Лекционни записки по Математически Анализ

проф. Надежда Рибарска
Набрани от Никола Юруков

18 октомври 2015 г.

Съдържание

1 Преговор

1.1 $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ е множеството $\{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R} i = 1, 2, .., n\}$.

Сега нека имаме векторите $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, тогава имаме $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$ тоест покоординатно събиране. При умножение със скалар (т.е. число от някакво поле) $\lambda \in \mathbb{R}$ имаме $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$. Дължина (или също евклидова норма) на вектор е $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, а разстоянието между два вектора е $\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$. Свойства на дължината:

1. $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \iff x = \mathbf{0} =$ нулевия вектор. Положителна дефинитност.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Неравенство на Δ.

Пример:

- $\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$
- $\|(x_1, x_2)\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$
- $\|(x_1, x_2)\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p}$ и $1 < p < \infty$

По-общо имаме

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$$

За упражнение можем да проверим, че горните норми удовлетворяват свойствата на дължините.

Сега ще дефинираме отворено кълбо $\mathcal{B}_r(x_0)$ с център x_0 и радиус r.

$$\mathcal{B}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$$

Скаларно произведение:

$$< x, y >= \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$cos(< x, y >) =< \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} >$$

Неравенство на Коши-Буняковски-Шварц:

$$| < x, y > | \leq \|x\| \|y\|$$

Тук е моментът да си припомним и общата форма на неравенството на триъгълника (н-во на Минковски), която се доказва с помощта на н-вото на Юнг(Young) и Хьолдер(Hölder). Неравенство на Хьолдер(Hölder):

$$\sum_{k=1}^n |x_k\, y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \text{ за всички } (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Неравенство на Минковски:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

2 Топология в $\mathbb{R}^n$

2.1 Отворено множество

Дефиниция 2.1. $U \subset \mathbb{R}^n$ се нарича отворено, ако за $\forall x \in U$ съществува $\epsilon > 0$, такова че $\mathcal{B}_\epsilon(x) \subset U$.

$\emptyset$ и $\mathbb{R}^n$ са отворени
Ако $U_1, U_2, ..., U_n$ са отворени $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i$ е отворено.
Ако $U_\alpha, \forall\alpha \in A$ са отворени $\Rightarrow \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ е отворено.

Пример 2.2. Отворените кълба са отворени множества.
$\mathcal{B}_r(x_0), r > 0$. Взимаме си произволно x от кълбото, т.е. растоянието между x и x_0 е помалко от r. Нека $\epsilon := r - \|x_0 - x\| > 0$. Тогава $\mathcal{B}_\epsilon(x) \subset \mathcal{B}_r(x_0)$. Нека $y \in \mathcal{B}_\epsilon(x) \Rightarrow \|x-y\| < \epsilon$.

$$\begin{aligned}
\|x_0 - y\| &\leq \|x-y\| + \|x - x_0\| < \epsilon + \|x - x_0\| \\
\|x_0 - y\| &\leq r - \|x_0 - x\| + \|x - x_0\| \\
\|x_0 - y\| &\leq r
\end{aligned}$$

Пример 2.3. Нека имаме **непрекъсната** функция $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, тогава $U = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) > 0\}$ е отворено.

Доказателство. Взимаме произволна точка $x_0 \in U$, следователно $\epsilon = g(x_0) > 0$, тогава $\exists\delta\ \forall x \in \mathcal{B}_\delta(x_0) : |g(x) - g(x_0)| < \epsilon \quad \Rightarrow g(x) > g(x_0) - \epsilon = 0 \quad \Rightarrow x \in U$. □

2.2 Затворено множество

Дефиниция 2.4. F е затворено, ако $\mathbb{R}^n \setminus F$ е отворено.
$\emptyset, \mathbb{R}^n$ са затворени.
Ако $F_1, F_2, ..., F_n$ са затворени $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^n F_i$ е затворено.
Ако $F_\alpha, \forall\alpha \in A$ са затворени $\Rightarrow \bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$ е затворено.

Дефиниция. Затворено кълбо.

$$\overline{\mathcal{B}_r(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}$$

Затворените кълба са затворени множества.
F е затворено $\iff$ F съдържа границите на всички редици, съставяеми от негови елементи. Или на математически език, $\forall\{x_m\}_{m=1}^\infty \in F$, границата $x_m \to x_l \in F$.