cap \{F \subset \mathbb{R}^n : \ F \supset A \text{ и } F \text{ е затворено } \}$$

В курса по ДИС2 е доказано, че

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \{x_m\}_{m=1}^\infty \subset A, \ x_m \to x\}$$

Лесно се проверява, че едно множество е затворено точно тогава, когато съвпада със затворената си обвивка. Връзките между контур на множество и затворена обвивка на множество са

$$\overline{A} = A \cup \partial A \ , \ \partial A = \overline{A} \cap \left( \overline{\mathbb{R}^n \setminus A} \right) \ .$$

Следователно контурът на произволно множество е винаги затворено множество. Също лесно се проверява, че

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \exists \{x_m\}_{m=1}^\infty \subset A, \ x_m \to x \text{ и } \exists \{y_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n \setminus A, \ y_m \to x\}$$

**Дефиниция 1.8.** Вътрешност на $A \subset \mathbb{R}^n$ наричаме най-голямото отворено множество, съдържащо се в $A$:

$$\mathring{A} = \cup \{U \subset \mathbb{R}^n : \ U \subset A \text{ и } U \text{ е отворено } \}$$

Друго означение за вътрешност на $A$ е $intA$. Понятието за вътрешност е дуално на понятието за затворена обвивка, т.е.

$$intA = \mathbb{R}^n \setminus \left( \overline{\mathbb{R}^n \setminus A} \right) \ , \ \overline{A} = \mathbb{R}^n \setminus (int(\mathbb{R}^n \setminus A)) \ .$$

Едно от най-важните и често използвани понятия в топологията е понятието за компактност.

**Дефиниция 1.9.** Едно множество $A \subset \mathbb{R}^n$ се нарича компакт, ако от всяко негово отворено покритие можем да изберем крайно подпокритие, т.е. ако $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ е фамилия от отворени подмножества на $\mathbb{R}^n$, за която е в сила $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha \supset A$, то можем да изберем краен брой индекси $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in I$ такива, че $\cup_{i=1}^k U_{\alpha_i} \supset A$.

В курса по ДИС2 са доказани две важни и нетривиални характеризации на компактните подмножества на $\mathbb{R}^n$:

1. Едно подмножество $A$ на $\mathbb{R}^n$ е компакт точно тогава, когато $A$ е ограничено и затворено.

2. Едно подмножество $A$ на $\mathbb{R}^n$ е компакт точно тогава, когато от всяка редица от негови елементи може да се избере сходяща подредица, чиято граница е също в множеството.

Сега въвеждаме първото разширение, т.е. понятие, за което не сте учили в курса по ДИС2: множество, релативно отворено в $A$. Ще го използваме по-нататък, за да говорим за множества, релативно отворени в някаква гладка двумерна повърхнина в тримерното евклидово пространство. Интуицията е, че забравяме за всичко извън множеството $A$.

**Дефиниция 1.10.** Нека $A \subset \mathbb{R}^n$. Едно подмножество $U$ на $A$ наричаме релативно отворено в $A$, ако съществува отворено множество $V \subset \mathbb{R}^n$ такова, че $U = A \cap V$.

**Твърдение 1.11.** *Множеството $U \subset A$ е релативно отворено в $A$ точно тогава, когато за всяка негова точка $x \in U$ съществува $\varepsilon > 0$ такова, че $B_\varepsilon(x) \cap A \subset U$.*

*Доказателство.* Нека първо $U \subset A$ е релативно отворено в $A$ и $x \in U$ е произволна. Тогава съществува отворено множество $V \subset \mathbb{R}^n$ с $U = A \cap V$. Тъй като $x \in U \subset V$, съществува $\varepsilon > 0$ с $B_\varepsilon(x) \subset V$ и оттук $B_\varepsilon(x) \cap A \subset V \cap A = U$. В обратната посока, нека за всяка точка $x \in U$ съществува $\varepsilon_x > 0$ такова, че $B_{\varepsilon_x}(x) \cap A \subset U$. Полагаме $V := \cup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}(x)$. Очевидно $V$ е отворено множество като обединение на отворени кълбета. Освен това

$$V \cap A = (\cup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}(x)) \cap A = \cup_{x \in U} (B_{\varepsilon_x}(x) \cap A) \subset U \ .$$

От друга страна, всяка точка $x \in U$ принадлежи на $B_{\varepsilon_x}(x) \subset V$, следователно $U \subset V$ и от $U \subset A$ следва $U \subset V \cap A$. С това $U = V \cap A$ и доказателството е завършено. $\square$

Следното приложение на понятието за релативна отвореност е важно и изключително често използвано:

**Твърдение 1.12.** *Нека $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ е изображение с дефиниционна област $D \subset \mathbb{R}^n$ и стойности в $\mathbb{R}^m$. Твърдим, че $f$ е непрекъсната в $D$ точно тогава когато първообраз на всяко отворено в $\mathbb{R}^m$ множество е релативно отворено в $D$. Да напомним, че първообраз на $U \subset \mathbb{R}^m$ е множеството $f^{-1}(U) := \{x \in D : f(x) \in U\}$.*

*Доказателство.* Първо ще докажем, че ако първообраз на всяко отворено в $\mathbb{R}^m$ множество е релативно отворено в $D$, то $f$ е непрекъсната. Избираме произволна точка $x$ от $D$ и произволно $\varepsilon > 0$. Тъй като кълбото $B_\varepsilon(f(x))$ е отворено в $\mathbb{R}^m$, първообразът $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ ще е релативно отворен в $D$. Тогава $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) = D \cap V$ за някое множество $V$, отворено в $\mathbb{R}^n$. Тъй като $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subset V$, съществува $\delta > 0$ с $B_\delta(x) \subset V$. Нека $x' \in D$ е произволна точка с $\|x' - x\| < \delta$. Значи $x' \in D \cap B_\delta(x) \subset D \cap V = f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ и следователно $f(x') \in B_\varepsilon(f(x))$, т.е. $\|f(x') - f(x)\| < \varepsilon$.

За да докажем обратната посока, избираме произволно отворено $U \subset \mathbb{R}^m$. Нека $x \in f^{-1}(U)$. Тогава $f(x)$ принадлежи на отвореното множество $U$ и следователно съществува $\varepsilon > 0$ такова, че $B_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Тъй като $f$ е непрекъсната в $x$, съществува $\delta > 0$ такова, че $\|f(x')-f(x)\| < \varepsilon$ за всяко $x' \in D$, за което $\|x'-x\| < \delta$. Записано по друг начин това означава, че $f(B_\delta(x) \cap D) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset U$, следователно $B_\delta(x) \cap D \subset f^{-1}(U)$. Така доказахме, че множеството $f^{-1}(U)$ е релативно отворено в $D$, защото изпълнява условието от предишното твърдение. □

## 1.3 Основни теореми

**Теорема 1.13** (Теорема на Вайерщрас). *Непрекъснат образ на компакт е компакт. Формално записано, ако $f : K \longrightarrow \mathbb{R}^m$ е непрекъснато изображение с дефиниционна област компактното подмножество $K$ на $\mathbb{R}^n$, то множеството $f(K) := \{f(x) : x \in K\}$ от стойностите на $f$ е компактно подмножество на $\mathbb{R}^m$.*

*Доказателство.* Нека $\{y_l\}_{l=1}^\infty \subset f(K)$ е редица от елементи на $f(K)$. Тогава за всеки елемент $y_l$ на тази редица съществува елемент $x_l$ на $K$ такъв, че $y_l = f(x_l)$. Сега редицата $\{x_l\}_{l=1}^\infty$ се съдържа в компактното множество $K$. Следователно съществува нейна сходяща подредица $\{x_{l_k}\}_{k=1}^\infty$, чиято граница $x_0$ е елемент на $K$. Тъй като $f$ е непрекъсната, от дефиницията на Хайне за непрекъснатост получаваме, че $f(x_{l_k}) = y_{l_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0)$. Тъй като очевидно $f(x_0) \in f(K)$, остава да се позовем на характеризацията (2) на компактните множества. □

Хубаво упражнение е да се докаже теоремата на Вайерщрас, като се използва дефиницията на компакт и характеризацията на непрекъснатите изображения, която доказахме.

Друго добро упражнение е да се убедите, че теоремата на Вайерщрас от ДИС 1 (една непрекъсната функция върху краен затворен интервал е ограничена и достига своята най-голяма и най-малка стойност) е следствие от тази форма на теоремата.

**Теорема 1.14** (Теорема на Кантор). *Нека $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ е дефинирана в $D \subset \mathbb{R}^n$. Нека $K$ е компактно подмножество на $D$. Ако $f$ е непрекъсната в $K$, т.е. непрекъсната е във всяка точка от $K$, то твърдим, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че за всяко $x \in K$ и за всички $x' \in D$, за които е изпълнено $\|x'-x\| < \delta$, е в сила $\|f(x)-f(x')\| < \varepsilon$. Забележете, че заключението е малко по-силно от равномерна непрекъснатост на $f$ върху $K$.*

*Доказателство.* Отново ще използваме характеризацията (2) на компактността чрез редици. Допускаме противното, т.е. съществува такова $\varepsilon_0 > 0$, че за всички $\delta > 0$ съществуват точки $x_\delta \in K$ и $x'_\delta \in D$ такива, че

$$\|x_\delta - x'_\delta\| < \delta \text{ и } \|f(x_\delta) - f(x'_\delta)\| \geq \varepsilon \ .$$

Даваме на $\delta$ стойности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ и преименуваме $x_{1/m}$ и $x'_{1/m}$ съответно на $x_m$ и $x'_m$. Така се образуват две редици $\{x_m\}_{m=1}^\infty \subset K$ и $\{x'_m\}_{m=1}^\infty \subset D$. Знаем, че

$$\|x_m - x'_m\| < \frac{1}{m} \text{ и } \|f(x_m) - f(x'_m)\| \geq \varepsilon_0 > 0$$

за всяко естествено $m$. Тъй като $K$ е компакт, съществува сходяща подредица $x_{m_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0 \in K$ на $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset K$. От неравенствата

$$\|x'_{m_k} - x_0\| \le \|x'_{m_k} - x_{m_k}\| + \|x_{m_k} - x_0\| < \frac{1}{m_k} + \|x_{m_k} - x_0\|$$

получаваме, че редицата $\{x'_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ също клони към точката $x_0 \in K$. Сега използваме непрекъснатостта на $f$ в точката $x_0 \in K$ и получаваме, че

$$f(x_{m_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0) \text{ и } f(x'_{m_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0).$$

Като извадим тези две редици, получаваме $f(x_{m_k}) - f(x'_{m_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, което противоречи на $\|f(x_m) - f(x'_m)\| \ge \varepsilon_0 > 0$ за всяко естествено $m$. Теоремата е доказана. □

# 2 Лекция 2: Кратен Риманов интеграл - въвеждане и основни свойства

Конструкцията на Дарбу, с която сте въвели Риманов интеграл в курса по ДИС1, е важна и естествена и ние ще я използваме отново, за да въведем $n$-кратен Риманов интеграл. Геометричната интуиция остава същата. В курса по ДИС1 сте искали да дефинирате по един разумен начин лицето на фигура, заградена от абцисата, две вертикални прави и графиката на ограничена неотрицателна функция. Постигнали сте го чрез оценяване отгоре и отдолу на това лице чрез лицата на стъпаловидни фигури, съставени от краен брой правоъгълници (тези лица са големите и малките суми на Дарбу). Сега за $n$=2 трябва да оценяваме отгоре и отдолу обема на тяло, заградено от равнината на първите две координатни оси, вертикални равнини по границата на даден правоъгълник и графиката на ограничена неотрицателна функция, дефинирана в този правоъгълник. Оценката е чрез обема на тела, състоящи се от краен брой паралелепипеди (за оценка отгоре вземаме обема на такова стъпаловидно тяло, съдържащо нашето, а за оценка отдолу - съдържащо се в нашето). За по-големи размерности идеята и конструкцията остават същите, само че вече не можем да нарисуваме подходяща картинка.

## 2.1 Паралелотопи в $\mathbb{R}^n$ и тяхната мярка

Първият въпрос, който трябва да решим, е с какво заменяме крайния и затворен интервал от ДИС1, ако размерността е по-голяма от едно. Естественият отговор е: с правоъгълник в равнината, с паралелепипед в тримерното пространство и т.н.

**Дефиниция 2.1.** Паралелотоп (на английски interval, box) е множество в $\mathbb{R}^n$, за което всяка координата се мени (независимо от останалите) в краен затворен интервал:

$$\Delta := \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \le x_i \le b_i,\ i = 1, 2, ...n\}\ .$$

За различните размерности (стойности на $n$) имаме

| $n$ | $\Delta$ |
|---|---|
| 1 | $[a_1, b_1]$ интервал |
| 2 | $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ правоъгълник |
| 3 | $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ парарелепипед |
| .. | ... |

Същественото за тези най-прости фигури е, че нямаме съмнения какво трябва да наречем дължина на интервал, лице на правоъгълник, обем на паралелепипед, а за паралелотоп в $\mathbb{R}^n$ естествено въвеждаме мярка в $\mathbb{R}^n$.

**Дефиниция 2.2.** За паралелотопа $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = 1, 2, ...n\}$ дефинираме неговата $n$-мерна мярка като

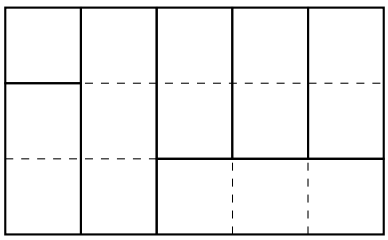
$$\mu_n(\Delta) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \ .$$

Забележете, че при $n = 1$ това е дължината $\mu_1([a_1, b_1]) = b_1 - a_1$ на интервала $[a_1, b_1]$, при $n = 2$ това е лицето $\mu_2([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$ на правоъгълника $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, при $n = 3$ това е обемът $\mu_3([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$ на паралелепипеда $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$.

Един паралелотоп ще наричаме изроден, ако някой от интервалите $[a_i, b_i]$ се изражда в точка, т.е. $a_i = b_i$. В такава ситуация $n$-мерната мярка на паралелотопа е нула. Например отсечка върху абцисата може да бъде разглеждана като паралелотоп в $\mathbb{R}^1$ и ще има ненулева дължина, но ако бъде разглеждана като паралелотоп в $\mathbb{R}^2$, ще има лице нула.

Следващият етап е да уточним как да разделяме паралелотоп на паралелотопчета по аналогия с разделянето на интервал на подинтервали от ДИС1. Неформално, подразделяне на паралелотоп са краен брой паралелотопи, чието обединение е първоначалният паралелотоп, и които не се припокриват.

**Дефиниция 2.3.** Подразделение $\Pi$ на един паралелотоп $\Delta$ е крайно множество от паралелотопи $\Pi = \{\Delta_k\}_{k=1}^{k_0}$, за което $\cup_{k=1}^{k_0} \Delta_k = \Delta$ и $\mathring{\Delta}_k \cap \mathring{\Delta}_l = \emptyset\ \forall k \neq l$.



Забележете, че вътрешността на паралелотопа $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = 1, 2, ...n\}$ е множеството $\mathring{\Delta} = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i,\ i = 1, 2, ..n\}$. Следното твърдение е геометрически очевидно, но съществено за по-нататъшната ни работа:

**Твърдение 2.4.** *Ако* $\Pi = \{\Delta_k\}_{k=1}^{k_0}$ *е подразделяне на* $\Delta$*, то* $\mu_n(\Delta) = \sum_{k=1}^{k_0} \mu_n(\Delta_k)$.

*Доказателство.* Първо разглеждаме случая на правилно подразделяне, т.е. $\Pi$ се получава като се раздели интервалът, в който се мени $i$-тата координата, на подинтервали за всяко $i$, и се вземат всевъзможните декартови произведения на такива подинтервали. За пестене на място и по-прости означения ще изпишем нещата за $n = 2$, в общия случай доказателството е аналогично. И тъй, нека $\Delta = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ и делим $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$ на подинтервали:

$$a_1 = x_0 < x_1 < ... < x_{m_0} = b_1 \ ,$$

$$a_2 = y_0 < y_1 < ... < y_{l_0} = b_2 \ .$$

Тогава $\Pi = \{\Delta_{ml} : \ m = 1, \ldots, m_0, \ l = 1, \ldots, l_0\}$, където $\Delta_{ml} = [x_{m-1}, x_m] \times [y_{l-1}, y_l]$. Пресмятаме

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{l_0} \sum_{m=1}^{m_0} \mu_2(\Delta_{ml}) &= \sum_{l=1}^{l_0} \sum_{m=1}^{m_0} (x_m - x_{m-1})(y_l - y_{l-1}) \\
&= \sum_{l=1}^{l_0} (y_l - y_{l-1}) \sum_{m=1}^{m_0} (x_m - x_{m-1}) \\
&= (b_1 - a_1) \sum_{l=1}^{l_0} (y_l - y_{l-1}) \\
&= (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \\
&= \mu_2(\Delta)
\end{aligned}$$

Нека сега да разгледаме произволно подразделяне $\Pi = \{\Delta_k\}_{k=1}^{k_0}$. Можем да намерим правилно подразделяне $\Pi^*$ на $\Delta$ такова, че елементите на $\Pi^* = \{\Delta_l^*\}_{l=1}^{l_0}$, които се съдържат в $\Delta_k$, образуват подразделяне на $\Delta_k$ (например при размерност 2 продължаваме вертикалните и хоризонтални страни на правоъгълниците от $\Pi$ в целите интервали). Тогава, използвайки два пъти предишната стъпка, получаваме

$$\mu_n(\Delta) = \sum_{l=1}^{l_0} \mu_n(\Delta_l^*) = \sum_{k=1}^{k_0} \left( \sum_{\Delta_l^* \subset \Delta_k} \mu_n(\Delta_l^*) \right) = \sum_{k=1}^{k_0} \mu_n(\Delta_k) \ .$$

□

В горното доказателство намерихме "подразделяне $\Pi^*$ на $\Delta$ такова, че елементите на $\Pi^* = \{\Delta_l^*\}_{l=1}^{l_0}$, които се съдържат в $\Delta_k$, образуват подразделяне на $\Delta_k$". В такава ситуация казваме, че $\Pi^*$ е по-фино (или по-дребно) от $\Pi$. Формално

**Дефиниция 2.5.** Нека $\Pi = \{\Delta_k\}_{k=1}^{k_0}$ и $\Pi^* = \{\Delta_l^*\}_{l=1}^{l_0}$ са две подразделяния на паралелотопа $\Delta$. Казваме, че $\Pi^*$ е по-фино от $\Pi$ (или $\Pi^*$ е вписано в $\Pi$) и пишем $\Pi^* \geq \Pi$, ако

$$\{\Delta_l^* : \ \Delta_l^* \subset \Delta_k\}$$

е подразделяне на $\Delta_k$ за всяко $k = 1, 2, \ldots, k_0$.

## 2.2 Въвеждане на Риманов интеграл чрез подхода на Дарбу

В целия параграф ще разглеждаме дадена ограничена функция $f : \Delta \to \mathbb{R}$, където $\Delta$ е паралелотоп в $\mathbb{R}^n$.

Нека $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ е произволно подразделяне на $\Delta$. По аналогия с едномерния случай дефинираме

$$s_f(\Pi) = \sum_{i=1}^{i_0} m_i \mu_n(\Delta_i), \text{ където } m_i = \inf\{f(x) : x \in \Delta_i\} \ , \ i = 1, \ldots, i_0 \ .$$

Числото $s_f(\Pi)$ наричаме *малка сума на Дарбу* за функцията $f$, съответстваща на подразделянето $\Pi$. Интуитивно това число е долна оценка за интеграла, който искаме да въведем.

Аналогично

$$S_f(\Pi) = \sum_{i=1}^{i_0} M_i \mu_n(\Delta_i), \text{ където } M_i = \sup\{f(x) : x \in \Delta_i\} \ , \ i = 1, \dots, i_0 \ .$$

Сега числото $S_f(\Pi)$ наричаме *голяма сума на Дарбу* за функцията $f$, съответстваща на подразделянето $\Pi$. Интуитивно това число е горна оценка за търсения "обем".

Следните две леми точно съответстват на доказаните в ДИС1. Интуитивно, първата лема казва, че оценките, съответстващи на по-дребно подразделяне, са по-точни (горната оценка намалява, а долната се увеличава). Втората лема казва, че всяка долна оценка не надминава коя да е горна оценка, както и би трябвало да бъде.

**Лема 2.6.** *Ако* $\Pi^* \geq \Pi$, *то* $s_f(\Pi^*) \geq s_f(\Pi)$ *и* $S_f(\Pi^*) \leq S_f(\Pi)$.

*Доказателство.* Без ограничение на общността, нека $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ и $\Pi^* = \{\Delta_1^j\}_{j=1}^{j_0} \cup \{\Delta_i\}_{i=2}^{i_0}$, т.е. $\Pi^*$ се получава от $\Pi$ чрез подразделяне $\{\Delta_1^j\}_{j=1}^{j_0}$ на първия елемент $\Delta_1$ на $\Pi$. Да означим $m_i = \inf\{f(x) : x \in \Delta_i\}$ за $i = 1, \dots, i_0$, $m_1^j = \inf\{f(x) : x \in \Delta_1^j\}$ за $j = 1, \dots, j_0$. Забележете, че $m_1 \leq m_1^j$ за всяко $j = 1, \dots, j_0$, защото $\Delta_1^j \subset \Delta_1$. Оттук получаваме, че

$$\begin{aligned}
s_f(\Pi^*) - s_f(\Pi) &= \sum_{j=1}^{j_0} m_1^j \mu_n(\Delta_1^j) + \sum_{i=2}^{i_0} m_i \mu_n(\Delta_i) - \sum_{i=1}^{i_0} m_i \mu_n(\Delta_i) \\
&= \sum_{j=1}^{j_0} m_1^j \mu_n(\Delta_1^j) - m_1 \mu_n(\Delta_1) \\
&\geq \sum_{j=1}^{j_0} m_1 \mu_n(\Delta_1^j) - m_1 \mu_n(\Delta_1) \\
&= m_1 \left( \sum_{j=1}^{j_0} \mu_n(\Delta_1^j) - \mu_n(\Delta_1) \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

поради Твърдение 2.4.

Аналогично доказваме, че $S_f(\Pi^*) \leq S_f(\Pi)$. $\square$

**Лема 2.7.** *За произволни подразделяния* $\Pi_1$ *и* $\Pi_2$ *на* $\Delta$ *е в сила* $s_f(\Pi_1) \leq S_f(\Pi_2)$.

*Доказателство.* Нека $\Pi^* \geq \Pi_1$, $\Pi^* \geq \Pi_2$ (ясно е, че такова подразбиване $\Pi^*$ на $\Delta$ съществува - например може да се вземе множеството от неизродените паралелотопи, получени като сечение на елемент от $\Pi_1$ с елемент от $\Pi_2$). Тогава

$$s_f(\Pi_1) \leq s_f(\Pi^*) \leq S_f(\Pi^*) \leq S_f(\Pi_2) \ ,$$

като първото и последното неравенство се получават от предишната лема, а средното неравенство се получава от очевидното съображение, че инфимумът на множество от реални числа не надминава неговия супремум, и от дефиницията на малка и голяма сума на Дарбу. $\square$

Тъй като функцията $f$ е ограничена, множеството от всевъзможните малки суми на Дарбу (както и множеството от всевъзможните големи суми на Дарбу) на $f$ е ограничено и следователно можем да дефинираме *долен интеграл* на $f$ върху $\Delta$

$$\underline{\int}_{\Delta} f := \sup\left\{s_f(\Pi) : \Pi \text{ е подразделяне на } \Delta\right\}$$

и *горен интеграл* на $f$ върху $\Delta$

$$\overline{\int}_{\Delta} f := \inf\left\{S_f(\Pi) : \Pi \text{ е подразделяне на } \Delta\right\} \ .$$

Да отбележим, че от Лема 2.7 следва, че при произволно фиксирано пораделяне $\Pi$ на $\Delta$ е в сила $\underline{\int}_{\Delta} f \leq S_f(\Pi)$, откъдето следва неравенството $\underline{\int}_{\Delta} f \leq \overline{\int}_{\Delta} f$.

**Дефиниция 2.8.** Функцията $f$ се нарича интегруема по Риман, когато долният и горният интеграл на $f$ върху $\Delta$ съвпадат (или еквивалентно съществува единствено число, разделящо малките от големите суми на Дарбу). Тогава общата стойност на долния и горния интеграл на $f$ върху $\Delta$ се нарича интеграл на $f$ върху $\Delta$ и се означава с $\int_{\Delta} f$ или $\int_{\Delta} f(x)\mathrm{d}x$.

Други разпространени означения в съответните размерности са
$n = 1$ $\quad \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
$n = 2$ $\quad \iint_{\Delta} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$
$n = 3$ $\quad \iiint_{\Delta} f(x_1, x_2, x_3)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$

Следният критерий за интегруемост се формулира и доказва точно като в курса по ДИС1:

**Твърдение 2.9.** *(Първа форма на критерия за интегруемост) Функцията $f$ е интегруема по Риман върху $\Delta$ точно тогава, когато за всяко положително число $\varepsilon$ съществуват подразделяния $\Pi_1$ и $\Pi_2$ на $\Delta$ такива, че $S_f(\Pi_1) - s_f(\Pi_2) < \varepsilon$. Еквивалентно, $f$ е интегруема по Риман върху $\Delta$ точно тогава, когато за всяко положително число $\varepsilon$ съществува подразделяне $\Pi$ на $\Delta$ такова, че $S_f(\Pi) - s_f(\Pi) < \varepsilon$.*

Следващото твърдение е ново (т.е. не сте правили подобно в ДИС1) и ни е необходимо с оглед доказателството на критерия на Лебег.

**Твърдение 2.10.** *(Втора форма на критерия за интегруемост) Функцията $f$ е интегруема по Риман върху $\Delta$ точно тогава, когато за всяко положително число $\varepsilon$ и за всяко положително число $\eta$ съществува подразделяне $\Pi$ на $\Delta$ такова, че сумата от мерките на елементите на $\Pi$, в които осцилацията на $f$ е по-голяма или равна на $\eta$, е по-малка от $\varepsilon$. Формално записано, за всяко $\varepsilon > 0$ и за всяко $\eta > 0$ съществува подразделяне $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$, за което*

$$\sum_{M_i - m_i \geq \eta} \mu_n(\Delta_i) < \varepsilon \ .$$

*Доказателство.* Нека $f$ е интегруема по Риман върху $\Delta$ и $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ са произволни положителни числа. Тогава от първата форма на критерия за интегруемост следва, че съществува подразделяне $\Pi$ на $\Delta$ такова, че $S_f(\Pi) - s_f(\Pi) < \varepsilon\eta$. Нека $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ и $m_i$, $M_i$ са дефинирани както обикновено. Тогава

$$\varepsilon\eta > S_f(\Pi) - s_f(\Pi) = \sum_{i=1}^{i_0} M_i\mu_n(\Delta_i) - \sum_{i=1}^{i_0} m_i\mu_n(\Delta_i) = \sum_{i=1}^{i_0} (M_i - m_i)\,\mu_n(\Delta_i)$$

$$= \sum_{M_i - m_i < \eta} (M_i - m_i)\,\mu_n(\Delta_i) + \sum_{M_i - m_i \geq \eta} (M_i - m_i)\,\mu_n(\Delta_i)$$

$$\geq \sum_{M_i - m_i \geq \eta} (M_i - m_i)\,\mu_n(\Delta_i) \geq \sum_{M_i - m_i \geq \eta} \eta\mu_n(\Delta_i) = \eta \sum_{M_i - m_i \geq \eta} \mu_n(\Delta_i)$$

Съкращаваме на $\eta$ и получаваме търсеното неравенство за така намереното подразделяне $\Pi$ на $\Delta$.

Сега обратно, нека е в сила условието от критерия и искаме да докажем, че $f$ е интегруема. За целта избираме произволно положително число $\zeta$ и ще търсим подразбиване $\Pi$ на $\Delta$, за което разстоянието между съответната голяма и малка сума на Дарбу е по-малка от $\zeta$. Това би решило въпроса според първата форма на критерия за интегруемост. Ще намерим $\Pi$ от даденото условие с достатъчно малки (зависещи от $\zeta$) $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$. Ще се сетим колко малки трябва да изберем тези числа, след като оценим разликата между съответните голяма и малка сума на Дарбу по подобен начин като преди, само че отгоре:

$$S_f(\Pi) - s_f(\Pi) = \sum_{M_i - m_i < \eta} (M_i - m_i)\,\mu_n(\Delta_i) + \sum_{M_i - m_i \geq \eta} (M_i - m_i)\,\mu_n(\Delta_i)$$

$$\leq \eta \sum_{M_i - m_i < \eta} \mu_n(\Delta_i) + (M - m) \sum_{M_i - m_i \geq \eta} \mu_n(\Delta_i) < \eta\mu_n(\Delta) + \varepsilon(M - m)\ ,$$

където $M := \sup\{f(x) : x \in \Delta\}$ и $m := \inf\{f(x) : x \in \Delta\}$. Следователно ако изберем

$$\varepsilon := \frac{\zeta}{2(M - m)} \text{ и } \eta := \frac{\zeta}{2\mu_n(\Delta)}\ ,$$

за подразбиването $\Pi$ на $\Delta$, получено от даденото условие, е в сила $S_f(\Pi) - s_f(\Pi) < \zeta$. $\square$

## 2.3 Суми на Риман и граница на суми на Риман

Сумите на Риман се дефинират точно по същия начин като в курса по ДИС1. Те се различават от сумите на Дарбу по това, мярката на съответното паралелотопче се умножава по стойността на функцията в произволна пробна точка (sample point) от него (а не по супремума или инфимума на стойностите на функцията в паралелотопчето). Да отбележим, че няма проблем да дефинираме суми на Риман и за неограничена функция.

И тъй, нека $\Delta$ е паралелотоп в $\mathbb{R}^n$ и $f : \Delta \to \mathbb{R}$.

Фиксираме подразбиване $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ на $\Delta$ и избираме пробни точки $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{i_0}\}$, където $\xi_i \in \Delta_i$ за всяко $i = 1, \ldots, i_0$. Тогава числото

$$\sigma_f(\Pi, \xi) := \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi_i)\mu_n(\Delta_i)$$

наричаме *сума на Риман* на функцията $f$ за подразбиването $\Pi$ с пробни точки $\xi$.

**Твърдение 2.11.** *Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$ е ограничена и $\Pi$ е подразбиване на $\Delta$. Тогава*

$$s_f(\Pi) = \inf\{\sigma_f(\Pi, \xi) :\ \xi \text{ са пробни точки за } \Pi\}$$

$$S_f(\Pi) = \sup\{\sigma_f(\Pi, \xi) :\ \xi \text{ са пробни точки за } \Pi\}$$

*Доказателство.* Очевидно $m_i = \inf\{f(x) : x \in \Delta_i\} \leq f(\xi_i) \leq \sup\{f(x) : x \in \Delta_i\} = M_i$ за всяко $i = 1, \dots, i_0$ и за всеки избор на пробните точки $\xi$. Умножавайки тези неравенства с $\mu_n(\Delta_i)$ и събирайки ги, получаваме $s_f(\Pi) \leq \sigma_f(\Pi, \xi) \leq S_f(\Pi)$. Следователно малката (голямата) сума на Дарбу за $\Pi$ е долна (горна) граница за сумите на Риман за същото подразбиване. Да проверим например, че малката сума на Дарбу за $\Pi$ е точна долна граница за сумите на Риман за $\Pi$. Избираме произволно $\varepsilon > 0$ и от $m_i + \frac{\varepsilon}{i_0 \mu_n(\Delta_i)} > m_i$ намираме $\xi_i \in \Delta_i$ с $f(\xi_i) < m_i + \frac{\varepsilon}{i_0 \mu_n(\Delta_i)}$ за всяко $i = 1, \dots, i_0$. За така намерените пробни точки $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i_0}\}$ имаме

$$\sigma_f(\Pi, \xi) = \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi_i)\mu_n(\Delta_i) < \sum_{i=1}^{i_0} \left( m_i + \frac{\varepsilon}{i_0 \mu_n(\Delta_i)} \right) \mu_n(\Delta_i) = s_f(\Pi) + \varepsilon ,$$

следователно всяко число, по-голямо от $s_f(\Pi)$, вече не е долна граница за сумите на Риман за $\Pi$. $\square$

За да можем да пренесем идеята за граница на суми на Риман от едномерния в многомерния случай, се нуждаем от подходяща дефиниция на диаметър на подразбиване. Да напомним, че ако $A$ е ограничено подмножество на $\mathbb{R}^n$, то диаметър на $A$ наричаме числото

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{\|x - y\| :\ x \in A,\ y \in A\} .$$

**Дефиниция 2.12.** Нека $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ е подразбиване на паралелотопа $\Delta$. Диаметър на $\Pi$ наричаме най-голямия от диаметрите на паралелотопите от $\Pi$:

$$\mathrm{d}(\Pi) = \max\{\mathrm{diam}(\Delta_i) :\ i = 1, 2, \dots, i_0\}$$

**Дефиниция 2.13.** Казваме, че сумите на Риман за функцията $f : \Delta \to \mathbb{R}$ имат граница числото $I$, когато диаметърът на подразбиването клони към нула, и пишем

$$\lim_{d(\Pi) \to 0} \sigma_f(\Pi, \xi) = I ,$$

ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че за всяко подразбиване $\Pi$ на $\Delta$ с $\mathrm{d}(\Pi) < \delta$ и при всеки избор на пробните точки $\xi$ за $\Pi$ е в сила $|\sigma_f(\Pi, \xi) - I| < \varepsilon$.

## 2.4 Еквивалентност на подхода чрез суми на Дарбу и на подхода чрез суми на Риман

**Теорема 2.14.** *Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$, където $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ е паралелотоп, и нека сумите на Риман за $f$ имат граница $I$, когато диаметърът на подразбиването клони към нула. Тогава функцията $f$ е ограничена, интегруема по Риман и $I = \int_\Delta f$.*

*Доказателство.* Нека $\varepsilon = 1 > 0$. Тогава съществува $\delta > 0$ такова, че за всички подразбивания $\Pi$ с $\mathrm{d}(\Pi) < \delta$ и при всеки избор на пробните точки $\xi$ за $\Pi$ е в сила $I-1 < \sigma_f(\Pi, \xi) < I+1$. Да фиксираме произвално подразбиване $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ с диаметър, по-малък от $\delta$. Ще докажем, че функцията е ограничена върху всеки елемент на $\Pi$.

Да фиксираме $i \in \{1, \dots, i_0\}$ и някакви точки $\xi_j \in \Delta_j$ за всяко $j \neq i$, $j \in \{1, \dots, i_0\}$. Тогава получаваме, че

$$\frac{(I-1) - \sum_{j\neq i} f(\xi_j)\mu_n(\Delta_j)}{\mu_n(\Delta_i)} < f(\xi_i) < \frac{(I+1) - \sum_{j\neq i} f(\xi_j)\mu_n(\Delta_j)}{\mu_n(\Delta_i)}$$

за всяко $\xi_i \in \Delta_i$. Следователно $f$ е ограничена върху $\Delta_i$, $i \in \{1, \dots, i_0\}$. С това ограничеността на $f$ е доказана, защото подразбиването $\Pi$ има краен брой елементи.

Нека $\varepsilon$ е произволно положително число. Тогава съществува $\delta > 0$ такова, че за всяко подразбиване $\Pi$ на $\Delta$ с $\mathrm{d}(\Pi) < \delta$ и при всеки избор на пробните точки $\xi$ за $\Pi$ е в сила $I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_f(\Pi, \xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}$. Използвайки това и Твърдение 2.11, получаваме

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leq s_f(\Pi) \leq S_f(\Pi) \leq I + \frac{\varepsilon}{3} \ .$$

Следователно

$$S_f(\Pi) - s_f(\Pi) \leq \Big(I + \frac{\varepsilon}{3}\Big) - \Big(I - \frac{\varepsilon}{3}\Big) = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

и получаваме интегруемостта на $f$ от първата форма на критерия за интегруемост. Нещо повече, от горните неравенства и от факта, че $\int_\Delta f$ се намира между $s_f(\Pi)$ и $S_f(\Pi)$, получаваме, че $I - \frac{\varepsilon}{3} \leq \int_\Delta f \leq I + \frac{\varepsilon}{3}$ и тъй като $\varepsilon$ беше произволно положително число, то $\int_\Delta f = I$. □

**Теорема 2.15.** *Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$, където $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ е паралелотоп, е интегруема по Риман. Тогава сумите на Риман за $f$ имат граница $\int_\Delta f$, когато диаметърът на подразбиването клони към нула.*

*Доказателство.* Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Ако докажем, че съществува $\delta > 0$ такова, че за всяко подразбиване $\Pi$ на $\Delta$ с $\mathrm{d}(\Pi) < \delta$ е в сила $I - \varepsilon < s_f(\Pi) \leq S_f(\Pi) < I + \varepsilon$, доказателството ще е завършено, защото при произволен избор на представителните точки $\xi$ имаме $s_f(\Pi) \leq \sigma_f(\Pi, \xi) \leq S_f(\Pi)$ и следователно от горните неравенства получаваме $|\sigma_f(\Pi, \xi) - I| < \varepsilon$ .

И така $\varepsilon > 0$. От дефиницията за интеграл на Риман следва, че съществува $\Pi_1 = \{\Box_j\}_{j=1}^{j_0}$ подразделяне на $\Delta$ такова, че

$$S_f(\Pi_1) < I + \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

От $f$ интегруема следва, че $f$ е ограничена. Нека $M = \sup\{|f(x)|: x \in \Delta\}$. Означаваме с $P_{\Pi_1}$ общата площ на границите на паралелотопчетата от $\Pi_1$, т.е. $P_{\Pi_1} := \Sigma_{j=1}^{j_0} \mu_{n-1}(\partial \Box_j)$. Полагаме

$$\delta = \frac{\varepsilon}{8MP_{\Pi_1}} > 0 \ .$$

Искаме да оценим $S_f(\Pi)$, където $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ е произволно подразбиване на $\Delta$ с диаметър, по-малък от $\delta$.

Нека сега $\Pi_2$ да е подразбиване на $\Delta$, съставено от сеченията на елементите на $\Pi$ и $\Pi_1$, т.е. $\Pi_2 = \{\Box_j \cap \Delta_i\}_{i=1}^{i_0}{}_{j=1}^{j_0}$ и след това изхвърляме празните множества. Тогава

$$d(\Pi_2) \leq d(\Pi) < \delta \ .$$

Тъй като $\Pi_2 \geq \Pi_1$, то

$$S_f(\Pi_2) \leq S_f(\Pi_1) < I + \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Ще оценим отгоре $S_f(\Pi) - S_f(\Pi_2)$. Делим елементите на $\Pi$ на две групи - които се секат с границата на някой елемент на $\Pi_1$ и които се съдържат изцяло във вътрешността на елемент на $\Pi_1$. Събираемите, съответстващи на елементите от втория вид, участват както в $S_f(\Pi)$, така и в $S_f(\Pi_2)$ и се съкращават. Нека индексите на елементите на $\Pi$ от първия вид са $I_1 \subset \{1, 2, ..., i_0\}$ .

Тогава

$$S_f(\Pi) - S_f(\Pi_2) = \sum_{i \in I_1} M_i \mu_n(\Delta_i) - \sum_{i \in I_1} \sum_{j=1}^{j_0} M_{ij} \mu_n(\Delta_i \cap \Box_j) \ ,$$

където, разбира се, $M_i = \sup\{f(x) : \ x \in \Delta_i\}$ и $M_{ij} = \sup\{f(x) : \ x \in \Delta_i \cap \Box_j\}$. Тъй като $\operatorname{diam}(\Delta_i) < \delta$, то $\sum_{i \in I_1} \mu_n(\Delta_i) \leq 2\delta P_{\Pi_1}$ и следователно

$$\left| \sum_{i \in I_1} M_i \mu_n(\Delta_i) \right| \leq \sum_{i \in I_1} |M_i| \, \mu_n(\Delta_i) \leq M 2\delta P_{\Pi_1} \ .$$

Аналогично $\sum_{i \in I_1} \sum_{j=1}^{j_0} \mu_n(\Delta_i \cap \Box_j) \leq 2\delta P_{\Pi_1}$ влече

$$\left| \sum_{i \in I_1} \sum_{j=1}^{j_0} M_{ij} \mu_n(\Delta_i \cap \Box_j) \right| \leq M 2\delta P_{\Pi_1} \ .$$

Следователно

$$S_f(\Pi) - S_f(\Pi_2) \leq \left| \sum_{i \in I_1} M_i \mu_n(\Delta_i) \right| + \left| \sum_{i \in I_1} \sum_{j=1}^{j_0} M_{ij} \mu_n(\Delta_i \cap \Box_j) \right| \leq 4 M P_{\Pi_1} \delta = \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Тогава имаме

$$S_f(\Pi) = (S_f(\Pi) - S_f(\Pi_2)) + S_f(\Pi_2) \leq \frac{\varepsilon}{2} + S_f(\Pi_2) < \frac{\varepsilon}{2} + I + \frac{\varepsilon}{2} = I + \varepsilon \ .$$

Аналогично доказваме, че $s_f(\Pi) > I - \varepsilon$ за всички $\Pi$ с достатъчно малък диаметър, с което доказателството е завършено. $\Box$

# 3 Лекция 3: Множества, пренебрежими по Лебег и критерий на Лебег за интегруемост по Риман

Целта на тази лекция е да докажем необходимо и достатъчно условие за интегруемост по Риман, което свързва интегруемостта с "големината"на множеството от точките на непрекъснатост на функцията. За да можем да формулираме точно критерия, се нуждаем от понятието "множество, пренебрежимо по Лебег". Само по себе си това понятие е изключително важно, затова ще отделим време за неговото изучаване.

## 3.1 Множества, пренебрежими по Лебег

**Дефиниция 3.1.** Едно подмножество $A$ на $\mathbb{R}^n$ наричаме *пренебрежимо по Лебег* в $\mathbb{R}^n$, ако за всяко положително $\varepsilon$ можем да покрием множеството с изброимо много паралелотопи, чиято сумарна мярка е по-малка от $\varepsilon$. Формално записано, за произволно $\varepsilon > 0$ съществуват $\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ (където $\Delta_k$ са затворени паралелотопи в $\mathbb{R}^n$) такива, че

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \supset A \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_k) < \varepsilon \ .$$

**Пример 3.2.** Изродените паралелотопи са пренебрежими множества. Точките са изродени паралелотопи в $\mathbb{R}^n$ за всяко естествено $n$ и следователно са пренебрежими множества.

Очевидно е, че подмножество на пренебрежимо множество е пренебрежимо. Следващото твърдение съдържа едно от най-важните и често употребявани свойства на множествата, пренебрежими по Лебег:

**Твърдение 3.3.** *Ако $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ е редица от пренебрежими множества, то обединението им $A$ също е пренебрежимо множество.*

*Доказателство.* Да фиксираме произволно положителното число $\varepsilon$. Тъй като $A_1$ е пренебрежимо и $\varepsilon/2 > 0$, то съществуват паралелотопи $\{\Delta_k^1 \ : \ k = 1, 2, \dots\}$ такива, че

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k^1 \supset A_1 \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_k^1) < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Аналогично постъпваме с множествата $A_2$, $A_3$ и т.н. За да фиксираме означенията, нека $m$ е естествено число. Тъй като $A_m$ е пренебрежимо и $\varepsilon/2^m > 0$, то съществуват паралелотопи $\{\Delta_k^m \ : \ k = 1, 2, \dots\}$ такива, че

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k^m \supset A_m \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_k^m) < \frac{\varepsilon}{2^m} \ .$$

По този начин построихме паралелотопите $\{\Delta_k^m \ : \ k = 1, 2, \dots, \ m = 1, 2, \dots\}$. Те са изброимо много и очевидно

$$\bigcup_{m,k=1}^{\infty} \Delta_k^m = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k^m \right) \supset \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = A \ .$$

От друга страна

$$\sum_{m,k=1}^{\infty} \mu_n\left(\Delta_k^m\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_n\left(\Delta_k^m\right)\right) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^m} = \varepsilon\ .$$

$\square$

**Важна забележка:** В последния ред от горното доказателство допуснахме липса на прецизност. За да бъдем точни, трябваше да подредим индексите $\{(m,k):\ m \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}\}$ в редица $\{(\pi_1(i), \pi_2(i)):\ i \in \mathbb{N}\}$ и да разгледаме реда $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n\left(\Delta_{\pi_2(i)}^{\pi_1(i)}\right)$. Всъщност, използвахме следното твърдение: Ако $a_k^m$ са неотрицателни числа за всички естествени индекси $m$ и $n$ и $\{(\pi_1(i), \pi_2(i)):\ i \in \mathbb{N}\}$ е кое да е подреждане на $\mathbb{N}^2$ в редица, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{\pi_2(i)}^{\pi_1(i)} = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^m\right)\ .$$

Препоръчвам ви да се опитате да си докажете това твърдение сами.

**Пример 3.4.** Тъй като точките са пренебрежими множества, горното твърдение влече, че множеството от рационалните числа $\mathbb{Q}$ е пренебрежимо в $\mathbb{R}$. Аналогично $\mathbb{Q}^n$ е пренебрежимо в $\mathbb{R}^n$.

**Твърдение 3.5.** *Едно подмножество $A$ на $\mathbb{R}^n$ е пренебрежимо по Лебег в $\mathbb{R}^n$ точно тогава, когато за всяко положително $\varepsilon$ можем да покрием множеството с вътрешностите на изброимо много паралелотопи, чиято сумарна мярка е по-малка от $\varepsilon$.*

*Доказателство.* В едната посока твърдението е очевидно. Нека сега $A$ е пренебрежимо по Лебег и $\varepsilon > 0$ е произволно. Тогава съществуват $\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ (където $\Delta_k$ са затворени паралелотопи в $\mathbb{R}^n$) такива, че

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \supset A \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_k) < \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Да изберем ред с положителни членове $\alpha_k > 0$ и сума $\varepsilon/2$, т.е. $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \varepsilon/2$ (например можем да изберем като в доказателството на предишното твърдение $\alpha_k = \varepsilon/2^{k+1}$). Ясно е, че за всяко $k \in \mathbb{N}$ можем да намерим затворен паралелотоп $\square_k$, който съдържа $\Delta_k$ във вътрешността си ($\mathring{\square}_k \supset \Delta_k$) и такъв, че $\mu_n(\square_k) \le \mu_n(\Delta_k) + \alpha_k$ (трябва да раздуем достатъчно малко всеки от координатните интервали). Тогава $\{\square_k\}_{k=1}^{\infty}$ са изброимо много паралелотопи, за които

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{\square}_k \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \supset A \text{ и}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(\square_k) \le \sum_{k=1}^{\infty}(\mu_n(\Delta_k) + \alpha_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ .$$

$\square$

Следващата лема е техническа и почти очевидна от геометрична гледна точка.

**Лема 3.6.** *Нека* $\{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ *са краен брой паралелотопи в* $\mathbb{R}^n$*, които не се припокриват, т.е.* $\mathring{\Delta}_i \cap \mathring{\Delta}_j = \emptyset$ *винаги, когато* $i \neq j$*. Нека* $\{\Box_k\}_{k=1}^{k_0}$ *са краен брой паралелотопи, за които* $\bigcup_{k=1}^{k_0} \Box_k \supset \bigcup_{i=1}^{i_0} \Delta_i$*. Тогава* $\sum_{k=1}^{k_0} \mu_n(\Box_k) \geq \sum_{i=1}^{i_0} \mu_n(\Delta_i)$*.*

*Доказателство.* Нека $\Pi_i$ е подразбиване на $\Delta_i$, всеки елемент на което се съдържа в някой от паралелотопите $\{\Box_k\}_{k=1}^{k_0}$ (тук $i = 1, \ldots, i_0$). Сега за всяко $k \in \{1, \ldots, k_0\}$ можем да построим подразбиване $\Pi^k$ на $\Box_k$ такова, че

$$\Pi_i^k := \{\Delta_i \cap \Box \ : \ \Box \in \Pi^k, \ \Delta_i \cap \Box \text{ непразен, неизроден}\} \equiv \Pi_i \ , \ i = 1, \ldots, i_0 \ .$$

Да забележим, че $\Pi_i^k \cap \Pi_j^k = \emptyset$ винаги, когато $i \neq j$, защото $\Delta_i$ и $\Delta_j$ не се припокриват. Тогава, използвайки два пъти Твърдение 2.4, получаваме

$$\sum_{k=1}^{k_0} \mu_n(\Box_k) = \sum_{k=1}^{k_0} \left( \sum_{\Box \in \Pi^k} \mu_n(\Box) \right) \geq \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{i=1}^{i_0} \left( \sum_{\Box \in \Pi_i^k} \mu_n(\Box) \right) \geq \sum_{i=1}^{i_0} \left( \sum_{\Box \in \Pi_i} \mu_n(\Box) \right) = \sum_{i=1}^{i_0} \mu_n(\Delta_i).$$

□

**Пример 3.7.** Неизродените паралелотопи в $\mathbb{R}^n$ не са пренебрежими в $\mathbb{R}^n$.

Наистина, един паралелотоп $\Delta$ в $\mathbb{R}^n$ е неизроден точно тогава, когато $\mu_n(\Delta) > 0$. Сега ако допуснем, че $\Delta$ е пренебрежим, то според Твърдение 3.5 съществуват $\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ (където $\Delta_k$ са паралелотопи в $\mathbb{R}^n$) такива, че

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{\Delta}_k \supset \Delta \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_k) < \frac{\mu_n(\Delta)}{2} \ .$$

Тъй като $\Delta$ е компакт и $\{\mathring{\Delta}_k\}_{k=1}^{\infty}$ е негово отворено покритие, то съществува $k_0 \in \mathbb{N}$ такова, че

$$\bigcup_{k=1}^{k_0} \mathring{\Delta}_k \supset \Delta \ .$$

Сега използваме горната лема с $\Delta$ единствен елемент на множеството от паралелотопите, които не се припокриват, и с $\Box_k := \Delta_k$. Получаваме

$$\mu_n(\Delta) \leq \sum_{k=1}^{k_0} \mu_n(\Delta_k) < \frac{\mu_n(\Delta)}{2} \ , \text{ противоречие.}$$

**Твърдение 3.8.** *Ако* $U$ *е непразно отворено множество, то* $U$ *не е пренебрежимо.*

*Доказателство.* Тъй като $U$ не е празно, можем да изберем точка $x_0 \in U$. Тогава (от отвореността на $U$) съществува $\varepsilon > 0$ такова, че кълбото $B_{2\varepsilon}(x_0)$ се съдържа в $U$. Да разгледаме паралелотопа

$$\Delta := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ x_i^0 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \leq x_i \leq x_i^0 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \ i = 1, 2, \ldots, n \right\} \ .$$

Ако $x$ е произволна точка от $\Delta$, можем да оценим разстоянието

$$\|x - x_0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_i^0\right)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} = \sqrt{n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon < 2\varepsilon \ .$$

Следователно $\Delta \subset B_{2\varepsilon}(x_0) \subset U$. Паралелотопът $\Delta$ е неизроден и тогава от горния пример следва, че не е пренебрежимо множество. Оттук и от $\Delta \subset U$ следва, че $U$ също не може да е пренебрежимо по Лебег. $\square$

## 3.2 Критерий на Лебег за интегруемост по Риман

**Теорема 3.9** (Критерий на Лебег за интегруемост по Риман)**.** *Нека $\Delta$ е паралелотоп в $\mathbb{R}^n$ и $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$. Твърдим, че функцията $f$ е интегруема по Риман точно тогава, когато е ограничена и множеството от точките ѝ на прекъсване е пренебрежимо по Лебег.*

Да отбележим, че тази теорема е нова за вас и в едномерния случай ($n = 1$). Спомнете си твърденията, доказани в ДИС1 за "някои класове интегруеми функции". Всички те са директно следствие от критерия на Лебег. Наистина, ако една функция е непрекъсната в $[a, b]$, то тя е ограничена (Вайерщрас) и множеството от точките ѝ на прекъсване е празно, значи пренебрежимо. Ако една ограничена функция има краен брой точки на прекъсване, то тя е интегруема по критерия на Лебег, защото крайните множества са пренебрежими. Тъй като монотонните функции в $[a, b]$ са ограничени (стойностите им са между $f(a)$ и $f(b)$) и имат най-много изброимо много точки на прекъсване, твърдението за тяхната интегруемост също е следствие от горната теорема.

С $R_f$ ще означаваме множеството от точките на прекъсване на функцията $f$.

*Доказателство.* Ще използваме и в двете посоки на доказателството втората форма на критерия за интегруемост (Твърдение 2.10).

Нека функцията $f$ е интегруема по Риман. Тогава тя, разбира се, е ограничена, и трябва да докажем пренебрежимостта на множеството $R_f$. Фиксираме произволно $\varepsilon > 0$. Избираме сходящ ред с положителни членове и сума $\varepsilon$: $\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m = \varepsilon$, $\alpha_m > 0$ за всяко естествено $m$. Прилагаме втората втората форма на критерия за интегруемост за положителните числа $\alpha_m$ и $1/m$. Получаваме подразбиване $\Pi_m$ на $\Delta$ такова, че

$$\sum_{M_k^m - m_k^m \geq \frac{1}{m}} \mu_n(\Delta_k^m) < \alpha_m \ .$$

Да означим с $\Pi'_m$ множеството от онези елементи на подразбиването $\Pi_m$, в които осцилацията на $f$ е по-голяма или равна на $1/m$ (т.е. знаем, че $\sum_{\square \in \Pi'_m} \mu_n(\square) < \alpha_m$). Да означим с $P_m$ множеството от делящите стени на $\Pi_m$ (т.е. $P_m$ е множеството от паралелотопите, от които се състои $\bigcup_{\square \in \Pi_m} \partial \square$). Ясно е, че $P_m$ е крайно множество от изродени паралелотопи. Тогава

$$\left( \bigcup_{m=1}^{\infty} \Pi'_m \right) \cup \left( \bigcup_{m=1}^{\infty} P_m \right)$$

е изброимо множество от паралелотопи в $\mathbb{R}^n$ със сумарна мярка, по-малка от $\varepsilon$. Наистина

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{\square \in \Pi'_m} \mu_n(\square) + \sum_{\square \in P_m} \mu_n(\square) \right) < \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m + 0) = \varepsilon \ .$$

Остава да се убедим, че обединението на паралелотопите от $(\bigcup_{m=1}^{\infty}\Pi'_m)\cup(\bigcup_{m=1}^{\infty}P_m)$ покрива $R_f$. Да изберем произволна точка

$$x\in\Delta\setminus\left(\bigcup\left\{\square\;:\;\square\in\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\Pi'_m\right)\cup\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}P_m\right)\right\}\right)\ .$$

Сега за произволно естествено $m$ съществува паралелотоп $\Delta_x^m\in\Pi_m$ такъв, че $x\in\Delta_x^m$. При това $x\in\mathring{\Delta}_x^m$, защото $x$ не принадлежи на $\bigcup_{\square\in\Pi_m}\partial\square$ (това множество се покрива от елементите на $P_m$) и осцилацията на $f$ в $\mathring{\Delta}_x^m$ е по-малка от $1/m$, защото $\Delta_x^m\notin\Pi'_m$. Следователно $|f(y)-f(x)|<1/m$ за всяко $y\in\mathring{\Delta}_x^m$ (заради осцилацията). И тъй, за произволно естествено $m$ намерихме околност $\mathring{\Delta}_x^m$ на $x$ такава, че $|f(y)-f(x)|<1/m$ за всяко $y\in\mathring{\Delta}_x^m$. Следователно функцията $f$ е непрекъсната в $x$, т.е. $x\notin R_f$. С това завършихме доказателството на пренебрежимостта на $R_f$.

Сега се обръщаме към доказателството на обратната посока. Предполагаме, че $f$ е ограничена и множеството от точките ѝ на прекъсване е пренебрежимо по Лебег. Ще доказваме, че $f$ е интегруема, като използваме втората форма на критерия за интегруемост. За целта избираме произволни $\varepsilon>0$ и $\eta>0$ и ги фиксираме.

Тъй като $R_f$ е пренебрежимо и $\varepsilon>0$, от Твърдение 3.5 съществуват изброимо много паралелотопи $\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ такива, че

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathring{\Delta}_k\supset R_f\ \text{ и }\ \sum_{k=1}^{\infty}\mu_n(\Delta_k)<\varepsilon\ .$$

Да означим

$$C:=\Delta\setminus\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathring{\Delta}_k\right)\ .$$

Множеството $C$ е компакт (ограничено е, защото се съдържа в $\Delta$, а е затворено, защото е сечение на затвореното $\Delta$ и допълнението на $\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathring{\Delta}_k$, което е отворено като обединение на отворени). При това $C\cap R_f=\emptyset$, следователно $f$ е непрекъсната във всяка точка на $C$. Прилагаме обобщената теорема на Кантор, която доказахме в първата лекция (Теорема 1.14), към функцията $f$. Следователно съществува $\delta>0$ такова, че за всяко $x\in C$ и за всяко $y\in\Delta$, за което $\|y-x\|<\delta$, е в сила $|f(x)-f(y)|<\eta/4$. Да изберем произволно подразбиване $\Pi$ на $\Delta$, чийто диаметър е по-малък от $\delta$. Ще докажем, че за това подразбиване е в сила неравенството от втората форма на критерия за интегруемост.

Нека $\Pi=\{\square_i\}_{i=1}^{i_0}$. Да проверим, че ако някой от паралелотопите от $\Pi$ има непразно сечение с $C$, то осцилацията на $f$ върху него е по-малка от $\eta$. Наистина, нека $\square_i\cap C\neq\emptyset$ за някое $i\in\{1,2,\dots,i_0\}$. Фиксираме $x\in\square_i\cap C$ (такава има) и нека $y\in\square_i$ е произволна. Тъй като $\operatorname{diam}\square_i\le d(\Pi)<\delta$, получаваме, че $\|x-y\|<\delta$. Сега от избора на $\delta$ от теоремата на Кантор и от $x\in C$ имаме $|f(x)-f(y)|<\eta/4$. Следователно

$$M_i:=\sup\{f(y):\ y\in\square_i\}\le f(x)+\frac{\eta}{4}\ ,$$

$$m_i:=\inf\{f(y):\ y\in\square_i\}\ge f(x)-\frac{\eta}{4}\ .$$

Оттук получаваме, че

$$M_i-m_i\le\left(f(x)+\frac{\eta}{4}\right)-\left(f(x)-\frac{\eta}{4}\right)=\frac{\eta}{2}<\eta\ .$$

И тъй, ако осцилацията на $f$ върху даден елемент от $\Pi$ е по-голяма или равна на $\eta$, то този елемент се съдържа в $\Delta \setminus C$. Да означим

$$K := \bigcup \{\square_i \in \Pi \ : \ M_i - m_i \geq \eta\} \subset \Delta \setminus C = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{\Delta}_k \ .$$

Тъй като $K$ е компакт като обединение на краен брой затворени паралелотопи, то съществува $k_0 \in \mathbb{N}$ такова, че

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{k_0} \mathring{\Delta}_k \subset \bigcup_{k=1}^{k_0} \Delta_k \ .$$

Сега можем да приложим Лема 3.6, защото $K$ е крайно обединение на паралелотопи, които не се припокриват, и да получим

$$\sum_{M_i - m_i \geq \eta} \mu_n(\square_i) \leq \sum_{k=1}^{k_0} \mu_n(\Delta_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_k) < \varepsilon \ .$$

С това доказателството е завършено. $\square$

## 3.3 Основни свойства на интеграла на Риман върху паралелотоп

Критерият на Лебег за интегруемост по Риман улеснява много доказателствата на твърдения за интегруемост. Следното следствие е добър пример за това:

**Следствие 3.10.** *Нека $\Delta$ е паралелотоп в $\mathbb{R}^n$ и нека $f, g : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ са интегруеми по Риман. Тогава*
*(а) Сумата $f + g$ и произведението $f \cdot g$ им са интегруеми по Риман;*
*(б) Ако съществува $\varepsilon_0 > 0$ такова, че $|g(x)| \geq \varepsilon_0$ за всички $x \in \Delta$, то частното $\frac{f}{g}$ е функция, интегруема по Риман;*
*(в) По-общо, ако $\Phi : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната и $f_1, \ldots, f_k : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ са интегруеми по Риман, то $\Phi(f_1, \ldots, f_k)$ е интегруема по Риман.*

*Доказателство.* Ще започнем с доказателството на (в), понеже е ясно, че (а) е частен случай на (в). Тъй като композиция на непрекъснати функции е непрекъсната, веднага получаваме, че ако в дадена точка $x \in \Delta$ функциите $f_1, \ldots, f_k$ са непрекъснати, то $\Phi(f_1, \ldots, f_k)$ също е непрекъсната в $x$. Следователно

$\Delta \setminus (R_{f_1} \cup R_{f_2} \cup \ldots \cup R_{f_k}) \subset \Delta \setminus R_{\Phi(f_1,\ldots,f_k)}$, което влече $R_{\Phi(f_1,\ldots,f_k)} \subset R_{f_1} \cup R_{f_2} \cup \ldots \cup R_{f_k}$ .

Сега от интегруемостта на $f_1, \ldots, f_k$ следва пренебрежимостта на множествата $R_{f_1}, R_{f_2}, \ldots,$ $R_{f_k}$ и тогава горното включване показва, че $R_{\Phi(f_1,\ldots,f_k)}$ също е пренебрежимо. За да довършим доказателството на (в), остава да проверим ограничеността на $\Phi(f_1, \ldots, f_k)$. Наистина, тъй като $f_1, \ldots, f_k$ са ограничени, то множеството от стойностите $\{(f_1(x), \ldots, f_k(x)) \in \mathbb{R}^k \ : \ x \in \Delta\}$ се съдържа в паралелотоп в $\mathbb{R}^k$, който е компакт. Остава да приложим теоремата на Вайерщрас за $\Phi$.

Остава да проверим (б). Аналогично на горното получаваме, че $R_{\frac{f}{g}} \subset R_f \cup R_g$ и следователно $R_{\frac{f}{g}}$ е пренебрежимо. Нека $|f(x)| \leq M$ за всяко $x \in \Delta$ ($f$ е инрегруема, значи е ограничена). Частното е ограничено, защото

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq \frac{M}{\varepsilon_0} \text{ за всяко } x \in \Delta \ .$$

$\square$

Ще завършим тази лекция с основните свойства на римановия интеграл върху паралелотоп $\Delta$ в $\mathbb{R}^n$:

1. **Линейност.** Нека $f, g : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ са интегруеми функции и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогава $f+g$ и $\lambda f$ са интегруеми функции и

$$\int_\Delta (f+g) = \int_\Delta f + \int_\Delta g \ , \quad \int_\Delta (\lambda f) = \lambda \int_\Delta f \ .$$

*Доказателство.* Интегруемостта я имаме наготово от предишното следствие. Остава да забележим, че за произволно подразбиване $\Pi$ на $\Delta$ и за произволни пробни точки $\xi$ за $\Pi$ имаме

$$\sigma_{f+g}(\Pi, \xi) = \sigma_f(\Pi, \xi) + \sigma_g(\Pi, \xi) \text{ и } \sigma_{\lambda f}(\Pi, \xi) = \lambda \sigma_f(\Pi, \xi) \ ,$$

да напишем горните равенства за редица от подразбивания $\{\Pi_m\}_{m=1}^\infty$ с диаметър, клонящ към нула ($d(\Pi_m) \longrightarrow_{m\to\infty} 0$) и да направим граничен преход. $\square$

2. **Адитивност.** Нека $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ е подразделяне на $\Delta$ и $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$. Твърдим, че $f$ е интегруема точно тогава, когато $f \restriction_{\Delta_1}$, $f \restriction_{\Delta_2}$, $\ldots$, $f \restriction_{\Delta_{i_0}}$ са интегруеми. При това

$$\int_\Delta f = \int_{\Delta_1} f + \int_{\Delta_2} f + \ldots \int_{\Delta_{i_0}} f \ .$$

*Доказателство.* Очевидно $f$ е ограничена точно тогава, когато $f \restriction_{\Delta_1}$, $f \restriction_{\Delta_2}$, $\ldots$, $f \restriction_{\Delta_{i_0}}$ са ограничени. Тъй като $R_{f\restriction_{\Delta_i}} \subset R_f$ за всяко $i = 1, 2, \ldots, i_0$, от интегруемостта на $f$ следва интегруемостта на $f \restriction_{\Delta_i}$, $i = 1, 2, \ldots, i_0$. Обратната импликация се получава от включването $R_f \subset R_{f\restriction_{\Delta_1}} \cup R_{f\restriction_{\Delta_2}} \cup \ldots \cup R_{f\restriction_{\Delta_{i_0}}}$.

За да получим равенството, вземаме редица от подразбивания $\{\Pi^m\}_{m=1}^\infty$ с диаметър, клонящ към нула, като $\Pi^m \geq \Pi$ за всяко естедвено $m$. Нека $\xi^m$ са пробни точки за $\Pi^m$. Означаваме

$$\Pi_i^m := \{\square \in \Pi^m : \ \square \subset \Delta_i\}, \ i = 1, 2, \ldots, i_0 \ .$$

Нека $\xi_i^m$ са пробните точки от $\xi^m$, които са в паралелотопите от $\Pi_i^m$. Тогава

$$\sigma_f(\Pi^m, \xi^m) = \sigma_f(\Pi_1^m, \xi_1^m) + \sigma_f(\Pi_2^m, \xi_2^m) + \cdots + \sigma_f(\Pi_{i_0}^m, \xi_{i_0}^m) \ .$$

Тъй като сме сигурни, че всяко събираемо има граница при $m \to \infty$ и тя е съответният интеграл, правим граничен преход и получаваме търсеното равенство. $\square$

3. **Монотонност.** Нека $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ е интегруема и $f(x) \geq 0$ за всяко $x \in \Delta$. Тогава $\int_\Delta f \geq 0$.

(Директно от факта, че малките суми на Дарбу за $f$ са неотрицателни.)

***Следствие 1.*** Нека $f, g : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ са интегруеми функции и $f(x) \geq g(x)$ за всяко $x \in \Delta$. Тогава $\int_\Delta f \geq \int_\Delta g$.

(Наистина, $\int_\Delta f - \int_\Delta g = \int_\Delta (f-g) \geq 0$ от линейността и монотонността.)

***Следствие 2.*** Ако $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ е интегруема, то $|f|$ е интегруема и $|\int_\Delta f| \leq \int_\Delta |f|$.

(Интегруемостта е директна от критерия на Лебег, а неравенството от $-|f| \leq f \leq |f|$ и предишното следствие.)