

ИЗПИТ

по Математически анализ

2 септември 2010г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Пресметнете производната на $f(t) = \ln \|\alpha(t)\|$, където $\alpha(t)$ е гладка векторна функция на скаларния аргумент t , която не се анулира.
2. Нека $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната функция на един аргумент и $Gr f \subset \mathbb{R}^2$ е нейната графика. Докажете, че $Gr f$ е пренебрежимо множество в равнината (т.е. има лице и то е нула).
3. Формулирайте принципа на Кавалиери. Използвайте го, за да изведете формулата за обем на ротационно тяло. Като нейно приложение изведете формулата за обем на прав кръгов конус с радиус на основата R и височина H .
4. Разгледайте хомогенна материална нишка с плътност 1, разположена по полуокръжност с радиус R (да мислим, че центърът ѝ е в началото на координатната система и тя е в горната полуравнина).
 - (а) Пресметнете координатите на центъра на тежестта на нишката.
 - (б) Каква е гравитационната сила, с която материалната нишка притегля материална точка с маса m_0 , разположена в началото на координатната система?
5. Да разгледаме гладкото векторно поле

$$F(x, y) = \left(\frac{e^x(x^2 + y^2 - 2x)}{(x^2 + y^2)^2}, -\frac{2ye^x}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

- (а) В коя област в равнината е дефинирано това поле? Едносвързана ли е тази област?
 - (б) Потенциално ли е това поле? Ако отговорът Ви е "да", намерете потенциала.
 - (в) Формулирайте необходимо условие за независимост от пътя на криволинеен интеграл от втори род и някое достатъчно условие. Приложими ли са те в нашия конкретен случай?
 - (г) Докажете, че криволинейният интеграл от втори род не зависи от пътя, а само от крайните точки, точно тогава, когато непрекъснатото векторно поле е потенциално. Колко е $\oint_{\Gamma} F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy$, където $\Gamma = \{ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1 \}$?
6. Напишете формулата за свеждане на повърхнинен интеграл от първи род към двоен риманов интеграл. Пресметнете лицето на елипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

където a и b са положителни параметри. **Упътване:** Използвайте обобщени сферични координати.