

Лекционни записки по Математически Анализ

проф. Надежда Рибарска
Набрани от Никола Юруков

30 октомври 2015 г.

Съдържание

1	Лекция 1 - преговор с разширение	3
1.1	Евклидовото пространство \mathbb{R}^n	3
1.2	Топология в \mathbb{R}^n	4
1.3	Основни теореми	7
2	Лекция 2. Паралелотопи в \mathbb{R}^n	8

1 Лекция 1 - преговор с разширение

1.1 Евклидовото пространство \mathbb{R}^n

Като множество \mathbb{R}^n е множеството $\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$ от нередените n -торки реални числа. Ако го снабдим със стандартните линейни операции събиране на вектори и умножение на вектор с реално число, получаваме реално линейно пространство (спомнете си аксиомите от курса по линейна алгебра). Да напомним формалните дефиниции: сума на векторите $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ е векторът $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ (събирането е покоординатно). Произведение на скалара $\lambda \in \mathbb{R}$ с вектора x е векторът $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$ (умножението със скалар също е покоординатно). Ще означаваме с $\mathbf{0}$ нулевия вектор $(0, \dots, 0)$.

За да можем да правим анализ (да говорим за граница, непрекъснатост, производна и т.н.), освен линейната структура ни е необходима и някаква "мярка на близост" в нашето пространство. Както помните от курса по ДИС2, стандартната мярка на близост между два вектора е евклидовото разстояние между тях:

$$\rho(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \text{ където } x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Забележете, че в \mathbb{R}^2 това е просто питагоровата теорема. Това разстояние е добре съгласувано с линейната структура в смисъл, че $\rho(x, y) = \|x - y\|$, където в дясната част стои евклидовата норма (или дължината) на вектора $x - y$:

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Да напомним, че една функция $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ се нарича норма, ако за нея са в сила свойствата

1. $\|x\| = 0 \iff x = \mathbf{0}$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство на триъгълника)

В курса по ДИС2 е проверено, че евклидовата норма е норма. За упражнение проверете, че

- $\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$
- $\|(x_1, x_2)\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$
- $\|(x_1, x_2)\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p}, 1 < p < \infty$

са норми в \mathbb{R}^2 . По-общо, проверете, че

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}, \quad 1 \leq p < \infty \text{ е норма в } \mathbb{R}^n.$$

Разбира се, за целта трябва да използвате неравенството на Минковски от курса по ДИС2.

Евклидовата норма има по-хубави геометрични свойства от горните примери, защото е съгласувана със скаларното произведение

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \text{ където } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ и } y = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

по стандартния начин $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Да напомним основното неравенство на Коши-Буняковски-Шварц:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Да напомним също означенията

$$B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\}$$

за отворено кълбо с център x и радиус r и

$$\overline{B}_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq r\}$$

за затворено кълбо с център x и радиус r . Като упражнение можете да скицирате кълбата с радиус 1 и център началото на координатната система за нормите $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$ от предишното упражнение.

1.2 Топология в \mathbb{R}^n

Дефиниция 1.1. Подмножеството U на \mathbb{R}^n се нарича отворено, ако за всяка точка x от U съществува $\epsilon > 0$ такава, че $B_\epsilon(x) \subset U$.

Основните свойства на отворените множества, проверени в курса по ДИС2, са

1. \emptyset и \mathbb{R}^n са отворени
2. Сечение на краен брой отворени множества е отворено, т.е. ако U_1, U_2, \dots, U_k са отворени, то $\bigcap_{i=1}^k U_i$ е отворено.
3. Обединение на произволна фамилия от отворени множества е отворено, т.е. ако U_α са отворени за всяко $\alpha \in I$, то $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ е отворено.

Пример 1.2. Отворените кълба са отворени множества.

Доказателство. Да разгледаме $B_r(x_0)$, $r > 0$. Взимаме си произволно x от кълбото, т.е. разстоянието между x и x_0 е по-малко от r . Нека $\epsilon := r - \|x_0 - x\| > 0$. Тогава $B_\epsilon(x) \subset B_r(x_0)$. Наистина, нека $y \in B_\epsilon(x)$, т.е. $\|y - x\| < \epsilon$. Получаваме

$$\begin{aligned} \|x_0 - y\| &\leq \|x_0 - x\| + \|x - y\| < \epsilon + \|x - x_0\| \\ \|x_0 - y\| &< r - \|x_0 - x\| + \|x - x_0\| \\ \|x_0 - y\| &< r \end{aligned}$$

□

Пример 1.3. Нека функцията $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ е **непрекъсната**. Тогава множеството $U = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) > 0\}$ е отворено.

Доказателство. Взимаме произволна точка $x_0 \in U$, следователно $\epsilon = g(x_0) > 0$. От непрекъснатостта на функцията получаваме, че съществува положително число δ такова, че $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon$ за всяко $x \in B_\delta(x_0)$. Следователно $g(x) > g(x_0) - \epsilon = 0$ и оттук $x \in U$ за всяко $x \in B_\delta(x_0)$. \square

Дефиниция 1.4. Едно подмножество F на \mathbb{R}^n се нарича затворено, ако $\mathbb{R}^n \setminus F$ е отворено множество.

Основните свойства на затворените множества, проверени в курса по ДИС2, са

1. \emptyset, \mathbb{R}^n са затворени.
2. Обединение на краен брой затворени множества е затворено, т.е. ако F_1, F_2, \dots, F_k са затворени, то $\bigcup_{i=1}^k F_i$ е затворено.
3. Сечение на произволна фамилия от затворени множества е затворено, т.е. ако F_α са затворени за всички $\alpha \in I$, то $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ е затворено.

Пример 1.5. Затворените кълба са затворени множества. Доказателството оставяме за упражнение.

Дефиниция 1.6. Контур на множеството $A \subset \mathbb{R}^n$ наричаме множеството

$$\partial A := \{x \in \mathbb{R}^n : \forall U \text{ отворено, } x \in U \text{ е в сила } U \cap A \neq \emptyset \text{ и } U \setminus A \neq \emptyset\}$$

Дефиниция 1.7. Затворена обвивка на множеството $A \subset \mathbb{R}^n$ наричаме най-малкото затворено множество, съдържащо A :

$$\overline{A} := \bigcap \{F \subset \mathbb{R}^n : F \supset A \text{ и } F \text{ е затворено}\}$$

В курса по ДИС2 е доказано, че

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \{x_m\}_{m=1}^\infty \subset A, x_m \rightarrow x\}$$

Лесно се проверява, че едно множество е затворено точно тогава, когато съвпада със затворената си обвивка. Връзките между контур на множество и затворена обвивка на множество са

$$\overline{A} = A \cup \partial A, \quad \partial A = \overline{A} \cap (\overline{\mathbb{R}^n \setminus A}).$$

Следователно контурът на произволно множество е винаги затворено множество. Също лесно се проверява, че

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \{x_m\}_{m=1}^\infty \subset A, x_m \rightarrow x \text{ и } \exists \{y_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n \setminus A, y_m \rightarrow x\}$$

Дефиниция 1.8. Вътрешност на $A \subset \mathbb{R}^n$ наричаме най-голямото отворено множество, съдържащо се в A :

$$\mathring{A} = \bigcup \{U \subset \mathbb{R}^n : U \subset A \text{ и } U \text{ е отворено}\}$$

Друго означение за вътрешност на A е $\text{int} A$. Понятието за вътрешност е дуално на понятието за затворена обвивка, т.е.

$$\text{int} A = \mathbb{R}^n \setminus (\overline{\mathbb{R}^n \setminus A}), \quad \overline{A} = \mathbb{R}^n \setminus (\text{int}(\mathbb{R}^n \setminus A)).$$

Едно от най-важните и често използвани понятия в топологията е понятието за компакност.

Дефиниция 1.9. Едно множество $A \subset \mathbb{R}^n$ се нарича компакт, ако от всяко негово отворено покритие можем да изберем крайно подпокритие, т.е. ако $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ е фамилия от отворени подмножества на \mathbb{R}^n , за която е в сила $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha \supset A$, то можем да изберем краен брой индекси $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in I$ такива, че $\cup_{i=1}^k U_{\alpha_i} \supset A$.

В курса по ДИС2 са доказани две важни и нетривиални характеристики на компактните подмножества на \mathbb{R}^n :

1. Едно подмножество A на \mathbb{R}^n е компакт точно тогава, когато A е ограничено и затворено.

2. Едно подмножество A на \mathbb{R}^n е компакт точно тогава, когато от всяка редица от негови елементи може да се избере сходяща подредица, чиято граница е също в множеството.

Сега въвеждаме първото разширение, т.е. понятие, за което не сте учили в курса по ДИС2: множество, релативно отворено в A . Ще го използваме по-нататък, за да говорим за множества, релативно отворени в някаква гладка двумерна повърхнина в тримерното евклидово пространство. Интуицията е, че забравяме за всичко извън множеството A .

Дефиниция 1.10. Нека $A \subset \mathbb{R}^n$. Едно подмножество U на A наричаме релативно отворено в A , ако съществува отворено множество $V \subset \mathbb{R}^n$ такова, че $U = A \cap V$.

Твърдение 1.11. Множеството $U \subset A$ е релативно отворено в A точно тогава, когато за всяка негова точка $x \in U$ съществува $\epsilon > 0$ такова, че $B_\epsilon(x) \cap A \subset U$.

Доказателство. Нека първо $U \subset A$ е релативно отворено в A и $x \in U$ е произволна. Тогава съществува отворено множество $V \subset \mathbb{R}^n$ с $U = A \cap V$. Тъй като $x \in U \subset V$, съществува $\epsilon > 0$ с $B_\epsilon(x) \subset V$ и оттук $B_\epsilon(x) \cap A \subset V \cap A = U$. В обратната посока, нека за всяка точка $x \in U$ съществува $\epsilon_x > 0$ такова, че $B_{\epsilon_x}(x) \cap A \subset U$. Полагаме $V := \cup_{x \in U} B_{\epsilon_x}(x)$. Очевидно V е отворено множество като обединение на отворени кълбета. Освен това

$$V \cap A = (\cup_{x \in U} B_{\epsilon_x}(x)) \cap A = \cup_{x \in U} (B_{\epsilon_x}(x) \cap A) \subset U.$$

От друга страна, всяка точка $x \in U$ принадлежи на $B_{\epsilon_x}(x) \subset V$, следователно $U \subset V$ и от $U \subset A$ следва $U \subset V \cap A$. С това $U = V \cap A$ и доказателството е завършено. \square

Следното приложение на понятието за релативна отвореност е важно и изключително често използвано:

Твърдение 1.12. Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ е изображение с дефиниционна област $D \subset \mathbb{R}^n$ и стойности в \mathbb{R}^m . Твърдим, че f е непрекъсната в D точно тогава когато първообраз на всяко отворено в \mathbb{R}^m множество е релативно отворено в D . Да напомним, че първообраз на $U \subset \mathbb{R}^m$ е множеството $f^{-1}(U) := \{x \in D : f(x) \in U\}$.

Доказателство. Първо ще докажем, че ако първообраз на всяко отворено в \mathbb{R}^m множество е релативно отворено в D , то f е непрекъсната. Избираме произволна точка x от D и произволно $\epsilon > 0$. Тъй като кълбото $B_\epsilon(f(x))$ е отворено в \mathbb{R}^m , първообразът $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ ще е релативно отворен в D . Тогава $f^{-1}(B_\epsilon(f(x))) = D \cap V$ за някое множество V , отворено в \mathbb{R}^n . Тъй като $x \in f^{-1}(B_\epsilon(f(x))) \subset V$, съществува $\delta > 0$ с $B_\delta(x) \subset V$. Нека $x' \in D$ е произволна точка с $\|x' - x\| < \delta$. Значи $x' \in D \cap B_\delta(x) \subset D \cap V = f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ и следователно $f(x') \in B_\epsilon(f(x))$, т.е. $\|f(x') - f(x)\| < \epsilon$.

За да докажем обратната посока, избираме произволно отворено $U \subset \mathbb{R}^m$. Нека $x \in f^{-1}(U)$. Тогава $f(x)$ принадлежи на отвореното множество U и следователно съществува $\epsilon > 0$ такава, че $B_\epsilon(f(x)) \subset U$. Тъй като f е непрекъсната в x , съществува $\delta > 0$ такава, че $\|f(x') - f(x)\| < \epsilon$ за всяко $x' \in D$, за което $\|x' - x\| < \delta$. Записано по друг начин това означава, че $f(B_\delta(x) \cap D) \subset B_\epsilon(f(x)) \subset U$, следователно $B_\delta(x) \cap D \subset f^{-1}(U)$. Така доказахме, че множеството $f^{-1}(U)$ е релативно отворено в D , защото изпълнява условието от предишното твърдение. \square

1.3 Основни теореми

Теорема 1.13 (Теорема на Вайерщрас). *Непрекъснат образ на компакт е компакт. Формално записано, ако $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ е непрекъснато изображение с дефиниционна област компактно подмножество K на \mathbb{R}^n , то множеството $f(K) := \{f(x) : x \in K\}$ от стойностите на f е компактно подмножество на \mathbb{R}^m .*

Доказателство. Нека $\{y_l\}_{l=1}^\infty \subset f(K)$ е редица от елементи на $f(K)$. Тогава за всеки елемент y_l на тази редица съществува елемент x_l на K такъв, че $y_l = f(x_l)$. Сега редицата $\{x_l\}_{l=1}^\infty$ се съдържа в компактно множество K . Следователно съществува нейна сходяща подредица $\{x_{l_k}\}_{k=1}^\infty$, чиято граница x_0 е елемент на K . Тъй като f е непрекъсната, от дефиницията на Хайне за непрекъснатост получаваме, че $f(x_{l_k}) = y_{l_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f(x_0)$. Тъй като очевидно $f(x_0) \in f(K)$, остава да се позовем на характеризацията (2) на компактните множества. \square

Хубаво упражнение е да се докаже теоремата на Вайерщрас, като се използва дефиницията на компакт и характеризацията на непрекъснатите изображения, която доказахме.

Друго добро упражнение е да се докаже теоремата на Вайерщрас от ДИС 1 (една непрекъсната функция върху краен затворен интервал има минимум и максимум) като следствие от тази форма на теоремата.

Теорема 1.14 (Теорема на Кантор). *Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ е дефинирана в $D \subset \mathbb{R}^n$. Нека K е компактно подмножество на D . Ако f е непрекъсната в K , т.е. непрекъсната е във всяка точка от K , то твърдим, че за всяко $\epsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такава, че за всяко $x \in K$ и за всички $x' \in D$, за които е изпълнено $\|x' - x\| < \delta$, е в сила $\|f(x) - f(x')\| < \epsilon$. Забележете, че заключението е малко по-силно от равномерна непрекъснатост на f върху K .*

Доказателство. Отново ще използваме характеризацията (2) на компактността чрез редици. Допускаме противното, т.е. съществува такава $\epsilon_0 > 0$, че за всички $\delta > 0$ съществуват точки $x_\delta \in K$ и $x'_\delta \in D$ такива, че

$$\|x_\delta - x'_\delta\| < \delta \text{ и } \|f(x_\delta) - f(x'_\delta)\| \geq \epsilon_0.$$

Даваме на δ стойности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ и преименуваме $x_{1/m}$ и $x'_{1/m}$ съответно на x_m и x'_m . Така се образуват две редици $\{x_m\}_{m=1}^\infty \subset K$ и $\{x'_m\}_{m=1}^\infty \subset D$. Знаем, че

$$\|x_m - x'_m\| < \frac{1}{m} \text{ и } \|f(x_m) - f(x'_m)\| \geq \epsilon_0 > 0$$

за всяко естествено m . Тъй като K е компактен, съществува сходяща подредица $x_{m_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0 \in K$ на $\{x_m\}_{m=1}^\infty \subset K$. От неравенствата

$$\|x'_{m_k} - x_0\| \leq \|x'_{m_k} - x_{m_k}\| + \|x_{m_k} - x_0\| < \frac{1}{m_k} + \|x_{m_k} - x_0\|$$

получаваме, че редицата $\{x'_{m_k}\}_{k=1}^\infty$ също клони към точката $x_0 \in K$. Сега използваме непрекъснатостта на f в точката $x_0 \in K$ и получаваме, че

$$f(x_{m_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x_0) \text{ и } f(x'_{m_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x_0).$$

Като извадим тези две редици, получаваме $f(x_{m_k}) - f(x'_{m_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, което противоречи на $\|f(x_m) - f(x'_m)\| \geq \epsilon_0 > 0$ за всяко естествено m . Теоремата е доказана. \square

2 Лекция 2. Паралелотопи в \mathbb{R}^n

Дефиниция 2.1. Паралелотоп (също interval, box, брус) е обобщението на паралелепипеда в \mathbb{R}^n .

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

Така изглежда за различните измерения (стойности на n).

n	Δ
1	$[a_1, b_1]$
2	$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$
3	$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$
...	...

За да намерим обема на един паралелотоп използваме неговата *мярка*.

Дефиниция 2.2. Мярка.

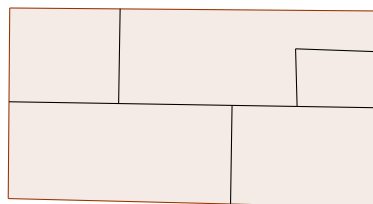
В едно измерение мярката на един интервал е просто дължината му. Пишем $\mu_n([a_1, b_1]) = b_1 - a_1$. Мярка всъщност можем да имаме и за произволни *измерими* множества. Но за това по-късно. За момента мярка дефинираме само за множества, които са интервали, например $[a_1, b_1]$. За един паралелотоп имаме $\mu_n(\Delta) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$, което е всъщност обемът на този паралелотоп.

Дефиниция 2.3. Подразделение.

Подразделение на един паралелотоп Δ е "разбиване" на обекта на произволен брой и вид паралелотопи. Нататък често ще ползваме произволна разбивка, за да доказваме твърдения и теореми. Пишем подразделение на Δ така:

$$\Pi = \{\Delta_k\}_{k=1}^{k_0}$$

и също $\cup_{k=1}^{k_0} \Delta_k = \Delta$ и $\overset{\circ}{\Delta}_{k_i} \cap \overset{\circ}{\Delta}_{k_j} = \emptyset, \forall i \neq j$. Една произволна разбивка на един паралелотоп във второ измерение (т.е. правоъгълник) е например:



Друго често използвано е вътрешност на паралелотоп, която можем да напишем така $\mathring{\Delta} = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$

Твърдение 2.4. *П е подразделяне на Δ следователно $\mu_n(\Delta) = \sum_{k=1}^{k_0} \mu_n(\Delta_k)$*

Доказателство. Първо разглеждаме случаят на правилно подразделение.

$$a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{m_0} = b_1$$

$$a_1 = y_0 < y_1 < \dots < y_{l_0} = b_0$$

$$\Delta_{m_l} = [x_{m-1}, x_m] \times [y_{l-1}, y_l]$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{l_0} \sum_{m=1}^{m_0} \mu_2(\Delta_{m_l}) &= \sum_l \sum_m (x_m - x_{m-1})(y_l - y_{l-1}) \\ &= \sum_l (y_l - y_{l-1}) \sum_m (x_m - x_{m-1}) \\ &= (b_1 - a_1) \sum_{l=1}^{l_0} (y_l - y_{l-1}) \\ &= (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \\ &= \mu_2(\Delta) \end{aligned}$$

Втора стъпка - разглеждаме неправилно подразделение. Продължаваме разделенията до правилни, и така свеждаме до горния случай. Обратно можем да вземем едно (дребно) правилно подразделение и чрез "сливане" можем да получим неправилно. \square