

# ИЗПИТ

по Математически анализ, 20 септември 2005г.

Име:..... Фак.номер:..... Специалност:.....

1.Разгледайте фигурата

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1, x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 1\}$$

- (а) Представете  $K$  като криволинеен трапец.
- (б) Докажете, че криволинейните трапеци (следователно и  $K$ ) са измерими по Пеано-Жордан.
- (в) Докажете, че функцията

$$f(x, y) = \begin{cases} 8x, & y \geq x, (x, y) \in K \\ 9, & y < x, (x, y) \in K \\ 0, & (x, y) \notin K \end{cases}$$

е интегрируема по Риман.

2. Разгледайте хомогенна материална нишка, разположена по полуокръжност в горната полуравнина:

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$$

където  $R$  е положителна константа. Каква е гравитационната сила, с която материалната нишка притегля материална точка с маса  $m_0$ , разположена в началото на координатната система?

3. Дайте дефиниция на множество, пренебрежимо по Лебег. Дайте дефиниция на множество, пренебрежимо по Пеано-Жордан. Каква е връзката между тях? Докажете, че двете понятия съвпадат, ако множеството е компактно.

4. 2. Разгледайте функцията  $f(x) = e^{\|x\|}$ , където  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ .

- (а) Напишете полето  $F(x) = \mathbf{grad} f(x)$ .
- (б) Пресметнете  $\mathbf{div} F(x)$  и  $\mathbf{rot} F(x)$  ( $F$  е определено в подточка (а)).
- (в) Как ще обясните резултата, получен за  $\mathbf{rot} F(x)$ ?

5. Нека  $F$  е двукратно гладко векторно поле, дефинирано в  $\mathbb{R}^3$ .

- (а) Формулирайте теоремата на Стокс.
- (б) Формулирайте необходимото условие за потенциалност на  $F$ . Докажете, че това условие е и достатъчно в случая на повърхнинно едносвързана област.

6. Напишете формулата за свеждане на повърхнинен интеграл от първи род към двоен риманов интеграл. Изведете формула за повърхнина на ротационно тяло.

7. Пресметнете площта на тора:

$$\varphi(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, a + b \sin u)$$

$$(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi], \quad a > b > 0.$$