ИЗПИТ

по Математически анализ, специалност "Приложна математика"
5 февруари 2015г.
Име:... Фак.номер:............

1. Нека $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ е изображение с дефиниционна област $D \subset \mathbb{R}^n$. Дайте дефиниция на "множество, релативно отворено в D". Докажете, че ако f е непрекъсната в D, то първообразът $f^{-1}(U) := \{x \in D : \ f(x) \in U\}$ на всяко отворено подмножество U на $\mathbb{R}^m$ е релативно отворено в D.

2. Нека Δ е паралелотоп в $\mathbb{R}^n$ и f е реалнозначна функция, дефинирана в него. Дефинирайте сума на Риман за f. Дефинирайте граница на риманови суми, когато диаметърът на подразбиването клони към нула. Докажете, че ако римановите суми имат граница, то функцията е ограничена.

3. Нека $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq x^2, \ x+y \leq 2, \ x \geq 0\right\}$ и $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната функция, дефинирана в D. Представете интеграла $\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ като повторен веднъж с външно интегриране по x и веднъж с външно интегриране по y. Напишете в явен вид множеството ∂D.

4. Дайте дефиниция на "множество, измеримо по Пеано-Жордан". Докажете, че едно ограничено подмножество на $\mathbb{R}^n$ е измеримо по Пеано-Жордан точно тогава, когато контурът му е множество, пренебрежимо по Лебег.

5. Нека F е непрекъснато векторно поле, дефинирано в областта $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Докажете, че ако криволинейният интеграл от втори род от това поле върху частично гладка крива $\Gamma \subset \Omega$ с начало A и край B не зависи от Γ, а само от A и B, то полето F е потенциално. Пресметнете

$$\int_\Gamma \frac{yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z}{1+x^2y^2z^2},$$

където Γ е кривата $(\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

6. Напишете формулата за свеждане на повърхнинен интеграл от първи род към двоен риманов интеграл. Намерете лицето на повърхнината, зададена с

$$\varphi(r,\alpha) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha, \sqrt{16-r^2}), \ 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \ 0 \leq r \leq 2\alpha.$$

7. Нека Ω е област в $\mathbb{R}^2$ с частично гладка граница $\partial\Omega$ и нека $F = (F_1, F_2)$ е гладко векторно поле, дефинирано в околност на $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Докажете формулата на Грийн за F и Ω, ако $\overline{\Omega}$ е криволинеен трапец и по двете променливи.

8. Формулирайте и докажете закона на Архимед.