Лекционни записки по Математически Анализ

проф. Надежда Рибарска
Набрани от Никола Юруков

6 декември 2015 г.

Съдържание

1 Лекция 1: Преговор с разширение

1.1 Евклидовото пространство $\mathbb{R}^n$

Като множество $\mathbb{R}^n$ е множеството $\{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, .., n\}$ от наредените n-торки реални числа. Ако го снабдим със стандартните линейни операции събиране на вектори и умножение на вектор с реално число, получаваме реално линейно пространство (спомнете си аксиомите от курса по линейна алгебра). Да напомним формалните дефиниции: сума на векторите $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ е векторът $x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, ..., x_n+y_n)$ (събирането е покоординатно). Произведение на скалара $\lambda \in \mathbb{R}$ с вектора x е векторът $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$ (умножението със скалар също е покоординатно). Ще означаваме с $\mathbf{0}$ нулевия вектор $(0, \dots, 0)$.

За да можем да правим анализ (да говорим за граница, непрекъснатост, производна и т.н.), освен линейната структура ни е необходима и някаква "мярка на близост"в нашето пространство. Както помните от курса по ДИС2, стандартната мярка на близост между два вектора е евклидовото разстояние между тях:

$$\rho(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\ , \text{ където } x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ y = (y_1, y_2, ..., y_n)\ .$$

Забележете, че в $\mathbb{R}^2$ това е просто питагоровата теорема. Това разстояние е добре съгласувано с линейната структура в смисъл, че $\rho(x, y) = \|x - y\|$, където в дясната част стои евклидовата норма (или дължината) на вектора $x - y$:

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ ,\ x = (x_1, x_2, ..., x_n)\ .$$

Да напомним, че една функция $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty)$ се нарича норма, ако за нея са в сила свойствата

1. $\|x\| = 0 \iff x = \mathbf{0}$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство на триъгълника)

В курса по ДИС2 е проверено, че евклидовата норма е норма. За упражнение проверете, че

- $\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$
- $\|(x_1, x_2)\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$
- $\|(x_1, x_2)\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p}$, $1 < p < \infty$

са норми в $\mathbb{R}^2$. По-общо, проверете, че

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}\ ,\ 1 \leq p < \infty \text{ е норма в } \mathbb{R}^n\ .$$

Разбира се, за целта трябва да използвате неравенството на Минковски от курса по ДИС2.

Евклидовата норма има по-хубави геометрични свойства от горните примери, защото е съгласувана със скаларното произведение

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ , \text{ където } x = (x_1, x_2, ..., x_n) \text{ и } \ y = (y_1, y_2, ..., y_n),$$

по стандартния начин $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Да напомним основното неравенство на Коши-Буняковски-Шварц:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \ .$$

Да напомним също означенията

$$B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\}$$

за отворено кълбо с център x и радиус r и

$$\overline{B}_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq r\}$$

за затворено кълбо с център x и радиус r. Като упражнение можете да скицирате кълбата с радиус 1 и център началото на координатната система за нормите $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$ от предишното упражнение.

1.2 Топология в $\mathbb{R}^n$

Дефиниция 1.1. Подмножеството U на $\mathbb{R}^n$ се нарича отворено, ако за всяка точка x от U съществува $\varepsilon > 0$ такова, че $B_\varepsilon(x) \subset U$.

Основните свойства на отворените множества, проверени в курса по ДИС2, са

1. $\emptyset$ и $\mathbb{R}^n$ са отворени

2. Сечение на краен брой отворени множества е отворено, т.е. ако $U_1, U_2, ..., U_k$ са отворени, то $\bigcap_{i=1}^k U_i$ е отворено.

3. Обединение на произволна фамилия от отворени множества е отворено, т.е. ако U_α са отворени за всяко $\alpha \in I$, то $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ е отворено.

Пример 1.2. Отворените кълба са отворени множества.

Доказателство. Да разгледаме $B_r(x_0)$, $r > 0$. Взимаме си произволно x от кълбото, т.е. растоянието между x и x_0 е по-малко от r. Нека $\varepsilon := r - \|x_0 - x\| > 0$. Тогава $B_\varepsilon(x) \subset B_r(x_0)$. Наистина, нека $y \in B_\varepsilon(x)$, т.е. $\|y - x\| < \varepsilon$. Получаваме

$$\begin{array}{lcl} \|x_0 - y\| & \leq & \|x - y\| + \|x - x_0\| < \varepsilon + \|x - x_0\| \\ \|x_0 - y\| & < & r - \|x_0 - x\| + \|x - x_0\| \\ \|x_0 - y\| & < & r \end{array}$$

$\square$

Пример 1.3. Нека функцията $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е **непрекъсната**. Тогава множеството $U = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) > 0\}$ е отворено.

Доказателство. Взимаме произволна точка $x_0 \in U$, следователно $\varepsilon = g(x_0) > 0$. От непрекъснатостта на функцията получаваме, че съществува положително число δ такова, че $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ за всяко $x \in B_\delta(x_0)$. Следователно $g(x) > g(x_0) - \varepsilon = 0$ и оттук $x \in U$ за всяко $x \in B_\delta(x_0)$. □

Дефиниция 1.4. Едно подмножество F на $\mathbb{R}^n$ се нарича затворено, ако $\mathbb{R}^n \setminus F$ е отворено множество.

Основните свойства на затворените множества, проверени в курса по ДИС2, са

1. $\emptyset, \mathbb{R}^n$ са затворени.

2. Обединие на краен брой затворени множества е затворено, т.е. ако $F_1, F_2, ..., F_k$ са затворени, то $\bigcup_{i=1}^k F_i$ е затворено.

3. Сечение на произволна фамилия от затворени множества е затворено, т.е. ако F_α са затворени за всички $\alpha \in I$, то $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ е затворено.

Пример 1.5. Затворените кълба са затворени множества. Доказателството оставяме за упражнение.

Дефиниция 1.6. Контур на множеството $A \subset \mathbb{R}^n$ наричаме множеството

$$\partial A := \{x \in \mathbb{R}^n : \forall U \text{ отворено, } x \in U \text{ е в сила } U \cap A \neq \emptyset \text{ и } U \setminus A \neq \emptyset\}$$

Дефиниция 1.7. Затворена обвивка на множеството $A \subset \mathbb{R}^n$ наричаме най-малкото затворено множество, съдържащо A:

$$\overline{A} := \cap \{F \subset \mathbb{R}^n : \ F \supset A \text{ и } F \text{ е затворено } \}$$

В курса по ДИС2 е доказано, че

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \{x_m\}_{m=1}^\infty \subset A, \ x_m \to x\}$$

Лесно се проверява, че едно множество е затворено точно тогава, когато съвпада със затворената си обвивка. Връзките между контур на множество и затворена обвивка на множество са

$$\overline{A} = A \cup \partial A \ , \ \partial A = \overline{A} \cap \left(\overline{\mathbb{R}^n \setminus A}\right) \ .$$

Следователно контурът на произволно множество е винаги затворено множество. Също лесно се проверява, че

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \exists \{x_m\}_{m=1}^\infty \subset A, \ x_m \to x \text{ и } \exists \{y_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n \setminus A, \ y_m \to x\}$$

Дефиниция 1.8. Вътрешност на $A \subset \mathbb{R}^n$ наричаме най-голямото отворено множество, съдържащо се в A:

$$\mathring{A} = \cup \{U \subset \mathbb{R}^n : \ U \subset A \text{ и } U \text{ е отворено } \}$$

Друго означение за вътрешност на A е $intA$. Понятието за вътрешност е дуално на понятието за затворена обвивка, т.е.

$$intA = \mathbb{R}^n \setminus \left(\overline{\mathbb{R}^n \setminus A}\right) \ , \ \overline{A} = \mathbb{R}^n \setminus (int(\mathbb{R}^n \setminus A)) \ .$$

Едно от най-важните и често използвани понятия в топологията е понятието за компактност.

Дефиниция 1.9. Едно множество $A \subset \mathbb{R}^n$ се нарича компакт, ако от всяко негово отворено покритие можем да изберем крайно подпокритие, т.е. ако $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ е фамилия от отворени подмножества на $\mathbb{R}^n$, за която е в сила $\cup_{\alpha\in I} U_\alpha \supset A$, то можем да изберем краен брой индекси $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in I$ такива, че $\cup_{i=1}^k U_{\alpha_i} \supset A$.

В курса по ДИС2 са доказани две важни и нетривиални характеризации на компактните подмножества на $\mathbb{R}^n$:

1. Едно подмножество A на $\mathbb{R}^n$ е компакт точно тогава, когато A е ограничено и затворено.

2. Едно подмножество A на $\mathbb{R}^n$ е компакт точно тогава, когато от всяка редица от негови елементи може да се избере сходяща подредица, чиято граница е също в множеството.

Сега въвеждаме първото разширение, т.е. понятие, за което не сте учили в курса по ДИС2: множество, релативно отворено в A. Ще го използваме по-нататък, за да говорим за множества, релативно отворени в някаква гладка двумерна повърхнина в тримерното евклидово пространство. Интуицията е, че забравяме за всичко извън множеството A.

Дефиниция 1.10. Нека $A \subset \mathbb{R}^n$. Едно подмножество U на A наричаме релативно отворено в A, ако съществува отворено множество $V \subset \mathbb{R}^n$ такова, че $U = A \cap V$.

Твърдение 1.11. *Множеството $U \subset A$ е релативно отворено в A точно тогава, когато за всяка негова точка $x \in U$ съществува $\varepsilon > 0$ такова, че $B_\varepsilon(x) \cap A \subset U$.*

Доказателство. Нека първо $U \subset A$ е релативно отворено в A и $x \in U$ е произволна. Тогава съществува отворено множество $V \subset \mathbb{R}^n$ с $U = A \cap V$. Тъй като $x \in U \subset V$, съществува $\varepsilon > 0$ с $B_\varepsilon(x) \subset V$ и оттук $B_\varepsilon(x) \cap A \subset V \cap A = U$. В обратната посока, нека за всяка точка $x \in U$ съществува $\varepsilon_x > 0$ такова, че $B_{\varepsilon_x}(x) \cap A \subset U$. Полагаме $V := \cup_{x\in U} B_{\varepsilon_x}(x)$. Очевидно V е отворено множество като обединение на отворени кълбета. Освен това

$$V \cap A = (\cup_{x\in U} B_{\varepsilon_x}(x)) \cap A = \cup_{x\in U} (B_{\varepsilon_x}(x) \cap A) \subset U \ .$$

От друга страна, всяка точка $x \in U$ принадлежи на $B_{\varepsilon_x}(x) \subset V$, следователно $U \subset V$ и от $U \subset A$ следва $U \subset V \cap A$. С това $U = V \cap A$ и доказателството е завършено. $\square$

Следното приложение на понятието за релативна отвореност е важно и изключително често използвано:

Твърдение 1.12. *Нека $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ е изображение с дефиниционна област $D \subset \mathbb{R}^n$ и стойности в $\mathbb{R}^m$. Твърдим, че f е непрекъсната в D точно тогава когато първообраз на всяко отворено в $\mathbb{R}^m$ множество е релативно отворено в D. Да напомним, че първообраз на $U \subset \mathbb{R}^m$ е множеството $f^{-1}(U) := \{x \in D : f(x) \in U\}$.*

Доказателство. Първо ще докажем, че ако първообраз на всяко отворено в $\mathbb{R}^m$ множество е релативно отворено в D, то f е непрекъсната. Избираме произволна точка x от D и произволно $\varepsilon > 0$. Тъй като кълбото $B_\varepsilon(f(x))$ е отворено в $\mathbb{R}^m$, първообразът $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ ще е релативно отворен в D. Тогава $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) = D \cap V$ за някое множество V, отворено в $\mathbb{R}^n$. Тъй като $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subset V$, съществува $\delta > 0$ с $B_\delta(x) \subset V$. Нека $x' \in D$ е произволна точка с $\|x' - x\| < \delta$. Значи $x' \in D \cap B_\delta(x) \subset D \cap V = f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ и следователно $f(x') \in B_\varepsilon(f(x))$, т.е. $\|f(x') - f(x)\| < \varepsilon$.

За да докажем обратната посока, избираме произволно отворено $U \subset \mathbb{R}^m$. Нека $x \in f^{-1}(U)$. Тогава $f(x)$ принадлежи на отвореното множество U и следователно съществува $\varepsilon > 0$ такова, че $B_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Тъй като f е непрекъсната в x, съществува $\delta > 0$ такова, че $\|f(x') - f(x)\| < \varepsilon$ за всяко $x' \in D$, за което $\|x' - x\| < \delta$. Записано по друг начин това означава, че $f(B_\delta(x) \cap D) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset U$, следователно $B_\delta(x) \cap D \subset f^{-1}(U)$. Така доказахме, че множеството $f^{-1}(U)$ е релативно отворено в D, защото изпълнява условието от предишното твърдение. □

1.3 Основни теореми

Теорема 1.13 (Теорема на Вайерщрас). *Непрекъснат образ на компакт е компакт. Формално записано, ако $f : K \longrightarrow \mathbb{R}^m$ е непрекъснато изображение с дефиниционна област компактното подмножество K на $\mathbb{R}^n$, то множеството $f(K) := \{f(x) : x \in K\}$ от стойностите на f е компактно подмножество на $\mathbb{R}^m$.*

Доказателство. Нека $\{y_l\}_{l=1}^\infty \subset f(K)$ е редица от елементи на $f(K)$. Тогава за всеки елемент y_l на тази редица съществува елемент x_l на K такъв, че $y_l = f(x_l)$. Сега редицата $\{x_l\}_{l=1}^\infty$ се съдържа в компактното множество K. Следователно съществува нейна сходяща подредица $\{x_{l_k}\}_{k=1}^\infty$, чиято граница x_0 е елемент на K. Тъй като f е непрекъсната, от дефиницията на Хайне за непрекъснатост получаваме, че $f(x_{l_k}) = y_{l_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0)$. Тъй като очевидно $f(x_0) \in f(K)$, остава да се позовем на характеризацията (2) на компактните множества. □

Хубаво упражнение е да се докаже теоремата на Вайерщрас, като се използва дефиницията на компакт и характеризацията на непрекъснатите изображения, която доказахме.

Друго добро упражнение е да се убедите, че теоремата на Вайерщрас от ДИС 1 (една непрекъсната функция върху краен затворен интервал е ограничена и достига своята най-голяма и най-малка стойност) е следствие от тази форма на теоремата.

Теорема 1.14 (Теорема на Кантор). *Нека $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ е дефинирана в $D \subset \mathbb{R}^n$. Нека K е компактно подмножество на D. Ако f е непрекъсната в K, т.е. непрекъсната е във всяка точка от K, то твърдим, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че за всяко $x \in K$ и за всички $x' \in D$, за които е изпълнено $\|x' - x\| < \delta$, е в сила $\|f(x) - f(x')\| < \varepsilon$. Забележете, че заключението е малко по-силно от равномерна непрекъснатост на f върху K.*

Доказателство. Отново ще използваме характеризацията (2) на компактността чрез редици. Допускаме противното, т.е. съществува такова $\varepsilon_0 > 0$, че за всички $\delta > 0$ съществуват точки $x_\delta \in K$ и $x'_\delta \in D$ такива, че

$$\|x_\delta - x'_\delta\| < \delta \text{ и } \|f(x_\delta) - f(x'_\delta)\| \geq \varepsilon \ .$$

Даваме на δ стойности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ и преименуваме $x_{1/m}$ и $x'_{1/m}$ съответно на x_m и x'_m. Така се образуват две редици $\{x_m\}_{m=1}^\infty \subset K$ и $\{x'_m\}_{m=1}^\infty \subset D$. Знаем, че

$$\|x_m - x'_m\| < \frac{1}{m} \text{ и } \|f(x_m) - f(x'_m)\| \geq \varepsilon_0 > 0$$

за всяко естествено m. Тъй като K е компакт, съществува сходяща подредица $x_{m_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0 \in K$ на $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset K$. От неравенствата

$$\|x'_{m_k} - x_0\| \leq \|x'_{m_k} - x_{m_k}\| + \|x_{m_k} - x_0\| < \frac{1}{m_k} + \|x_{m_k} - x_0\|$$

получаваме, че редицата $\{x'_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ също клони към точката $x_0 \in K$. Сега използваме непрекъснатостта на f в точката $x_0 \in K$ и получаваме, че

$$f(x_{m_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0) \text{ и } f(x'_{m_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0).$$

Като извадим тези две редици, получаваме $f(x_{m_k}) - f(x'_{m_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, което противоречи на $\|f(x_m) - f(x'_m)\| \geq \varepsilon_0 > 0$ за всяко естествено m. Теоремата е доказана. □

2 Лекция 2: Кратен Риманов интеграл - въвеждане и основни свойства

Конструкцията на Дарбу, с която сте въвели Риманов интеграл в курса по ДИС1, е важна и естествена и ние ще я използваме отново, за да въведем n-кратен Риманов интеграл. Геометричната интуиция остава същата. В курса по ДИС1 сте искали да дефинирате по един разумен начин лицето на фигура, заградена от абцисата, две вертикални прави и графиката на ограничена неотрицателна функция. Постигнали сте го чрез оценяване отгоре и отдолу на това лице чрез лицата на стъпаловидни фигури, съставени от краен брой правоъгълници (тези лица са големите и малките суми на Дарбу). Сега за n=2 трябва да оценяваме отгоре и отдолу обема на тяло, заградено от равнината на първите две координатни оси, вертикални равнини по границата на даден правоъгълник и графиката на ограничена неотрицателна функция, дефинирана в този правоъгълник. Оценката е чрез обема на тела, състоящи се от краен брой паралелепипеди (за оценка отгоре вземаме обема на такова стъпаловидно тяло, съдържащо нашето, а за оценка отдолу - съдържащо се в нашето). За по-големи размерности идеята и конструкцията остават същите, само че вече не можем да нарисуваме подходяща картинка.

2.1 Паралелотопи в $\mathbb{R}^n$ и тяхната мярка

Първият въпрос, който трябва да решим, е с какво заменяме крайния и затворен интервал от ДИС1, ако размерността е по-голяма от едно. Естественият отговор е: с правоъгълник в равнината, с паралелепипед в тримерното пространство и т.н.

Дефиниция 2.1. Паралелотоп (на английски interval, box) е множество в $\mathbb{R}^n$, за което всяка координата се мени (независимо от останалите) в краен затворен интервал:

$$\Delta := \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, \ i = 1, 2, ...n\} \ .$$

За различните размерности (стойности на n) имаме

n	Δ
1	$[a_1, b_1]$ интервал
2	$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ правоъгълник
3	$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ парарелепипед
..	...

Същественото за тези най-прости фигури е, че нямаме съмнения какво трябва да наречем дължина на интервал, лице на правоъгълник, обем на паралелепипед, а за паралелотоп в $\mathbb{R}^n$ естествено въвеждаме мярка в $\mathbb{R}^n$.

Дефиниция 2.2. За паралелотопа $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = 1, 2, ...n\}$ дефинираме неговата n-мерна мярка като

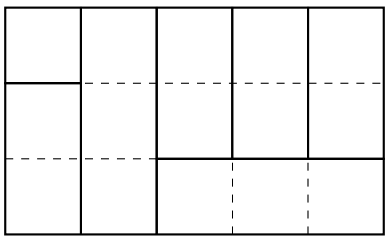
$$\mu_n(\Delta) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \ .$$

Забележете, че при $n = 1$ това е дължината $\mu_1([a_1, b_1]) = b_1 - a_1$ на интервала $[a_1, b_1]$, при $n = 2$ това е лицето $\mu_2([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$ на правоъгълника $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, при $n = 3$ това е обемът $\mu_3([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$ на паралелепипеда $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$.

Един паралелотоп ще наричаме изроден, ако някой от интервалите $[a_i, b_i]$ се изражда в точка, т.е. $a_i = b_i$. В такава ситуация n-мерната мярка на паралелотопа е нула. Например отсечка върху абсцисата може да бъде разглеждана като паралелотоп в $\mathbb{R}^1$ и ще има ненулева дължина, но ако бъде разглеждана като паралелотоп в $\mathbb{R}^2$, ще има лице нула.

Следващият етап е да уточним как да разделяме паралелотоп на паралелотопчета по аналогия с разделянето на интервал на подинтервали от ДИС1. Неформално, подразделяне на паралелотоп са краен брой паралелотопи, чието обединение е първоначалният паралелотоп, и които не се припокриват.

Дефиниция 2.3. Подразделение Π на един паралелотоп Δ е крайно множество от паралелотопи $\Pi = \{\Delta_k\}_{k=1}^{k_0}$, за което $\cup_{k=1}^{k_0} \Delta_k = \Delta$ и $\mathring{\Delta}_k \cap \mathring{\Delta}_l = \emptyset\ \forall k \neq l$.



Забележете, че вътрешността на паралелотопа $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = 1, 2, ...n\}$ е множеството $\mathring{\Delta} = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i,\ i = 1, 2, ..n\}$. Следното твърдение е геометрически очевидно, но съществено за по-нататъшната ни работа:

Твърдение 2.4. *Ако $\Pi = \{\Delta_k\}_{k=1}^{k_0}$ е подразделяне на Δ, то $\mu_n(\Delta) = \sum_{k=1}^{k_0} \mu_n(\Delta_k)$.*

Доказателство. Първо разглеждаме случая на правилно подразделяне, т.е. Π се получава като се раздели интервалът, в който се мени i-тата координата, на подинтервали за всяко i, и се вземат всевъзможните декартови произведения на такива подинтервали. За пестене на място и по-прости означения ще изпишем нещата за $n = 2$, в общия случай доказателството е аналогично. И тъй, нека $\Delta = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ и делим $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$ на подинтервали:

$$a_1 = x_0 < x_1 < ... < x_{m_0} = b_1 \ ,$$

$$a_2 = y_0 < y_1 < ... < y_{l_0} = b_2 \ .$$

Тогава $\Pi = \{\Delta_{ml} : \ m = 1, \dots, m_0, \ l = 1, \dots, l_0\}$, където $\Delta_{ml} = [x_{m-1}, x_m] \times [y_{l-1}, y_l]$. Пресмятаме

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{l_0} \sum_{m=1}^{m_0} \mu_2(\Delta_{ml}) &= \sum_{l=1}^{l_0} \sum_{m=1}^{m_0} (x_m - x_{m-1})(y_l - y_{l-1}) \\ &= \sum_{l=1}^{l_0} (y_l - y_{l-1}) \sum_{m=1}^{m_0} (x_m - x_{m-1}) \\ &= (b_1 - a_1) \sum_{l=1}^{l_0} (y_l - y_{l-1}) \\ &= (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \\ &= \mu_2(\Delta)\end{aligned}$$

Нека сега да разгледаме произволно подразделяне $\Pi = \{\Delta_k\}_{k=1}^{k_0}$. Можем да намерим правилно подразделяне Π^* на Δ такова, че елементите на $\Pi^* = \{\Delta_l^*\}_{l=1}^{l_0}$, които се съдържат в Δ_k, образуват подразделяне на Δ_k (например при размерност 2 продължаваме вертикалните и хоризонтални страни на правоъгълниците от Π в целите интервали). Тогава, използвайки два пъти предишната стъпка, получаваме

$$\mu_n(\Delta) = \sum_{l=1}^{l_0} \mu_n(\Delta_l^*) = \sum_{k=1}^{k_0} \left(\sum_{\Delta_l^* \subset \Delta_k} \mu_n(\Delta_l^*) \right) = \sum_{k=1}^{k_0} \mu_n(\Delta_k) \ .$$

$\square$

В горното доказателство намерихме "подразделяне Π^* на Δ такова, че елементите на $\Pi^* = \{\Delta_l^*\}_{l=1}^{l_0}$, които се съдържат в Δ_k, образуват подразделяне на Δ_k". В такава ситуация казваме, че Π^* е по-фино (или по-дребно) от Π. Формално

Дефиниция 2.5. Нека $\Pi = \{\Delta_k\}_{k=1}^{k_0}$ и $\Pi^* = \{\Delta_l^*\}_{l=1}^{l_0}$ са две подразделяния на паралелотопа Δ. Казваме, че Π^* е по-фино от Π (или Π^* е вписано в Π) и пишем $\Pi^* \geq \Pi$, ако

$$\{\Delta_l^* : \ \Delta_l^* \subset \Delta_k\}$$

е подразделяне на Δ_k за всяко $k = 1, 2, \dots, k_0$.

2.2 Въвеждане на Риманов интеграл чрез подхода на Дарбу

В целия параграф ще разглеждаме дадена ограничена функция $f : \Delta \to \mathbb{R}$, където Δ е паралелотоп в $\mathbb{R}^n$.

Нека $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ е произволно подразделяне на Δ. По аналогия с едномерния случай дефинираме

$$s_f(\Pi) = \sum_{i=1}^{i_0} m_i \mu_n(\Delta_i), \text{ където } m_i = \inf\{f(x) : x \in \Delta_i\} \ , \ i = 1, \dots, i_0 \ .$$

Числото $s_f(\Pi)$ наричаме *малка сума на Дарбу* за функцията f, съответстваща на подразделянето Π. Интуитивно това число е долна оценка за интеграла, който искаме да въведем.

Аналогично

$$S_f(\Pi) = \sum_{i=1}^{i_0} M_i \mu_n(\Delta_i), \text{ където } M_i = \sup\{f(x) : x \in \Delta_i\}\ ,\ i = 1, \ldots, i_0\ .$$

Сега числото $S_f(\Pi)$ наричаме *голяма сума на Дарбу* за функцията f, съответстваща на подразделянето Π. Интуитивно това число е горна оценка за търсения "обем".

Следните две леми точно съответстват на доказаните в ДИС1. Интуитивно, първата лема казва, че оценките, съответстващи на по-дребно подразделяне, са по-точни (горната оценка намалява, а долната се увеличава). Втората лема казва, че всяка долна оценка не надминава коя да е горна оценка, както и би трябвало да бъде.

Лема 2.6. *Ако* $\Pi^* \geq \Pi$, *то* $s_f(\Pi^*) \geq s_f(\Pi)$ *и* $S_f(\Pi^*) \leq S_f(\Pi)$.

Доказателство. Без ограничение на общността, нека $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ и $\Pi^* = \{\Delta_1^j\}_{j=1}^{j_0} \cup \{\Delta_i\}_{i=2}^{i_0}$, т.е. Π^* се получава от Π чрез подразделяне $\{\Delta_1^j\}_{j=1}^{j_0}$ на първия елемент Δ_1 на Π. Да означим $m_i = \inf\{f(x) : x \in \Delta_i\}$ за $i = 1, \ldots, i_0$, $m_1^j = \inf\{f(x) : x \in \Delta_1^j\}$ за $j = 1, \ldots, j_0$. Забележете, че $m_1 \leq m_1^j$ за всяко $j = 1, \ldots, j_0$, защото $\Delta_1^j \subset \Delta_1$. Оттук получаваме, че

$$\begin{aligned}
s_f(\Pi^*) - s_f(\Pi) &= \sum_{j=1}^{j_0} m_1^j \mu_n(\Delta_1^j) + \sum_{i=2}^{i_0} m_i \mu_n(\Delta_i) - \sum_{i=1}^{i_0} m_i \mu_n(\Delta_i) \\
&= \sum_{j=1}^{j_0} m_1^j \mu_n(\Delta_1^j) - m_1 \mu_n(\Delta_1) \\
&\geq \sum_{j=1}^{j_0} m_1 \mu_n(\Delta_1^j) - m_1 \mu_n(\Delta_1) \\
&= m_1 \left(\sum_{j=1}^{j_0} \mu_n(\Delta_1^j) - \mu_n(\Delta_1) \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

поради Твърдение 2.4.

Аналогично доказваме, че $S_f(\Pi^*) \leq S_f(\Pi)$. ☐

Лема 2.7. *За произволни подразделяния* Π_1 *и* Π_2 *на* Δ *е в сила* $s_f(\Pi_1) \leq S_f(\Pi_2)$.

Доказателство. Нека $\Pi^* \geq \Pi_1$, $\Pi^* \geq \Pi_2$ (ясно е, че такова подразбиване Π^* на Δ съществува - например може да се вземе множеството от неизродените паралелотопи, получени като сечение на елемент от Π_1 с елемент от Π_2). Тогава

$$s_f(\Pi_1) \leq s_f(\Pi^*) \leq S_f(\Pi^*) \leq S_f(\Pi_2)\ ,$$

като първото и последното неравенство се получават от предишната лема, а средното неравенство се получава от очевидното съображение, че инфимумът на множество от реални числа не надминава неговия супремум, и от дефиницията на малка и голяма сума на Дарбу. ☐

Тъй като функцията f е ограничена, множеството от всевъзможните малки суми на Дарбу (както и множеството от всевъзможните големи суми на Дарбу) на f е ограничено и следователно можем да дефинираме *долен интеграл* на f върху Δ

$$\underline{\int}_{\Delta} f := \sup\{s_f(\Pi) : \Pi \text{ е подразделяне на } \Delta\}$$

и *горен интеграл* на f върху Δ

$$\overline{\int}_{\Delta} f := \inf\{S_f(\Pi) : \Pi \text{ е подразделяне на } \Delta\} \ .$$

Да отбележим, че от Лема 2.7 следва, че при произволно фиксирано поразделяне Π на Δ е в сила $\underline{\int}_{\Delta} f \leq S_f(\Pi)$, откъдето следва неравенството $\underline{\int}_{\Delta} f \leq \overline{\int}_{\Delta} f$.

Дефиниция 2.8. Функцията f се нарича интегруема по Риман, когато долният и горният интеграл на f върху Δ съвпадат (или еквивалентно съществува единствено число, разделящо малките от големите суми на Дарбу). Тогава общата стойност на долния и горния интеграл на f върху Δ се нарича интеграл на f върху Δ и се означава с $\int_{\Delta} f$ или $\int_{\Delta} f(x)\mathrm{d}x$.

Други разпространени означения в съответните размерности са
$n = 1$ $\quad \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
$n = 2$ $\quad \iint_{\Delta} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$
$n = 3$ $\quad \iiint_{\Delta} f(x_1, x_2, x_3)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$

Следният критерий за интегруемост се формулира и доказва точно като в курса по ДИС1:

Твърдение 2.9. *(Първа форма на критерия за интегруемост) Функцията f е интегруема по Риман върху Δ точно тогава, когато за всяко положително число ε съществуват подразделяния Π_1 и Π_2 на Δ такива, че $S_f(\Pi_1) - s_f(\Pi_2) < \varepsilon$. Еквивалентно, f е интегруема по Риман върху Δ точно тогава, когато за всяко положително число ε съществува подразделяне Π на Δ такова, че $S_f(\Pi) - s_f(\Pi) < \varepsilon$.*

Следващото твърдение е ново (т.е. не сте правили подобно в ДИС1) и ни е необходимо с оглед доказателството на критерия на Лебег.

Твърдение 2.10. *(Втора форма на критерия за интегруемост) Функцията f е интегруема по Риман върху Δ точно тогава, когато за всяко положително число ε и за всяко положително число η съществува подразделяне Π на Δ такова, че сумата от мерките на елементите на Π, в които осцилацията на f е по-голяма или равна на η, е по-малка от ε. Формално записано, за всяко $\varepsilon > 0$ и за всяко $\eta > 0$ съществува подразделяне $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$, за което*

$$\sum_{M_i - m_i \geq \eta} \mu_n(\Delta_i) < \varepsilon \ .$$

Доказателство. Нека f е интегруема по Риман върху Δ и $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ са произволни положителни числа. Тогава от първата форма на критерия за интегруемост следва, че съществува подразделяне Π на Δ такова, че $S_f(\Pi) - s_f(\Pi) < \varepsilon\eta$. Нека $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ и m_i, M_i са дефинирани както обикновено. Тогава

$$\begin{aligned}\varepsilon\eta > S_f(\Pi) - s_f(\Pi) &= \sum_{i=1}^{i_0} M_i\mu_n(\Delta_i) - \sum_{i=1}^{i_0} m_i\mu_n(\Delta_i) = \sum_{i=1}^{i_0} (M_i - m_i)\,\mu_n(\Delta_i) \\ &= \sum_{M_i - m_i < \eta} (M_i - m_i)\,\mu_n(\Delta_i) + \sum_{M_i - m_i \geq \eta} (M_i - m_i)\,\mu_n(\Delta_i) \\ &\geq \sum_{M_i - m_i \geq \eta} (M_i - m_i)\,\mu_n(\Delta_i) \geq \sum_{M_i - m_i \geq \eta} \eta\mu_n(\Delta_i) = \eta \sum_{M_i - m_i \geq \eta} \mu_n(\Delta_i)\end{aligned}$$

Съкращаваме на η и получаваме търсеното неравенство за така намереното подразделяне Π на Δ.

Сега обратно, нека е в сила условието от критерия и искаме да докажем, че f е интегруема. За целта избираме произволно положително число ζ и ще търсим подразбиване Π на Δ, за което разстоянието между съответната голяма и малка сума на Дарбу е по-малка от ζ. Това би решило въпроса според първата форма на критерия за интегруемост. Ще намерим Π от даденото условие с достатъчно малки (зависещи от ζ) $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$. Ще се сетим колко малки трябва да изберем тези числа, след като оценим разликата между съответните голяма и малка сума на Дарбу по подобен начин като преди, само че отгоре:

$$\begin{aligned}S_f(\Pi) - s_f(\Pi) &= \sum_{M_i - m_i < \eta} (M_i - m_i)\,\mu_n(\Delta_i) + \sum_{M_i - m_i \geq \eta} (M_i - m_i)\,\mu_n(\Delta_i) \\ &\leq \eta \sum_{M_i - m_i < \eta} \mu_n(\Delta_i) + (M - m) \sum_{M_i - m_i \geq \eta} \mu_n(\Delta_i) < \eta\mu_n(\Delta) + \varepsilon(M - m)\ ,\end{aligned}$$

където $M := \sup\{f(x) : x \in \Delta\}$ и $m := \inf\{f(x) : x \in \Delta\}$. Следователно ако изберем

$$\varepsilon := \frac{\zeta}{2(M - m)} \text{ и } \eta := \frac{\zeta}{2\mu_n(\Delta)}\ ,$$

за подразбиването Π на Δ, получено от даденото условие, е в сила $S_f(\Pi) - s_f(\Pi) < \zeta$. $\square$

2.3 Суми на Риман и граница на суми на Риман

Сумите на Риман се дефинират точно по същия начин като в курса по ДИС1. Те се различават от сумите на Дарбу по това, мярката на съответното паралелотопче се умножава по стойността на функцията в произволна пробна точка (sample point) от него (а не по супремума или инфимума на стойностите на функцията в паралелотопчето). Да отбележим, че няма проблем да дефинираме суми на Риман и за неограничена функция.

И тъй, нека Δ е паралелотоп в $\mathbb{R}^n$ и $f : \Delta \to \mathbb{R}$.

Фиксираме подразбиване $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ на Δ и избираме пробни точки $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i_0}\}$, където $\xi_i \in \Delta_i$ за всяко $i = 1, \dots, i_0$. Тогава числото

$$\sigma_f(\Pi, \xi) := \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi_i)\mu_n(\Delta_i)$$

наричаме *сума на Риман* на функцията f за подразбиването Π с пробни точки ξ.

Твърдение 2.11. *Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$ е ограничена и Π е подразбиване на Δ. Тогава*

$$s_f(\Pi) = \inf\{\sigma_f(\Pi, \xi) : \ \xi \text{ са пробни точки за } \Pi\}$$

$$S_f(\Pi) = \sup\{\sigma_f(\Pi, \xi) : \ \xi \text{ са пробни точки за } \Pi\}$$

Доказателство. Очевидно $m_i = \inf\{f(x) : x \in \Delta_i\} \leq f(\xi_i) \leq \sup\{f(x) : x \in \Delta_i\} = M_i$ за всяко $i = 1, \ldots, i_0$ и за всеки избор на пробните точки ξ. Умножавайки тези неравенства с $\mu_n(\Delta_i)$ и събирайки ги, получаваме $s_f(\Pi) \leq \sigma_f(\Pi, \xi) \leq S_f(\Pi)$. Следователно малката (голямата) сума на Дарбу за Π е долна (горна) граница за сумите на Риман за същото подразбиване. Да проверим например, че малката сума на Дарбу за Π е точна долна граница за сумите на Риман за Π. Избираме произволно $\varepsilon > 0$ и от $m_i + \frac{\varepsilon}{i_0 \mu_n(\Delta_i)} > m_i$ намираме $\xi_i \in \Delta_i$ с $f(\xi_i) < m_i + \frac{\varepsilon}{i_0 \mu_n(\Delta_i)}$ за всяко $i = 1, \ldots, i_0$. За така намерените пробни точки $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{i_0}\}$ имаме

$$\sigma_f(\Pi, \xi) = \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi_i)\mu_n(\Delta_i) < \sum_{i=1}^{i_0} \left(m_i + \frac{\varepsilon}{i_0 \mu_n(\Delta_i)} \right) \mu_n(\Delta_i) = s_f(\Pi) + \varepsilon \ ,$$

следователно всяко число, по-голямо от $s_f(\Pi)$, вече не е долна граница за сумите на Риман за Π. $\square$

За да можем да пренесем идеята за граница на суми на Риман от едномерния в многомерния случай, се нуждаем от подходяща дефиниция на диаметър на подразбиване. Да напомним, че ако A е ограничено подмножество на $\mathbb{R}^n$, то диаметър на A наричаме числото

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{\|x - y\| : \ x \in A, \ y \in A\} \ .$$

Дефиниция 2.12. Нека $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ е подразбиване на паралелотопа Δ. Диаметър на Π наричаме най-големия от диаметрите на паралелотопите от Π:

$$\mathrm{d}(\Pi) = \max\{\operatorname{diam}(\Delta_i) : \ i = 1, 2, \ldots, i_0\}$$

Дефиниция 2.13. Казваме, че сумите на Риман за функцията $f : \Delta \to \mathbb{R}$ имат граница числото I, когато диаметърът на подразбиването клони към нула, и пишем

$$\lim_{d(\Pi) \to 0} \sigma_f(\Pi, \xi) = I \ ,$$

ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че за всяко подразбиване Π на Δ с $\mathrm{d}(\Pi) < \delta$ и при всеки избор на пробните точки ξ за Π е в сила $|\sigma_f(\Pi, \xi) - I| < \varepsilon$.

2.4 Еквивалентност на подхода чрез суми на Дарбу и на подхода чрез суми на Риман

Теорема 2.14. *Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$, където $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ е паралелотоп, и нека сумите на Риман за f имат граница I, когато диаметърът на подразбиването клони към нула. Тогава функцията f е ограничена, интегруема по Риман и $I = \int_\Delta f$.*

Доказателство. Нека $\varepsilon = 1 > 0$. Тогава съществува $\delta > 0$ такова, че за всички подразбивания Π с $\mathrm{d}(\Pi) < \delta$ и при всеки избор на пробните точки ξ за Π е в сила $I-1 < \sigma_f(\Pi, \xi) < I+1$. Да фиксираме произвално подразбиване $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ с диаметър, по-малък от δ. Ще докажем, че функцията е ограничена върху всеки елемент на Π.

Да фиксираме $i \in \{1, \ldots, i_0\}$ и някакви точки $\xi_j \in \Delta_j$ за всяко $j \neq i$, $j \in \{1, \ldots, i_0\}$. Тогава получаваме, че

$$\frac{(I-1) - \sum_{j \neq i} f(\xi_j)\mu_n(\Delta_j)}{\mu_n(\Delta_i)} < f(\xi_i) < \frac{(I+1) - \sum_{j \neq i} f(\xi_j)\mu_n(\Delta_j)}{\mu_n(\Delta_i)}$$

за всяко $\xi_i \in \Delta_i$. Следователно f е ограничена върху Δ_i, $i \in \{1, \ldots, i_0\}$. С това ограничеността на f е доказана, защото подразбиването Π има краен брой елементи.

Нека ε е произволно положително число. Тогава съществува $\delta > 0$ такова, че за всяко подразбиване Π на Δ с $\mathrm{d}(\Pi) < \delta$ и при всеки избор на пробните точки ξ за Π е в сила $I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_f(\Pi, \xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}$. Използвайки това и Твърдение 2.11, получаваме

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leq s_f(\Pi) \leq S_f(\Pi) \leq I + \frac{\varepsilon}{3} \ .$$

Следователно

$$S_f(\Pi) - s_f(\Pi) \leq \left(I + \frac{\varepsilon}{3}\right) - \left(I - \frac{\varepsilon}{3}\right) = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

и получаваме интегруемостта на f от първата форма на критерия за интегруемост. Нещо повече, от горните неравенства и от факта, че $\int_\Delta f$ се намира между $s_f(\Pi)$ и $S_f(\Pi)$, получаваме, че $I - \frac{\varepsilon}{3} \leq \int_\Delta f \leq I + \frac{\varepsilon}{3}$ и тъй като ε беше произволно положително число, то $\int_\Delta f = I$. □

Теорема 2.15. *Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$, където $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ е паралелотоп, е интегруема по Риман. Тогава сумите на Риман за f имат граница $\int_\Delta f$, когато диаметърът на подразбиването клони към нула.*

Доказателство. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Ако докажем, че съществува $\delta > 0$ такова, че за всяко подразбиване Π на Δ с $\mathrm{d}(\Pi) < \delta$ е в сила $I - \varepsilon < s_f(\Pi) \leq S_f(\Pi) < I + \varepsilon$, доказателството ще е завършено, защото при произволен избор на представителните точки ξ имаме $s_f(\Pi) \leq \sigma_f(\Pi, \xi) \leq S_f(\Pi)$ и следователно от горните неравенства получаваме $|\sigma_f(\Pi, \xi) - I| < \varepsilon$.

И така $\varepsilon > 0$. От дефиницията за интеграл на Риман следва, че съществува $\Pi_1 = \{\Box_j\}_{j=1}^{j_0}$ подразделяне на Δ такова, че

$$S_f(\Pi_1) < I + \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

От f интегруема следва, че f е ограничена. Нека $M = \sup\{|f(x)|: x \in \Delta\}$. Означаваме с P_{Π_1} общата площ на границите на паралелотопчетата от Π_1, т.е. $P_{\Pi_1} := \Sigma_{j=1}^{j_0} \mu_{n-1}(\partial \Box_j)$. Полагаме

$$\delta = \frac{\varepsilon}{8MP_{\Pi_1}} > 0 \ .$$

Искаме да оценим $S_f(\Pi)$, където $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ е произволно подразбиване на Δ с диаметър, по-малък от δ.

Нека сега Π_2 да е подразбиване на Δ, съставено от сеченията на елементите на Π и Π_1, т.е. $\Pi_2 = \{\Box_j \cap \Delta_i\}_{i=1}^{i_0}{}_{j=1}^{j_0}$ и след това изхвърляме празните множества. Тогава

$$d(\Pi_2) \leq d(\Pi) < \delta \ .$$

Тъй като $\Pi_2 \geq \Pi_1$, то

$$S_f(\Pi_2) \leq S_f(\Pi_1) < I + \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Ще оценим отгоре $S_f(\Pi) - S_f(\Pi_2)$. Делим елементите на Π на две групи - които се секат с границата на някой елемент на Π_1 и които се съдържат изцяло във вътрешността на елемент на Π_1. Събираемите, съответстващи на елементите от втория вид, участват както в $S_f(\Pi)$, така и в $S_f(\Pi_2)$ и се съкращават. Нека индексите на елементите на Π от първия вид са $I_1 \subset \{1, 2, ..., i_0\}$.

Тогава

$$S_f(\Pi) - S_f(\Pi_2) = \sum_{i \in I_1} M_i \mu_n(\Delta_i) - \sum_{i \in I_1} \sum_{j=1}^{j_0} M_{ij} \mu_n(\Delta_i \cap \Box_j) \ ,$$

където, разбира се, $M_i = \sup\{f(x) : \ x \in \Delta_i\}$ и $M_{ij} = \sup\{f(x) : \ x \in \Delta_i \cap \Box_j\}$. Тъй като $\mathrm{diam}(\Delta_i) < \delta$, то $\sum_{i \in I_1} \mu_n(\Delta_i) \leq 2\delta P_{\Pi_1}$ и следователно

$$\left| \sum_{i \in I_1} M_i \mu_n(\Delta_i) \right| \leq \sum_{i \in I_1} |M_i| \, \mu_n(\Delta_i) \leq M 2\delta P_{\Pi_1} \ .$$

Аналогично $\sum_{i \in I_1} \sum_{j=1}^{j_0} \mu_n(\Delta_i \cap \Box_j) \leq 2\delta P_{\Pi_1}$ влече

$$\left| \sum_{i \in I_1} \sum_{j=1}^{j_0} M_{ij} \mu_n(\Delta_i \cap \Box_j) \right| \leq M 2\delta P_{\Pi_1} \ .$$

Следователно

$$S_f(\Pi) - S_f(\Pi_2) \leq \left| \sum_{i \in I_1} M_i \mu_n(\Delta_i) \right| + \left| \sum_{i \in I_1} \sum_{j=1}^{j_0} M_{ij} \mu_n(\Delta_i \cap \Box_j) \right| \leq 4 M P_{\Pi_1} \delta = \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Тогава имаме

$$S_f(\Pi) = (S_f(\Pi) - S_f(\Pi_2)) + S_f(\Pi_2) \leq \frac{\varepsilon}{2} + S_f(\Pi_2) < \frac{\varepsilon}{2} + I + \frac{\varepsilon}{2} = I + \varepsilon \ .$$

Аналогично доказваме, че $s_f(\Pi) > I - \varepsilon$ за всички Π с достатъчно малък диаметър, с което доказателството е завършено. $\Box$

3 Лекция 3: Множества, пренебрежими по Лебег и критерий на Лебег за интегруемост по Риман

3.1 Множества, пренебрежими по Лебег

Дефиниция 3.1. Пренебрежимо по Лебег.

Имаме $A \subset \mathbb{R}^n$. A наричаме пренебрежимо по Лебег, ако $\forall \varepsilon$ можем да покрием множеството с изброимо много паралелотопи, и сумарната им мярка е по-малка от ε .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \supset A, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\Delta_k) < \varepsilon$$

Пример 3.2. Изроденият паралелотоп е пренебрежимо множество. Точките са изродени паралелотопи и следователно са пренебрежими множества.

Твърдение 3.3. *Ако $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ е редица от пренебрежими множества, то обединението им също е пренебрежимо множество.*

Доказателство. Тъй като всяко множество е пренебрежимо, то мярката му е по-малка от каквото и да е малко положително реално число. Можем да изберем тези "епсилон"по следния начин. Нека $\mu(A_1) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\mu(A_2) < \frac{\varepsilon}{4}$, $\mu(A_3) < \frac{\varepsilon}{8}$, ..., $\mu(A_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Мярката на обединението е сумата от мерките на множествата и следователно е по-малка от $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$. $\square$

Твърдение 3.4. *Ако имаме, че U е непразно отворено множество, то тогава U не е пренебрежимо.*

Доказателство. Ще искаме да покажем, че в U се съдържа отворена топка с радиус 2ε. Тази топка пък съдържа някакъв неизроден паралелотоп Δ и следователно мярката и не е нула, а следователно и тази на U не е.

Избираме си точка x_0 от множеството U. Тъй като знаем, че около всяка точка от отворено множество, има нейна околност, която също се съдържа в множеството. Това означава, че отворена топка $B_{2\varepsilon}(x_0)$ с някакъв радиус 2ε се съдържа в U. Нека имаме паралелотопа $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n | x_i^0 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \leq x_i \leq x_i^0 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\}$, където n е измерението, в което се намираме. Лесно се проверява, че този паралелотоп $\subset \overline{B_\varepsilon(x_0)} \subset B_{2\varepsilon}(x_0) \subset U$. Паралелотопът не е изроден и следователно мярката му е ненулева. $\square$

3.2 Теорема на Лебег

Теорема 3.5 (Теорема на Лебег)**.** *Нека имаме фукнция $g : \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Множеството от точки на прекъсване на фукнцията g ще бележим с R_g. Тогава g е интегруема по Риман $\iff$ R_g е пренебрежимо по Лебег.*

Доказателство. Първо ще докажем правата посока ($\Rightarrow$).

По втората форма на критерия за интегруемост имаме, че за всички положителни ε, η, съществува подразделение Π на Δ, такова, че сумата на мерките на паралелотопчета, в които горната и долната суми на Риман се разминават с повече от η е по-малка от ϵ. Тоест

$$\sum_{M_k - m_k \geq \eta} \mu(\Delta_k) < \varepsilon$$

Фиксираме ε. Взимаме си някакви паралелотопи Δ_k^m и $\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \leq \frac{\epsilon}{2}$ с α_m положителни и $\frac{1}{m} > 0$. Тогава можем да си вземем подразделение Π_m на Δ_k такова, че

$$\sum_{M_k^m - m_k^m \geq \frac{1}{m}} \mu(\Delta_k^m) < \alpha_m$$

Нека разгледаме обединението на разделящите стени на Π_m, които са краен брой изродени паралелотопи, следователно пренебрежимо множество. ... $\square$

За изпит: Само теоремата без доказателството + свойства + кога се ползва.

Следствие 3.6. *Ако имаме $f, g : \Delta \to \mathbb{R}$, които са фукнции, интегруеми по Риман, тогава $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}(|g(x)| \geq \varepsilon_0 > 0 \quad \forall x \in \Delta)$ са интегруеми по Риман.*

Следствие 3.7. *Имаме две интегруеми фукнции $f, g : \Delta \to \mathbb{R}$ и непрекъсната и ограничена фукнция $F(x, y)$. Нека $\varphi(x) = F(f(x), g(x)) : \Delta \to \mathbb{R}$. От това следва, че $\varphi(x)$ е интегруема.*

Основни свойства на интеграла:
Ако $f, g : \Delta \to \mathbb{R}$ са интегруеми фукнции

1. Линейност.

   $\lambda f + \mu g$ е интегруема и $\int_\Delta (\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 \int_\Delta f + \lambda_2 \int_\Delta g. \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$.

2. Адитивност.

   За всеки два региона Δ_1 и Δ_2 на които Δ се разделя $(\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2,\ \mathring{\Delta}_1 \cap \mathring{\Delta}_2 = \emptyset)$ f е интегруема в Δ_1 и Δ_2 и $\int_\Delta f = \int_{\Delta_1} f + \int_{\Delta_2} f$

3. Монотонност.

   Ако $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in \Delta \Rightarrow \int_\Delta f \leq \int_\Delta g$

Следствие 3.8. *$|f|$ е интегруема функция и $|\int_\Delta f| \leq \int_\Delta |f|$*

4 Мярка на Пеано-Жордан

5 Свеждане на кратните интеграли към прости

5.1 Пример за n-кратен интеграл: обем на n-мерното кълбо

6 Криволинейни интеграли

6.1 Векторни фукнции на скаларен аргумент

6.2 Криволинеен интеграл от първи род

6.3 Криволинеен интеграл от втори род

6.4 Траектория на движеща се точка

7 Повърхнинен интеграл от първи род

8 Повърхнинен интеграл от втори род

8.1 Теорема на Стокс и формула на Грийн

9 Формула на Гаус-Остроградски