ИЗПИТ

по Математически анализ, специалност "Приложна математика"
8 февруари 2010г.
Име:... Фак.номер:.............

1. Пресметнете градиента на функцията

$$f(x) = (\mathrm{arctg}\|x\|)\ .\ \langle x, F(x)\rangle\ ,$$

където $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ и F е векторното поле, дефинирано с $F(x) = (x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2)$.

2. Дефинирайте риманов интеграл от ограничената функция $f : \Delta \to \mathbb{R}$ (тук Δ е паралелотоп в $\mathbb{R}^n$) чрез суми на Дарбу.

3. Дайте дефиниция на множество, пренебрежимо по Лебег. Докажете, че едно подмножество на $\mathbb{R}^n$ е пренебрежимо по Лебег точно тогава, когато за произволно $\varepsilon > 0$ то може да се покрие с изброимо много отворени паралелотопи със сумарна мярка, по-малка от ε. Докажете, че ако едно компактно множество е пренебрежимо по Лебег, то то е измеримо по Пеано-Жордан.

4. Нека $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната функция, дефинирана в компакта $K \subset \mathbb{R}^2$, и $Grf \subset \mathbb{R}^3$ е нейната графика. Докажете, че Grf е пренебрежимо множество в $\mathbb{R}^3$. Дали Grf е множество, измеримо по Пеано-Жордан?

5. Напишете в явен вид потенциал за гладко векторно поле, удовлетворяващо необходимото условие за потенциалност, в област, която е отворен паралелепипед в $\mathbb{R}^3$ (и докажете, че така написаната функция е наистина потенциал за полето).

6. Напишете формулата за свеждане на повърхнинен интеграл от първи род към двоен риманов интеграл. Изведете от нея формула за повърхнина на ротационно тяло. Използвайте последната формула, за да пресметнете лицето на околната повърхнина на прав кръгов конус с радиус на основата R и височина h.

7. Нека Ω е област в $\mathbb{R}^2$ с частично гладка граница $\partial\Omega$ и нека $F = (F_1, F_2)$ е гладко векторно поле, дефинирано в околност на $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Докажете формулата на Грийн за F и Ω, ако $\overline{\Omega}$ е криволинеен трапец и по двете променливи.

8. Пресметнете повърхнинния интеграл от втори род от векторното поле F, дефинирано с

$$F(x) = \left(\frac{x_2x_3}{\|x\|^5}\ ,\ \frac{x_3x_1}{\|x\|^5}\ ,\ -2\frac{x_1x_2}{\|x\|^5} \right)$$

по частично гладката повърнина $\partial\Omega$ (границата на област $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, която съдържа началото на координатната система), ориентирана с външната за Ω нормала.