

ИЗПИТ

по Математически анализ, специалност "Математика и информатика"

17 февруари 2006г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Формулирайте и докажете втората форма на критерия за интегрируемост по Риман.

2. (а) Дайте дефиниция на множество, измеримо по Пеано-Жордан.

(б) Намерете (с обосновка) множеството от точки на прекъсване на χ_A (характеристичната функция на множеството A).

(в) Използвайки Теоремата на Лебег, формулирайте и докажете необходимо и достатъчно условие за измеримост по Пеано-Жордан.

(г) Измеримо ли е множеството

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0\}$$

и защо?

3. Да се пресметне силата на притегляне, упражнявана върху материална точка с маса m_0 , разположена в началото на координатната система, от материална нишка с плътност $\rho(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2})^3$, разположена по дъгата на астроида

$$x = a \cos^3 t$$

$$y = a \sin^3 t$$

която лежи в първи квадрант ($a > 0$).

4. Пресметнете повърхнинния интеграл от първи род

$$\iint_S \frac{1}{(1+x+y)^2} ds$$

където $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 1\}$.

5. Нека F е двукратно гладко векторно поле, дефинирано в \mathbb{R}^3 .

(а) Формулирайте теоремата на Стокс.

(б) Пресметнете $\mathbf{div} \mathbf{rot} F$.

(в) Напишете формулата на Гаус-Остроградски за $\mathbf{rot} F$ и областта

$$G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}.$$

Можете ли да получите същия резултат за повърхнинния интеграл само чрез формулата на Стокс?

6. Намерете точка (x_0, y_0, z_0) такава, че изтласкващата сила на Архимед, действаща върху тяло G с частично гладка граница ∂G , не създава въртящ момент спрямо нея.