Лекционни записки по Математически Анализ

проф. Надежда Рибарска
Набрани от Никола Юруков

31 октомври 2015 г.

Съдържание

1 Лекция 1 - преговор с разширение

1.1 Евклидовото пространство $\mathbb{R}^n$

Като множество $\mathbb{R}^n$ е множеството $\{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, .., n\}$ от наредените n-торки реални числа. Ако го снабдим със стандартните линейни операции събиране на вектори и умножение на вектор с реално число, получаваме реално линейно пространство (спомнете си аксиомите от курса по линейна алгебра). Да напомним формалните дефиниции: сума на векторите $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ е векторът $x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, ..., x_n+y_n)$ (събирането е покоординатно). Произведение на скалара $\lambda \in \mathbb{R}$ с вектора x е векторът $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$ (умножението със скалар също е покоординатно). Ще означаваме с $\mathbf{0}$ нулевия вектор $(0, \dots, 0)$.

За да можем да правим анализ (да говорим за граница, непрекъснатост, производна и т.н.), освен линейната структура ни е необходима и някаква "мярка на близост"в нашето пространство. Както помните от курса по ДИС2, стандартната мярка на близост между два вектора е евклидовото разстояние между тях:

$$\rho(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}\ ,\ \text{където } x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ y = (y_1, y_2, ..., y_n)\ .$$

Забележете, че в $\mathbb{R}^2$ това е просто питагоровата теорема. Това разстояние е добре съгласувано с линейната структура в смисъл, че $\rho(x, y) = \|x - y\|$, където в дясната част стои евклидовата норма (или дължината) на вектора $x - y$:

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ ,\ x = (x_1, x_2, ..., x_n)\ .$$

Да напомним, че една функция $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty)$ се нарича норма, ако за нея са в сила свойствата

1. $\|x\| = 0 \iff x = \mathbf{0}$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (неравенство на триъгълника)

В курса по ДИС2 е проверено, че евклидовата норма е норма. За упражнение проверете, че

- $\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$
- $\|(x_1, x_2)\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$
- $\|(x_1, x_2)\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p}$, $1 < p < \infty$

са норми в $\mathbb{R}^2$. По-общо, проверете, че

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}\ ,\ 1 \le p < \infty \text{ е норма в } \mathbb{R}^n\ .$$

Разбира се, за целта трябва да използвате неравенството на Минковски от курса по ДИС2.

Евклидовата норма има по-хубави геометрични свойства от горните примери, защото е съгласувана със скаларното произведение

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ , \text{ където } x = (x_1, x_2, ..., x_n) \text{ и } \ y = (y_1, y_2, ..., y_n),$$

по стандартния начин $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Да напомним основното неравенство на Коши-Буняковски-Шварц:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \ .$$

Да напомним също означенията

$$B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\}$$

за отворено кълбо с център x и радиус r и

$$\overline{B}_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq r\}$$

за затворено кълбо с център x и радиус r. Като упражнение можете да скицирате кълбата с радиус 1 и център началото на координатната система за нормите $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$ от предишното упражнение.

1.2 Топология в $\mathbb{R}^n$

Дефиниция 1.1. Подмножеството U на $\mathbb{R}^n$ се нарича отворено, ако за всяка точка x от U съществува $\varepsilon > 0$ такова, че $B_\varepsilon(x) \subset U$.

Основните свойства на отворените множества, проверени в курса по ДИС2, са

1. $\emptyset$ и $\mathbb{R}^n$ са отворени

2. Сечение на краен брой отворени множества е отворено, т.е. ако $U_1, U_2, ..., U_k$ са отворени, то $\bigcap_{i=1}^k U_i$ е отворено.

3. Обединение на произволна фамилия от отворени множества е отворено, т.е. ако U_α са отворени за всяко $\alpha \in I$, то $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ е отворено.

Пример 1.2. Отворените кълба са отворени множества.

Доказателство. Да разгледаме $B_r(x_0)$, $r > 0$. Взимаме си произволно x от кълбото, т.е. растоянието между x и x_0 е по-малко от r. Нека $\varepsilon := r - \|x_0 - x\| > 0$. Тогава $B_\varepsilon(x) \subset B_r(x_0)$. Наистина, нека $y \in B_\varepsilon(x)$, т.е. $\|y - x\| < \varepsilon$. Получаваме

$$\begin{aligned} \|x_0 - y\| &\leq \|x - y\| + \|x - x_0\| < \varepsilon + \|x - x_0\| \\ \|x_0 - y\| &< r - \|x_0 - x\| + \|x - x_0\| \\ \|x_0 - y\| &< r \end{aligned}$$

□

Пример 1.3. Нека функцията $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е **непрекъсната**. Тогава множеството $U = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) > 0\}$ е отворено.

Доказателство. Взимаме произволна точка $x_0 \in U$, следователно $\varepsilon = g(x_0) > 0$. От непрекъснатостта на функцията получаваме, че съществува положително число δ такова, че $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ за всяко $x \in B_\delta(x_0)$. Следователно $g(x) > g(x_0) - \varepsilon = 0$ и оттук $x \in U$ за всяко $x \in B_\delta(x_0)$. $\square$

Дефиниция 1.4. Едно подмножество F на $\mathbb{R}^n$ се нарича затворено, ако $\mathbb{R}^n \setminus F$ е отворено множество.

Основните свойства на затворените множества, проверени в курса по ДИС2, са

1. $\emptyset, \mathbb{R}^n$ са затворени.

2. Обединие на краен брой затворени множества е затворено, т.е. ако $F_1, F_2, ..., F_k$ са затворени, то $\bigcup_{i=1}^k F_i$ е затворено.

3. Сечение на произволна фамилия от затворени множества е затворено, т.е. ако F_α са затворени за всички $\alpha \in I$, то $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ е затворено.

Пример 1.5. Затворените кълба са затворени множества. Доказателството оставяме за упражнение.

Дефиниция 1.6. Контур на множеството $A \subset \mathbb{R}^n$ наричаме множеството

$$\partial A := \{x \in \mathbb{R}^n : \forall U \text{ отворено}, \ x \in U \text{ е в сила } U \cap A \neq \emptyset \text{ и } U \setminus A \neq \emptyset\}$$

Дефиниция 1.7. Затворена обвивка на множеството $A \subset \mathbb{R}^n$ наричаме най-малкото затворено множество, съдържащо A:

$$\overline{A} := \cap \{F \subset \mathbb{R}^n : \ F \supset A \text{ и } F \text{ е затворено } \}$$

В курса по ДИС2 е доказано, че

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \{x_m\}_{m=1}^\infty \subset A, \ x_m \to x\}$$

Лесно се проверява, че едно множество е затворено точно тогава, когато съвпада със затворената си обвивка. Връзките между контур на множество и затворена обвивка на множество са

$$\overline{A} = A \cup \partial A \ , \ \partial A = \overline{A} \cap \left(\overline{\mathbb{R}^n \setminus A} \right) \ .$$

Следователно контурът на произволно множество е винаги затворено множество. Също лесно се проверява, че

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \exists \{x_m\}_{m=1}^\infty \subset A, \ x_m \to x \text{ и } \exists \{y_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n \setminus A, \ y_m \to x\}$$

Дефиниция 1.8. Вътрешност на $A \subset \mathbb{R}^n$ наричаме най-голямото отворено множество, съдържащо се в A:

$$\mathring{A} = \cup \{U \subset \mathbb{R}^n : \ U \subset A \text{ и } U \text{ е отворено } \}$$

Друго означение за вътрешност на A е $intA$. Понятието за вътрешност е дуално на понятието за затворена обвивка, т.е.

$$intA = \mathbb{R}^n \setminus \left(\overline{\mathbb{R}^n \setminus A} \right) \ , \ \overline{A} = \mathbb{R}^n \setminus (int(\mathbb{R}^n \setminus A)) \ .$$

Едно от най-важните и често използвани понятия в топологията е понятието за компактност.

Дефиниция 1.9. Едно множество $A \subset \mathbb{R}^n$ се нарича компакт, ако от всяко негово отворено покритие можем да изберем крайно подпокритие, т.е. ако $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ е фамилия от отворени подмножества на $\mathbb{R}^n$, за която е в сила $\cup_{\alpha\in I} U_\alpha \supset A$, то можем да изберем краен брой индекси $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in I$ такива, че $\cup_{i=1}^k U_{\alpha_i} \supset A$.

В курса по ДИС2 са доказани две важни и нетривиални характеризации на компактните подмножества на $\mathbb{R}^n$:

1. Едно подмножество A на $\mathbb{R}^n$ е компакт точно тогава, когато A е ограничено и затворено.

2. Едно подмножество A на $\mathbb{R}^n$ е компакт точно тогава, когато от всяка редица от негови елементи може да се избере сходяща подредица, чиято граница е също в множеството.

Сега въвеждаме първото разширение, т.е. понятие, за което не сте учили в курса по ДИС2: множество, релативно отворено в A. Ще го използваме по-нататък, за да говорим за множества, релативно отворени в някаква гладка двумерна повърхнина в тримерното евклидово пространство. Интуицията е, че забравяме за всичко извън множеството A.

Дефиниция 1.10. Нека $A \subset \mathbb{R}^n$. Едно подмножество U на A наричаме релативно отворено в A, ако съществува отворено множество $V \subset \mathbb{R}^n$ такова, че $U = A \cap V$.

Твърдение 1.11. *Множеството $U \subset A$ е релативно отворено в A точно тогава, когато за всяка негова точка $x \in U$ съществува $\varepsilon > 0$ такова, че $B_\varepsilon(x) \cap A \subset U$.*

Доказателство. Нека първо $U \subset A$ е релативно отворено в A и $x \in U$ е произволна. Тогава съществува отворено множество $V \subset \mathbb{R}^n$ с $U = A \cap V$. Тъй като $x \in U \subset V$, съществува $\varepsilon > 0$ с $B_\varepsilon(x) \subset V$ и оттук $B_\varepsilon(x) \cap A \subset V \cap A = U$. В обратната посока, нека за всяка точка $x \in U$ съществува $\varepsilon_x > 0$ такова, че $B_{\varepsilon_x}(x) \cap A \subset U$. Полагаме $V := \cup_{x\in U} B_{\varepsilon_x}(x)$. Очевидно V е отворено множество като обединение на отворени кълбета. Освен това

$$V \cap A = (\cup_{x\in U} B_{\varepsilon_x}(x)) \cap A = \cup_{x\in U} (B_{\varepsilon_x}(x) \cap A) \subset U \ .$$

От друга страна, всяка точка $x \in U$ принадлежи на $B_{\varepsilon_x}(x) \subset V$, следователно $U \subset V$ и от $U \subset A$ следва $U \subset V \cap A$. С това $U = V \cap A$ и доказателството е завършено. $\square$

Следното приложение на понятието за релативна отвореност е важно и изключително често използвано:

Твърдение 1.12. *Нека $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ е изображение с дефиниционна област $D \subset \mathbb{R}^n$ и стойности в $\mathbb{R}^m$. Твърдим, че f е непрекъсната в D точно тогава когато първообраз на всяко отворено в $\mathbb{R}^m$ множество е релативно отворено в D. Да напомним, че първообраз на $U \subset \mathbb{R}^m$ е множеството $f^{-1}(U) := \{x \in D : f(x) \in U\}$.*

Доказателство. Първо ще докажем, че ако първообраз на всяко отворено в $\mathbb{R}^m$ множество е релативно отворено в D, то f е непрекъсната. Избираме произволна точка x от D и произволно $\varepsilon > 0$. Тъй като кълбото $B_\varepsilon(f(x))$ е отворено в $\mathbb{R}^m$, първообразът $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ ще е релативно отворен в D. Тогава $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) = D \cap V$ за някое множество V, отворено в $\mathbb{R}^n$. Тъй като $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subset V$, съществува $\delta > 0$ с $B_\delta(x) \subset V$. Нека $x' \in D$ е произволна точка с $\|x' - x\| < \delta$. Значи $x' \in D \cap B_\delta(x) \subset D \cap V = f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ и следователно $f(x') \in B_\varepsilon(f(x))$, т.е. $\|f(x') - f(x)\| < \varepsilon$.

За да докажем обратната посока, избираме произволно отворено $U \subset \mathbb{R}^m$. Нека $x \in f^{-1}(U)$. Тогава $f(x)$ принадлежи на отвореното множество U и следователно съществува $\varepsilon > 0$ такова, че $B_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Тъй като f е непрекъсната в x, съществува $\delta > 0$ такова, че $\|f(x')-f(x)\| < \varepsilon$ за всяко $x' \in D$, за което $\|x'-x\| < \delta$. Записано по друг начин това означава, че $f(B_\delta(x) \cap D) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset U$, следователно $B_\delta(x) \cap D \subset f^{-1}(U)$. Така доказахме, че множеството $f^{-1}(U)$ е релативно отворено в D, защото изпълнява условието от предишното твърдение. □

1.3 Основни теореми

Теорема 1.13 (Теорема на Вайерщрас). *Непрекъснат образ на компакт е компакт. Формално записано, ако $f : K \longrightarrow \mathbb{R}^m$ е непрекъснато изображение с дефиниционна област компактното подмножество K на $\mathbb{R}^n$, то множеството $f(K) := \{f(x) : x \in K\}$ от стойностите на f е компактно подмножество на $\mathbb{R}^m$.*

Доказателство. Нека $\{y_l\}_{l=1}^\infty \subset f(K)$ е редица от елементи на $f(K)$. Тогава за всеки елемент y_l на тази редица съществува елемент x_l на K такъв, че $y_l = f(x_l)$. Сега редицата $\{x_l\}_{l=1}^\infty$ се съдържа в компактното множество K. Следователно съществува нейна сходяща подредица $\{x_{l_k}\}_{k=1}^\infty$, чиято граница x_0 е елемент на K. Тъй като f е непрекъсната, от дефиницията на Хайне за непрекъснатост получаваме, че $f(x_{l_k}) = y_{l_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0)$. Тъй като очевидно $f(x_0) \in f(K)$, остава да се позовем на характеризацията (2) на компактните множества. □

Хубаво упражнение е да се докаже теоремата на Вайерщрас, като се използва дефиницията на компакт и характеризацията на непрекъснатите изображения, която доказахме.

Друго добро упражнение е да се убедите, че теоремата на Вайерщрас от ДИС 1 (една непрекъсната функция върху краен затворен интервал е ограничена и достига своята най-голяма и най-малка стойност) е следствие от тази форма на теоремата.

Теорема 1.14 (Теорема на Кантор). *Нека $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ е дефинирана в $D \subset \mathbb{R}^n$. Нека K е компактно подмножество на D. Ако f е непрекъсната в K, т.е. непрекъсната е във всяка точка от K, то твърдим, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че за всяко $x \in K$ и за всички $x' \in D$, за които е изпълнено $\|x'-x\| < \delta$, е в сила $\|f(x)-f(x')\| < \varepsilon$. Забележете, че заключението е малко по-силно от равномерна непрекъснатост на f върху K.*

Доказателство. Отново ще използваме характеризацията (2) на компактността чрез редици. Допускаме противното, т.е. съществува такова $\varepsilon_0 > 0$, че за всички $\delta > 0$ съществуват точки $x_\delta \in K$ и $x'_\delta \in D$ такива, че

$$\|x_\delta - x'_\delta\| < \delta \text{ и } \|f(x_\delta) - f(x'_\delta)\| \geq \varepsilon \ .$$

Даваме на δ стойности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ и преименуваме $x_{1/m}$ и $x'_{1/m}$ съответно на x_m и x'_m. Така се образуват две редици $\{x_m\}_{m=1}^\infty \subset K$ и $\{x'_m\}_{m=1}^\infty \subset D$. Знаем, че

$$\|x_m - x'_m\| < \frac{1}{m} \text{ и } \|f(x_m) - f(x'_m)\| \geq \varepsilon_0 > 0$$

за всяко естествено m. Тъй като K е компакт, съществува сходяща подредица $x_{m_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0 \in K$ на $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset K$. От неравенствата

$$\|x'_{m_k} - x_0\| \leq \|x'_{m_k} - x_{m_k}\| + \|x_{m_k} - x_0\| < \frac{1}{m_k} + \|x_{m_k} - x_0\|$$

получаваме, че редицата $\{x'_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ също клони към точката $x_0 \in K$. Сега използваме непрекъснатостта на f в точката $x_0 \in K$ и получаваме, че

$$f(x_{m_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0) \text{ и } f(x'_{m_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0).$$

Като извадим тези две редици, получаваме $f(x_{m_k}) - f(x'_{m_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, което противоречи на $\|f(x_m) - f(x'_m)\| \geq \varepsilon_0 > 0$ за всяко естествено m. Теоремата е доказана. □

2 Лекция 2. Кратен Риманов интеграл - въвеждане и основни свойства

Конструкцията на Дарбу, с която сте въвели Риманов интеграл в курса по ДИС1, е важна и естествена и ние ще я използваме отново, за да въведем n-кратен Риманов интеграл. Геометричната интуиция остава същата. В курса по ДИС1 сте искали да дефинирате по един разумен начин лицето на фигура, заградена от абцисата, две вертикални прави и графиката на ограничена неотрицателна функция. Постигнали сте го чрез оценяване отгоре и отдолу на това лице чрез лицата на стъпаловидни фигури, съставени от краен брой правоъгълници (тези лица са големите и малките суми на Дарбу). Сега за n=2 трябва да оценяваме отгоре и отдолу обема на тяло, заградено от равнината на първите две координатни оси, вертикални равнини по границата на даден правоъгълник и графиката на ограничена неотрицателна функция, дефинирана в този правоъгълник. Оценката е чрез обема на тела, състоящи се от краен брой паралелепипеди (за оценка отгоре вземаме обема на такова стъпаловидно тяло, съдържащо нашето, а за оценка отдолу - съдържащо се в нашето). За по-големи размерности идеята и конструкцията остават същите, само че вече не можем да нарисуваме подходяща картинка.

2.1 Паралелотопи в $\mathbb{R}^n$ и тяхната мярка

Първият въпрос, който трябва да решим, е с какво заменяме крайния и затворен интервал от ДИС1, ако размерността е по-голяма от едно. Естественият отговор е: с правоъгълник в равнината, с паралелепипед в тримерното пространство и т.н.

Дефиниция 2.1. Паралелотоп (на английски interval, box) е множество в $\mathbb{R}^n$, за което всяка координата се мени (независимо от останалите) в краен затворен интервал:

$$\Delta := \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = 1, 2, ...n\}\ .$$

За различните размерности (стойности на n) имаме

n	Δ
1	$[a_1, b_1]$ интервал
2	$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ правоъгълник
3	$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ паралелепипед
..	...

Съществeното за тези най-прости фигури е, че нямаме съмнения какво трябва да наречем дължина на интервал, лице на правоъгълник, обем на паралелепипед, а за паралелотоп в $\mathbb{R}^n$ естествено въвеждаме мярка в $\mathbb{R}^n$.

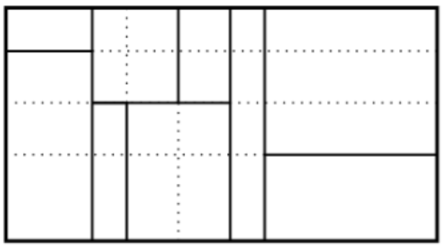
Дефиниция 2.2. За паралелотопа $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = 1, 2, ...n\}$ дефинираме неговата n-мерна мярка като

$$\mu_n(\Delta) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \ .$$

Забележете, че при $n = 1$ това е дължината $\mu_1([a_1, b_1]) = b_1 - a_1$ на интервала $[a_1, b_1]$, при $n = 2$ това е лицето $\mu_2([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$ на правоъгълника $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, при $n = 3$ това е обемът $\mu_3([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$ на паралелепипеда $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$.

Следващият етап е да уточним как да разделяме паралелотоп на паралелотопчета по аналогия с разделянето на интервал на подинтервали от ДИС1. Неформално, подразделяне на паралелотоп са краен брой паралелотопи, чието обединение е първоначалният паралелотоп, и които не се припокриват.

Дефиниция 2.3. Подразделение Π на един паралелотоп Δ е крайно множество от паралелотопи $\Pi = \{\Delta_k\}_{k=1}^{k_0}$, за което $\cup_{k=1}^{k_0} \Delta_k = \Delta$ и $\mathring{\Delta}_k \cap \mathring{\Delta}_l = \emptyset \ \forall k \neq l$.



Забележете, че вътрешността на паралелотопа $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = 1, 2, ...n\}$ е множеството $\mathring{\Delta} = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i,\ i = 1, 2, ..n\}$. Следното твърдение е геометрически очевидно, но съществено за по-нататъшната ни работа:

Твърдение 2.4. *Ако $\Pi = \{\Delta_k\}_{k=1}^{k_0}$ е подразделяне на Δ, то $\mu_n(\Delta) = \sum_{k=1}^{k_0} \mu_n(\Delta_k)$.*

Доказателство. Първо разглеждаме случая на правилно подразделяне, т.е. Π се получава като се раздели интервалът, в който се мени i-тата координата, на подинтервали за всяко i, и се вземат всевъзможните декартови произведения на такива подинтервали. За пестене на място и по-прости означения ще изпишем нещата за $n = 2$, в общия случай доказателството е аналогично. И тъй, нека $\Delta = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ и делим $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$ на подинтервали:

$$a_1 = x_0 < x_1 < ... < x_{m_0} = b_1 \ ,$$

$$a_2 = y_0 < y_1 < ... < y_{l_0} = b_2 \ .$$

Тогава $\Pi = \{\Delta_{ml} : \ m = 1, \dots, m_0, \ l = 1, \dots, l_0\}$, където $\Delta_{ml} = [x_{m-1}, x_m] \times [y_{l-1}, y_l]$. Пресмятаме

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{l_0} \sum_{m=1}^{m_0} \mu_2(\Delta_{ml}) &= \sum_{l=1}^{l_0} \sum_{m=1}^{m_0} (x_m - x_{m-1})(y_l - y_{l-1}) \\ &= \sum_{l=1}^{l_0} (y_l - y_{l-1}) \sum_{m=1}^{m_0} (x_m - x_{m-1}) \\ &= (b_1 - a_1) \sum_{l=1}^{l_0} (y_l - y_{l-1}) \\ &= (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \\ &= \mu_2(\Delta)\end{aligned}$$

Нека сега да разгледаме произволно подразделяне $\Pi = \{\Delta_k\}_{k=1}^{k_0}$. Можем да намерим правилно подразделяне Π^* на Δ такова, че елементите на $\Pi^* = \{\Delta_l^*\}_{l=1}^{l_0}$, които се съдържат в Δ_k, образуват подразделяне на Δ_k (например при размерност 2 продължаваме вертикалните и хоризонтални страни на правоъгълниците от Π в целите интервали). Тогава, използвайки два пъти предишната стъпка, получаваме

$$\mu_n(\Delta) = \sum_{l=1}^{l_0} \mu_n(\Delta_l^*) = \sum_{k=1}^{k_0} \left(\sum_{\Delta_l^* \subset \Delta_k} \mu_n(\Delta_l^*) \right) = \sum_{k=1}^{k_0} \mu_n(\Delta_k) \ .$$

$\square$