

ИЗПИТ

по Математически анализ и диференциална геометрия

8 февруари 2004г., група Б

Име:..... Фак.номер:..... Адм.група:.....

1. Диференцирайте:

(а) $f(t) = \ln \|\alpha(t)\|$, където $\alpha(t)$ е гладка векторна функция на скаларния аргумент t , която не се анулира.

(б) $g(\alpha) = \int_1^{\sin \alpha} e^{x^2 \alpha} dx$

2. Дайте дефиниция на множество, измеримо по Пеано-Жордан. Докажете, че тялото, определено с неравенствата

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x < 0\}$$

е измеримо.

3. Дали функцията, дефинирана с $f(x, y) = 1$, ако x е рационално и $1 \leq |x| + |y| \leq 2$ и с $f(x, y) = 0$ в противен случай е интегрируема по Риман? Обосновете отговора си.

4. Напишете формулата на Грийн в стандартен вид и с помощта на дивергенция. Пресметнете интеграла

$$\int_{\Gamma} \frac{\langle x - x_0, n \rangle}{\|x - x_0\|^2} ds$$

където Γ е регулярна затворена крива в равнината без самопресичания, n е единичната външна нормала към нея и x_0 е точка, не принадлежаща на крайната област, оградена от кривата.

5. Разгледайте изображението

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 2u)$$

(а) В кои точки на равнината това изображение има пълен ранг?

(б) Намерете коефициентите на първата квадратична форма на повърхнината S , зададена с φ (параметрите u и v се менят в областта, която сте определили в (а)).

(в) Докажете, че координатните линии върху S са перпендикулярни.

(г) Намерете силата на притегляне, която хомогенна повърхнина, зададена с φ , упражнява върху материална точка, разположена в началото на координатната система, ако

$$(u, v) \in \Omega = \{(\bar{u}, \bar{v}) : 0 < \bar{u} < 1, 0 < \bar{v} < 2\pi\}$$

6. Нека F е гладко векторно поле в \mathbb{R}^3 . Да означим с S_ε сферата с център x и радиус ε . Докажете, че

$$\operatorname{div} F(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{S_\varepsilon} \langle F, n \rangle ds}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3}$$