

# Лекционни записки по Математически Анализ

проф. Надежда Рибарска  
Набрани от Никола Юруков

5 януари 2016 г.

## Съдържание

<b>1</b>	<b>Лекция 1: Преговор с разширение</b>	<b>3</b>
1.1	Евклидовото пространство $\mathbb{R}^n$	3
1.2	Топология в $\mathbb{R}^n$	4
1.3	Основни теореми	7
<b>2</b>	<b>Лекция 2: Кратен Риманов интеграл - въвеждане и основни свойства</b>	<b>8</b>
2.1	Паралелотопи в $\mathbb{R}^n$ и тяхната мярка	8
2.2	Въвеждане на Риманов интеграл чрез подхода на Дарбу	10
2.3	Суми на Риман и граница на суми на Риман	13
2.4	Еквивалентност на подхода чрез суми на Дарбу и на подхода чрез суми на Риман	14
<b>3</b>	<b>Лекция 3: Множества, пренебрежими по Лебег и критерий на Лебег за интегруемост по Риман</b>	<b>17</b>
3.1	Множества, пренебрежими по Лебег	17
3.2	Критерий на Лебег за интегруемост по Риман	20
3.3	Основни свойства на интеграла на Риман върху паралелотоп	22
<b>4</b>	<b>Лекция 4: Мярка на Пеано-Жордан. Интеграл върху измеримо множество</b>	<b>24</b>
4.1	Множества, измерими по Пеано-Жордан	24
<b>5</b>	<b>Лекция 5: Теорема на Фубини. Интегриране върху криволинеен трапец и цилиндрично тяло. Принцип на Кавалиери. Физически приложения на кратните интеграли. Примери</b>	<b>24</b>
<b>6</b>	<b>Лекция 6: Теорема за смяна на променливите в кратен интеграл 1</b>	<b>24</b>
<b>7</b>	<b>Лекция 7: Теорема за смяна на променливите в кратен интеграл 2</b>	<b>24</b>
<b>8</b>	<b>Лекция 8: Криволинеен интеграл от първи род</b>	<b>24</b>
<b>9</b>	<b>Лекция 9: Криволинеен интеграл от втори род</b>	<b>24</b>
<b>10</b>	<b>Лекция 10: Независимост от пътя на криволинейния интеграл от втори род</b>	<b>24</b>
<b>11</b>	<b>Лекция 11: Лице на повърхнина</b>	<b>24</b>
11.1	Елементарна гладка параметрично зададена повърхнина. Допирателно пространство	25
11.2	Формула за лице на гладка повърхнина	28
11.3	Формулата за лице на гладка повърхнина като частен случай на по-обща формула	31
<b>12</b>	<b>Лекция 12: Повърхнинен интеграл от първи род</b>	<b>32</b>

13 Лекция 13: Повърхнинен интеграл от втори род. Повърхнини с край. Индуцирана ориентация на края	32
14 Лекция 14: Формула на Стокс	32
15 Лекция 15: Формула на Гаус-Остроградски	32

# 1 Лекция 1: Преговор с разширение

## 1.1 Евклидовото пространство $\mathbb{R}^n$

Като множество  $\mathbb{R}^n$  е множеството  $\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$  от нередените  $n$ -торки реални числа. Ако го снабдим със стандартните линейни операции събиране на вектори и умножение на вектор с реално число, получаваме реално линейно пространство (спомнете си аксиомите от курса по линейна алгебра). Да напомним формалните дефиниции: сума на векторите  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  е векторът  $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$  (събирането е покоординатно). Произведение на скалара  $\lambda \in \mathbb{R}$  с вектора  $x$  е векторът  $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$  (умножението със скалар също е покоординатно). Ще означаваме с  $\mathbf{0}$  нулевия вектор  $(0, \dots, 0)$ .

За да можем да правим анализ (да говорим за граница, непрекъснатост, производна и т.н.), освен линейната структура ни е необходима и някаква "мярка на близост" в нашето пространство. Както помните от курса по ДИС2, стандартната мярка на близост между два вектора е евклидовото разстояние между тях:

$$\rho(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \text{ където } x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Забележете, че в  $\mathbb{R}^2$  това е просто питагоровата теорема. Това разстояние е добре съгласувано с линейната структура в смисъл, че  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ , където в дясната част стои евклидовата норма (или дължината) на вектора  $x - y$ :

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Да напомним, че една функция  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$  се нарича норма, ако за нея са в сила свойствата

1.  $\|x\| = 0 \iff x = \mathbf{0}$
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (неравенство на триъгълника)

В курса по ДИС2 е проверено, че евклидовата норма е норма. За упражнение проверете, че

- $\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$
- $\|(x_1, x_2)\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$
- $\|(x_1, x_2)\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p}, 1 < p < \infty$

са норми в  $\mathbb{R}^2$ . По-общо, проверете, че

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}, \quad 1 \leq p < \infty \text{ е норма в } \mathbb{R}^n.$$

Разбира се, за целта трябва да използвате неравенството на Минковски от курса по ДИС2.

Евклидовата норма има по-хубави геометрични свойства от горните примери, защото е съгласувана със скаларното произведение

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \text{ където } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ и } y = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

по стандартния начин  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ . Да напомним основното неравенство на Коши-Буняковски-Шварц:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Да напомним също означенията

$$B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\}$$

за отворено кълбо с център  $x$  и радиус  $r$  и

$$\overline{B}_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq r\}$$

за затворено кълбо с център  $x$  и радиус  $r$ . Като упражнение можете да скицирате кълбата с радиус 1 и център началото на координатната система за нормите  $\|\cdot\|_1$  и  $\|\cdot\|_\infty$  от предишното упражнение.

## 1.2 Топология в $\mathbb{R}^n$

**Дефиниция 1.1.** Подмножеството  $U$  на  $\mathbb{R}^n$  се нарича отворено, ако за всяка точка  $x$  от  $U$  съществува  $\varepsilon > 0$  такава, че  $B_\varepsilon(x) \subset U$ .

Основните свойства на отворените множества, проверени в курса по ДИС2, са

1.  $\emptyset$  и  $\mathbb{R}^n$  са отворени
2. Сечение на краен брой отворени множества е отворено, т.е. ако  $U_1, U_2, \dots, U_k$  са отворени, то  $\bigcap_{i=1}^k U_i$  е отворено.
3. Обединение на произволна фамилия от отворени множества е отворено, т.е. ако  $U_\alpha$  са отворени за всяко  $\alpha \in I$ , то  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$  е отворено.

**Пример 1.2.** Отворените кълба са отворени множества.

*Доказателство.* Да разгледаме  $B_r(x_0)$ ,  $r > 0$ . Взимаме си произволно  $x$  от кълбото, т.е. разстоянието между  $x$  и  $x_0$  е по-малко от  $r$ . Нека  $\varepsilon := r - \|x_0 - x\| > 0$ . Тогава  $B_\varepsilon(x) \subset B_r(x_0)$ . Наистина, нека  $y \in B_\varepsilon(x)$ , т.е.  $\|y - x\| < \varepsilon$ . Получаваме

$$\begin{aligned} \|x_0 - y\| &\leq \|x - y\| + \|x - x_0\| < \varepsilon + \|x - x_0\| \\ \|x_0 - y\| &< r - \|x_0 - x\| + \|x - x_0\| \\ \|x_0 - y\| &< r \end{aligned}$$

□

**Пример 1.3.** Нека функцията  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  е **непрекъсната**. Тогава множеството  $U = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) > 0\}$  е отворено.

*Доказателство.* Взимаме произволна точка  $x_0 \in U$ , следователно  $\varepsilon = g(x_0) > 0$ . От непрекъснатостта на функцията получаваме, че съществува положително число  $\delta$  такова, че  $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$  за всяко  $x \in B_\delta(x_0)$ . Следователно  $g(x) > g(x_0) - \varepsilon = 0$  и оттук  $x \in U$  за всяко  $x \in B_\delta(x_0)$ .  $\square$

**Дефиниция 1.4.** Едно подмножество  $F$  на  $\mathbb{R}^n$  се нарича затворено, ако  $\mathbb{R}^n \setminus F$  е отворено множество.

Основните свойства на затворените множества, проверени в курса по ДИС2, са

1.  $\emptyset, \mathbb{R}^n$  са затворени.
2. Обединение на краен брой затворени множества е затворено, т.е. ако  $F_1, F_2, \dots, F_k$  са затворени, то  $\bigcup_{i=1}^k F_i$  е затворено.
3. Сечение на произволна фамилия от затворени множества е затворено, т.е. ако  $F_\alpha$  са затворени за всички  $\alpha \in I$ , то  $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$  е затворено.

**Пример 1.5.** Затворените кълба са затворени множества. Доказателството оставяме за упражнение.

**Дефиниция 1.6.** Контур на множеството  $A \subset \mathbb{R}^n$  наричаме множеството

$$\partial A := \{x \in \mathbb{R}^n : \forall U \text{ отворено, } x \in U \text{ е в сила } U \cap A \neq \emptyset \text{ и } U \setminus A \neq \emptyset\}$$

**Дефиниция 1.7.** Затворена обвивка на множеството  $A \subset \mathbb{R}^n$  наричаме най-малкото затворено множество, съдържащо  $A$ :

$$\overline{A} := \bigcap \{F \subset \mathbb{R}^n : F \supset A \text{ и } F \text{ е затворено}\}$$

В курса по ДИС2 е доказано, че

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \{x_m\}_{m=1}^\infty \subset A, x_m \rightarrow x\}$$

Лесно се проверява, че едно множество е затворено точно тогава, когато съвпада със затворената си обвивка. Връзките между контур на множество и затворена обвивка на множество са

$$\overline{A} = A \cup \partial A, \quad \partial A = \overline{A} \cap (\overline{\mathbb{R}^n \setminus A}).$$

Следователно контурът на произволно множество е винаги затворено множество. Също лесно се проверява, че

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \{x_m\}_{m=1}^\infty \subset A, x_m \rightarrow x \text{ и } \exists \{y_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n \setminus A, y_m \rightarrow x\}$$

**Дефиниция 1.8.** Вътрешност на  $A \subset \mathbb{R}^n$  наричаме най-голямото отворено множество, съдържащо се в  $A$ :

$$\mathring{A} = \bigcup \{U \subset \mathbb{R}^n : U \subset A \text{ и } U \text{ е отворено}\}$$

Друго означение за вътрешност на  $A$  е  $\text{int} A$ . Понятието за вътрешност е дуално на понятието за затворена обвивка, т.е.

$$\text{int} A = \mathbb{R}^n \setminus (\overline{\mathbb{R}^n \setminus A}), \quad \overline{A} = \mathbb{R}^n \setminus (\text{int}(\mathbb{R}^n \setminus A)).$$

Едно от най-важните и често използвани понятия в топологията е понятието за компакност.

**Дефиниция 1.9.** Едно множество  $A \subset \mathbb{R}^n$  се нарича компакт, ако от всяко негово отворено покритие можем да изберем крайно подпокритие, т.е. ако  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  е фамилия от отворени подмножества на  $\mathbb{R}^n$ , за която е в сила  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \supset A$ , то можем да изберем краен брой индекси  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in I$  такива, че  $\bigcup_{i=1}^k U_{\alpha_i} \supset A$ .

В курса по ДИС2 са доказани две важни и нетривиални характеристики на компактните подмножества на  $\mathbb{R}^n$ :

1. Едно подмножество  $A$  на  $\mathbb{R}^n$  е компакт точно тогава, когато  $A$  е ограничено и затворено.

2. Едно подмножество  $A$  на  $\mathbb{R}^n$  е компакт точно тогава, когато от всяка редица от негови елементи може да се избере сходяща подредица, чиято граница е също в множеството.

Сега въвеждаме първото разширение, т.е. понятие, за което не сте учили в курса по ДИС2: множество, релативно отворено в  $A$ . Ще го използваме по-нататък, за да говорим за множества, релативно отворени в някаква гладка двумерна повърхнина в тримерното евклидово пространство. Интуицията е, че забравяме за всичко извън множеството  $A$ .

**Дефиниция 1.10.** Нека  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Едно подмножество  $U$  на  $A$  наричаме релативно отворено в  $A$ , ако съществува отворено множество  $V \subset \mathbb{R}^n$  такова, че  $U = A \cap V$ .

**Твърдение 1.11.** Множеството  $U \subset A$  е релативно отворено в  $A$  точно тогава, когато за всяка негова точка  $x \in U$  съществува  $\varepsilon > 0$  такова, че  $B_\varepsilon(x) \cap A \subset U$ .

*Доказателство.* Нека първо  $U \subset A$  е релативно отворено в  $A$  и  $x \in U$  е произволна. Тогава съществува отворено множество  $V \subset \mathbb{R}^n$  с  $U = A \cap V$ . Тъй като  $x \in U \subset V$ , съществува  $\varepsilon > 0$  с  $B_\varepsilon(x) \subset V$  и оттук  $B_\varepsilon(x) \cap A \subset V \cap A = U$ . В обратната посока, нека за всяка точка  $x \in U$  съществува  $\varepsilon_x > 0$  такова, че  $B_{\varepsilon_x}(x) \cap A \subset U$ . Полагаме  $V := \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}(x)$ . Очевидно  $V$  е отворено множество като обединение на отворени кълбета. Освен това

$$V \cap A = (\bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}(x)) \cap A = \bigcup_{x \in U} (B_{\varepsilon_x}(x) \cap A) \subset U.$$

От друга страна, всяка точка  $x \in U$  принадлежи на  $B_{\varepsilon_x}(x) \subset V$ , следователно  $U \subset V$  и от  $U \subset A$  следва  $U \subset V \cap A$ . С това  $U = V \cap A$  и доказателството е завършено.  $\square$

Следното приложение на понятието за релативна отвореност е важно и изключително често използвано:

**Твърдение 1.12.** Нека  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  е изображение с дефиниционна област  $D \subset \mathbb{R}^n$  и стойности в  $\mathbb{R}^m$ . Твърдим, че  $f$  е непрекъсната в  $D$  точно тогава когато първообраз на всяко отворено в  $\mathbb{R}^m$  множество е релативно отворено в  $D$ . Да напомним, че първообраз на  $U \subset \mathbb{R}^m$  е множеството  $f^{-1}(U) := \{x \in D : f(x) \in U\}$ .

*Доказателство.* Първо ще докажем, че ако първообраз на всяко отворено в  $\mathbb{R}^m$  множество е релативно отворено в  $D$ , то  $f$  е непрекъсната. Избираме произволна точка  $x$  от  $D$  и произволно  $\varepsilon > 0$ . Тъй като кълбото  $B_\varepsilon(f(x))$  е отворено в  $\mathbb{R}^m$ , първообразът  $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$  ще е релативно отворен в  $D$ . Тогава  $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) = D \cap V$  за някое множество  $V$ , отворено в  $\mathbb{R}^n$ . Тъй като  $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subset V$ , съществува  $\delta > 0$  с  $B_\delta(x) \subset V$ . Нека  $x' \in D$  е произволна точка с  $\|x' - x\| < \delta$ . Значи  $x' \in D \cap B_\delta(x) \subset D \cap V = f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$  и следователно  $f(x') \in B_\varepsilon(f(x))$ , т.е.  $\|f(x') - f(x)\| < \varepsilon$ .

За да докажем обратната посока, избираме произволно отворено  $U \subset \mathbb{R}^m$ . Нека  $x \in f^{-1}(U)$ . Тогава  $f(x)$  принадлежи на отвореното множество  $U$  и следователно съществува  $\varepsilon > 0$  такава, че  $B_\varepsilon(f(x)) \subset U$ . Тъй като  $f$  е непрекъсната в  $x$ , съществува  $\delta > 0$  такава, че  $\|f(x') - f(x)\| < \varepsilon$  за всяко  $x' \in D$ , за което  $\|x' - x\| < \delta$ . Записано по друг начин това означава, че  $f(B_\delta(x) \cap D) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset U$ , следователно  $B_\delta(x) \cap D \subset f^{-1}(U)$ . Така доказахме, че множеството  $f^{-1}(U)$  е релативно отворено в  $D$ , защото изпълнява условието от предишното твърдение.  $\square$

### 1.3 Основни теореми

**Теорема 1.13** (Теорема на Вайерщрас). *Непрекъснат образ на компакт е компакт. Формално записано, ако  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$  е непрекъснато изображение с дефиниционна област компактно подмножество  $K$  на  $\mathbb{R}^n$ , то множеството  $f(K) := \{f(x) : x \in K\}$  от стойностите на  $f$  е компактно подмножество на  $\mathbb{R}^m$ .*

*Доказателство.* Нека  $\{y_l\}_{l=1}^\infty \subset f(K)$  е редица от елементи на  $f(K)$ . Тогава за всеки елемент  $y_l$  на тази редица съществува елемент  $x_l$  на  $K$  такъв, че  $y_l = f(x_l)$ . Сега редицата  $\{x_l\}_{l=1}^\infty$  се съдържа в компактно множество  $K$ . Следователно съществува нейна сходяща подредица  $\{x_{l_k}\}_{k=1}^\infty$ , чиято граница  $x_0$  е елемент на  $K$ . Тъй като  $f$  е непрекъсната, от дефиницията на Хайне за непрекъснатост получаваме, че  $f(x_{l_k}) = y_{l_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f(x_0)$ . Тъй като очевидно  $f(x_0) \in f(K)$ , остава да се позовем на характеризацията (2) на компактните множества.  $\square$

Хубаво упражнение е да се докаже теоремата на Вайерщрас, като се използва дефиницията на компакт и характеризацията на непрекъснатите изображения, която доказахме.

Друго добро упражнение е да се убедите, че теоремата на Вайерщрас от ДИС 1 (една непрекъсната функция върху краен затворен интервал е ограничена и достига своята най-голяма и най-малка стойност) е следствие от тази форма на теоремата.

**Теорема 1.14** (Теорема на Кантор). *Нека  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  е дефинирана в  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Нека  $K$  е компактно подмножество на  $D$ . Ако  $f$  е непрекъсната в  $K$ , т.е. непрекъсната е във всяка точка от  $K$ , то твърдим, че за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta > 0$  такава, че за всяко  $x \in K$  и за всички  $x' \in D$ , за които е изпълнено  $\|x' - x\| < \delta$ , е в сила  $\|f(x) - f(x')\| < \varepsilon$ . Забележете, че заключението е малко по-силно от равномерна непрекъснатост на  $f$  върху  $K$ .*

*Доказателство.* Отново ще използваме характеризацията (2) на компактността чрез редици. Допускаме противното, т.е. съществува такава  $\varepsilon_0 > 0$ , че за всички  $\delta > 0$  съществуват точки  $x_\delta \in K$  и  $x'_\delta \in D$  такива, че

$$\|x_\delta - x'_\delta\| < \delta \text{ и } \|f(x_\delta) - f(x'_\delta)\| \geq \varepsilon_0.$$

Даваме на  $\delta$  стойности  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$  и преименуваме  $x_{1/m}$  и  $x'_{1/m}$  съответно на  $x_m$  и  $x'_m$ . Така се образуват две редици  $\{x_m\}_{m=1}^\infty \subset K$  и  $\{x'_m\}_{m=1}^\infty \subset D$ . Знаем, че

$$\|x_m - x'_m\| < \frac{1}{m} \text{ и } \|f(x_m) - f(x'_m)\| \geq \varepsilon_0 > 0$$



за всяко естествено  $m$ . Тъй като  $K$  е компактен, съществува сходяща подредица  $x_{m_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0 \in K$  на  $\{x_m\}_{m=1}^\infty \subset K$ . От неравенствата

$$\|x'_{m_k} - x_0\| \leq \|x'_{m_k} - x_{m_k}\| + \|x_{m_k} - x_0\| < \frac{1}{m_k} + \|x_{m_k} - x_0\|$$

получаваме, че редицата  $\{x'_{m_k}\}_{k=1}^\infty$  също клони към точката  $x_0 \in K$ . Сега използваме непрекъснатостта на  $f$  в точката  $x_0 \in K$  и получаваме, че

$$f(x_{m_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x_0) \text{ и } f(x'_{m_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x_0).$$

Като извадим тези две редици, получаваме  $f(x_{m_k}) - f(x'_{m_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ , което противоречи на  $\|f(x_m) - f(x'_m)\| \geq \varepsilon_0 > 0$  за всяко естествено  $m$ . Теоремата е доказана.  $\square$

## 2 Лекция 2: Кратен Риманов интеграл - въвеждане и основни свойства

Конструкцията на Дарбу, с която сте въвели Риманов интеграл в курса по ДИС1, е важна и естествена и ние ще я използваме отново, за да въведем  $n$ -кратен Риманов интеграл. Геометричната интуиция остава същата. В курса по ДИС1 сте искали да дефинирате по един разумен начин лицето на фигура, заградена от абсисата, две вертикални прави и графиката на ограничена неотрицателна функция. Постигнали сте го чрез оценяване отгоре и отдолу на това лице чрез лицата на стъпаловидни фигури, съставени от краен брой правоъгълници (тези лица са големите и малките суми на Дарбу). Сега за  $n=2$  трябва да оценяваме отгоре и отдолу обема на тяло, заградено от равнината на първите две координатни оси, вертикални равнини по границата на даден правоъгълник и графиката на ограничена неотрицателна функция, дефинирана в този правоъгълник. Оценката е чрез обема на тела, състоящи се от краен брой паралелепипеди (за оценка отгоре вземаме обема на такова стъпаловидно тяло, съдържащо нашето, а за оценка отдолу - съдържащо се в нашето). За по-големи размерности идеята и конструкцията остават същите, само че вече не можем да нарисуваме подходяща картинка.

### 2.1 Паралелотопи в $\mathbb{R}^n$ и тяхната мярка

Първият въпрос, който трябва да решим, е с какво заменяме крайния и затворен интервал от ДИС1, ако размерността е по-голяма от едно. Естественният отговор е: с правоъгълник в равнината, с паралелепипед в тримерното пространство и т.н.

**Дефиниция 2.1.** Паралелотоп (на английски interval, box) е множество в  $\mathbb{R}^n$ , за което всяка координата се мени (независимо от останалите) в краен затворен интервал:

$$\Delta := \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

За различните размерности (стойности на  $n$ ) имаме

$n$	$\Delta$
1	$[a_1, b_1]$ интервал
2	$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ правоъгълник
3	$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ паралелепипед
...	...

Същественото за тези най-прости фигури е, че нямаме съмнения какво трябва да наречем дължина на интервал, лице на правоъгълник, обем на паралелепипед, а за паралелотопа в  $\mathbb{R}^n$  естествено въвеждаме мярка в  $\mathbb{R}^n$ .

**Дефиниция 2.2.** За паралелотопа  $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$  дефинираме неговата  $n$ -мерна мярка като

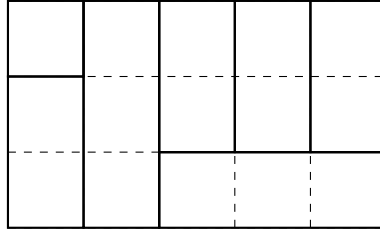
$$\mu_n(\Delta) := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) .$$

Забележете, че при  $n = 1$  това е дължината  $\mu_1([a_1, b_1]) = b_1 - a_1$  на интервала  $[a_1, b_1]$ , при  $n = 2$  това е лицето  $\mu_2([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$  на правоъгълника  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ , при  $n = 3$  това е обемът  $\mu_3([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$  на паралелепипеда  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ .

Един паралелотоп ще наричаме изроден, ако някой от интервалите  $[a_i, b_i]$  се изражда в точка, т.е.  $a_i = b_i$ . В такава ситуация  $n$ -мерната мярка на паралелотопа е нула. Например отсечка върху абсисата може да бъде разглеждана като паралелотоп в  $\mathbb{R}^1$  и ще има ненулева дължина, но ако бъде разглеждана като паралелотоп в  $\mathbb{R}^2$ , ще има лице нула.

Следващият етап е да уточним как да разделяме паралелотопа на паралелотопчета по аналогия с разделянето на интервал на подинтервали от ДИС1. Неформално, подразделяне на паралелотоп са краен брой паралелотопи, чието обединение е първоначалният паралелотоп, и които не се припокриват.

**Дефиниция 2.3.** Подразделение  $\Pi$  на един паралелотоп  $\Delta$  е крайно множество от паралелотопи  $\Pi = \{\Delta_k\}_{k=1}^{k_0}$ , за което  $\cup_{k=1}^{k_0} \Delta_k = \Delta$  и  $\Delta_k \cap \Delta_l = \emptyset \forall k \neq l$ .



Забележете, че вътрешността на паралелотопа  $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$  е множеството  $\mathring{\Delta} = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ . Следното твърдение е геометрически очевидно, но съществено за по-нататъшната ни работа:

**Твърдение 2.4.** Ако  $\Pi = \{\Delta_k\}_{k=1}^{k_0}$  е подразделяне на  $\Delta$ , то  $\mu_n(\Delta) = \sum_{k=1}^{k_0} \mu_n(\Delta_k)$ .

*Доказателство.* Първо разглеждаме случая на правилно подразделяне, т.е.  $\Pi$  се получава като се раздели интервалът, в който се мени  $i$ -тата координата, на подинтервали за всяко  $i$ , и се вземат всевъзможните декартови произведения на такива подинтервали. За пестене на място и по-прости означения ще изпишем нещата за  $n = 2$ , в общия случай доказателството е аналогично. И тъй, нека  $\Delta = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  и делим  $[a_1, b_1]$  и  $[a_2, b_2]$  на подинтервали:

$$a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{m_0} = b_1 ,$$

$$a_2 = y_0 < y_1 < \dots < y_{l_0} = b_2 .$$

Тогава  $\Pi = \{\Delta_{ml} : m = 1, \dots, m_0, l = 1, \dots, l_0\}$ , където  $\Delta_{ml} = [x_{m-1}, x_m] \times [y_{l-1}, y_l]$ . Пресмятаме

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{l_0} \sum_{m=1}^{m_0} \mu_2(\Delta_{ml}) &= \sum_{l=1}^{l_0} \sum_{m=1}^{m_0} (x_m - x_{m-1})(y_l - y_{l-1}) \\ &= \sum_{l=1}^{l_0} (y_l - y_{l-1}) \sum_{m=1}^{m_0} (x_m - x_{m-1}) \\ &= (b_1 - a_1) \sum_{l=1}^{l_0} (y_l - y_{l-1}) \\ &= (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \\ &= \mu_2(\Delta) \end{aligned}$$

Нека сега да разгледаме произволно подразделяне  $\Pi = \{\Delta_k\}_{k=1}^{k_0}$ . Можем да намерим правилно подразделяне  $\Pi^*$  на  $\Delta$  такава, че елементите на  $\Pi^* = \{\Delta_l^*\}_{l=1}^{l_0}$ , които се съдържат в  $\Delta_k$ , образуват подразделяне на  $\Delta_k$  (например при размерност 2 продължаваме вертикалните и хоризонтални страни на правоъгълниците от  $\Pi$  в целите интервали). Тогава, използвайки два пъти предишната стъпка, получаваме

$$\mu_n(\Delta) = \sum_{l=1}^{l_0} \mu_n(\Delta_l^*) = \sum_{k=1}^{k_0} \left( \sum_{\Delta_l^* \subset \Delta_k} \mu_n(\Delta_l^*) \right) = \sum_{k=1}^{k_0} \mu_n(\Delta_k) .$$

□

В горното доказателство намерихме "подразделяне  $\Pi^*$  на  $\Delta$  такава, че елементите на  $\Pi^* = \{\Delta_l^*\}_{l=1}^{l_0}$ , които се съдържат в  $\Delta_k$ , образуват подразделяне на  $\Delta_k$ ". В такава ситуация казваме, че  $\Pi^*$  е по-fino (или по-дребно) от  $\Pi$ . Формално

**Дефиниция 2.5.** Нека  $\Pi = \{\Delta_k\}_{k=1}^{k_0}$  и  $\Pi^* = \{\Delta_l^*\}_{l=1}^{l_0}$  са две подразделяния на паралелотопа  $\Delta$ . Казваме, че  $\Pi^*$  е по-fino от  $\Pi$  (или  $\Pi^*$  е вписано в  $\Pi$ ) и пишем  $\Pi^* \geq \Pi$ , ако

$$\{\Delta_l^* : \Delta_l^* \subset \Delta_k\}$$

е подразделяне на  $\Delta_k$  за всяко  $k = 1, 2, \dots, k_0$ .

## 2.2 Въвеждане на Риманов интеграл чрез подхода на Дарбу

В целия параграф ще разглеждаме дадена ограничена функция  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ , където  $\Delta$  е паралелотоп в  $\mathbb{R}^n$ .

Нека  $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$  е произволно подразделяне на  $\Delta$ . По аналогия с едномерния случай дефинираме

$$s_f(\Pi) = \sum_{i=1}^{i_0} m_i \mu_n(\Delta_i), \text{ където } m_i = \inf\{f(x) : x \in \Delta_i\}, i = 1, \dots, i_0 .$$

Числото  $s_f(\Pi)$  наричаме *малка сума на Дарбу* за функцията  $f$ , съответстваща на подразделянето  $\Pi$ . Интуитивно това число е долна оценка за интеграла, който искаме да въведем.

Аналогично

$$S_f(\Pi) = \sum_{i=1}^{i_0} M_i \mu_n(\Delta_i), \text{ където } M_i = \sup\{f(x) : x \in \Delta_i\}, i = 1, \dots, i_0.$$

Сега числото  $S_f(\Pi)$  наричаме *голяма сума на Дарбу* за функцията  $f$ , съответстваща на подразделянето  $\Pi$ . Интуитивно това число е горна оценка за търсения "обем".

Следните две лема точно съответстват на доказаните в ДИС1. Интуитивно, първата лема казва, че оценките, съответстващи на по-дребно подразделяне, са по-точни (горната оценка намалява, а долната се увеличава). Втората лема казва, че всяка долна оценка не надминава коя да е горна оценка, както и би трябвало да бъде.

**Лема 2.6.** Ако  $\Pi^* \geq \Pi$ , то  $s_f(\Pi^*) \geq s_f(\Pi)$  и  $S_f(\Pi^*) \leq S_f(\Pi)$ .

*Доказателство.* Без ограничение на общността, нека  $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$  и  $\Pi^* = \{\Delta_1^j\}_{j=1}^{j_0} \cup \{\Delta_i\}_{i=2}^{i_0}$ , т.е.  $\Pi^*$  се получава от  $\Pi$  чрез подразделяне  $\{\Delta_1^j\}_{j=1}^{j_0}$  на първия елемент  $\Delta_1$  на  $\Pi$ . Да означим  $m_i = \inf\{f(x) : x \in \Delta_i\}$  за  $i = 1, \dots, i_0$ ,  $m_1^j = \inf\{f(x) : x \in \Delta_1^j\}$  за  $j = 1, \dots, j_0$ . Забележете, че  $m_1 \leq m_1^j$  за всяко  $j = 1, \dots, j_0$ , защото  $\Delta_1^j \subset \Delta_1$ . Оттук получаваме, че

$$\begin{aligned} s_f(\Pi^*) - s_f(\Pi) &= \sum_{j=1}^{j_0} m_1^j \mu_n(\Delta_1^j) + \sum_{i=2}^{i_0} m_i \mu_n(\Delta_i) - \sum_{i=1}^{i_0} m_i \mu_n(\Delta_i) \\ &= \sum_{j=1}^{j_0} m_1^j \mu_n(\Delta_1^j) - m_1 \mu_n(\Delta_1) \\ &\geq \sum_{j=1}^{j_0} m_1 \mu_n(\Delta_1^j) - m_1 \mu_n(\Delta_1) \\ &= m_1 \left( \sum_{j=1}^{j_0} \mu_n(\Delta_1^j) - \mu_n(\Delta_1) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

поради Твърдение 2.4.

Аналогично доказваме, че  $S_f(\Pi^*) \leq S_f(\Pi)$ . □

**Лема 2.7.** За произволни подразделяния  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  на  $\Delta$  е в сила  $s_f(\Pi_1) \leq S_f(\Pi_2)$ .

*Доказателство.* Нека  $\Pi^* \geq \Pi_1$ ,  $\Pi^* \geq \Pi_2$  (ясно е, че такова подразбиване  $\Pi^*$  на  $\Delta$  съществува - например може да се вземе множеството от неизродените паралелотопи, получени като сечение на елемент от  $\Pi_1$  с елемент от  $\Pi_2$ ). Тогава

$$s_f(\Pi_1) \leq s_f(\Pi^*) \leq S_f(\Pi^*) \leq S_f(\Pi_2),$$

като първото и последното неравенство се получават от предишната лема, а средното неравенство се получава от очевидното съображение, че инфимумът на множество от реални числа не надминава неговия супремум, и от дефиницията на малка и голяма сума на Дарбу. □

Тъй като функцията  $f$  е ограничена, множеството от всевъзможните малки суми на Дарбу (както и множеството от всевъзможните големи суми на Дарбу) на  $f$  е ограничено и следователно можем да дефинираме *долен интеграл* на  $f$  върху  $\Delta$

$$\int_{\Delta} f := \sup \{s_f(\Pi) : \Pi \text{ е подразделяне на } \Delta\}$$

и *горен интеграл* на  $f$  върху  $\Delta$

$$\overline{\int}_{\Delta} f := \inf \{S_f(\Pi) : \Pi \text{ е подразделяне на } \Delta\} .$$

Да отбележим, че от Лема 2.7 следва, че при произволно фиксирано подразделяне  $\Pi$  на  $\Delta$  е в сила  $\int_{\Delta} f \leq S_f(\Pi)$ , откъдето следва неравенството  $\int_{\Delta} f \leq \overline{\int}_{\Delta} f$ .

**Дефиниция 2.8.** Функцията  $f$  се нарича *интегруема по Риман*, когато долният и горният интеграл на  $f$  върху  $\Delta$  съвпадат (или еквивалентно съществува единствено число, разделящо малките от големите суми на Дарбу). Тогава общата стойност на долния и горния интеграл на  $f$  върху  $\Delta$  се нарича *интеграл на  $f$  върху  $\Delta$*  и се означава с  $\int_{\Delta} f$  или  $\int_{\Delta} f(x)dx$ .

Други разпространени означения в съответните размерности са

$$\begin{aligned} n = 1 & \quad \int_{[a,b]} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \\ n = 2 & \quad \iint_{\Delta} f(x_1, x_2)dx_1dx_2 \\ n = 3 & \quad \iiint_{\Delta} f(x_1, x_2, x_3)dx_1dx_2dx_3 \end{aligned}$$

Следният критерий за интегруемост се формулира и доказва точно като в курса по ДИС1:

**Твърдение 2.9.** (*Първа форма на критерия за интегруемост*) Функцията  $f$  е интегруема по Риман върху  $\Delta$  точно тогава, когато за всяко положително число  $\varepsilon$  съществуват подразделяния  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  на  $\Delta$  такива, че  $S_f(\Pi_1) - s_f(\Pi_2) < \varepsilon$ . Еквивалентно,  $f$  е интегруема по Риман върху  $\Delta$  точно тогава, когато за всяко положително число  $\varepsilon$  съществува подразделяне  $\Pi$  на  $\Delta$  такова, че  $S_f(\Pi) - s_f(\Pi) < \varepsilon$ .

Следващото твърдение е ново (т.е. не сте правили подобно в ДИС1) и ни е необходимо с оглед доказателството на критерия на Лебег.

**Твърдение 2.10.** (*Втора форма на критерия за интегруемост*) Функцията  $f$  е интегруема по Риман върху  $\Delta$  точно тогава, когато за всяко положително число  $\varepsilon$  и за всяко положително число  $\eta$  съществува подразделяне  $\Pi$  на  $\Delta$  такова, че сумата от мерките на елементите на  $\Pi$ , в които осцилацията на  $f$  е по-голяма или равна на  $\eta$ , е по-малка от  $\varepsilon$ . Формално записано, за всяко  $\varepsilon > 0$  и за всяко  $\eta > 0$  съществува подразделяне  $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ , за което

$$\sum_{M_i - m_i \geq \eta} \mu_n(\Delta_i) < \varepsilon .$$

*Доказателство.* Нека  $f$  е интегруема по Риман върху  $\Delta$  и  $\varepsilon > 0$  и  $\eta > 0$  са произволни положителни числа. Тогава от първата форма на критерия за интегруемост следва, че

съществува подразделяне  $\Pi$  на  $\Delta$  такова, че  $S_f(\Pi) - s_f(\Pi) < \varepsilon\eta$ . Нека  $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$  и  $m_i, M_i$  са дефинирани както обикновено. Тогава

$$\begin{aligned} \varepsilon\eta &> S_f(\Pi) - s_f(\Pi) = \sum_{i=1}^{i_0} M_i \mu_n(\Delta_i) - \sum_{i=1}^{i_0} m_i \mu_n(\Delta_i) = \sum_{i=1}^{i_0} (M_i - m_i) \mu_n(\Delta_i) \\ &= \sum_{M_i - m_i < \eta} (M_i - m_i) \mu_n(\Delta_i) + \sum_{M_i - m_i \geq \eta} (M_i - m_i) \mu_n(\Delta_i) \\ &\geq \sum_{M_i - m_i \geq \eta} (M_i - m_i) \mu_n(\Delta_i) \geq \sum_{M_i - m_i \geq \eta} \eta \mu_n(\Delta_i) = \eta \sum_{M_i - m_i \geq \eta} \mu_n(\Delta_i) \end{aligned}$$

Съкращаваме на  $\eta$  и получаваме търсеното неравенство за така намереното подразделяне  $\Pi$  на  $\Delta$ .

Сега обратно, нека е в сила условието от критерия и искаме да докажем, че  $f$  е интегрируема. За целта избираме произволно положително число  $\zeta$  и ще търсим подразбиване  $\Pi$  на  $\Delta$ , за което разстоянието между съответната голяма и малка сума на Дарбу е по-малка от  $\zeta$ . Това би решило въпроса според първата форма на критерия за интегрируемост. Ще намерим  $\Pi$  от даденото условие с достатъчно малки (зависещи от  $\zeta$ )  $\varepsilon > 0$  и  $\eta > 0$ . Ще се сетим колко малки трябва да изберем тези числа, след като оценим разликата между съответните голяма и малка сума на Дарбу по подобен начин като преди, само че отгоре:

$$\begin{aligned} S_f(\Pi) - s_f(\Pi) &= \sum_{M_i - m_i < \eta} (M_i - m_i) \mu_n(\Delta_i) + \sum_{M_i - m_i \geq \eta} (M_i - m_i) \mu_n(\Delta_i) \\ &\leq \eta \sum_{M_i - m_i < \eta} \mu_n(\Delta_i) + (M - m) \sum_{M_i - m_i \geq \eta} \mu_n(\Delta_i) < \eta \mu_n(\Delta) + \varepsilon(M - m), \end{aligned}$$

където  $M := \sup\{f(x) : x \in \Delta\}$  и  $m := \inf\{f(x) : x \in \Delta\}$ . Следователно ако изберем

$$\varepsilon := \frac{\zeta}{2(M - m)} \text{ и } \eta := \frac{\zeta}{2\mu_n(\Delta)},$$

за подразбиването  $\Pi$  на  $\Delta$ , получено от даденото условие, е в сила  $S_f(\Pi) - s_f(\Pi) < \zeta$ .  $\square$

### 2.3 Суми на Риман и граница на суми на Риман

Сумите на Риман се дефинират точно по същия начин като в курса по ДИС1. Те се различават от сумите на Дарбу по това, мярката на съответното паралелотопче се умножава по стойността на функцията в произволна пробна точка (sample point) от него (а не по супремума или инфимума на стойностите на функцията в паралелотопчето). Да отбележим, че няма проблем да дефинираме суми на Риман и за неограничена функция.

И тъй, нека  $\Delta$  е паралелотоп в  $\mathbb{R}^n$  и  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ .

Фиксираме подразбиване  $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$  на  $\Delta$  и избираме пробни точки  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i_0}\}$ , където  $\xi_i \in \Delta_i$  за всяко  $i = 1, \dots, i_0$ . Тогава числото

$$\sigma_f(\Pi, \xi) := \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi_i) \mu_n(\Delta_i)$$

наричаме *сума на Риман* на функцията  $f$  за подразбиването  $\Pi$  с пробни точки  $\xi$ .

**Твърдение 2.11.** Нека  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  е ограничена и  $\Pi$  е подразбиване на  $\Delta$ . Тогава

$$s_f(\Pi) = \inf\{\sigma_f(\Pi, \xi) : \xi \text{ са пробни точки за } \Pi\}$$

$$S_f(\Pi) = \sup\{\sigma_f(\Pi, \xi) : \xi \text{ са пробни точки за } \Pi\}$$

*Доказателство.* Очевидно  $m_i = \inf\{f(x) : x \in \Delta_i\} \leq f(\xi_i) \leq \sup\{f(x) : x \in \Delta_i\} = M_i$  за всяко  $i = 1, \dots, i_0$  и за всеки избор на пробните точки  $\xi$ . Умножавайки тези неравенства с  $\mu_n(\Delta_i)$  и събирайки ги, получаваме  $s_f(\Pi) \leq \sigma_f(\Pi, \xi) \leq S_f(\Pi)$ . Следователно малката (голямата) сума на Дарбу за  $\Pi$  е долна (горна) граница за сумите на Риман за същото подразбиване. Да проверим например, че малката сума на Дарбу за  $\Pi$  е точна долна граница за сумите на Риман за  $\Pi$ . Избираме произволно  $\varepsilon > 0$  и от  $m_i + \frac{\varepsilon}{i_0 \mu_n(\Delta_i)} > m_i$  намираме  $\xi_i \in \Delta_i$  с  $f(\xi_i) < m_i + \frac{\varepsilon}{i_0 \mu_n(\Delta_i)}$  за всяко  $i = 1, \dots, i_0$ . За така намерените пробни точки  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i_0}\}$  имаме

$$\sigma_f(\Pi, \xi) = \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi_i) \mu_n(\Delta_i) < \sum_{i=1}^{i_0} \left( m_i + \frac{\varepsilon}{i_0 \mu_n(\Delta_i)} \right) \mu_n(\Delta_i) = s_f(\Pi) + \varepsilon ,$$

следователно всяко число, по-голямо от  $s_f(\Pi)$ , вече не е долна граница за сумите на Риман за  $\Pi$ .  $\square$

За да можем да пренесем идеята за граница на суми на Риман от едномерния в многомерния случай, се нуждаем от подходяща дефиниция на диаметър на подразбиване. Да напомним, че ако  $A$  е ограничено подмножество на  $\mathbb{R}^n$ , то диаметър на  $A$  наричаме числото

$$\text{diam}(A) = \sup\{\|x - y\| : x \in A, y \in A\} .$$

**Дефиниция 2.12.** Нека  $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$  е подразбиване на паралелотопа  $\Delta$ . Диаметър на  $\Pi$  наричаме най-големия от диаметрите на паралелотопите от  $\Pi$ :

$$d(\Pi) = \max\{\text{diam}(\Delta_i) : i = 1, 2, \dots, i_0\}$$

**Дефиниция 2.13.** Казваме, че сумите на Риман за функцията  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  имат граница числото  $I$ , когато диаметърът на подразбиването клони към нула, и пишем

$$\lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} \sigma_f(\Pi, \xi) = I ,$$

ако за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta > 0$  такава, че за всяко подразбиване  $\Pi$  на  $\Delta$  с  $d(\Pi) < \delta$  и при всеки избор на пробните точки  $\xi$  за  $\Pi$  е в сила  $|\sigma_f(\Pi, \xi) - I| < \varepsilon$ .

## 2.4 Еквивалентност на подхода чрез суми на Дарбу и на подхода чрез суми на Риман

**Теорема 2.14.** Нека  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ , където  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  е паралелотоп, и нека сумите на Риман за  $f$  имат граница  $I$ , когато диаметърът на подразбиването клони към нула. Тогава функцията  $f$  е ограничена, интегрируема по Риман и  $I = \int_{\Delta} f$ .

*Доказателство.* Нека  $\varepsilon = 1 > 0$ . Тогава съществува  $\delta > 0$  такава, че за всички подразбивания  $\Pi$  с  $d(\Pi) < \delta$  и при всеки избор на пробните точки  $\xi$  за  $\Pi$  е в сила  $I - 1 < \sigma_f(\Pi, \xi) < I + 1$ . Да фиксираме произволно подразбиване  $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$  с диаметър, по-малък от  $\delta$ . Ще докажем, че функцията е ограничена върху всеки елемент на  $\Pi$ .

Да фиксираме  $i \in \{1, \dots, i_0\}$  и някакви точки  $\xi_j \in \Delta_j$  за всяко  $j \neq i$ ,  $j \in \{1, \dots, i_0\}$ . Тогава получаваме, че

$$\frac{(I - 1) - \sum_{j \neq i} f(\xi_j) \mu_n(\Delta_j)}{\mu_n(\Delta_i)} < f(\xi_i) < \frac{(I + 1) - \sum_{j \neq i} f(\xi_j) \mu_n(\Delta_j)}{\mu_n(\Delta_i)}$$

за всяко  $\xi_i \in \Delta_i$ . Следователно  $f$  е ограничена върху  $\Delta_i$ ,  $i \in \{1, \dots, i_0\}$ . С това ограничеността на  $f$  е доказана, защото подразбиването  $\Pi$  има краен брой елементи.

Нека  $\varepsilon$  е произволно положително число. Тогава съществува  $\delta > 0$  такава, че за всяко подразбиване  $\Pi$  на  $\Delta$  с  $d(\Pi) < \delta$  и при всеки избор на пробните точки  $\xi$  за  $\Pi$  е в сила  $I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_f(\Pi, \xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}$ . Използвайки това и Твърждение 2.11, получаваме

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leq s_f(\Pi) \leq S_f(\Pi) \leq I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Следователно

$$S_f(\Pi) - s_f(\Pi) \leq \left(I + \frac{\varepsilon}{3}\right) - \left(I - \frac{\varepsilon}{3}\right) = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

и получаваме интегрируемостта на  $f$  от първата форма на критерия за интегрируемост. Нещо повече, от горните неравенства и от факта, че  $\int_{\Delta} f$  се намира между  $s_f(\Pi)$  и  $S_f(\Pi)$ , получаваме, че  $I - \frac{\varepsilon}{3} \leq \int_{\Delta} f \leq I + \frac{\varepsilon}{3}$  и тъй като  $\varepsilon$  беше произволно положително число, то  $\int_{\Delta} f = I$ .  $\square$

**Теорема 2.15.** Нека  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ , където  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  е паралелотоп, е интегрируема по Риман. Тогава сумите на Риман за  $f$  имат граница  $\int_{\Delta} f$ , когато диаметърът на подразбиването клони към нула.

*Доказателство.* Нека  $\varepsilon > 0$  е произволно. Ако докажем, че съществува  $\delta > 0$  такава, че за всяко подразбиване  $\Pi$  на  $\Delta$  с  $d(\Pi) < \delta$  е в сила  $I - \varepsilon < s_f(\Pi) \leq S_f(\Pi) < I + \varepsilon$ , доказателството ще е завършено, защото при произволен избор на представителните точки  $\xi$  имаме  $s_f(\Pi) \leq \sigma_f(\Pi, \xi) \leq S_f(\Pi)$  и следователно от горните неравенства получаваме  $|\sigma_f(\Pi, \xi) - I| < \varepsilon$ .

И така  $\varepsilon > 0$ . От дефиницията за интеграл на Риман следва, че съществува  $\Pi_1 = \{\square_j\}_{j=1}^{j_0}$  подразделяне на  $\Delta$  такава, че

$$S_f(\Pi_1) < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

От  $f$  интегрируема следва, че  $f$  е ограничена. Нека  $M = \sup\{|f(x)| : x \in \Delta\}$ . Означаваме с  $P_{\Pi_1}$  общата площ на границите на паралелотопчетата от  $\Pi_1$ , т.е.  $P_{\Pi_1} := \sum_{j=1}^{j_0} \mu_{n-1}(\partial \square_j)$ . Полагаме

$$\delta = \frac{\varepsilon}{8MP_{\Pi_1}} > 0.$$

Искаме да оценим  $S_f(\Pi)$ , където  $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$  е произволно подразбиване на  $\Delta$  с диаметър, по-малък от  $\delta$ .



Нека сега  $\Pi_2$  да е подразбиване на  $\Delta$ , съставено от сеченията на елементите на  $\Pi$  и  $\Pi_1$ , т.е.  $\Pi_2 = \{\square_j \cap \Delta_i\}_{i=1}^{i_0} \sum_{j=1}^{j_0}$  и след това изхвърляме празните множества. Тогава

$$d(\Pi_2) \leq d(\Pi) < \delta .$$

Тъй като  $\Pi_2 \geq \Pi_1$ , то

$$S_f(\Pi_2) \leq S_f(\Pi_1) < I + \frac{\varepsilon}{2} .$$

Ще оценим отгоре  $S_f(\Pi) - S_f(\Pi_2)$ . Делим елементите на  $\Pi$  на две групи - които се секат с границата на някой елемент на  $\Pi_1$  и които се съдържат изцяло във вътрешността на елемент на  $\Pi_1$ . Събираемите, съответстващи на елементите от втория вид, участват както в  $S_f(\Pi)$ , така и в  $S_f(\Pi_2)$  и се съкращават. Нека индексите на елементите на  $\Pi$  от първия вид са  $I_1 \subset \{1, 2, \dots, i_0\}$ .

Тогава

$$S_f(\Pi) - S_f(\Pi_2) = \sum_{i \in I_1} M_i \mu_n(\Delta_i) - \sum_{i \in I_1} \sum_{j=1}^{j_0} M_{ij} \mu_n(\Delta_i \cap \square_j) ,$$

където, разбира се,  $M_i = \sup\{f(x) : x \in \Delta_i\}$  и  $M_{ij} = \sup\{f(x) : x \in \Delta_i \cap \square_j\}$ . Тъй като  $\text{diam}(\Delta_i) < \delta$ , то  $\sum_{i \in I_1} \mu_n(\Delta_i) \leq 2\delta P_{\Pi_1}$  и следователно

$$\left| \sum_{i \in I_1} M_i \mu_n(\Delta_i) \right| \leq \sum_{i \in I_1} |M_i| \mu_n(\Delta_i) \leq M 2\delta P_{\Pi_1} .$$

Аналогично  $\sum_{i \in I_1} \sum_{j=1}^{j_0} \mu_n(\Delta_i \cap \square_j) \leq 2\delta P_{\Pi_1}$  влече

$$\left| \sum_{i \in I_1} \sum_{j=1}^{j_0} M_{ij} \mu_n(\Delta_i \cap \square_j) \right| \leq M 2\delta P_{\Pi_1} .$$

Следователно

$$S_f(\Pi) - S_f(\Pi_2) \leq \left| \sum_{i \in I_1} M_i \mu_n(\Delta_i) \right| + \left| \sum_{i \in I_1} \sum_{j=1}^{j_0} M_{ij} \mu_n(\Delta_i \cap \square_j) \right| \leq 4M P_{\Pi_1} \delta = \frac{\varepsilon}{2} .$$

Тогава имаме

$$S_f(\Pi) = (S_f(\Pi) - S_f(\Pi_2)) + S_f(\Pi_2) \leq \frac{\varepsilon}{2} + S_f(\Pi_2) < \frac{\varepsilon}{2} + I + \frac{\varepsilon}{2} = I + \varepsilon .$$

Аналогично доказваме, че  $s_f(\Pi) > I - \varepsilon$  за всички  $\Pi$  с достатъчно малък диаметър, с което доказателството е завършено.  $\square$

### 3 Лекция 3: Множества, пренебрежими по Лебег и критерий на Лебег за интегрируемост по Риман

Целта на тази лекция е да докажем необходимо и достатъчно условие за интегрируемост по Риман, което свързва интегрируемостта с "големината" на множеството от точките на непрекъснатост на функцията. За да можем да формулираме точно критерия, се нуждаем от понятието "множество, пренебрежимо по Лебег". Само по себе си това понятие е изключително важно, затова ще отделим време за неговото изучаване.

#### 3.1 Множества, пренебрежими по Лебег

**Дефиниция 3.1.** Едно подмножество  $A$  на  $\mathbb{R}^n$  наричаме *пренебрежимо по Лебег* в  $\mathbb{R}^n$ , ако за всяко положително  $\varepsilon$  можем да покрием множеството с изброимо много паралелотопи, чиято сумарна мярка е по-малка от  $\varepsilon$ . Формално записано, за произволно  $\varepsilon > 0$  съществуват  $\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$  (където  $\Delta_k$  са затворени паралелотопи в  $\mathbb{R}^n$ ) такива, че

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \supset A \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_k) < \varepsilon .$$

**Пример 3.2.** Изродените паралелотопи са пренебрежими множества. Точките са изродени паралелотопи в  $\mathbb{R}^n$  за всяко естествено  $n$  и следователно са пренебрежими множества.

Очевидно е, че подмножество на пренебрежимо множество е пренебрежимо. Следващото твърдение съдържа едно от най-важните и често употребявани свойства на множествата, пренебрежими по Лебег:

**Твърдение 3.3.** Ако  $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$  е редица от пренебрежими множества, то обединението им  $A$  също е пренебрежимо множество.

*Доказателство.* Да фиксираме произволно положителното число  $\varepsilon$ . Тъй като  $A_1$  е пренебрежимо и  $\varepsilon/2 > 0$ , то съществуват паралелотопи  $\{\Delta_k^1 : k = 1, 2, \dots\}$  такива, че

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k^1 \supset A_1 \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_k^1) < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Аналогично постъпваме с множествата  $A_2, A_3$  и т.н. За да фиксираме означенията, нека  $m$  е естествено число. Тъй като  $A_m$  е пренебрежимо и  $\varepsilon/2^m > 0$ , то съществуват паралелотопи  $\{\Delta_k^m : k = 1, 2, \dots\}$  такива, че

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k^m \supset A_m \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_k^m) < \frac{\varepsilon}{2^m} .$$

По този начин построихме паралелотопите  $\{\Delta_k^m : k = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots\}$ . Те са изброимо много и очевидно

$$\bigcup_{m,k=1}^{\infty} \Delta_k^m = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k^m \right) \supset \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = A .$$

От друга страна

$$\sum_{m,k=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_k^m) = \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_k^m) \right) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^m} = \varepsilon .$$

□

**Важна забележка:** В последния ред от горното доказателство допуснахме липса на прецизност. За да бъдем точни, трябваше да подредим индексите  $\{(m, k) : m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}$  в редица  $\{(\pi_1(i), \pi_2(i)) : i \in \mathbb{N}\}$  и да разгледаме реда  $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_{\pi_2(i)}^{\pi_1(i)})$ . Всъщност, използвахме следното твърдение: Ако  $a_k^m$  са неотрицателни числа за всички естествени индекси  $m$  и  $n$  и  $\{(\pi_1(i), \pi_2(i)) : i \in \mathbb{N}\}$  е кое да е подреждане на  $\mathbb{N}^2$  в редица, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{\pi_2(i)}^{\pi_1(i)} = \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k^m \right) .$$

Препоръчвам ви да се опитате да си докажете това твърдение сами.

**Пример 3.4.** Тъй като точките са пренебрежими множества, горното твърдение влече, че множеството от рационалните числа  $\mathbb{Q}$  е пренебрежимо в  $\mathbb{R}$ . Аналогично  $\mathbb{Q}^n$  е пренебрежимо в  $\mathbb{R}^n$ .

**Твърдение 3.5.** *Едно подмножество  $A$  на  $\mathbb{R}^n$  е пренебрежимо по Лебег в  $\mathbb{R}^n$  точно тогава, когато за всяко положително  $\varepsilon$  можем да покроем множеството с вътрешностите на изброимо много паралелотопи, чиято сумарна мярка е по-малка от  $\varepsilon$ .*

*Доказателство.* В едната посока твърдението е очевидно. Нека сега  $A$  е пренебрежимо по Лебег и  $\varepsilon > 0$  е произволно. Тогава съществуват  $\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$  (където  $\Delta_k$  са затворени паралелотопи в  $\mathbb{R}^n$ ) такива, че

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \supset A \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_k) < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Да изберем ред с положителни членове  $\alpha_k > 0$  и сума  $\varepsilon/2$ , т.е.  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \varepsilon/2$  (например можем да изберем като в доказателството на предишното твърдение  $\alpha_k = \varepsilon/2^{k+1}$ ). Ясно е, че за всяко  $k \in \mathbb{N}$  можем да намерим затворен паралелотоп  $\square_k$ , който съдържа  $\Delta_k$  във вътрешността си ( $\overset{\circ}{\square}_k \supset \Delta_k$ ) и такъв, че  $\mu_n(\square_k) \leq \mu_n(\Delta_k) + \alpha_k$  (трябва да раздуем достатъчно малко всеки от координатните интервали). Тогава  $\{\square_k\}_{k=1}^{\infty}$  са изброимо много паралелотопи, за които

$$\begin{aligned} \bigcup_{k=1}^{\infty} \overset{\circ}{\square}_k &\supset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \supset A \text{ и} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(\square_k) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_n(\Delta_k) + \alpha_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon . \end{aligned}$$

□

Следващата лема е техническа и почти очевидна от геометрична гледна точка.

**Лема 3.6.** Нека  $\{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$  са краен брой паралелотопи в  $\mathbb{R}^n$ , които не се припокриват, т.е.  $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$  винаги, когато  $i \neq j$ . Нека  $\{\square_k\}_{k=1}^{k_0}$  са краен брой паралелотопи, за които  $\bigcup_{k=1}^{k_0} \square_k \supset \bigcup_{i=1}^{i_0} \Delta_i$ . Тогава  $\sum_{k=1}^{k_0} \mu_n(\square_k) \geq \sum_{i=1}^{i_0} \mu_n(\Delta_i)$ .

*Доказателство.* Нека  $\Pi_i$  е подразбиване на  $\Delta_i$ , всеки елемент на което се съдържа в някой от паралелотопите  $\{\square_k\}_{k=1}^{k_0}$  (тук  $i = 1, \dots, i_0$ ). Сега за всяко  $k \in \{1, \dots, k_0\}$  можем да построим подразбиване  $\Pi^k$  на  $\square_k$  такава, че

$$\Pi_i^k := \{\Delta_i \cap \square : \square \in \Pi^k, \Delta_i \cap \square \text{ непразен, неизроден}\} \equiv \Pi_i, \quad i = 1, \dots, i_0.$$

Да забележим, че  $\Pi_i^k \cap \Pi_j^k = \emptyset$  винаги, когато  $i \neq j$ , защото  $\Delta_i$  и  $\Delta_j$  не се припокриват. Тогава, използвайки два пъти Твърдение 2.4, получаваме

$$\sum_{k=1}^{k_0} \mu_n(\square_k) = \sum_{k=1}^{k_0} \left( \sum_{\square \in \Pi^k} \mu_n(\square) \right) \geq \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{i=1}^{i_0} \left( \sum_{\square \in \Pi_i^k} \mu_n(\square) \right) \geq \sum_{i=1}^{i_0} \left( \sum_{\square \in \Pi_i} \mu_n(\square) \right) = \sum_{i=1}^{i_0} \mu_n(\Delta_i).$$

□

**Пример 3.7.** Неизродените паралелотопи в  $\mathbb{R}^n$  не са пренебрежими в  $\mathbb{R}^n$ .

Наистина, един паралелотоп  $\Delta$  в  $\mathbb{R}^n$  е неизроден точно тогава, когато  $\mu_n(\Delta) > 0$ . Сега ако допуснем, че  $\Delta$  е пренебрежим, то според Твърдение 3.5 съществуват  $\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$  (където  $\Delta_k$  са паралелотопи в  $\mathbb{R}^n$ ) такива, че

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \supset \Delta \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_k) < \frac{\mu_n(\Delta)}{2}.$$

Тъй като  $\Delta$  е компактен и  $\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$  е негово отворено покритие, то съществува  $k_0 \in \mathbb{N}$  такава, че

$$\bigcup_{k=1}^{k_0} \Delta_k \supset \Delta.$$

Сега използваме горната лема с  $\Delta$  единствен елемент на множеството от паралелотопите, които не се припокриват, и с  $\square_k := \Delta_k$ . Получаваме

$$\mu_n(\Delta) \leq \sum_{k=1}^{k_0} \mu_n(\Delta_k) < \frac{\mu_n(\Delta)}{2}, \text{ противоречие.}$$

**Твърдение 3.8.** Ако  $U$  е непразно отворено множество, то  $U$  не е пренебрежимо.

*Доказателство.* Тъй като  $U$  не е празно, можем да изберем точка  $x_0 \in U$ . Тогава (от отвореността на  $U$ ) съществува  $\varepsilon > 0$  такава, че кълбото  $B_{2\varepsilon}(x_0)$  се съдържа в  $U$ . Да разгледаме паралелотопа

$$\Delta := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_i^0 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \leq x_i \leq x_i^0 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Ако  $x$  е произволна точка от  $\Delta$ , можем да оценим разстоянието

$$\|x - x_0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \right)^2} = \sqrt{n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Следователно  $\Delta \subset B_{2\varepsilon}(x_0) \subset U$ . Паралелотопът  $\Delta$  е неизроден и тогава от горния пример следва, че не е пренебрежимо множество. Оттук и от  $\Delta \subset U$  следва, че  $U$  също не може да е пренебрежимо по Лебег.  $\square$

### 3.2 Критерий на Лебег за интегрируемост по Риман

**Теорема 3.9** (Критерий на Лебег за интегрируемост по Риман). *Нека  $\Delta$  е паралелотоп в  $\mathbb{R}^n$  и  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ . Твърдим, че функцията  $f$  е интегрируема по Риман точно тогава, когато е ограничена и множеството от точките ѝ на прекъсване е пренебрежимо по Лебег.*

Да отбележим, че тази теорема е нова за вас и в едномерния случай ( $n = 1$ ). Спомнете си твърденията, доказани в ДИС1 за "някои класове интегрируеми функции". Всички те са директно следствие от критерия на Лебег. Наистина, ако една функция е непрекъсната в  $[a, b]$ , то тя е ограничена (Вайерщрас) и множеството от точките ѝ на прекъсване е празно, значи пренебрежимо. Ако една ограничена функция има краен брой точки на прекъсване, то тя е интегрируема по критерия на Лебег, защото крайните множества са пренебрежими. Тъй като монотонните функции в  $[a, b]$  са ограничени (стойностите им са между  $f(a)$  и  $f(b)$ ) и имат най-много изброимо много точки на прекъсване, твърдението за тяхната интегрируемост също е следствие от горната теорема.

С  $R_f$  ще означаваме множеството от точките на прекъсване на функцията  $f$ .

*Доказателство.* Ще използваме и в двете посоки на доказателството втората форма на критерия за интегрируемост (Твърждение 2.10).

Нека функцията  $f$  е интегрируема по Риман. Тогава тя, разбира се, е ограничена, и трябва да докажем пренебрежимостта на множеството  $R_f$ . Фиксираме произволно  $\varepsilon > 0$ . Избираме сходящ ред с положителни членове и сума  $\varepsilon$ :  $\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m = \varepsilon$ ,  $\alpha_m > 0$  за всяко естествено  $m$ . Прилагаме втората форма на критерия за интегрируемост за положителните числа  $\alpha_m$  и  $1/m$ . Получаваме подразбиване  $\Pi_m$  на  $\Delta$  такава, че

$$\sum_{M_k^m - m_k^m \geq \frac{1}{m}} \mu_n(\Delta_k^m) < \alpha_m .$$

Да означим с  $\Pi'_m$  множеството от онези елементи на подразбиването  $\Pi_m$ , в които осцилацията на  $f$  е по-голяма или равна на  $1/m$  (т.е. знаем, че  $\sum_{\square \in \Pi'_m} \mu_n(\square) < \alpha_m$ ). Да означим с  $P_m$  множеството от делящите стени на  $\Pi_m$  (т.е.  $P_m$  е множеството от паралелотопите, от които се състои  $\bigcup_{\square \in \Pi_m} \partial \square$ ). Ясно е, че  $P_m$  е крайно множество от изродени паралелотопи. Тогава

$$\left( \bigcup_{m=1}^{\infty} \Pi'_m \right) \cup \left( \bigcup_{m=1}^{\infty} P_m \right)$$

е изброимо множество от паралелотопи в  $\mathbb{R}^n$  със сумарна мярка, по-малка от  $\varepsilon$ . Наистина

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{\square \in \Pi'_m} \mu_n(\square) + \sum_{\square \in P_m} \mu_n(\square) \right) < \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m + 0) = \varepsilon .$$

Остава да се убедим, че обединението на паралелотопите от  $(\bigcup_{m=1}^{\infty} \Pi'_m) \cup (\bigcup_{m=1}^{\infty} P_m)$  покрива  $R_f$ . Да изберем произволна точка

$$x \in \Delta \setminus \left( \bigcup \left\{ \square : \square \in \left( \bigcup_{m=1}^{\infty} \Pi'_m \right) \cup \left( \bigcup_{m=1}^{\infty} P_m \right) \right\} \right).$$

Сега за произволно естествено  $m$  съществува паралелотоп  $\Delta_x^m \in \Pi_m$  такъв, че  $x \in \Delta_x^m$ . При това  $x \in \mathring{\Delta}_x^m$ , защото  $x$  не принадлежи на  $\bigcup_{\square \in \Pi_m} \partial \square$  (това множество се покрива от елементите на  $P_m$ ) и осцилацията на  $f$  в  $\mathring{\Delta}_x^m$  е по-малка от  $1/m$ , защото  $\Delta_x^m \notin \Pi'_m$ . Следователно  $|f(y) - f(x)| < 1/m$  за всяко  $y \in \mathring{\Delta}_x^m$  (заради осцилацията). И тъй, за произволно естествено  $m$  намерихме околност  $\mathring{\Delta}_x^m$  на  $x$  такава, че  $|f(y) - f(x)| < 1/m$  за всяко  $y \in \mathring{\Delta}_x^m$ . Следователно функцията  $f$  е непрекъсната в  $x$ , т.е.  $x \notin R_f$ . С това завършихме доказателството на пренебрежимостта на  $R_f$ .

Сега се обръщаме към доказателството на обратната посока. Предполагаме, че  $f$  е ограничена и множеството от точките ѝ на прекъсване е пренебрежимо по Лебег. Ще доказваме, че  $f$  е интегруема, като използваме втората форма на критерия за интегруемост. За целта избираме произволни  $\varepsilon > 0$  и  $\eta > 0$  и ги фиксираме.

Тъй като  $R_f$  е пренебрежимо и  $\varepsilon > 0$ , от Твърдение 3.5 съществуват изброимо много паралелотопи  $\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$  такива, че

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{\Delta}_k \supset R_f \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_k) < \varepsilon.$$

Да означим

$$C := \Delta \setminus \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{\Delta}_k \right).$$

Множеството  $C$  е компакт (ограничено е, защото се съдържа в  $\Delta$ , а е затворено, защото е сечение на затвореното  $\Delta$  и допълнението на  $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{\Delta}_k$ , което е отворено като обединение на отворени). При това  $C \cap R_f = \emptyset$ , следователно  $f$  е непрекъсната във всяка точка на  $C$ . Прилагаме обобщената теорема на Кантор, която доказахме в първата лекция (Теорема 1.14), към функцията  $f$ . Следователно съществува  $\delta > 0$  такава, че за всяко  $x \in C$  и за всяко  $y \in \Delta$ , за което  $\|y - x\| < \delta$ , е в сила  $|f(x) - f(y)| < \eta/4$ . Да изберем произволно подразбиване  $\Pi$  на  $\Delta$ , чийто диаметър е по-малък от  $\delta$ . Ще докажем, че за това подразбиване е в сила неравенството от втората форма на критерия за интегруемост.

Нека  $\Pi = \{\square_i\}_{i=1}^{i_0}$ . Да проверим, че ако някой от паралелотопите от  $\Pi$  има непразно сечение с  $C$ , то осцилацията на  $f$  върху него е по-малка от  $\eta$ . Наистина, нека  $\square_i \cap C \neq \emptyset$  за някое  $i \in \{1, 2, \dots, i_0\}$ . Фиксираме  $x \in \square_i \cap C$  (такава има) и нека  $y \in \square_i$  е произволна. Тъй като  $\text{diam} \square_i \leq d(\Pi) < \delta$ , получаваме, че  $\|x - y\| < \delta$ . Сега от избора на  $\delta$  от теоремата на Кантор и от  $x \in C$  имаме  $|f(x) - f(y)| < \eta/4$ . Следователно

$$M_i := \sup \{f(y) : y \in \square_i\} \leq f(x) + \frac{\eta}{4},$$

$$m_i := \inf \{f(y) : y \in \square_i\} \geq f(x) - \frac{\eta}{4}.$$

Оттук получаваме, че

$$M_i - m_i \leq \left(f(x) + \frac{\eta}{4}\right) - \left(f(x) - \frac{\eta}{4}\right) = \frac{\eta}{2} < \eta.$$

И тъй, ако осцилацията на  $f$  върху даден елемент от  $\Pi$  е по-голяма или равна на  $\eta$ , то този елемент се съдържа в  $\Delta \setminus C$ . Да означим

$$K := \bigcup \{ \square_i \in \Pi : M_i - m_i \geq \eta \} \subset \Delta \setminus C = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{\Delta}_k .$$

Тъй като  $K$  е компактно обединение на краен брой затворени паралелотопи, то съществува  $k_0 \in \mathbb{N}$  такава, че

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{k_0} \mathring{\Delta}_k \subset \bigcup_{k=1}^{k_0} \Delta_k .$$

Сега можем да приложим Лема 3.6, защото  $K$  е крайно обединение на паралелотопи, които не се припокриват, и да получим

$$\sum_{M_i - m_i \geq \eta} \mu_n(\square_i) \leq \sum_{k=1}^{k_0} \mu_n(\Delta_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_k) < \varepsilon .$$

С това доказателството е завършено.  $\square$

### 3.3 Основни свойства на интеграла на Риман върху паралелотоп

Критерият на Лебег за интегрируемост по Риман улеснява много доказателствата на твърдения за интегрируемост. Следното следствие е добър пример за това:

**Следствие 3.10.** *Нека  $\Delta$  е паралелотоп в  $\mathbb{R}^n$  и нека  $f, g : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  са интегрируеми по Риман. Тогава*

- (а) *Сумата  $f + g$  и произведението  $f \cdot g$  им са интегрируеми по Риман;*
- (б) *Ако съществува  $\varepsilon_0 > 0$  такава, че  $|g(x)| \geq \varepsilon_0$  за всички  $x \in \Delta$ , то частното  $\frac{f}{g}$  е функция, интегрируема по Риман;*
- (в) *По-общо, ако  $\Phi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  е непрекъснатата и  $f_1, \dots, f_k : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  са интегрируеми по Риман, то  $\Phi(f_1, \dots, f_k)$  е интегрируема по Риман.*

*Доказателство.* Ще започнем с доказателството на (в), понеже е ясно, че (а) е частен случай на (в). Тъй като композиция на непрекъснати функции е непрекъсната, веднага получаваме, че ако в дадена точка  $x \in \Delta$  функциите  $f_1, \dots, f_k$  са непрекъснати, то  $\Phi(f_1, \dots, f_k)$  също е непрекъсната в  $x$ . Следователно

$$\Delta \setminus (R_{f_1} \cup R_{f_2} \cup \dots \cup R_{f_k}) \subset \Delta \setminus R_{\Phi(f_1, \dots, f_k)}, \text{ което влече } R_{\Phi(f_1, \dots, f_k)} \subset R_{f_1} \cup R_{f_2} \cup \dots \cup R_{f_k} .$$

Сега от интегрируемостта на  $f_1, \dots, f_k$  следва пренебрежимостта на множествата  $R_{f_1}, R_{f_2}, \dots, R_{f_k}$  и тогава горното включване показва, че  $R_{\Phi(f_1, \dots, f_k)}$  също е пренебрежимо. За да довършим доказателството на (в), остава да проверим ограничеността на  $\Phi(f_1, \dots, f_k)$ . Наистина, тъй като  $f_1, \dots, f_k$  са ограничени, то множеството от стойностите  $\{(f_1(x), \dots, f_k(x)) \in \mathbb{R}^k : x \in \Delta\}$  се съдържа в паралелотоп в  $\mathbb{R}^k$ , който е компактен. Остава да приложим теоремата на Вайерщрас за  $\Phi$ .

Остава да проверим (б). Аналогично на горното получаваме, че  $R_{\frac{f}{g}} \subset R_f \cup R_g$  и следователно  $R_{\frac{f}{g}}$  е пренебрежимо. Нека  $|f(x)| \leq M$  за всяко  $x \in \Delta$  ( $f$  е интегрируема, значи е ограничена). Частното е ограничено, защото

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \frac{M}{\varepsilon_0} \text{ за всяко } x \in \Delta .$$

□

Ще завършим тази лекция с основните свойства на римановия интеграл върху паралелотоп  $\Delta$  в  $\mathbb{R}^n$ :

1. **Линейност.** Нека  $f, g : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  са интегрируеми функции и  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Тогава  $f + g$  и  $\lambda f$  са интегрируеми функции и

$$\int_{\Delta} (f + g) = \int_{\Delta} f + \int_{\Delta} g, \quad \int_{\Delta} (\lambda f) = \lambda \int_{\Delta} f.$$

*Доказателство.* Интегрируемостта я имаме наготово от предишното следствие. Остава да забележим, че за произволно подразбиване  $\Pi$  на  $\Delta$  и за произволни пробни точки  $\xi$  за  $\Pi$  имаме

$$\sigma_{f+g}(\Pi, \xi) = \sigma_f(\Pi, \xi) + \sigma_g(\Pi, \xi) \text{ и } \sigma_{\lambda f}(\Pi, \xi) = \lambda \sigma_f(\Pi, \xi),$$

да напишем горните равенства за редица от подразбивания  $\{\Pi_m\}_{m=1}^{\infty}$  с диаметър, клонящ към нула ( $d(\Pi_m) \rightarrow_{m \rightarrow \infty} 0$ ) и да направим граничен преход. □

2. **Адитивност.** Нека  $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$  е подразделяне на  $\Delta$  и  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ . Твърдим, че  $f$  е интегрируема точно тогава, когато  $f|_{\Delta_1}, f|_{\Delta_2}, \dots, f|_{\Delta_{i_0}}$  са интегрируеми. При това

$$\int_{\Delta} f = \int_{\Delta_1} f + \int_{\Delta_2} f + \dots + \int_{\Delta_{i_0}} f.$$

*Доказателство.* Очевидно  $f$  е ограничена точно тогава, когато  $f|_{\Delta_1}, f|_{\Delta_2}, \dots, f|_{\Delta_{i_0}}$  са ограничени. Тъй като  $R_{f|_{\Delta_i}} \subset R_f$  за всяко  $i = 1, 2, \dots, i_0$ , от интегрируемостта на  $f$  следва интегрируемостта на  $f|_{\Delta_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, i_0$ . Обратната импликация се получава от включването  $R_f \subset R_{f|_{\Delta_1}} \cup R_{f|_{\Delta_2}} \cup \dots \cup R_{f|_{\Delta_{i_0}}}$ .

За да получим равенството, вземаме редица от подразбивания  $\{\Pi^m\}_{m=1}^{\infty}$  с диаметър, клонящ към нула, като  $\Pi^m \geq \Pi$  за всяко естествено  $m$ . Нека  $\xi^m$  са пробни точки за  $\Pi^m$ . Означаваме

$$\Pi_i^m := \{\square \in \Pi^m : \square \subset \Delta_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, i_0.$$

Нека  $\xi_i^m$  са пробните точки от  $\xi^m$ , които са в паралелотопите от  $\Pi_i^m$ . Тогава

$$\sigma_f(\Pi^m, \xi^m) = \sigma_f(\Pi_1^m, \xi_1^m) + \sigma_f(\Pi_2^m, \xi_2^m) + \dots + \sigma_f(\Pi_{i_0}^m, \xi_{i_0}^m).$$

Тъй като сме сигурни, че всяко събираемо има граница при  $m \rightarrow \infty$  и тя е съответният интеграл, правим граничен преход и получаваме търсеното равенство. □

3. **Монотонност.** Нека  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  е интегрируема и  $f(x) \geq 0$  за всяко  $x \in \Delta$ . Тогава  $\int_{\Delta} f \geq 0$ .

(Директно от факта, че малките суми на Дарбу за  $f$  са неотрицателни.)

**Следствие 1.** Нека  $f, g : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  са интегрируеми функции и  $f(x) \geq g(x)$  за всяко  $x \in \Delta$ . Тогава  $\int_{\Delta} f \geq \int_{\Delta} g$ .



(Наистина,  $\int_{\Delta} f - \int_{\Delta} g = \int_{\Delta} (f - g) \geq 0$  от линейността и монотонността.)

**Следствие 2.** Ако  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  е интегрируема, то  $|f|$  е интегрируема и  $|\int_{\Delta} f| \leq \int_{\Delta} |f|$ .

(Интегрируемостта е директна от критерия на Лебег, а неравенството от  $-|f| \leq f \leq |f|$  и предишното следствие.)

## 4 Лекция 4: Мярка на Пеано-Жордан. Интеграл върху измеримо множество

В тази лекция ще приложим знанията ни за риманов интеграл върху паралелотоп, за да можем по един разумен начин да приписваме мярка на някои подмножества на  $\mathbb{R}^n$ . Да отбележим, че засега сме говорили за мярка само на паралелотопи.

### 4.1 Множества, измерими по Пеано-Жордан

Нека  $A$  е ограничено подмножество на  $\mathbb{R}^n$ .

## 5 Лекция 5: Теорема на Фубини. Интегриране върху криволинеен трапец и цилиндрично тяло. Принцип на Кавалиери. Физически приложения на кратните интеграли. Примери

## 6 Лекция 6: Теорема за смяна на променливите в кратен интеграл 1

## 7 Лекция 7: Теорема за смяна на променливите в кратен интеграл 2

## 8 Лекция 8: Криволинеен интеграл от първи род

## 9 Лекция 9: Криволинеен интеграл от втори род

## 10 Лекция 10: Независимост от пътя на криволинейния интеграл от втори род

## 11 Лекция 11: Лице на повърхнина

В следващата част от курса ще изучаваме интегрирането върху двумерна повърхнина в тримерното евклидово пространство. Такава повърхнина може да бъде зададена с уравнение, но в този курс ние ще използваме параметричния подход.

### 11.1 Елементарна гладка параметрично зададена повърхнина. Допирателно пространство

Параметрите ще се менят в област  $\Omega$ , съдържаща се в  $\mathbb{R}^2$ . Най-често ще ги означаваме с  $u = (u_1, u_2) \in \Omega$ . Параметризацията  $\varphi$  е гладко изображение с дефиниционна област  $\Omega$  и област от стойности  $\mathbb{R}^3$ . Условието за регулярност (съответстващо на условието производната да не се анулира в случая на параметрично зададена крива) е матрицата  $\varphi'(u)$  да има пълен ранг във всяка точка на  $\Omega$ . Скалярно записано,

$$\varphi(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u_1, u_2) \\ \varphi_2(u_1, u_2) \\ \varphi_3(u_1, u_2) \end{pmatrix}, \quad \varphi'(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}(u_1, u_2) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2}(u_1, u_2) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1}(u_1, u_2) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2}(u_1, u_2) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_1}(u_1, u_2) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_2}(u_1, u_2) \end{pmatrix}$$

и условията са  $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  (т.е. частните производни  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $j \in \{1, 2\}$  съществуват и са непрекъснати в  $\Omega$ ) и  $\text{rg } \varphi' = 2$  в  $\Omega$ . Тогава множеството  $S = \varphi(\Omega)$  наричаме *елементарна гладка параметрично зададена повърхнина*.

Кривите  $\varphi(t, u_2)$ ,  $(t, u_2) \in \Omega$ , където  $u_2$  е фиксирано произволно, лежат върху  $S$  и се наричат *координатни линии*. Другото семейство координатни линии е  $\varphi(u_1, t)$ ,  $(u_1, t) \in \Omega$ , където  $u_1$  е фиксирано произволно.

**Пример 11.1.** Цилиндрична повърхнина.

Нека  $\Gamma$  е гладка регулярна параметрично зададена равнинна крива. Означаваме с  $\alpha \in C^1(\Delta, \mathbb{R}^2)$ , където  $\Delta$  е отворен интервал и  $\dot{\alpha} \neq \mathbf{0}$ , една параметризация на  $\Gamma = \alpha(\Delta)$ . Тогава

$$\varphi(t, z) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{където } t \in \Delta, z \in \mathbb{R}, \text{ е параметризация на цилиндричната повърхност}$$

$$S = \varphi(\Delta \times \mathbb{R}). \text{ Наистина, рангът на } \alpha'(t, z) = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1(t) & 0 \\ \dot{\alpha}_2(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ е пълен, защото ако допуснем, че}$$

всички минори от втори ред на  $\alpha'(t, z)$  са нули, ще получим  $\dot{\alpha}(t) = \mathbf{0}$ , което е противоречие с регулярността на кривата.

**Пример 11.2.** Ротационна повърхнина.

Нека  $\Gamma$  е гладка регулярна параметрично зададена равнинна крива, лежаща в горната полуравнина. Означаваме с  $\alpha \in C^1(\Delta, \mathbb{R}^2)$ , където  $\Delta$  е отворен интервал,  $\dot{\alpha} \neq \mathbf{0}$  и  $\alpha_2 > 0$ , една параметризация на  $\Gamma = \alpha(\Delta)$ . Тогава

$$\varphi(t, \theta) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \cos \theta \\ \alpha_2(t) \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \text{където } t \in \Delta \text{ и } \theta \in \mathbb{R},$$

задава гладка повърхнина в пространството. От проверка се нуждае само условието за ранга. Пресмятаме минорите от втори ред на

$$\varphi'(t, \theta) = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1(t) & 0 \\ \dot{\alpha}_2(t) \cos \theta & -\alpha_2(t) \sin \theta \\ \dot{\alpha}_2(t) \sin \theta & \alpha_2(t) \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Ако допуснем, че всички те се анулират, имаме

$$-\dot{\alpha}_1(t)\alpha_2(t)\sin\theta = \dot{\alpha}_1(t)\alpha_2(t)\cos\theta = \alpha_2(t)\dot{\alpha}_2(t)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 0$$

и следователно, отчитайки  $\alpha_2(t) > 0$  и факта, че  $\cos\theta$  и  $\sin\theta$  не могат да се анулират едновременно, получаваме  $\dot{\alpha}_2(t) = \dot{\alpha}_1(t) = 0$ , противоречие с регулярността на кривата.

### Пример 11.3. Сфера.

В сегашната постановка не можем да напишем параметризация на цялата сфера (това е дълбок и неочевиден факт), затова ще използваме стандартните ъгли, за да напишем параметризация на сферата без двата полюса:

$$\varphi(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} R \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ R \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ R \cos \theta_2 \end{pmatrix}, \quad \theta_1 \in \mathbb{R}, \theta_2 \in (0, \pi).$$

За да проверим условието за ранга, пресмятаме минорите на

$$\varphi'(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} -R \sin \theta_1 \sin \theta_2 & R \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ R \cos \theta_1 \sin \theta_2 & R \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ 0 & -R \sin \theta_2 \end{pmatrix}$$

и използваме, че  $\sin \theta_2 > 0$ , за да се убедим, че не е възможно всички минори от втори ред на горната матрица да се анулират.

За упражнение разберете как изглеждат двете семейства координатни линии във всеки от горните примери.

Гладкостта на параметризацията и условието за ранга гарантират съществуването на еднозначно определена допирателна равнина към повърхнината във всяка точка. За да се убедим в това, първо ще дадем геометрично определение на понятието “допирателно пространство”, което се съгласува с геометричната ни интуиция. И тъй, нека  $S$  е двумерна повърхнина в  $\mathbb{R}^3$  и нека  $p \in S$ . С  $S_p$  ще означаваме множеството от свързаните вектори  $(p; w) \in S \times \mathbb{R}^3$ , които са допирателни в точката  $p$  към някаква гладка крива, лежаща изцяло в  $S$ :

$$S_p := \{(p; w) \in S \times \mathbb{R}^3 : \exists \delta > 0 \exists \alpha \in C^1(\Delta, S) (\Delta \equiv (-\delta, \delta)), \alpha(0) = p, \dot{\alpha}(0) = w\}.$$

Ако не знаем нещо повече за  $S$ , предварително не е ясно дали  $S_p$  е равнина и дори дали не се състои само от нулевия вектор. Ще се убедим, че  $\{w \in \mathbb{R}^3 : (p; w) \in S_p\}$  е двумерно линейно подпространство на  $\mathbb{R}^3$ , ако  $S$  е елементарна гладка параметрично зададена повърхнина.

**Дефиниция 11.4.** Нека  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , където  $\Omega$  е област в  $\mathbb{R}^2$ , е гладко изображение. Диференциал на  $\varphi$  наричаме изображението  $d\varphi : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ , зададено с формулата

$$d\varphi(u; v) := \left( \varphi(u); \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \cdot v_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) \cdot v_2 \right),$$

където

$$v = (v_1, v_2), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}(u) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1}(u) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_1}(u) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2}(u) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2}(u) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_2}(u) \end{pmatrix}.$$

За да разберем смисъла на тази дефиниция, ще покажем, че ако  $\varphi$  носи една гладка крива  $\Gamma \subset \Omega$  в кривата  $\tilde{\Gamma} = \varphi(\Gamma)$ , то  $d\varphi$  носи допирателните вектори към  $\Gamma$  в допирателни вектори към  $\tilde{\Gamma}$  в съответната точка.

**Лема 11.5.** *Нека  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , където  $\Omega$  е област в  $\mathbb{R}^2$ , е гладко изображение и нека  $\Gamma = \alpha(\Delta)$  е гладка крива ( $\Delta$  е интервал и  $\alpha \in C^1(\Delta, \Omega)$ ). Нека  $\tilde{\Gamma} = \varphi(\Gamma) = \varphi(\beta(\Delta))$  е нейният образ ( $\beta(t) := \varphi(\alpha(t))$ ,  $t \in \Delta$ ). Тогава  $d\varphi(\alpha(t); \dot{\alpha}(t)) = (\beta(t); \dot{\beta}(t))$ ,  $t \in \Delta$ .*

*Доказателство.* Наистина, пресмятайки производната на  $\beta(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \\ \varphi_2(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \\ \varphi_3(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \end{pmatrix}$ , получаваме

$$\dot{\beta}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1(\alpha(t))}{\partial u_1} \dot{\alpha}_1(t) + \frac{\partial \varphi_1(\alpha(t))}{\partial u_2} \dot{\alpha}_2(t) \\ \frac{\partial \varphi_2(\alpha(t))}{\partial u_1} \dot{\alpha}_1(t) + \frac{\partial \varphi_2(\alpha(t))}{\partial u_2} \dot{\alpha}_2(t) \\ \frac{\partial \varphi_3(\alpha(t))}{\partial u_1} \dot{\alpha}_1(t) + \frac{\partial \varphi_3(\alpha(t))}{\partial u_2} \dot{\alpha}_2(t) \end{pmatrix} = \frac{\partial \varphi(\alpha(t))}{\partial u_1} \dot{\alpha}_1(t) + \frac{\partial \varphi(\alpha(t))}{\partial u_2} \dot{\alpha}_2(t). \quad \square$$

Да отбележим, че от горното пресмятане се получава, че свързаните вектори  $\left(\varphi(u); \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u)\right)$  са допирателни към първото семейство координатни линии, а  $\left(\varphi(u); \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u)\right)$  са допирателни към второто семейство координатни линии.

**Лема 11.6.** *Нека  $\Omega$  е област в равнината,  $\varphi \in (\Omega, \mathbb{R}^3)$  и  $\text{rg } \varphi' = 2$  в  $\Omega$ . Тогава за всяка точка  $p = \varphi(u)$  от елементарната гладка параметрично зададена повърхнина  $S = \varphi(\Omega)$  съществуват  $U \subset \Omega$  околност на  $u$  и  $V$  околност на  $p$  такива, че  $\varphi|_U$  е биекция между  $U$  и  $S \cap V$ . При това обратната биекция  $(\varphi|_U)^{-1}$  е рестрикция върху  $S \cap V$  на гладко изображение, дефинирано във  $V$ .*

*Доказателство.* Тъй като  $\text{rg } \varphi'(u) = 2$ , без ограничение на общността можем да приемем, че

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2}(u) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2}(u) \end{pmatrix} \neq 0.$$

От Теоремата за обратната функция получаваме, че съществуват  $U \subset \Omega$  околност на  $u$  и  $\tilde{V}$  околност  $(\varphi_1(u), \varphi_2(u))$  такива, че

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(v_1, v_2) \\ x_2 = \varphi_2(v_1, v_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = \psi_1(x_1, x_2) \\ v_2 = \psi_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

за  $(v_1, v_2) \in U$  и  $(x_1, x_2) \in \tilde{V}$ , където  $\psi_1$  и  $\psi_2$  са гладки функции, дефинирани във  $\tilde{V}$ . Полагаме  $V := \tilde{V} \times \mathbb{R}$  и забелязваме, че

$$(\varphi|_U)^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (\psi_1(x_1, x_2), \psi_2(x_1, x_2)) \in U$$

за  $(x_1, x_2, x_3) \in V \cap S$ . Освен това

$$S \cap V = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in \tilde{V}, x_3 = \varphi_3(\psi_1(x_1, x_2), \psi_2(x_1, x_2)) \right\}$$

и  $V$  е околност на  $p$ . □

Забележете, че от горното доказателство се вижда, че всяка елементарна гладка параметрично зададена повърхнина локално може да бъде задена явно, т.е. две от променливите могат да бъдат използвани за параметри, а третата да е тяхна функция.

**Теорема 11.7.** Нека  $\Omega$  е област в равнината,  $\varphi \in (\Omega, \mathbb{R}^3)$  и  $\text{rg } \varphi' = 2$  в  $\Omega$ . Тогава за всяка точка  $p = \varphi(u)$  от елементарната гладка параметрично зададена повърхнина  $S = \varphi(\Omega)$  е в сила  $S_p \equiv d\varphi(u; \mathbb{R}^2)$ , т.е.  $\{w \in \mathbb{R}^3 : (p; w) \in S_p\}$  е линейната обвивка на векторите  $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u)$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u)$ :

$$S_p \equiv \left\{ (p; w) \in S \times \mathbb{R}^3 : w = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \cdot v_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) \cdot v_2 \text{ за някой вектор } (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} .$$

*Доказателство.* Нека  $(p; w) \in S_p$ . Следователно съществува гладко изображение  $\beta : (-\delta, \delta) \rightarrow S$  (тук  $\delta$  е някакво положително число) такова, че  $(p; w) = (\beta(0), \dot{\beta}(0))$ . Нека  $U$  и  $V$  са околностите на  $u$  и  $p$  съответно, получени от Лема 11.6. С цената на намаляване на  $\delta$  можем да предположим, че  $\beta(t) \in V$  за всяко  $t \in (-\delta, \delta)$ . Полагаме  $\alpha(t) := (\varphi|_U)^{-1}(\beta(t))$  за  $t \in (-\delta, \delta)$ . Ясно е, че това е параметризация на гладка крива в  $U$ , за която  $\alpha(0) = u$  и  $\beta(t) = \varphi(\alpha(t))$ . Сега Лема 11.5 ни дава

$$d\varphi(u; \dot{\alpha}(0)) = d\varphi(\alpha(0); \dot{\alpha}(0)) = (\beta(0); \dot{\beta}(0)) = (p; w) .$$

Обратно, нека  $(p; w) = d\varphi(u; v)$ . За достатъчно малко  $\delta$  имаме, че  $\alpha(t) = u + t \cdot v \in \Omega$  за всяко  $t \in (-\delta, \delta)$ . Тогава  $\beta(t) = \varphi(\alpha(t))$ ,  $t \in (-\delta, \delta)$  е гладка крива в  $S$ , като  $\beta(0) = \varphi(\alpha(0)) = \varphi(u) = p$ . Отново от Лема 11.5 и от  $\dot{\alpha}(t) = v$  получаваме

$$(p; w) = d\varphi(u; v) = d\varphi(\alpha(0); \dot{\alpha}(0)) = (\beta(0); \dot{\beta}(0)) \in S_p .$$

□

Важно е да осъзнаем, че линейната обвивка на векторите  $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u)$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u)$  е равнина, защото условието за ранга  $\text{rg } \varphi'(u) = 2$  е еквивалентно на линейната независимост на тези два вектора.

## 11.2 Формула за лице на гладка повърхнина

Да напомним, че в курса по ДИС1 строго се дефинира понятието “дължина на параметрично зададена крива”. В случая на параметрично зададена повърхност нещата са по-сложни, защото подходът с частично плоски повърхнини, вписани в дадената, не дава разумен резултат. Наистина, има пример на Hermann Schwarz (виж Фихтенголец трети том), който показва, че в цилиндър могат да бъдат вписвани редици от частично плоски повърхнини с диаметър на парченцата, клонящ към нула, и с граница на лицата произволно достатъчно голямо реално число. Затова ще дадем само евристично обяснение на формулата за лице и ще покажем, че резултатите от тази формула се съгласуват с целия ни досегашен опит.

Нека  $\Omega$  е област в равнината,  $\varphi \in (\Omega, \mathbb{R}^3)$  е инекция,  $\text{rg } \varphi' = 2$  в  $\Omega$  и  $\Delta$  е правоъгълник, съдържащ се в  $\Omega$ . Искаме да апроксимираме лицето на  $S = \varphi(\Delta)$ . Избираме произволно подразделяне  $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$  на  $\Delta$  и някакви представителни точки  $\xi_i \in \Delta_i$ ,  $i = 1, \dots, i_0$  за това подразделяне. Апроксимираме лицето на парченцето  $\varphi(\Delta_i)$  от  $S$  с лицето на успоредника, опънат върху векторите  $a_i \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(\xi_i)$  и  $b_i \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(\xi_i)$ , където  $a_i$  и  $b_i$  са съответно дължината на основата и дължината на височината на правоъгълника  $\Delta_i$ :

$$\mu_2(\varphi(\Delta_i)) \sim a_i \cdot b_i \cdot \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(\xi_i) \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(\xi_i) \right\| = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(\xi_i) \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(\xi_i) \right\| \cdot \mu_2(\Delta_i) .$$

Тогава приближението на лицето на цялата повърхнина е римановата сума

$$\mu_2(S) \sim \sum_{i=1}^{i_0} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(\xi_i) \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(\xi_i) \right\| \cdot \mu_2(\Delta_i) = \sigma_g(\Pi, \xi)$$

за функцията  $g$ , подразделянето  $\Pi$  и представителните точки  $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_{i_0}\}$ , където

$$g(u) = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) \right\| = \sqrt{\det(\varphi'^T(u) \cdot \varphi'(u))} .$$

Когато диаметърът на подразбиването клони към нула, римановите суми клонят към

$$\int_{\Delta} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) \right\| du = \int_{\Delta} \sqrt{\det(\varphi'^T(u) \cdot \varphi'(u))} du .$$

**Дефиниция 11.8.** Нека  $\Omega$  е област в равнината,  $\varphi$  е гладка инекция с дефиниционна област  $\Omega$  и област от стойности  $\mathbb{R}^3$ ,  $\text{rg } \varphi' = 2$  в  $\Omega$  и  $K$  е измерим компакт, съдържащ се в  $\Omega$ . Тогава *лице* на  $S = \varphi(K)$  наричаме числото

$$\mu_2(S) := \int_K \sqrt{\det(\varphi'^T(u) \cdot \varphi'(u))} du .$$

Елементите на матрицата  $\varphi'^T(u) \cdot \varphi'(u)$  имат приети имена:

$$E(u) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \right\rangle , \quad F(u) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) \right\rangle , \quad G(u) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) \right\rangle .$$

В тези означения имаме

$$\mu_2(S) = \int_K \sqrt{E(u)G(u) - F^2(u)} du .$$

Да отбележим, че горният интеграл съществува, защото  $K$  е измеримо по Пеано-Жордан и подинтегралната функция е непрекъсната поради гладкостта на  $\varphi$ .

**Пример 11.9.** Първата проверка, която е редно да извършим, е дали тази формула дава правилен резултат, ако  $\varphi$  е идентитетът, т.е.  $S$  всъщност съвпада с подмножеството  $K$  на

равнината. Тогава  $\varphi(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $E(u_1, u_2) = 1$ ,  $F(u_1, u_2) = 0$ ,  $G(u_1, u_2) = 1$  и следователно

$$\mu_2(S) = \int_K \sqrt{E(u)G(u) - F^2(u)} du = \int_K 1 du = \mu_2(K) ,$$

където отдясно стои лицето (по Пеано-Жордан) на множеството  $K$ , въведено в първата част на курса.

**Пример 11.10.** Лице на цилиндрична повърхнина.

Да разгледаме повърхнината от Пример 11.1 и да намерим лицето на  $S = \varphi([a, b] \times [c, d])$  ( $t \in [a, b] \subset \Delta$  и  $z \in [c, d]$ ). Имаме  $\varphi(t, z) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ z \end{pmatrix}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, z) = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1(t) \\ \dot{\alpha}_2(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(t, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $E(t, z) = \dot{\alpha}_1^2(t) + \dot{\alpha}_2^2(t)$ ,  $F(t, z) = 0$ ,  $G(t, z) = 1$  и следователно

$$\mu_2(S) = \int \int_{[a,b] \times [c,d]} \sqrt{\alpha_1^2(t) + \alpha_2^2(t)} \, dt dz = (d - c) \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| \, dt ,$$

тоест лицето на цилиндъра е равно на дължината на кривата, служеща за негова основа, умножена по височината. Следователно и в този пример резултатът от пресмятането по формулата се съгласува с нашия опит.

**Пример 11.11.** Лице на ротационна повърхнина.

Да разгледаме повърхнината от Пример 11.2. Тогава

$$\varphi(t, \theta) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \cos \theta \\ \alpha_2(t) \sin \theta \end{pmatrix} , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \theta) = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1(t) \\ \dot{\alpha}_2(t) \cos \theta \\ \dot{\alpha}_2(t) \sin \theta \end{pmatrix} , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(t, \theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha_2(t) \sin \theta \\ \alpha_2(t) \cos \theta \end{pmatrix}$$

и следователно  $E(t, \theta) = \dot{\alpha}_1^2(t) + \dot{\alpha}_2^2(t)$ ,  $F(t, \theta) = 0$ ,  $G(t, \theta) = \alpha_2^2(t)$ . Да намерим лицето на ротационната повърхнина  $S$ , получена при завъртане на кривата  $\alpha(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , т.е.  $S = \varphi([a, b] \times [0, 2\pi])$ :

$$\mu_2(S) = \int \int_{[a,b] \times [0, 2\pi]} \sqrt{(\dot{\alpha}_1^2(t) + \dot{\alpha}_2^2(t)) \alpha_2^2(t)} \, dt d\theta = 2\pi \int_a^b \alpha_2(t) \|\dot{\alpha}(t)\| \, dt .$$

Ако кривата е графика на гладка функция, т.е.  $\alpha(x) = (x, f(x))$ ,  $x \in [a, b]$  за някаква гладка функция  $f$  с положителни стойности, то получаваме  $\mu_2(S) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} \, dx$ , което е точно формулата, позната ви от курса по ДИС1.

**Пример 11.12.** Лице на сфера.

Използвайки стандартната параметризация на сферата (виж Пример 11.3), получаваме

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1}(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} -R \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ R \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_2}(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} R \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ R \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ -R \sin \theta_2 \end{pmatrix}$$

и оттук  $E(\theta_1, \theta_2) = R^2 \sin^2 \theta_2$ ,  $F(\theta_1, \theta_2) = 0$ ,  $G(\theta_1, \theta_2) = R^2$ . Тъй като сферата  $S$  се получава за  $\theta_1 \in [0, 2\pi]$ ,  $\theta_2 \in [0, \pi]$ , имаме

$$\mu_2(S) = \int \int_{[0, 2\pi] \times [0, \pi]} \sqrt{R^2 \sin^2 \theta_2 \cdot R^2} \, d\theta_1 d\theta_2 = 2\pi \int_0^\pi R^2 \sin \theta_2 d\theta_2 = 4\pi R^2 ,$$

което е резултатът, познат от училище.

**Забележка:** В последните три примера допуснахме известна неточност, като разрешихме условието за инективност (а в последния пример и условието за ранга) да се нарушават в множество с мярка нула. Интуитивно тези множества не могат да повлияят на резултата от интегрирането. Ако искаме да бъдем строги, трябва например в Пример 11.11 да вземем  $\theta \in [0, 2\pi - \varepsilon]$ , да интегрираме и да намерим границата на резултата при  $\varepsilon$  клонящо към нула с положителни стойности. Разбира се, ще се окаже същият.

**Забележка:** В горните примери получихме  $F = 0$ . Геометрически това означава, че върху тези повърхнини двете семейства координатни линии се пресичат под прав ъгъл.

### 11.3 Формулата за лице на гладка повърхнина като частен случай на по-обща формула

Това, което научихме за лице на параметрично зададена гладка повърхнина, може да бъде разглеждано от малко по-обща гледна точка: Нека  $n$  и  $k$  са естествени числа с  $n \geq k$ . Нека  $\Omega$  е област в  $\mathbb{R}^k$ ,  $\varphi$  е гладка инекция с дефиниционна област  $\Omega$  и област от стойности  $\mathbb{R}^n$ ,  $\text{rg } \varphi' \equiv k$  и  $K$  е измерим компакт, съдържащ се в  $\Omega$ . Можем да мислим за  $S = \varphi(K)$  като за “гладка  $k$ -мерна повърхнина, вложена в  $\mathbb{R}^n$ ”. Тогава  $k$ -мерна мярка на  $S$  наричаме числото

$$\mu_k(S) := \int_K \sqrt{\det(\varphi'^T(u) \cdot \varphi'(u))} \, du .$$

Ясно е, че формулата за лице, която разгледахме досега, е горната за случая  $k = 2$ ,  $n = 3$ . Това обяснява защо предпочетохме този запис пред записа с норма на векторното произведение. Добре е да си спомните лекцията за детерминанта на Грам от курса по Линейна алгебра и да направите връзката с нашите разглеждания.

Да разгледаме “екстремните случаи”:  $k = 1$  и  $k = n$ .

Ако  $k = 1$ , става въпрос за гладка крива  $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$  в  $\mathbb{R}^n$  и нейната дължина. Нека  $t \in K = [a, b]$ . Имаме  $\varphi'(t) = \begin{pmatrix} \varphi'_1(t) \\ \vdots \\ \varphi'_n(t) \end{pmatrix}$ , следователно

$$\mu_1(S) = \int_K \sqrt{\langle \varphi'(t), \varphi'(t) \rangle} dt = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt ,$$

значи формулата от този параграф съдържа в себе си формулата за дължина на гладка крива.

Ако  $k = n$ , “повърхнината”  $S$  е подмножество на евклидовото пространство  $\mathbb{R}^n$  и се интересуваме от нейната  $n$ -мерна мярка  $\mu_n(S) = \int_S 1 dx$  (според първата част от този курс). От друга страна, формулата от този параграф дава

$$\mu_n(S) = \int_K \sqrt{\det(\varphi'^T(u) \cdot \varphi'(u))} du = \int_K \sqrt{\det(\varphi'^T(u)) \cdot \det(\varphi'(u))} du = \int_K |\det(\varphi'(u))| du .$$

От предположението за инективност на  $\varphi$  получаваме, че  $\varphi$  е биекция между  $K$  и  $S$ . При това  $\varphi$  е гладко изображение, дефинирано в околност на  $K$ , а обратната биекция е рестрикция на гладко изображение, дефинирано в околност на  $S$  (от Лема 11.6 – разбира се, в размерност  $n$  – и от факта, че гладкостта е локално свойство). Следователно можем да приложим Теоремата за смяна на променливите в  $n$ -кратен интеграл, за да получим

$$\mu_n(S) = \int_S 1 dx = \int_{\varphi(K)} 1 dx = \int_K |\det(\varphi'(u))| du .$$

Следователно и в този случай резултатът от формулата от този параграф се съгласува с досегашните ни знания.



- 12    Лекция 12: Повърхнинен интеграл от първи род
- 13    Лекция 13: Повърхнинен интеграл от втори род. Повърхнини с край. Индуцирана ориентация на края
- 14    Лекция 14: Формула на Стокс
- 15    Лекция 15: Формула на Гаус-Остроградски