Лекционни записки по Математически Анализ

проф. Надежда Рибарска
Набрани от Никола Юруков

4 февруари 2016 г.

Съдържание

1 Лекция 1: Преговор с разширение

1.1 Евклидовото пространство $\mathbb{R}^n$

Като множество $\mathbb{R}^n$ е множеството $\{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, .., n\}$ от наредените n-торки реални числа. Ако го снабдим със стандартните линейни операции събиране на вектори и умножение на вектор с реално число, получаваме реално линейно пространство (спомнете си аксиомите от курса по линейна алгебра). Да напомним формалните дефиниции: сума на векторите $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ е векторът $x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, ..., x_n+y_n)$ (събирането е покоординатно). Произведение на скалара $\lambda \in \mathbb{R}$ с вектора x е векторът $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$ (умножението със скалар също е покоординатно). Ще означаваме с $\mathbf{0}$ нулевия вектор $(0, \dots, 0)$.

За да можем да правим анализ (да говорим за граница, непрекъснатост, производна и т.н.), освен линейната структура ни е необходима и някаква "мярка на близост"в нашето пространство. Както помните от курса по ДИС2, стандартната мярка на близост между два вектора е евклидовото разстояние между тях:

$$\rho(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}\ ,\ \text{където } x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ y = (y_1, y_2, ..., y_n)\ .$$

Забележете, че в $\mathbb{R}^2$ това е просто питагоровата теорема. Това разстояние е добре съгласувано с линейната структура в смисъл, че $\rho(x, y) = \|x - y\|$, където в дясната част стои евклидовата норма (или дължината) на вектора $x - y$:

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ ,\ x = (x_1, x_2, ..., x_n)\ .$$

Да напомним, че една функция $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty)$ се нарича норма, ако за нея са в сила свойствата

1. $\|x\| = 0 \iff x = \mathbf{0}$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство на триъгълника)

В курса по ДИС2 е проверено, че евклидовата норма е норма. За упражнение проверете, че

- $\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$
- $\|(x_1, x_2)\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$
- $\|(x_1, x_2)\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p}$, $1 < p < \infty$

са норми в $\mathbb{R}^2$. По-общо, проверете, че

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}\ ,\ 1 \leq p < \infty \text{ е норма в } \mathbb{R}^n\ .$$

Разбира се, за целта трябва да използвате неравенството на Минковски от курса по ДИС2.

Евклидовата норма има по-хубави геометрични свойства от горните примери, защото е съгласувана със скаларното произведение

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ , \text{ където } x = (x_1, x_2, ..., x_n) \text{ и } \ y = (y_1, y_2, ..., y_n),$$

по стандартния начин $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Да напомним основното неравенство на Коши-Буняковски-Шварц:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \ .$$

Да напомним също означенията

$$B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\}$$

за отворено кълбо с център x и радиус r и

$$\overline{B}_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq r\}$$

за затворено кълбо с център x и радиус r. Като упражнение можете да скицирате кълбата с радиус 1 и център началото на координатната система за нормите $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$ от предишното упражнение.

1.2 Топология в $\mathbb{R}^n$

Дефиниция 1.1. Подмножеството U на $\mathbb{R}^n$ се нарича отворено, ако за всяка точка x от U съществува $\varepsilon > 0$ такова, че $B_\varepsilon(x) \subset U$.

Основните свойства на отворените множества, проверени в курса по ДИС2, са

1. $\emptyset$ и $\mathbb{R}^n$ са отворени

2. Сечение на краен брой отворени множества е отворено, т.е. ако $U_1, U_2, ..., U_k$ са отворени, то $\bigcap_{i=1}^k U_i$ е отворено.

3. Обединение на произволна фамилия от отворени множества е отворено, т.е. ако U_α са отворени за всяко $\alpha \in I$, то $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ е отворено.

Пример 1.2. Отворените кълба са отворени множества.

Доказателство. Да разгледаме $B_r(x_0)$, $r > 0$. Взимаме си произволно x от кълбото, т.е. растоянието между x и x_0 е по-малко от r. Нека $\varepsilon := r - \|x_0 - x\| > 0$. Тогава $B_\varepsilon(x) \subset B_r(x_0)$. Наистина, нека $y \in B_\varepsilon(x)$, т.е. $\|y - x\| < \varepsilon$. Получаваме

$$\begin{aligned} \|x_0 - y\| &\leq \|x - y\| + \|x - x_0\| < \varepsilon + \|x - x_0\| \\ \|x_0 - y\| &< r - \|x_0 - x\| + \|x - x_0\| \\ \|x_0 - y\| &< r \end{aligned}$$

□

Пример 1.3. Нека функцията $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е **непрекъсната**. Тогава множеството $U = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) > 0\}$ е отворено.

Доказателство. Взимаме произволна точка $x_0 \in U$, следователно $\varepsilon = g(x_0) > 0$. От непрекъснатостта на функцията получаваме, че съществува положително число δ такова, че $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ за всяко $x \in B_\delta(x_0)$. Следователно $g(x) > g(x_0) - \varepsilon = 0$ и оттук $x \in U$ за всяко $x \in B_\delta(x_0)$. $\square$

Дефиниция 1.4. Едно подмножество F на $\mathbb{R}^n$ се нарича затворено, ако $\mathbb{R}^n \setminus F$ е отворено множество.

Основните свойства на затворените множества, проверени в курса по ДИС2, са

1. $\emptyset, \mathbb{R}^n$ са затворени.

2. Обединие на краен брой затворени множества е затворено, т.е. ако $F_1, F_2, ..., F_k$ са затворени, то $\bigcup_{i=1}^k F_i$ е затворено.

3. Сечение на произволна фамилия от затворени множества е затворено, т.е. ако F_α са затворени за всички $\alpha \in I$, то $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ е затворено.

Пример 1.5. Затворените кълба са затворени множества. Доказателството оставяме за упражнение.

Дефиниция 1.6. Контур на множеството $A \subset \mathbb{R}^n$ наричаме множеството

$$\partial A := \{x \in \mathbb{R}^n : \forall U \text{ отворено}, \ x \in U \text{ е в сила } U \cap A \neq \emptyset \text{ и } U \setminus A \neq \emptyset\}$$

Дефиниция 1.7. Затворена обвивка на множеството $A \subset \mathbb{R}^n$ наричаме най-малкото затворено множество, съдържащо A:

$$\overline{A} := \cap \{F \subset \mathbb{R}^n : \ F \supset A \text{ и } F \text{ е затворено } \}$$

В курса по ДИС2 е доказано, че

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \{x_m\}_{m=1}^\infty \subset A, \ x_m \to x\}$$

Лесно се проверява, че едно множество е затворено точно тогава, когато съвпада със затворената си обвивка. Връзките между контур на множество и затворена обвивка на множество са

$$\overline{A} = A \cup \partial A \ , \ \partial A = \overline{A} \cap \left(\overline{\mathbb{R}^n \setminus A}\right) \ .$$

Следователно контурът на произволно множество е винаги затворено множество. Също лесно се проверява, че

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \exists \{x_m\}_{m=1}^\infty \subset A, \ x_m \to x \text{ и } \exists \{y_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n \setminus A, \ y_m \to x\}$$

Дефиниция 1.8. Вътрешност на $A \subset \mathbb{R}^n$ наричаме най-голямото отворено множество, съдържащо се в A:

$$\mathring{A} = \cup \{U \subset \mathbb{R}^n : \ U \subset A \text{ и } U \text{ е отворено } \}$$

Друго означение за вътрешност на A е $intA$. Понятието за вътрешност е дуално на понятието за затворена обвивка, т.е.

$$intA = \mathbb{R}^n \setminus \left(\overline{\mathbb{R}^n \setminus A}\right) \ , \ \overline{A} = \mathbb{R}^n \setminus (int(\mathbb{R}^n \setminus A)) \ .$$

Едно от най-важните и често използвани понятия в топологията е понятието за компактност.

Дефиниция 1.9. Едно множество $A \subset \mathbb{R}^n$ се нарича компакт, ако от всяко негово отворено покритие можем да изберем крайно подпокритие, т.е. ако $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ е фамилия от отворени подмножества на $\mathbb{R}^n$, за която е в сила $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha \supset A$, то можем да изберем краен брой индекси $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in I$ такива, че $\cup_{i=1}^k U_{\alpha_i} \supset A$.

В курса по ДИС2 са доказани две важни и нетривиални характеризации на компактните подмножества на $\mathbb{R}^n$:

1. Едно подмножество A на $\mathbb{R}^n$ е компакт точно тогава, когато A е ограничено и затворено.

2. Едно подмножество A на $\mathbb{R}^n$ е компакт точно тогава, когато от всяка редица от негови елементи може да се избере сходяща подредица, чиято граница е също в множеството.

Сега въвеждаме първото разширение, т.е. понятие, за което не сте учили в курса по ДИС2: множество, релативно отворено в A. Ще го използваме по-нататък, за да говорим за множества, релативно отворени в някаква гладка двумерна повърхнина в тримерното евклидово пространство. Интуицията е, че забравяме за всичко извън множеството A.

Дефиниция 1.10. Нека $A \subset \mathbb{R}^n$. Едно подмножество U на A наричаме релативно отворено в A, ако съществува отворено множество $V \subset \mathbb{R}^n$ такова, че $U = A \cap V$.

Твърдение 1.11. *Множеството $U \subset A$ е релативно отворено в A точно тогава, когато за всяка негова точка $x \in U$ съществува $\varepsilon > 0$ такова, че $B_\varepsilon(x) \cap A \subset U$.*

Доказателство. Нека първо $U \subset A$ е релативно отворено в A и $x \in U$ е произволна. Тогава съществува отворено множество $V \subset \mathbb{R}^n$ с $U = A \cap V$. Тъй като $x \in U \subset V$, съществува $\varepsilon > 0$ с $B_\varepsilon(x) \subset V$ и оттук $B_\varepsilon(x) \cap A \subset V \cap A = U$. В обратната посока, нека за всяка точка $x \in U$ съществува $\varepsilon_x > 0$ такова, че $B_{\varepsilon_x}(x) \cap A \subset U$. Полагаме $V := \cup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}(x)$. Очевидно V е отворено множество като обединение на отворени кълбета. Освен това

$$V \cap A = (\cup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}(x)) \cap A = \cup_{x \in U} \left(B_{\varepsilon_x}(x) \cap A\right) \subset U \ .$$

От друга страна, всяка точка $x \in U$ принадлежи на $B_{\varepsilon_x}(x) \subset V$, следователно $U \subset V$ и от $U \subset A$ следва $U \subset V \cap A$. С това $U = V \cap A$ и доказателството е завършено. □

Следното приложение на понятието за релативна отвореност е важно и изключително често използвано:

Твърдение 1.12. *Нека $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ е изображение с дефиниционна област $D \subset \mathbb{R}^n$ и стойности в $\mathbb{R}^m$. Твърдим, че f е непрекъсната в D точно тогава когато първообраз на всяко отворено в $\mathbb{R}^m$ множество е релативно отворено в D. Да напомним, че първообраз на $U \subset \mathbb{R}^m$ е множеството $f^{-1}(U) := \{x \in D : f(x) \in U\}$.*

Доказателство. Първо ще докажем, че ако първообраз на всяко отворено в $\mathbb{R}^m$ множество е релативно отворено в D, то f е непрекъсната. Избираме произволна точка x от D и произволно $\varepsilon > 0$. Тъй като кълбото $B_\varepsilon(f(x))$ е отворено в $\mathbb{R}^m$, първообразът $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ ще е релативно отворен в D. Тогава $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) = D \cap V$ за някое множество V, отворено в $\mathbb{R}^n$. Тъй като $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subset V$, съществува $\delta > 0$ с $B_\delta(x) \subset V$. Нека $x' \in D$ е произволна точка с $\|x' - x\| < \delta$. Значи $x' \in D \cap B_\delta(x) \subset D \cap V = f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ и следователно $f(x') \in B_\varepsilon(f(x))$, т.е. $\|f(x') - f(x)\| < \varepsilon$.

За да докажем обратната посока, избираме произволно отворено $U \subset \mathbb{R}^m$. Нека $x \in f^{-1}(U)$. Тогава $f(x)$ принадлежи на отвореното множество U и следователно съществува $\varepsilon > 0$ такова, че $B_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Тъй като f е непрекъсната в x, съществува $\delta > 0$ такова, че $\|f(x')-f(x)\| < \varepsilon$ за всяко $x' \in D$, за което $\|x'-x\| < \delta$. Записано по друг начин това означава, че $f(B_\delta(x) \cap D) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset U$, следователно $B_\delta(x) \cap D \subset f^{-1}(U)$. Така доказахме, че множеството $f^{-1}(U)$ е релативно отворено в D, защото изпълнява условието от предишното твърдение. $\square$

1.3 Основни теореми

Теорема 1.13 (Теорема на Вайерщрас). *Непрекъснат образ на компакт е компакт. Формално записано, ако $f : K \longrightarrow \mathbb{R}^m$ е непрекъснато изображение с дефиниционна област компактното подмножество K на $\mathbb{R}^n$, то множеството $f(K) := \{f(x) : x \in K\}$ от стойностите на f е компактно подмножество на $\mathbb{R}^m$.*

Доказателство. Нека $\{y_l\}_{l=1}^\infty \subset f(K)$ е редица от елементи на $f(K)$. Тогава за всеки елемент y_l на тази редица съществува елемент x_l на K такъв, че $y_l = f(x_l)$. Сега редицата $\{x_l\}_{l=1}^\infty$ се съдържа в компактното множество K. Следователно съществува нейна сходяща подредица $\{x_{l_k}\}_{k=1}^\infty$, чиято граница x_0 е елемент на K. Тъй като f е непрекъсната, от дефиницията на Хайне за непрекъснатост получаваме, че $f(x_{l_k}) = y_{l_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0)$. Тъй като очевидно $f(x_0) \in f(K)$, остава да се позовем на характеризацията (2) на компактните множества. $\square$

Хубаво упражнение е да се докаже теоремата на Вайерщрас, като се използва дефиницията на компакт и характеризацията на непрекъснатите изображения, която доказахме.

Друго добро упражнение е да се убедите, че теоремата на Вайерщрас от ДИС 1 (една непрекъсната функция върху краен затворен интервал е ограничена и достига своята най-голяма и най-малка стойност) е следствие от тази форма на теоремата.

Теорема 1.14 (Теорема на Кантор). *Нека $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ е дефинирана в $D \subset \mathbb{R}^n$. Нека K е компактно подмножество на D. Ако f е непрекъсната в K, т.е. непрекъсната е във всяка точка от K, то твърдим, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че за всяко $x \in K$ и за всички $x' \in D$, за които е изпълнено $\|x'-x\| < \delta$, е в сила $\|f(x)-f(x')\| < \varepsilon$. Забележете, че заключението е малко по-силно от равномерна непрекъснатост на f върху K.*

Доказателство. Отново ще използваме характеризацията (2) на компактността чрез редици. Допускаме противното, т.е. съществува такова $\varepsilon_0 > 0$, че за всички $\delta > 0$ съществуват точки $x_\delta \in K$ и $x'_\delta \in D$ такива, че

$$\|x_\delta - x'_\delta\| < \delta \text{ и } \|f(x_\delta) - f(x'_\delta)\| \geq \varepsilon\ .$$

Даваме на δ стойности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ и преименуваме $x_{1/m}$ и $x'_{1/m}$ съответно на x_m и x'_m. Така се образуват две редици $\{x_m\}_{m=1}^\infty \subset K$ и $\{x'_m\}_{m=1}^\infty \subset D$. Знаем, че

$$\|x_m - x'_m\| < \frac{1}{m} \text{ и } \|f(x_m) - f(x'_m)\| \geq \varepsilon_0 > 0$$

за всяко естествено m. Тъй като K е компакт, съществува сходяща подредица $x_{m_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0 \in K$ на $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset K$. От неравенствата

$$\|x'_{m_k} - x_0\| \leq \|x'_{m_k} - x_{m_k}\| + \|x_{m_k} - x_0\| < \frac{1}{m_k} + \|x_{m_k} - x_0\|$$

получаваме, че редицата $\{x'_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ също клони към точката $x_0 \in K$. Сега използваме непрекъснатостта на f в точката $x_0 \in K$ и получаваме, че

$$f(x_{m_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0) \text{ и } f(x'_{m_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0).$$

Като извадим тези две редици, получаваме $f(x_{m_k}) - f(x'_{m_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, което противоречи на $\|f(x_m) - f(x'_m)\| \geq \varepsilon_0 > 0$ за всяко естествено m. Теоремата е доказана. $\square$

2 Лекция 2: Кратен Риманов интеграл - въвеждане и основни свойства

Конструкцията на Дарбу, с която сте въвели Риманов интеграл в курса по ДИС1, е важна и естествена и ние ще я използваме отново, за да въведем n-кратен Риманов интеграл. Геометричната интуиция остава същата. В курса по ДИС1 сте искали да дефинирате по един разумен начин лицето на фигура, заградена от абцисата, две вертикални прави и графиката на ограничена неотрицателна функция. Постигнали сте го чрез оценяване отгоре и отдолу на това лице чрез лицата на стъпаловидни фигури, съставени от краен брой правоъгълници (тези лица са големите и малките суми на Дарбу). Сега за n=2 трябва да оценяваме отгоре и отдолу обема на тяло, заградено от равнината на първите две координатни оси, вертикални равнини по границата на даден правоъгълник и графиката на ограничена неотрицателна функция, дефинирана в този правоъгълник. Оценката е чрез обема на тела, състоящи се от краен брой паралелепипеди (за оценка отгоре вземаме обема на такова стъпаловидно тяло, съдържащо нашето, а за оценка отдолу - съдържащо се в нашето). За по-големи размерности идеята и конструкцията остават същите, само че вече не можем да нарисуваме подходяща картинка.

2.1 Паралелотопи в $\mathbb{R}^n$ и тяхната мярка

Първият въпрос, който трябва да решим, е с какво заменяме крайния и затворен интервал от ДИС1, ако размерността е по-голяма от едно. Естественият отговор е: с правоъгълник в равнината, с паралелепипед в тримерното пространство и т.н.

Дефиниция 2.1. Паралелотоп (на английски interval, box) е множество в $\mathbb{R}^n$, за което всяка координата се мени (независимо от останалите) в краен затворен интервал:

$$\Delta := \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = 1, 2, ...n\}\ .$$

За различните размерности (стойности на n) имаме

n	Δ
1	$[a_1, b_1]$ интервал
2	$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ правоъгълник
3	$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ парарелепипед
..	...

Съществeното за тези най-прости фигури е, че нямаме съмнения какво трябва да наречем дължина на интервал, лице на правоъгълник, обем на паралелепипед, а за паралелотоп в $\mathbb{R}^n$ естествено въвеждаме мярка в $\mathbb{R}^n$.

Дефиниция 2.2. За паралелотопа $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = 1, 2, ...n\}$ дефинираме неговата n-мерна мярка като

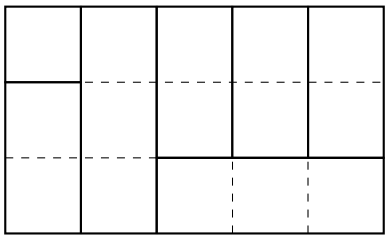
$$\mu_n(\Delta) := \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)\ .$$

Забележете, че при $n = 1$ това е дължината $\mu_1([a_1, b_1]) = b_1 - a_1$ на интервала $[a_1, b_1]$, при $n = 2$ това е лицето $\mu_2([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$ на правоъгълника $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, при $n = 3$ това е обемът $\mu_3([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$ на паралелепипеда $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$.

Един паралелотоп ще наричаме изроден, ако някой от интервалите $[a_i, b_i]$ се изражда в точка, т.е. $a_i = b_i$. В такава ситуация n-мерната мярка на паралелотопа е нула. Например отсечка върху абцисата може да бъде разглеждана като паралелотоп в $\mathbb{R}^1$ и ще има ненулева дължина, но ако бъде разглеждана като паралелотоп в $\mathbb{R}^2$, ще има лице нула.

Следващият етап е да уточним как да разделяме паралелотоп на паралелотопчета по аналогия с разделянето на интервал на подинтервали от ДИС1. Неформално, подразделяне на паралелотоп са краен брой паралелотопи, чието обединение е първоначалният паралелотоп, и които не се припокриват.

Дефиниция 2.3. Подразделение Π на един паралелотоп Δ е крайно множество от паралелотопи $\Pi = \{\Delta_k\}_{k=1}^{k_0}$, за което $\cup_{k=1}^{k_0}\Delta_k = \Delta$ и $\mathring{\Delta}_k \cap \mathring{\Delta}_l = \emptyset \; \forall k \neq l$.



Забележете, че вътрешността на паралелотопа $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, \; i = 1, 2, ...n\}$ е множеството $\mathring{\Delta} = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, \; i = 1, 2, ..n\}$. Следното твърдение е геометрически очевидно, но съществено за по-нататъшната ни работа:

Твърдение 2.4. *Ако $\Pi = \{\Delta_k\}_{k=1}^{k_0}$ е подразделяне на Δ, то $\mu_n(\Delta) = \sum_{k=1}^{k_0} \mu_n(\Delta_k)$.*

Доказателство. Първо разглеждаме случая на правилно подразделяне, т.е. Π се получава като се раздели интервалът, в който се мени i-тата координата, на подинтервали за всяко i, и се вземат всевъзможните декартови произведения на такива подинтервали. За пестене на място и по-прости означения ще изпишем нещата за $n = 2$, в общия случай доказателството е аналогично. И тъй, нека $\Delta = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ и делим $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$ на подинтервали:

$$a_1 = x_0 < x_1 < ... < x_{m_0} = b_1 \ ,$$

$$a_2 = y_0 < y_1 < ... < y_{l_0} = b_2 \ .$$

Тогава $\Pi = \{\Delta_{ml} : \ m = 1, \ldots, m_0, \ l = 1, \ldots, l_0\}$, където $\Delta_{ml} = [x_{m-1}, x_m] \times [y_{l-1}, y_l]$. Пресмятаме

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{l_0} \sum_{m=1}^{m_0} \mu_2(\Delta_{ml}) &= \sum_{l=1}^{l_0} \sum_{m=1}^{m_0} (x_m - x_{m-1})(y_l - y_{l-1}) \\
&= \sum_{l=1}^{l_0} (y_l - y_{l-1}) \sum_{m=1}^{m_0} (x_m - x_{m-1}) \\
&= (b_1 - a_1) \sum_{l=1}^{l_0} (y_l - y_{l-1}) \\
&= (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \\
&= \mu_2(\Delta)
\end{aligned}$$

Нека сега да разгледаме произволно подразделяне $\Pi = \{\Delta_k\}_{k=1}^{k_0}$. Можем да намерим правилно подразделяне Π^* на Δ такова, че елементите на $\Pi^* = \{\Delta_l^*\}_{l=1}^{l_0}$, които се съдържат в Δ_k, образуват подразделяне на Δ_k (например при размерност 2 продължаваме вертикалните и хоризонтални страни на правоъгълниците от Π в целите интервали). Тогава, използвайки два пъти предишната стъпка, получаваме

$$\mu_n(\Delta) = \sum_{l=1}^{l_0} \mu_n(\Delta_l^*) = \sum_{k=1}^{k_0} \left(\sum_{\Delta_l^* \subset \Delta_k} \mu_n(\Delta_l^*) \right) = \sum_{k=1}^{k_0} \mu_n(\Delta_k) \ .$$

$\square$

В горното доказателство намерихме "подразделяне Π^* на Δ такова, че елементите на $\Pi^* = \{\Delta_l^*\}_{l=1}^{l_0}$, които се съдържат в Δ_k, образуват подразделяне на Δ_k". В такава ситуация казваме, че Π^* е по-фино (или по-дребно) от Π. Формално

Дефиниция 2.5. Нека $\Pi = \{\Delta_k\}_{k=1}^{k_0}$ и $\Pi^* = \{\Delta_l^*\}_{l=1}^{l_0}$ са две подразделяния на паралелотопа Δ. Казваме, че Π^* е по-фино от Π (или Π^* е вписано в Π) и пишем $\Pi^* \geq \Pi$, ако

$$\{\Delta_l^* : \ \Delta_l^* \subset \Delta_k\}$$

е подразделяне на Δ_k за всяко $k = 1, 2, \ldots, k_0$.

2.2 Въвеждане на Риманов интеграл чрез подхода на Дарбу

В целия параграф ще разглеждаме дадена ограничена функция $f : \Delta \to \mathbb{R}$, където Δ е паралелотоп в $\mathbb{R}^n$.

Нека $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ е произволно подразделяне на Δ. По аналогия с едномерния случай дефинираме

$$s_f(\Pi) = \sum_{i=1}^{i_0} m_i \mu_n(\Delta_i), \text{ където } m_i = \inf\{f(x) : x \in \Delta_i\} \ , \ i = 1, \ldots, i_0 \ .$$

Числото $s_f(\Pi)$ наричаме *малка сума на Дарбу* за функцията f, съответстваща на подразделянето Π. Интуитивно това число е долна оценка за интеграла, който искаме да въведем.

Аналогично

$$S_f(\Pi) = \sum_{i=1}^{i_0} M_i \mu_n(\Delta_i), \text{ където } M_i = \sup\{f(x) : x \in \Delta_i\} \ , \ i = 1, \ldots, i_0 \ .$$

Сега числото $S_f(\Pi)$ наричаме *голяма сума на Дарбу* за функцията f, съответстваща на подразделянето Π. Интуитивно това число е горна оценка за търсения "обем".

Следните две леми точно съответстват на доказаните в ДИС1. Интуитивно, първата лема казва, че оценките, съответстващи на по-дребно подразделяне, са по-точни (горната оценка намалява, а долната се увеличава). Втората лема казва, че всяка долна оценка не надминава коя да е горна оценка, както и би трябвало да бъде.

Лема 2.6. *Ако* $\Pi^* \geq \Pi$, *то* $s_f(\Pi^*) \geq s_f(\Pi)$ *и* $S_f(\Pi^*) \leq S_f(\Pi)$.

Доказателство. Без ограничение на общността, нека $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ и $\Pi^* = \{\Delta_1^j\}_{j=1}^{j_0} \cup \{\Delta_i\}_{i=2}^{i_0}$, т.е. Π^* се получава от Π чрез подразделяне $\{\Delta_1^j\}_{j=1}^{j_0}$ на първия елемент Δ_1 на Π. Да означим $m_i = \inf\{f(x) : x \in \Delta_i\}$ за $i = 1, \ldots, i_0$, $m_1^j = \inf\{f(x) : x \in \Delta_1^j\}$ за $j = 1, \ldots, j_0$. Забележете, че $m_1 \leq m_1^j$ за всяко $j = 1, \ldots, j_0$, защото $\Delta_1^j \subset \Delta_1$. Оттук получаваме, че

$$\begin{aligned}
s_f(\Pi^*) - s_f(\Pi) &= \sum_{j=1}^{j_0} m_1^j \mu_n(\Delta_1^j) + \sum_{i=2}^{i_0} m_i \mu_n(\Delta_i) - \sum_{i=1}^{i_0} m_i \mu_n(\Delta_i) \\
&= \sum_{j=1}^{j_0} m_1^j \mu_n(\Delta_1^j) - m_1 \mu_n(\Delta_1) \\
&\geq \sum_{j=1}^{j_0} m_1 \mu_n(\Delta_1^j) - m_1 \mu_n(\Delta_1) \\
&= m_1 \left(\sum_{j=1}^{j_0} \mu_n(\Delta_1^j) - \mu_n(\Delta_1) \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

поради Твърдение 2.4.

Аналогично доказваме, че $S_f(\Pi^*) \leq S_f(\Pi)$. □

Лема 2.7. *За произволни подразделяния* Π_1 *и* Π_2 *на* Δ *е в сила* $s_f(\Pi_1) \leq S_f(\Pi_2)$.

Доказателство. Нека $\Pi^* \geq \Pi_1$, $\Pi^* \geq \Pi_2$ (ясно е, че такова подразбиване Π^* на Δ съществува - например може да се вземе множеството от неизродените паралелотопи, получени като сечение на елемент от Π_1 с елемент от Π_2). Тогава

$$s_f(\Pi_1) \leq s_f(\Pi^*) \leq S_f(\Pi^*) \leq S_f(\Pi_2) \ ,$$

като първото и последното неравенство се получават от предишната лема, а средното неравенство се получава от очевидното съображение, че инфимумът на множество от реални числа не надминава неговия супремум, и от дефиницията на малка и голяма сума на Дарбу. □

Тъй като функцията f е ограничена, множеството от всевъзможните малки суми на Дарбу (както и множеството от всевъзможните големи суми на Дарбу) на f е ограничено и следователно можем да дефинираме *долен интеграл* на f върху Δ

$$\underline{\int}_{\Delta} f := \sup \{s_f(\Pi) : \Pi \text{ е подразделяне на } \Delta\}$$

и *горен интеграл* на f върху Δ

$$\overline{\int}_{\Delta} f := \inf \{S_f(\Pi) : \Pi \text{ е подразделяне на } \Delta\} \ .$$

Да отбележим, че от Лема 2.7 следва, че при произволно фиксирано поразделяне Π на Δ е в сила $\underline{\int}_{\Delta} f \leq S_f(\Pi)$, откъдето следва неравенството $\underline{\int}_{\Delta} f \leq \overline{\int}_{\Delta} f$.

Дефиниция 2.8. Функцията f се нарича интегруема по Риман, когато долният и горният интеграл на f върху Δ съвпадат (или еквивалентно съществува единствено число, разделящо малките от големите суми на Дарбу). Тогава общата стойност на долния и горния интеграл на f върху Δ се нарича интеграл на f върху Δ и се означава с $\int_\Delta f$ или $\int_\Delta f(x)\mathrm{d}x$.

Други разпространени означения в съответните размерности са
$n = 1$ $\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
$n = 2$ $\iint_\Delta f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$
$n = 3$ $\iiint_\Delta f(x_1, x_2, x_3)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$

Следният критерий за интегруемост се формулира и доказва точно като в курса по ДИС1:

Твърдение 2.9. *(Първа форма на критерия за интегруемост) Функцията f е интегруема по Риман върху Δ точно тогава, когато за всяко положително число ε съществуват подразделяния Π_1 и Π_2 на Δ такива, че $S_f(\Pi_1) - s_f(\Pi_2) < \varepsilon$. Еквивалентно, f е интегруема по Риман върху Δ точно тогава, когато за всяко положително число ε съществува подразделяне Π на Δ такова, че $S_f(\Pi) - s_f(\Pi) < \varepsilon$.*

Следващото твърдение е ново (т.е. не сте правили подобно в ДИС1) и ни е необходимо с оглед доказателството на критерия на Лебег.

Твърдение 2.10. *(Втора форма на критерия за интегруемост) Функцията f е интегруема по Риман върху Δ точно тогава, когато за всяко положително число ε и за всяко положително число η съществува подразделяне Π на Δ такова, че сумата от мерките на елементите на Π, в които осцилацията на f е по-голяма или равна на η, е по-малка от ε. Формално записано, за всяко $\varepsilon > 0$ и за всяко $\eta > 0$ съществува подразделяне $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$, за което*

$$\sum_{M_i - m_i \geq \eta} \mu_n(\Delta_i) < \varepsilon \ .$$

Доказателство. Нека f е интегруема по Риман върху Δ и $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ са произволни положителни числа. Тогава от първата форма на критерия за интегруемост следва, че съществува подразделяне Π на Δ такова, че $S_f(\Pi) - s_f(\Pi) < \varepsilon\eta$. Нека $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ и m_i, M_i са дефинирани както обикновено. Тогава

$$\begin{aligned}
\varepsilon\eta > S_f(\Pi) - s_f(\Pi) &= \sum_{i=1}^{i_0} M_i\mu_n(\Delta_i) - \sum_{i=1}^{i_0} m_i\mu_n(\Delta_i) = \sum_{i=1}^{i_0} (M_i - m_i)\,\mu_n(\Delta_i) \\
&= \sum_{M_i - m_i < \eta} (M_i - m_i)\,\mu_n(\Delta_i) + \sum_{M_i - m_i \geq \eta} (M_i - m_i)\,\mu_n(\Delta_i) \\
&\geq \sum_{M_i - m_i \geq \eta} (M_i - m_i)\,\mu_n(\Delta_i) \geq \sum_{M_i - m_i \geq \eta} \eta\mu_n(\Delta_i) = \eta \sum_{M_i - m_i \geq \eta} \mu_n(\Delta_i)
\end{aligned}$$

Съкращаваме на η и получаваме търсеното неравенство за така намереното подразделяне Π на Δ.

Сега обратно, нека е в сила условието от критерия и искаме да докажем, че f е интегруема. За целта избираме произволно положително число ζ и ще търсим подразбиване Π на Δ, за което разстоянието между съответната голяма и малка сума на Дарбу е по-малка от ζ. Това би решило въпроса според първата форма на критерия за интегруемост. Ще намерим Π от даденото условие с достатъчно малки (зависещи от ζ) $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$. Ще се сетим колко малки трябва да изберем тези числа, след като оценим разликата между съответните голяма и малка сума на Дарбу по подобен начин като преди, само че отгоре:

$$S_f(\Pi) - s_f(\Pi) = \sum_{M_i - m_i < \eta} (M_i - m_i)\,\mu_n(\Delta_i) + \sum_{M_i - m_i \geq \eta} (M_i - m_i)\,\mu_n(\Delta_i)$$

$$\leq \eta \sum_{M_i - m_i < \eta} \mu_n(\Delta_i) + (M - m) \sum_{M_i - m_i \geq \eta} \mu_n(\Delta_i) < \eta\mu_n(\Delta) + \varepsilon(M - m) \ ,$$

където $M := \sup\{f(x) : x \in \Delta\}$ и $m := \inf\{f(x) : x \in \Delta\}$. Следователно ако изберем

$$\varepsilon := \frac{\zeta}{2(M - m)} \text{ и } \eta := \frac{\zeta}{2\mu_n(\Delta)} \ ,$$

за подразбиването Π на Δ, получено от даденото условие, е в сила $S_f(\Pi) - s_f(\Pi) < \zeta$. □

2.3 Суми на Риман и граница на суми на Риман

Сумите на Риман се дефинират точно по същия начин като в курса по ДИС1. Те се различават от сумите на Дарбу по това, мярката на съответното паралелотопче се умножава по стойността на функцията в произволна пробна точка (sample point) от него (а не по супремума или инфимума на стойностите на функцията в паралелотопчето). Да отбележим, че няма проблем да дефинираме суми на Риман и за неограничена функция.

И тъй, нека Δ е паралелотоп в $\mathbb{R}^n$ и $f : \Delta \to \mathbb{R}$.

Фиксираме подразбиване $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ на Δ и избираме пробни точки $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{i_0}\}$, където $\xi_i \in \Delta_i$ за всяко $i = 1, \ldots, i_0$. Тогава числото

$$\sigma_f(\Pi, \xi) := \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi_i)\mu_n(\Delta_i)$$

наричаме *сума на Риман* на функцията f за подразбиването Π с пробни точки ξ.

Твърдение 2.11. *Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$ е ограничена и Π е подразбиване на Δ. Тогава*

$$s_f(\Pi) = \inf\{\sigma_f(\Pi, \xi) : \ \xi \text{ са пробни точки за } \Pi\}$$

$$S_f(\Pi) = \sup\{\sigma_f(\Pi, \xi) : \ \xi \text{ са пробни точки за } \Pi\}$$

Доказателство. Очевидно $m_i = \inf\{f(x) : x \in \Delta_i\} \leq f(\xi_i) \leq \sup\{f(x) : x \in \Delta_i\} = M_i$ за всяко $i = 1, \ldots, i_0$ и за всеки избор на пробните точки ξ. Умножавайки тези неравенства с $\mu_n(\Delta_i)$ и събирайки ги, получаваме $s_f(\Pi) \leq \sigma_f(\Pi, \xi) \leq S_f(\Pi)$. Следователно малката (голямата) сума на Дарбу за Π е долна (горна) граница за сумите на Риман за същото подразбиване. Да проверим например, че малката сума на Дарбу за Π е точна долна граница за сумите на Риман за Π. Избираме произволно $\varepsilon > 0$ и от $m_i + \frac{\varepsilon}{i_0\mu_n(\Delta_i)} > m_i$ намираме $\xi_i \in \Delta_i$ с $f(\xi_i) < m_i + \frac{\varepsilon}{i_0\mu_n(\Delta_i)}$ за всяко $i = 1, \ldots, i_0$. За така намерените пробни точки $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{i_0}\}$ имаме

$$\sigma_f(\Pi, \xi) = \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi_i)\mu_n(\Delta_i) < \sum_{i=1}^{i_0} \left(m_i + \frac{\varepsilon}{i_0\mu_n(\Delta_i)} \right) \mu_n(\Delta_i) = s_f(\Pi) + \varepsilon \ ,$$

следователно всяко число, по-голямо от $s_f(\Pi)$, вече не е долна граница за сумите на Риман за Π. $\square$

За да можем да пренесем идеята за граница на суми на Риман от едномерния в многомерния случай, се нуждаем от подходяща дефиниция на диаметър на подразбиване. Да напомним, че ако A е ограничено подмножество на $\mathbb{R}^n$, то диаметър на A наричаме числото

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{\|x-y\| : \ x \in A, \ y \in A\} \ .$$

Дефиниция 2.12. Нека $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ е подразбиване на паралелотопа Δ. Диаметър на Π наричаме най-големия от диаметрите на паралелотопите от Π:

$$\mathrm{d}(\Pi) = \max\{\mathrm{diam}(\Delta_i) : \ i = 1, 2, \dots, i_0\}$$

Дефиниция 2.13. Казваме, че сумите на Риман за функцията $f : \Delta \to \mathbb{R}$ имат граница числото I, когато диаметърът на подразбиването клони към нула, и пишем

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} \sigma_f(\Pi, \xi) = I \ ,$$

ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че за всяко подразбиване Π на Δ с $\mathrm{d}(\Pi) < \delta$ и при всеки избор на пробните точки ξ за Π е в сила $|\sigma_f(\Pi, \xi) - I| < \varepsilon$.

2.4 Еквивалентност на подхода чрез суми на Дарбу и на подхода чрез суми на Риман

Теорема 2.14. *Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$, където $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ е паралелотоп, и нека сумите на Риман за f имат граница I, когато диаметърът на подразбиването клони към нула. Тогава функцията f е ограничена, интегруема по Риман и $I = \int_\Delta f$.*

Доказателство. Нека $\varepsilon = 1 > 0$. Тогава съществува $\delta > 0$ такова, че за всички подразбивания Π с $\mathrm{d}(\Pi) < \delta$ и при всеки избор на пробните точки ξ за Π е в сила $I-1 < \sigma_f(\Pi, \xi) < I+1$. Да фиксираме произволно подразбиване $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ с диаметър, по-малък от δ. Ще докажем, че функцията е ограничена върху всеки елемент на Π.

Да фиксираме $i \in \{1, \dots, i_0\}$ и някакви точки $\xi_j \in \Delta_j$ за всяко $j \neq i$, $j \in \{1, \dots, i_0\}$. Тогава получаваме, че

$$\frac{(I-1) - \sum_{j\neq i} f(\xi_j)\mu_n(\Delta_j)}{\mu_n(\Delta_i)} < f(\xi_i) < \frac{(I+1) - \sum_{j\neq i} f(\xi_j)\mu_n(\Delta_j)}{\mu_n(\Delta_i)}$$

за всяко $\xi_i \in \Delta_i$. Следователно f е ограничена върху Δ_i, $i \in \{1, \dots, i_0\}$. С това ограничеността на f е доказана, защото подразбиването Π има краен брой елементи.

Нека ε е произволно положително число. Тогава съществува $\delta > 0$ такова, че за всяко подразбиване Π на Δ с $\mathrm{d}(\Pi) < \delta$ и при всеки избор на пробните точки ξ за Π е в сила $I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_f(\Pi, \xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}$. Използвайки това и Твърдение 2.11, получаваме

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leq s_f(\Pi) \leq S_f(\Pi) \leq I + \frac{\varepsilon}{3} \ .$$

Следователно

$$S_f(\Pi) - s_f(\Pi) \leq \left(I + \frac{\varepsilon}{3}\right) - \left(I - \frac{\varepsilon}{3}\right) = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

и получаваме интегруемостта на f от първата форма на критерия за интегруемост. Нещо повече, от горните неравенства и от факта, че $\int_\Delta f$ се намира между $s_f(\Pi)$ и $S_f(\Pi)$, получаваме, че $I - \frac{\varepsilon}{3} \leq \int_\Delta f \leq I + \frac{\varepsilon}{3}$ и тъй като ε беше произволно положително число, то $\int_\Delta f = I$. □

Теорема 2.15. *Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$, където $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ е паралелотоп, е интегруема по Риман. Тогава сумите на Риман за f имат граница $\int_\Delta f$, когато диаметърът на подразбиването клони към нула.*

Доказателство. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Ако докажем, че съществува $\delta > 0$ такова, че за всяко подразбиване Π на Δ с $\mathrm{d}(\Pi) < \delta$ е в сила $I - \varepsilon < s_f(\Pi) \leq S_f(\Pi) < I + \varepsilon$, доказателството ще е завършено, защото при произволен избор на представителните точки ξ имаме $s_f(\Pi) \leq \sigma_f(\Pi, \xi) \leq S_f(\Pi)$ и следователно от горните неравенства получаваме $|\sigma_f(\Pi, \xi) - I| < \varepsilon$.

И така $\varepsilon > 0$. От дефиницията за интеграл на Риман следва, че съществува $\Pi_1 = \{\Box_j\}_{j=1}^{j_0}$ подразделяне на Δ такова, че

$$S_f(\Pi_1) < I + \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

От f интегруема следва, че f е ограничена. Нека $M = \sup\{|f(x)|: x \in \Delta\}$. Означаваме с P_{Π_1} общата площ на границите на паралелотопчетата от Π_1, т.е. $P_{\Pi_1} := \Sigma_{j=1}^{j_0} \mu_{n-1}(\partial \Box_j)$. Полагаме

$$\delta = \frac{\varepsilon}{8MP_{\Pi_1}} > 0 \ .$$

Искаме да оценим $S_f(\Pi)$, където $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ е произволно подразбиване на Δ с диаметър, по-малък от δ.

Нека сега Π_2 да е подразбиване на Δ, съставено от сеченията на елементите на Π и Π_1, т.е. $\Pi_2 = \{\Box_j \cap \Delta_i\}_{i=1}^{i_0}{}_{j=1}^{j_0}$ и след това изхвърляме празните множества. Тогава

$$d(\Pi_2) \leq d(\Pi) < \delta \ .$$

Тъй като $\Pi_2 \geq \Pi_1$, то

$$S_f(\Pi_2) \leq S_f(\Pi_1) < I + \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Ще оценим отгоре $S_f(\Pi) - S_f(\Pi_2)$. Делим елементите на Π на две групи - които се секат с границата на някой елемент на Π_1 и които се съдържат изцяло във вътрешността на елемент на Π_1. Събираемите, съответстващи на елементите от втория вид, участват както в $S_f(\Pi)$, така и в $S_f(\Pi_2)$ и се съкращават. Нека индексите на елементите на Π от първия вид са $I_1 \subset \{1, 2, ..., i_0\}$.

Тогава

$$S_f(\Pi) - S_f(\Pi_2) = \sum_{i \in I_1} M_i \mu_n(\Delta_i) - \sum_{i \in I_1} \sum_{j=1}^{j_0} M_{ij} \mu_n(\Delta_i \cap \Box_j) \ ,$$

където, разбира се, $M_i = \sup\{f(x) : \ x \in \Delta_i\}$ и $M_{ij} = \sup\{f(x) : \ x \in \Delta_i \cap \Box_j\}$. Тъй като $\mathrm{diam}(\Delta_i) < \delta$, то $\sum_{i \in I_1} \mu_n(\Delta_i) \leq 2\delta P_{\Pi_1}$ и следователно

$$\left| \sum_{i \in I_1} M_i \mu_n(\Delta_i) \right| \leq \sum_{i \in I_1} |M_i| \, \mu_n(\Delta_i) \leq M 2\delta P_{\Pi_1} \ .$$

Аналогично $\sum_{i\in I_1}\sum_{j=1}^{j_0}\mu_n(\Delta_i\cap\square_j)\le 2\delta P_{\Pi_1}$ влече

$$\left|\sum_{i\in I_1}\sum_{j=1}^{j_0}M_{ij}\mu_n(\Delta_i\cap\square_j)\right|\le M2\delta P_{\Pi_1}\ .$$

Следователно

$$S_f(\Pi)-S_f(\Pi_2)\le\left|\sum_{i\in I_1}M_i\mu_n(\Delta_i)\right|+\left|\sum_{i\in I_1}\sum_{j=1}^{j_0}M_{ij}\mu_n(\Delta_i\cap\square_j)\right|\le 4MP_{\Pi_1}\delta=\frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Тогава имаме

$$S_f(\Pi)=(S_f(\Pi)-S_f(\Pi_2))+S_f(\Pi_2)\le\frac{\varepsilon}{2}+S_f(\Pi_2)<\frac{\varepsilon}{2}+I+\frac{\varepsilon}{2}=I+\varepsilon\ .$$

Аналогично доказваме, че $s_f(\Pi)>I-\varepsilon$ за всички Π с достатъчно малък диаметър, с което доказателството е завършено. $\square$

3 Лекция 3: Множества, пренебрежими по Лебег и критерий на Лебег за интегруемост по Риман

Целта на тази лекция е да докажем необходимо и достатъчно условие за интегруемост по Риман, което свързва интегруемостта с "големината"на множеството от точките на непрекъснатост на функцията. За да можем да формулираме точно критерия, се нуждаем от понятието "множество, пренебрежимо по Лебег". Само по себе си това понятие е изключително важно, затова ще отделим време за неговото изучаване.

3.1 Множества, пренебрежими по Лебег

Дефиниция 3.1. Едно подмножество A на $\mathbb{R}^n$ наричаме *пренебрежимо по Лебег* в $\mathbb{R}^n$, ако за всяко положително ε можем да покрием множеството с изброимо много паралелотопи, чиято сумарна мярка е по-малка от ε. Формално записано, за произволно $\varepsilon > 0$ съществуват $\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ (където Δ_k са затворени паралелотопи в $\mathbb{R}^n$) такива, че

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \supset A \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_k) < \varepsilon \ .$$

Пример 3.2. Изродените паралелотопи са пренебрежими множества. Точките са изродени паралелотопи в $\mathbb{R}^n$ за всяко естествено n и следователно са пренебрежими множества.

Очевидно е, че подмножество на пренебрежимо множество е пренебрежимо. Следващото твърдение съдържа едно от най-важните и често употребявани свойства на множествата, пренебрежими по Лебег:

Твърдение 3.3. *Ако $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ е редица от пренебрежими множества, то обединението им A също е пренебрежимо множество.*

Доказателство. Да фиксираме произволно положителното число ε. Тъй като A_1 е пренебрежимо и $\varepsilon/2 > 0$, то съществуват паралелотопи $\{\Delta_k^1 \ : \ k = 1, 2, \dots\}$ такива, че

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k^1 \supset A_1 \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_k^1) < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Аналогично постъпваме с множествата A_2, A_3 и т.н. За да фиксираме означенията, нека m е естествено число. Тъй като A_m е пренебрежимо и $\varepsilon/2^m > 0$, то съществуват паралелотопи $\{\Delta_k^m \ : \ k = 1, 2, \dots\}$ такива, че

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k^m \supset A_m \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_k^m) < \frac{\varepsilon}{2^m} \ .$$

По този начин построихме паралелотопите $\{\Delta_k^m \ : \ k = 1, 2, \dots, \ m = 1, 2, \dots\}$. Те са изброимо много и очевидно

$$\bigcup_{m,k=1}^{\infty} \Delta_k^m = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k^m \right) \supset \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = A \ .$$

От друга страна

$$\sum_{m,k=1}^{\infty} \mu_n \left(\Delta_k^m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_n \left(\Delta_k^m\right) \right) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^m} = \varepsilon \ .$$

$\square$

Важна забележка: В последния ред от горното доказателство допуснахме липса на прецизност. За да бъдем точни, трябваше да подредим индексите $\{(m,k) : \ m \in \mathbb{N}, \ k \in \mathbb{N}\}$ в редица $\{(\pi_1(i), \pi_2(i)) : \ i \in \mathbb{N}\}$ и да разгледаме реда $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n \left(\Delta_{\pi_2(i)}^{\pi_1(i)}\right)$. Всъщност, използвахме следното твърдение: Ако a_k^m са неотрицателни числа за всички естествени индекси m и n и $\{(\pi_1(i), \pi_2(i)) : \ i \in \mathbb{N}\}$ е кое да е подреждане на $\mathbb{N}^2$ в редица, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{\pi_2(i)}^{\pi_1(i)} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^m \right) \ .$$

Препоръчвам ви да се опитате да си докажете това твърдение сами.

Пример 3.4. Тъй като точките са пренебрежими множества, горното твърдение влече, че множеството от рационалните числа $\mathbb{Q}$ е пренебрежимо в $\mathbb{R}$. Аналогично $\mathbb{Q}^n$ е пренебрежимо в $\mathbb{R}^n$.

Твърдение 3.5. *Едно подмножество A на $\mathbb{R}^n$ е пренебрежимо по Лебег в $\mathbb{R}^n$ точно тогава, когато за всяко положително ε можем да покрием множеството с вътрешностите на изброимо много паралелотопи, чиято сумарна мярка е по-малка от ε.*

Доказателство. В едната посока твърдението е очевидно. Нека сега A е пренебрежимо по Лебег и $\varepsilon > 0$ е произволно. Тогава съществуват $\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ (където Δ_k са затворени паралелотопи в $\mathbb{R}^n$) такива, че

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \supset A \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_k) < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Да изберем ред с положителни членове $\alpha_k > 0$ и сума $\varepsilon/2$, т.е. $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \varepsilon/2$ (например можем да изберем като в доказателството на предишното твърдение $\alpha_k = \varepsilon/2^{k+1}$). Ясно е, че за всяко $k \in \mathbb{N}$ можем да намерим затворен паралелотоп $\square_k$, който съдържа Δ_k във вътрешността си ($\mathring{\square}_k \supset \Delta_k$) и такъв, че $\mu_n(\square_k) \leq \mu_n(\Delta_k) + \alpha_k$ (трябва да раздуем достатъчно малко всеки от координатните интервали). Тогава $\{\square_k\}_{k=1}^{\infty}$ са изброимо много паралелотопи, за които

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{\square}_k \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \supset A \text{ и}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(\square_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_n(\Delta_k) + \alpha_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

$\square$

Следващата лема е техническа и почти очевидна от геометрична гледна точка.

Лема 3.6. *Нека* $\{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ *са краен брой паралелотопи в* $\mathbb{R}^n$*, които не се припокриват, т.е.* $\mathring{\Delta}_i \cap \mathring{\Delta}_j = \emptyset$ *винаги, когато* $i \neq j$*. Нека* $\{\Box_k\}_{k=1}^{k_0}$ *са краен брой паралелотопи, за които* $\bigcup_{k=1}^{k_0} \Box_k \supset \bigcup_{i=1}^{i_0} \Delta_i$*. Тогава* $\sum_{k=1}^{k_0} \mu_n(\Box_k) \geq \sum_{i=1}^{i_0} \mu_n(\Delta_i)$*.*

Доказателство. Нека Π_i е подразбиване на Δ_i, всеки елемент на което се съдържа в някой от паралелотопите $\{\Box_k\}_{k=1}^{k_0}$ (тук $i = 1, \dots, i_0$). Сега за всяко $k \in \{1, \dots, k_0\}$ можем да построим подразбиване Π^k на $\Box_k$ такова, че

$$\Pi_i^k := \{\Delta_i \cap \Box \ : \ \Box \in \Pi^k, \ \Delta_i \cap \Box \text{ непразен, неизроден}\} \equiv \Pi_i \ , \ i = 1, \dots, i_0 \ .$$

Да забележим, че $\Pi_i^k \cap \Pi_j^k = \emptyset$ винаги, когато $i \neq j$, защото Δ_i и Δ_j не се припокриват. Тогава, използвайки два пъти Твърдение 2.4, получаваме

$$\sum_{k=1}^{k_0} \mu_n(\Box_k) = \sum_{k=1}^{k_0} \left(\sum_{\Box \in \Pi^k} \mu_n(\Box) \right) \geq \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{i=1}^{i_0} \left(\sum_{\Box \in \Pi_i^k} \mu_n(\Box) \right) \geq \sum_{i=1}^{i_0} \left(\sum_{\Box \in \Pi_i} \mu_n(\Box) \right) = \sum_{i=1}^{i_0} \mu_n(\Delta_i).$$

$\Box$

Пример 3.7. Неизродените паралелотопи в $\mathbb{R}^n$ не са пренебрежими в $\mathbb{R}^n$.

Наистина, един паралелотоп Δ в $\mathbb{R}^n$ е неизроден точно тогава, когато $\mu_n(\Delta) > 0$. Сега ако допуснем, че Δ е пренебрежим, то според Твърдение 3.5 съществуват $\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ (където Δ_k са паралелотопи в $\mathbb{R}^n$) такива, че

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{\Delta}_k \supset \Delta \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_k) < \frac{\mu_n(\Delta)}{2} \ .$$

Тъй като Δ е компакт и $\{\mathring{\Delta}_k\}_{k=1}^{\infty}$ е негово отворено покритие, то съществува $k_0 \in \mathbb{N}$ такова, че

$$\bigcup_{k=1}^{k_0} \mathring{\Delta}_k \supset \Delta \ .$$

Сега използваме горната лема с Δ единствен елемент на множеството от паралелотопите, които не се припокриват, и с $\Box_k := \Delta_k$. Получаваме

$$\mu_n(\Delta) \leq \sum_{k=1}^{k_0} \mu_n(\Delta_k) < \frac{\mu_n(\Delta)}{2} \ , \text{ противоречие.}$$

Твърдение 3.8. *Ако U е непразно отворено множество, то U не е пренебрежимо.*

Доказателство. Тъй като U не е празно, можем да изберем точка $x_0 \in U$. Тогава (от отвореността на U) съществува $\varepsilon > 0$ такова, че кълбото $B_{2\varepsilon}(x_0)$ се съдържа в U. Да разгледаме паралелотопа

$$\Delta := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ x_i^0 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \leq x_i \leq x_i^0 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \ i = 1, 2, \dots, n \right\} \ .$$

Ако x е произволна точка от Δ, можем да оценим разстоянието

$$\|x - x_0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_i^0\right)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} = \sqrt{n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon < 2\varepsilon \ .$$

Следователно $\Delta \subset B_{2\varepsilon}(x_0) \subset U$. Паралелотопът Δ е неизроден и тогава от горния пример следва, че не е пренебрежимо множество. Оттук и от $\Delta \subset U$ следва, че U също не може да е пренебрежимо по Лебег. $\square$

3.2 Критерий на Лебег за интегруемост по Риман

Теорема 3.9 (Критерий на Лебег за интегруемост по Риман)**.** *Нека Δ е паралелотоп в $\mathbb{R}^n$ и $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$. Твърдим, че функцията f е интегруема по Риман точно тогава, когато е ограничена и множеството от точките ѝ на прекъсване е пренебрежимо по Лебег.*

Да отбележим, че тази теорема е нова за вас и в едномерния случай ($n = 1$). Спомнете си твърденията, доказани в ДИС1 за "някои класове интегруеми функции". Всички те са директно следствие от критерия на Лебег. Наистина, ако една функция е непрекъсната в $[a, b]$, то тя е ограничена (Вайерщрас) и множеството от точките ѝ на прекъсване е празно, значи пренебрежимо. Ако една ограничена функция има краен брой точки на прекъсване, то тя е интегруема по критерия на Лебег, защото крайните множества са пренебрежими. Тъй като монотонните функции в $[a, b]$ са ограничени (стойностите им са между $f(a)$ и $f(b)$) и имат най-много изброимо много точки на прекъсване, твърдението за тяхната интегруемост също е следствие от горната теорема.

С R_f ще означаваме множеството от точките на прекъсване на функцията f.

Доказателство. Ще използваме и в двете посоки на доказателството втората форма на критерия за интегруемост (Твърдение 2.10).

Нека функцията f е интегруема по Риман. Тогава тя, разбира се, е ограничена, и трябва да докажем пренебрежимостта на множеството R_f. Фиксираме произволно $\varepsilon > 0$. Избираме сходящ ред с положителни членове и сума ε: $\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m = \varepsilon$, $\alpha_m > 0$ за всяко естествено m. Прилагаме втората втората форма на критерия за интегруемост за положителните числа α_m и $1/m$. Получаваме подразбиване Π_m на Δ такова, че

$$\sum_{M_k^m - m_k^m \geq \frac{1}{m}} \mu_n(\Delta_k^m) < \alpha_m \ .$$

Да означим с Π'_m множеството от онези елементи на подразбиването Π_m, в които осцилацията на f е по-голяма или равна на $1/m$ (т.е. знаем, че $\sum_{\square \in \Pi'_m} \mu_n(\square) < \alpha_m$). Да означим с P_m множеството от делящите стени на Π_m (т.е. P_m е множеството от паралелотопите, от които се състои $\bigcup_{\square \in \Pi_m} \partial\square$). Ясно е, че P_m е крайно множество от изродени паралелотопи. Тогава

$$\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \Pi'_m \right) \cup \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} P_m \right)$$

е изброимо множество от паралелотопи в $\mathbb{R}^n$ със сумарна мярка, по-малка от ε. Наистина

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{\square \in \Pi'_m} \mu_n(\square) + \sum_{\square \in P_m} \mu_n(\square) \right) < \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m + 0) = \varepsilon \ .$$

Остава да се убедим, че обединението на паралелотопите от $(\bigcup_{m=1}^{\infty}\Pi'_m)\cup(\bigcup_{m=1}^{\infty}P_m)$ покрива R_f. Да изберем произволна точка

$$x\in\Delta\setminus\left(\bigcup\left\{\square\ :\ \square\in\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\Pi'_m\right)\cup\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}P_m\right)\right\}\right)\ .$$

Сега за произволно естествено m съществува паралелотоп $\Delta_x^m\in\Pi_m$ такъв, че $x\in\Delta_x^m$. При това $x\in\mathring{\Delta}_x^m$, защото x не принадлежи на $\bigcup_{\square\in\Pi_m}\partial\square$ (това множество се покрива от елементите на P_m) и осцилацията на f в $\mathring{\Delta}_x^m$ е по-малка от $1/m$, защото $\Delta_x^m\notin\Pi'_m$. Следователно $|f(y)-f(x)|<1/m$ за всяко $y\in\mathring{\Delta}_x^m$ (заради осцилацията). И тъй, за произволно естествено m намерихме околност $\mathring{\Delta}_x^m$ на x такава, че $|f(y)-f(x)|<1/m$ за всяко $y\in\mathring{\Delta}_x^m$. Следователно функцията f е непрекъсната в x, т.е. $x\notin R_f$. С това завършихме доказателството на пренебрежимостта на R_f.

Сега се обръщаме към доказателството на обратната посока. Предполагаме, че f е ограничена и множеството от точките ѝ на прекъсване е пренебрежимо по Лебег. Ще доказваме, че f е интегруема, като използваме втората форма на критерия за интегруемост. За целта избираме произволни $\varepsilon>0$ и $\eta>0$ и ги фиксираме.

Тъй като R_f е пренебрежимо и $\varepsilon>0$, от Твърдение 3.5 съществуват изброимо много паралелотопи $\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ такива, че

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathring{\Delta}_k\supset R_f\ \text{и}\ \sum_{k=1}^{\infty}\mu_n(\Delta_k)<\varepsilon\ .$$

Да означим

$$C:=\Delta\setminus\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathring{\Delta}_k\right)\ .$$

Множеството C е компакт (ограничено е, защото се съдържа в Δ, а е затворено, защото е сечение на затвореното Δ и допълнението на $\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathring{\Delta}_k$, което е отворено като обединение на отворени). При това $C\cap R_f=\emptyset$, следователно f е непрекъсната във всяка точка на C. Прилагаме обобщената теорема на Кантор, която доказахме в първата лекция (Теорема 1.14), към функцията f. Следователно съществува $\delta>0$ такова, че за всяко $x\in C$ и за всяко $y\in\Delta$, за което $\|y-x\|<\delta$, е в сила $|f(x)-f(y)|<\eta/4$. Да изберем произволно подразбиване Π на Δ, чийто диаметър е по-малък от δ. Ще докажем, че за това подразбиване е в сила неравенството от втората форма на критерия за интегруемост.

Нека $\Pi=\{\square_i\}_{i=1}^{i_0}$. Да проверим, че ако някой от паралелотопите от Π има непразно сечение с C, то осцилацията на f върху него е по-малка от η. Наистина, нека $\square_i\cap C\neq\emptyset$ за някое $i\in\{1,2,\dots,i_0\}$. Фиксираме $x\in\square_i\cap C$ (такава има) и нека $y\in\square_i$ е произволна. Тъй като $\operatorname{diam}\square_i\le d(\Pi)<\delta$, получаваме, че $\|x-y\|<\delta$. Сега от избора на δ от теоремата на Кантор и от $x\in C$ имаме $|f(x)-f(y)|<\eta/4$. Следователно

$$M_i:=\sup\{f(y):\ y\in\square_i\}\le f(x)+\frac{\eta}{4}\ ,$$

$$m_i:=\inf\{f(y):\ y\in\square_i\}\ge f(x)-\frac{\eta}{4}\ .$$

Оттук получаваме, че

$$M_i-m_i\le\left(f(x)+\frac{\eta}{4}\right)-\left(f(x)-\frac{\eta}{4}\right)=\frac{\eta}{2}<\eta\ .$$

И тъй, ако осцилацията на f върху даден елемент от Π е по-голяма или равна на η, то този елемент се съдържа в $\Delta \setminus C$. Да означим

$$K := \bigcup \{\Box_i \in \Pi \ : \ M_i - m_i \geq \eta\} \subset \Delta \setminus C = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{\Delta}_k \ .$$

Тъй като K е компакт като обединение на краен брой затворени паралелотопи, то съществува $k_0 \in \mathbb{N}$ такова, че

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{k_0} \mathring{\Delta}_k \subset \bigcup_{k=1}^{k_0} \Delta_k \ .$$

Сега можем да приложим Лема 3.6, защото K е крайно обединение на паралелотопи, които не се припокриват, и да получим

$$\sum_{M_i - m_i \geq \eta} \mu_n(\Box_i) \leq \sum_{k=1}^{k_0} \mu_n(\Delta_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_k) < \varepsilon \ .$$

С това доказателството е завършено. $\Box$

3.3 Основни свойства на интеграла на Риман върху паралелотоп

Критерият на Лебег за интегруемост по Риман улеснява много доказателствата на твърдения за интегруемост. Следното следствие е добър пример за това:

Следствие 3.10. *Нека Δ е паралелотоп в $\mathbb{R}^n$ и нека $f, g : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ са интегруеми по Риман. Тогава*
(а) Сумата $f + g$ и произведението $f \cdot g$ им са интегруеми по Риман;
(б) Ако съществува $\varepsilon_0 > 0$ такова, че $|g(x)| \geq \varepsilon_0$ за всички $x \in \Delta$, то частното $\frac{f}{g}$ е функция, интегруема по Риман;
(в) По-общо, ако $\Phi : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната и $f_1, \ldots, f_k : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ са интегруеми по Риман, то $\Phi(f_1, \ldots, f_k)$ е интегруема по Риман.

Доказателство. Ще започнем с доказателството на (в), понеже е ясно, че (а) е частен случай на (в). Тъй като композиция на непрекъснати функции е непрекъсната, веднага получаваме, че ако в дадена точка $x \in \Delta$ функциите $f_1, \ldots, f_k$ са непрекъснати, то $\Phi(f_1, \ldots, f_k)$ също е непрекъсната в x. Следователно

$\Delta \setminus (R_{f_1} \cup R_{f_2} \cup \ldots \cup R_{f_k}) \subset \Delta \setminus R_{\Phi(f_1,\ldots,f_k)}$, което влече $R_{\Phi(f_1,\ldots,f_k)} \subset R_{f_1} \cup R_{f_2} \cup \ldots \cup R_{f_k}$.

Сега от интегруемостта на $f_1, \ldots, f_k$ следва пренебрежимостта на множествата $R_{f_1}, R_{f_2}, \ldots, R_{f_k}$ и тогава горното включване показва, че $R_{\Phi(f_1,\ldots,f_k)}$ също е пренебрежимо. За да довършим доказателството на (в), остава да проверим ограничеността на $\Phi(f_1, \ldots, f_k)$. Наистина, тъй като $f_1, \ldots, f_k$ са ограничени, то множеството от стойностите $\{(f_1(x), \ldots, f_k(x)) \in \mathbb{R}^k \ : \ x \in \Delta\}$ се съдържа в паралелотоп в $\mathbb{R}^k$, който е компакт. Остава да приложим теоремата на Вайерщрас за Φ.

Остава да проверим (б). Аналогично на горното получаваме, че $R_{\frac{f}{g}} \subset R_f \cup R_g$ и следователно $R_{\frac{f}{g}}$ е пренебрежимо. Нека $|f(x)| \leq M$ за всяко $x \in \Delta$ (f е инрегруема, значи е ограничена). Частното е ограничено, защото

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \frac{M}{\varepsilon_0} \text{ за всяко } x \in \Delta \ .$$

□

Ще завършим тази лекция с основните свойства на римановия интеграл върху паралелотоп Δ в $\mathbb{R}^n$:

1. **Линейност.** Нека $f, g : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ са интегруеми функции и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогава $f+g$ и λf са интегруеми функции и

$$\int_\Delta (f+g) = \int_\Delta f + \int_\Delta g \ , \quad \int_\Delta (\lambda f) = \lambda \int_\Delta f \ .$$

Доказателство. Интегруемостта я имаме наготово от предишното следствие. Остава да забележим, че за произволно подразбиване Π на Δ и за произволни пробни точки ξ за Π имаме

$$\sigma_{f+g}(\Pi, \xi) = \sigma_f(\Pi, \xi) + \sigma_g(\Pi, \xi) \text{ и } \sigma_{\lambda f}(\Pi, \xi) = \lambda \sigma_f(\Pi, \xi) \ ,$$

да напишем горните равенства за редица от подразбивания $\{\Pi_m\}_{m=1}^\infty$ с диаметър, клонящ към нула ($d(\Pi_m) \longrightarrow_{m\to\infty} 0$) и да направим граничен преход. □

2. **Адитивност.** Нека $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ е подразделяне на Δ и $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$. Твърдим, че f е интегруема точно тогава, когато $f\restriction_{\Delta_1}$, $f\restriction_{\Delta_2}$, ..., $f\restriction_{\Delta_{i_0}}$ са интегруеми. При това

$$\int_\Delta f = \int_{\Delta_1} f + \int_{\Delta_2} f + \dots \int_{\Delta_{i_0}} f \ .$$

Доказателство. Очевидно f е ограничена точно тогава, когато $f\restriction_{\Delta_1}$, $f\restriction_{\Delta_2}$, ..., $f\restriction_{\Delta_{i_0}}$ са ограничени. Тъй като $R_{f\restriction_{\Delta_i}} \subset R_f$ за всяко $i = 1, 2, \dots, i_0$, от интегруемостта на f следва интегруемостта на $f\restriction_{\Delta_i}$, $i = 1, 2, \dots, i_0$. Обратната импликация се получава от включването $R_f \subset R_{f\restriction_{\Delta_1}} \cup R_{f\restriction_{\Delta_2}} \cup \dots \cup R_{f\restriction_{\Delta_{i_0}}}$.

За да получим равенството, вземаме редица от подразбивания $\{\Pi^m\}_{m=1}^\infty$ с диаметър, клонящ към нула, като $\Pi^m \geq \Pi$ за всяко естедвено m. Нека ξ^m са пробни точки за Π^m. Означаваме

$$\Pi_i^m := \{\Box \in \Pi^m : \ \Box \subset \Delta_i\}, \ i = 1, 2, \dots, i_0 \ .$$

Нека ξ_i^m са пробните точки от ξ^m, които са в паралелотопите от Π_i^m. Тогава

$$\sigma_f(\Pi^m, \xi^m) = \sigma_f(\Pi_1^m, \xi_1^m) + \sigma_f(\Pi_2^m, \xi_2^m) + \dots + \sigma_f(\Pi_{i_0}^m, \xi_{i_0}^m) \ .$$

Тъй като сме сигурни, че всяко събираемо има граница при $m \to \infty$ и тя е съответният интеграл, правим граничен преход и получаваме търсеното равенство. □

3. **Монотонност.** Нека $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ е интегруема и $f(x) \geq 0$ за всяко $x \in \Delta$. Тогава $\int_\Delta f \geq 0$.

(Директно от факта, че малките суми на Дарбу за f са неотрицателни.)

Следствие 1. Нека $f, g : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ са интегруеми функции и $f(x) \geq g(x)$ за всяко $x \in \Delta$. Тогава $\int_\Delta f \geq \int_\Delta g$.

(Наистина, $\int_\Delta f - \int_\Delta g = \int_\Delta (f-g) \geq 0$ от линейността и монотонността.)

Следствие 2. Ако $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ е интегруема, то $|f|$ е интегруема и $|\int_\Delta f| \leq \int_\Delta |f|$.

(Интегруемостта е директна от критерия на Лебег, а неравенството от $-|f| \leq f \leq |f|$ и предишното следствие.)

4 Лекция 4: Мярка на Пеано-Жордан. Интеграл върху измеримо множество

В тази лекция ще приложим знанията ни за риманов интеграл върху паралелотоп, за да можем по един разумен начин да приписваме мярка на някои подмножества на $\mathbb{R}^n$. Да отбележим, че засега сме говорили за мярка само на паралелотопи.

4.1 Множества, измерими по Пеано-Жордан

Един от стандартните начини да се сведе разглеждането на множества към разглеждането на функции е следната

Дефиниция 4.1. Нека A е подмножество на $\mathbb{R}^n$. *Характеристична функция на* A наричаме функцията $\chi_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, дефинирана с

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{ако } x \in A \\ 0, & \text{ако } x \notin A \end{cases} .$$

Да разгледаме случая n=2, за да е по-силна геометричната ни интуиция. Нека Δ е правоъгълник в равнината, съдържащ A. Тогава $\int_\Delta \chi_A$, ако съществува, беше въведен като обем на тялото, заградено между графиката на χ_A, първата координатна равнина, и вертикалните равнини по границата на Δ. В случая тези вертикални равнини не променят тялото, заградено между графиката на χ_A и първата координатна равнина, защото $A \subset \Delta$. Какво представлява това тяло? То е прав цилиндър с основа A и височина едно. Следователно разумно е неговият обем да бъде равен на лицето на основата, умножено по височината, т.е. на лицето на A. Тези геометрични разглеждания ни дават основание за следната

Дефиниция 4.2. Нека A е ограничено подмножество на $\mathbb{R}^n$ и Δ е произволен паралелотоп в $\mathbb{R}^n$, съдържащ A. Казваме, че A е измеримо по Пеано-Жордан, ако характеристичната функция χ_A на A е интегруема по Риман в Δ. В такъв случай нейния интеграл наричаме n-мерна мярка на A и пишем

$$\mu_n(A) := \int_\Delta \chi_A .$$

Коректност на дефиницията. Ще проверим, че горната дефиниция зависи само от множеството A, но не и от паралелотопа Δ, който го съдържа. Първо да отбележим, че поне един такъв паралелотоп съществува поради ограничеността на A. Нека сега Δ_1 и Δ_2 са паралелотопи в $\mathbb{R}^n$, за които $\Delta_1 \supset A$, $\Delta_2 \supset A$. Искаме да докажем, че ако χ_A е интегруема в Δ_1, то χ_A е интегруема в Δ_2 и $\int_{\Delta_1} \chi_A = \int_{\Delta_2} \chi_A$.

Нека $\Delta = \Delta_1 \cap \Delta_2$. Ако докажем желаното за Δ_1 и Δ, всичко е наред, защото симетрично можем да го направим с Δ_2 и Δ. Наистина, тъй като множеството от точките на прекъсване на $\chi_A \restriction_{\Delta_1}$ и на $\chi_A \restriction_\Delta$ се различават най-много с $\partial\Delta$, което е пренебрежимо множество (като обединение на краен брой изродени паралелотопи), заключението по отношение на интегруемостта следва веднага. Нека сега $\Pi = \{\Delta_i^1\}_{i=1}^{i_0} \cup \{\Delta\}$ да бъде някакво подразделяне на Δ_1, което има за елемент Δ. Ясно е, че всички малки суми на Дарбу за $\chi_A \restriction_{\Delta_i^1}$, $i \in \{1, \dots, i_0\}$ са нули и следователно от интегруемостта имаме $\int_{\Delta_i^1} \chi_A = 0$, $i \in \{1, \dots, i_0\}$.

Тогава от адитивността на интеграла получаваме

$$\int_{\Delta_1} \chi_A = \sum_{i=1}^{i_0} \int_{\Delta_i^1} \chi_A + \int_{\Delta} \chi_A = \int_{\Delta} \chi_A \ .$$

Твърдение 4.3. ***(Критерий за измеримост)*** *Нека A е ограничено подмножество на $\mathbb{R}^n$. Тогава следните твърдения са еквивалентни:*
(а) A е измеримо по Пеано-Жордан.
(б) Контурът ∂A на A е пренебрежим по Лебег.
*(в) За всяко положително ε съществуват **краен брой** паралелотопи $\{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ такива, че*

$$\bigcup_{i=1}^{i_0} \Delta_i \supset \partial A \quad и \quad \sum_{i=1}^{i_0} \mu_n(\Delta_i) < \varepsilon \ .$$

Доказателство. Нека Δ е паралелотоп, съдържащ затворената обвивка на A във вътрешността си. Тъй като χ_A е ограничена функция, критерият на Лебег ни дава, че χ_A е интегруема по Риман в Δ точно тогава, когато множеството от точките на прекъсване на χ_A е пренебрежимо по Лебег. Следователно, ако докажем, че

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \chi_A \text{ е прекъсната в } x\} \ ,$$

с това еквивалентността на (а) и (б) ще бъде доказана. Наистина, ако x принадлежи на вътрешността на A, то χ_A е константата едно в околност на x и следователно χ_A е непрекъсната в x. Ако x принадлежи на вътрешността на допълнението на A, то χ_A е константата нула в околност на x и следователно χ_A е непрекъсната в x. Получихме, че

$$\partial A \supset \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \chi_A \text{ е прекъсната в } x\} \ .$$

Нека сега x принадлежи на контура на A. Тогава съществуват редици от точки $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset A$ и $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n \setminus A$, които клонят към x. Ако χ_A е непрекъсната в x, оттук ще получим, че

$$1 = \chi_A(x_k) \longrightarrow_{k\to\infty} \chi_A(x) \ \text{ и } \ 0 = \chi_A(y_k) \longrightarrow_{k\to\infty} \chi_A(x) \ ,$$

което е противоречие. С това проверихме

$$\partial A \supset \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \chi_A \text{ е прекъсната в } x\}$$

и еквивалентността на (а) и (б) е доказана.

Обръщаме се към доказателството на еквивалентността на (б) и (в). Разбира се, (в) влече (б) тривиално и трябва да се справим само с обратната импликация. Да си спомним, че ∂A е винаги затворено множество. Освен това A е ограничено и значи ∂A също е ограничено. Следователно ∂A е компакт. От пренебрежимостта на ∂A и Твърдение 3.5 следва че за всяко положително ε съществуват изброимо много паралелотопи $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ такива, че

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathring{\Delta}_i \supset \partial A \ \text{ и } \ \sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_i) < \varepsilon \ .$$

От компактността на ∂A получаваме, че съществува i_0 такова, че $\bigcup_{i=1}^{i_0} \mathring{\Delta}_i \supset \partial A$. Тогава, разбира се,

$$\bigcup_{i=1}^{i_0} \Delta_i \supset \partial A \ \text{ и } \ \sum_{i=1}^{i_0} \mu_n(\Delta_i) < \varepsilon$$

и доказателството е завършено. □

Забележка. Свойството в подточка (в) на горното твърдение (по отношение на множеството $K \equiv \partial A$) се нарича *пренебрежимост по Пеано-Жордан* на K. Това е съществено по-силно свойство от пренебрежимост по Лебег, но от горното доказателство се вижда, че двете понятия съвпадат за компактни множества K.

Забележка. В много учебници ще срещнете алтернативен подход, при който изучаването на понятието измеримост по Пеано-Жордан предхожда изграждането на римановия интеграл. Накратко, този подход се състои в следното: приема се, че ако можем по разумен начин да въведем n-мерна мярка на едно ограничено подмножество A на $\mathbb{R}^n$, то тази мярка не трябва да надминава сумата от мерките на паралелотопите от коя да е крайна фамилия от неприпокриващи се паралелотопи, чието обединение покрива A. Инфимумът на тези горни оценки се нарича външна мярка на A. Аналогично, долна оценка на търсената мярка е сумата от мерките на паралелотопите от коя да е крайна фамилия от неприпокриващи се паралелотопи, чието обединение се съдържа в A. Супремумът на тези долни оценки се нарича вътрешна мярка на A. Убедете се, че горните оценки са точно големите суми на Дарбу за χ_A и съответно външната мярка на A съвпада с горния интеграл на χ_A (аналогично с малките суми на Дарбу и долния интеграл на χ_A). Следователно външната и вътрешната мярка на A съвпадат точно когато χ_A е интегруема по Риман. Ние предпочетохме подхода с първоначалното изграждане на интеграла, за да можем да подчертаем аналогията с това, което вече знаете в едномерния случай.

Пример 4.4. Важно е да осъзнаем, че пренебрежимите по Лебег множества не са длъжни да са измерими по Пеано-Жордан. Най-простият пример за това е множеството $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ от рационалните числа в интервала $[0,1]$. Тъй като това множество е изброимо, то е пренебрежимо по Лебег (Твърдение 3.3 и примера след него). От друга страна, контурът на A е целият интервал $[0,1]$ (защото рационалните, както и ирационалните числа са гъсти в реалната права) и следователно не е пренебрежим по Лебег ($[0,1]$ е неизроден паралелотоп в $\mathbb{R}^1$ и Пример 3.7). Следователно A не е измеримо по Пеано-Жордан.

За да имаме достатъчно съдържателни примери на множества, измерими по Пеано-Жордан, първо ще докажем следното

Твърдение 4.5. *Нека C е компакт в $\mathbb{R}^n$ и $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната функция, дефинирана в него. Тогава графиката ѝ*

$$Gr\ f := \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ x \in C\right\}$$

е пренебрежимо подмножество на $\mathbb{R}^{n+1}$.

Доказателство. Тъй като C е компакт, можем да намерим паралелотоп Δ в $\mathbb{R}^n$, който съдържа C. Да фиксираме произволно положително число ε. Теоремата на Кантор ни дава, че непрекъснатостта на f и компактността на C влекат равномерната непрекъснатост на f. Следователно съществува положително число δ такова, че ако $x \in C$, $y \in C$ и $\|x-y\| < \delta$, то е в сила $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{3\mu_n(\Delta)}$. Да изберем подразбиване $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ на Δ с $d(\Pi) < \delta$. Без ограничение на общността можем да предположим, че Δ_i, $i \in \{1, 2, \ldots, i_1\}$ са елементите на Π, които имат непразно сечение с C. Да изберем точки $x_i \in \Delta_i \cap C$ и да положим

$$\Box_i := \Delta_i \times \left[f(x_i) - \frac{\varepsilon}{3\mu_n(\Delta)}, f(x_i) + \frac{\varepsilon}{3\mu_n(\Delta)}\right] \quad \text{за всяко} \quad i \in \{1, 2, \ldots, i_1\} \ .$$

Ще докажем, че паралелотопите $\{\Box_i\}_{i=1}^{i_1}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ покриват $Gr\ f$ и имат сумарна мярка, по-малка от ε. Наистина, да изберем произволна точка $(x, f(x)) \in Gr\ f$. Тогава $x \in C$ и следователно съществува $i \in \{1, 2, \ldots, i_1\}$ такова, че $x \in \Delta_i \cap C$. Тъй като $x \in \Delta_i$ и $x_i \in \Delta_i$, то $\|x - x_i\| \leq \operatorname{diam}(\Delta_i) \leq d(\Pi) < \delta$ и оттук получаваме, че

$$|f(x) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3\mu_n(\Delta)}\ ,\ \text{значи}\ \ (x, f(x)) \in \Box_i\ \ \text{и следователно}\ \ \bigcup_{i=1}^{i_1} \Box_i \supset Gr\ f\ .$$

От друга страна, имаме

$$\sum_{i=1}^{i_1} \mu_{n+1}(\Box_i) = \sum_{i=1}^{i_1} \mu_n(\Delta_i) \cdot \frac{2\varepsilon}{3\mu_n(\Delta)} \leq \frac{2\varepsilon}{3\mu_n(\Delta)} \sum_{i=1}^{i_0} \mu_n(\Delta_i) = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon\ .$$

$\Box$

Пример 4.6. Ето един конкретен пример на множество, измеримо по Пеано-Жордан: да разгледаме полукълбото

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\ ,\ z \geq 0\}\ .$$

Неговият контур е

$$\partial A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\ ,\ z \geq 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\ ,\ z = 0\}\ .$$

Първото множество от горното обединение е пренебрежимо от Твърдение 4.5 като графика на непрекъснатата функция $z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Второто множество от горното обединение е пренебрежимо, защото се съдържа в изродения паралелотоп $[-1, 1] \times [-1, 1] \times \{0\}$ в $\mathbb{R}^3$. Следователно ∂A е пренебрежим и значи полукълбото е множество, измеримо по Пеано-Жордан.

Трудна задача за обмисляне вкъщи. Възможно ли е компакт в $\mathbb{R}^n$ (даже в реалната права) да не бъде измерим (по Пеано-Жордан)? Отговорът е "да". Опитайте се да намерите такъв пример.

4.2 Мярка на Пеано-Жордан

Следващото твърдение по същество казва, че така въведената в Дефиниция 4.2 n-мерна мярка наистина заслужава това име.

Твърдение 4.7. *(а) Ако A и B са измерими по Пеано-Жордан, то $A \cap B$, $A \cup B$ и $A \setminus B$ също са измерими по Пеано-Жордан.*
(б) Ако A и B са измерими по Пеано-Жордан и $A \cap B = \emptyset$, то

$$\mu_n(A \cup B) = \mu_n(A) + \mu_n(B)\ .$$

Доказателство. Започваме с доказателството на (а). Тъй като A и B са ограничени, то $A \cap B$, $A \cup B$ и $A \setminus B$ също са ограничени. Ще покажем, че

$$\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B\ ,\ \partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B\ ,\ \partial(A \setminus B) \subset \partial A \cup \partial B\ .$$

Тъй като ∂A и ∂B са пренебрежими (поради измеримостта на A и B и Твърдение 4.3), от горните включвания би следвала пренебрежимостта на $\partial(A \cap B)$, $\partial(A \cup B)$ и $\partial(A \setminus B)$, откъдето отново чрез Твърдение 4.3 следва измеримостта на $A \cap B$, $A \cup B$ и $A \setminus B$. Ще докажем само последното от тези включвания, тъй като доказателствата са аналогични.

Да изберем прозволна точка x от $\partial(A \setminus B)$. Тогава съществуват редици

$$\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset A \setminus B \ , \ x_m \longrightarrow x \ \text{ и } \ \{y_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n \setminus (A \setminus B) = (\mathbb{R}^n \setminus A) \cup B \ , \ y_m \longrightarrow x \ .$$

Тъй като

$$\mathbb{N} = \{m \in \mathbb{N} \ : \ y_m \in \mathbb{R}^n \setminus A\} \cup \{m \in \mathbb{N} \ : \ y_m \in B\} \ ,$$

то поне едно от горните две множества е безкрайно. Ако първото е безкрайно, то съществува подредица $\{y_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ на $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$, която се съдържа в $\mathbb{R}^n \setminus A$ и, разбира се, клони към x. Следователно можем да се приближим към x с редица от точки, съдържаща се в A ($\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$), и с редица от точки, съдържаща се в $\mathbb{R}^n \setminus A$ ($\{y_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$). Значи в този случай имаме $x \in \partial A$. Ако второто от горните множества е безкрайно, то съществува подредица $\{y_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ на $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$, която се съдържа в B и клони към x. Следователно можем да се приближим към x с редица от точки, съдържаща се в B ($\{y_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$), и с редица от точки, съдържаща се в $\mathbb{R}^n \setminus B$ ($\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$). Значи в този случай имаме $x \in \partial B$. Следователно и в двата случая $x \in \partial A \cup \partial B$, с което доказателството на нашето включване е завършено.

Да се обърнем към доказателството на (б). Тъй като A и B имат празно сечение, то $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$ и като интегрираме това равенство в някакъв паралелотоп Δ, съдържащ $A \cup B$, получаваме

$$\mu_n(A \cup B) = \int_{\Delta} \chi_{A\cup B} = \int_{\Delta} (\chi_A + \chi_B) = \int_{\Delta} \chi_A + \int_{\Delta} \chi_B = \mu_n(A) + \mu_n(B) \ .$$

□

Следствие 4.8. *Ако A и B са измерими по Пеано-Жордан, то*

$$\mu_n(A \cup B) = \mu_n(A) + \mu_n(B) - \mu_n(A \cap B) \ .$$

Доказателство. Измеримостта на $A \cap B$ и $A \cup B$ следва от горното твърдение. Директно можем да проверим равенството $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$. Интегрираме това равенство в някакъв паралелотоп Δ, съдържащ $A \cup B$, и получаваме

$$\mu_n(A \cup B) = \int_{\Delta} \chi_{A\cup B} = \int_{\Delta} (\chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}) = \mu_n(A) + \mu_n(B) - \mu_n(A \cap B) \ .$$

□

4.3 Интеграл върху измеримо множество

Вече сме готови да разширим римановия интеграл за функции, чиято дефиниционна област не е задължена да бъде паралелотоп. За целта ще използваме следната

Дефиниция 4.9. Нека A е подмножество на $\mathbb{R}^n$ и $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. *Стандартно продължение на f* наричаме функцията $f^* : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, дефинирана с

$$f^*(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ако } x \in A \\ 0, & \text{ако } x \notin A \ . \end{cases}$$

Интуицията, стояща зад следващата дефиниция, е фактът, че множеството, в което стойността на една функция е нула, не допринася нищо за стойността на интеграла.

Дефиниция 4.10. Нека A е подмножество на $\mathbb{R}^n$, което е измеримо по Пеано-Жордан, и нека f е произволна реалнозначна функция, дефинирана в A. Казваме, че f е интегруема по Риман в A, ако за произволен паралелотоп Δ в $\mathbb{R}^n$, съдържащ A, стандартното продължение f^* на f е интегруемо по Риман в Δ. В такъв случай интеграла на f^* в Δ наричаме интеграл на f в A и пишем

$$\int_A f := \int_\Delta f^* \, .$$

Коректност на дефиницията. Ще проверим, че горната дефиниция зависи само от множеството A и от функцията f, но не и от паралелотопа Δ, съдържащ A. Нека Δ_1 и Δ_2 са паралелотопи в $\mathbb{R}^n$, за които $\Delta_1 \supset A$, $\Delta_2 \supset A$. Искаме да докажем, че ако f^* е интегруема в Δ_1, то f^* е интегруема в Δ_2 и $\int_{\Delta_1} f^* = \int_{\Delta_2} f^*$. Разсъждението повтаря доказателството на коректността на дефиницията на мярката на Пеано-Жордан. Наистина, ако като преди означим $\Delta = \Delta_1 \cap \Delta_2$, тъй като множеството от точките на прекъсване на $f^* \restriction_{\Delta_1}$ и на $f^* \restriction_\Delta$ се различават най-много с $\partial\Delta$, което е пренебрежимо множество (като обединение на краен брой изродени паралелотопи), f^* е интегруема в Δ_1 точно тогава, когато f^* е интегруема в Δ. Нека сега $\Pi = \{\Delta_i^1\}_{i=1}^{i_0} \cup \{\Delta\}$ да бъде някакво подразделяне на Δ_1, което има за елемент Δ. Да разгледаме $f \restriction_{\Delta_i^1}$, $i \in \{1, \ldots, i_0\}$ и да отбележим, че f^* е нула във вътрешността на всеки от тези паралелотопи. Следователно за което и да е подразделяне на Δ_i^1 можем да подберем представителни точки така, че съответната риманова сума на f^* да е нула. Сега от интегруемостта получаваме $\int_{\Delta_i^1} f^* = 0$, $i \in \{1, \ldots, i_0\}$. Тогава от адитивността на интеграла имаме

$$\int_{\Delta_1} f^* = \sum_{i=1}^{i_0} \int_{\Delta_i^1} f^* + \int_\Delta f^* = \int_\Delta f^* \, .$$

След като по аналогичен начин докажем, че $\int_{\Delta_2} f^* = \int_\Delta f^*$, доказателството на коректността е завършено.

Твърдение 4.11. ***(Критерий за измеримост)*** *Нека A е множество, измеримо по Пеано-Жордан в $\mathbb{R}^n$, и $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Тогава f е интегруема по Риман в A точно тогава, когато f е ограничена и множеството от точките ѝ на прекъсване е пренебрежимо по Лебег.*

Доказателство. Първо да отбележим, че f е ограничена точно тогава, когато стандартното ѝ продължение f^* е ограничено. От друга страна, множеството от точките на прекъсване на f е пренебрежимо по Лебег точно тогава, когато множеството от точките на прекъсване на f^* е пренебрежимо по Лебег. Наистина,

$$\{x \in A : f \text{ е прек. в } x\} \setminus \partial A \subset \{x \in \mathbb{R}^n : f^* \text{ е прекъсната в } x\} \subset \{x \in A : f \text{ е прек. в } x\} \cup \partial A$$

и ∂A е пренебрежимо поради измеримостта на A. Остава да приложим критерия на Лебег за интегруемост по Риман към f^*. □

Нека да отбележим, че вече в тези означения за всяко измеримо множество A имаме $\mu_n(A) = \int_A 1$.

4.4 Свойства на интеграла върху измеримо множество

1. **Линейност.** Нека A е множество, измеримо по Пеано-Жордан, $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ са интегруеми функции и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогава $f+g$ и λf са интегруеми и

$$\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g \ , \quad \int_A (\lambda f) = \lambda \int_A f \ .$$

Доказателство. От факта, че $(f+g)^* = f^* + g^*$, $(\lambda \cdot f)^* = \lambda \cdot f^*$ и от свойството линейност на интеграла върху паралелотоп получаваме интегруемостта и равенствата

$$\int_A (f+g) = \int_\Delta (f+g)^* = \int_\Delta (f^* + g^*) = \int_\Delta f^* + \int_\Delta g^* = \int_A f + \int_A g \ ,$$

$$\int_A (\lambda \cdot f) = \int_\Delta (\lambda \cdot f)^* = \int_\Delta \lambda \cdot f^* = \lambda \int_\Delta f^* = \lambda \int_A f \ ,$$

където Δ е произволен паралелотоп, съдържащ A. □

2. **Адитивност.** Нека A_1 и A_2 са измерими по Пеано-Жордан подмножества на $\mathbb{R}^n$ с $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ и $f : A_1 \cup A_2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Твърдим, че f е интегруема точно тогава, когато $f\restriction_{A_1}$ и $f\restriction_{A_2}$ са интегруеми. При това

$$\int_{A_1 \cup A_2} f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f \ .$$

Доказателство. Нека Δ е произволен паралелотоп, съдържащ $A_1 \cup A_2$. Твърдението за интегруемост се получава директно от критерия 4.11. Използвайки линейността на интеграла върху паралелотоп, получаваме

$$\int_{A_1 \cup A_2} f = \int_\Delta f^* = \int_\Delta (f^* \chi_{A_1} + f^* \chi_{A_2}) = \int_\Delta f^* \chi_{A_1} + \int_\Delta f^* \chi_{A_2} = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f \ .$$

□

3. **Монотонност.** Нека A е множество, измеримо по Пеано-Жордан, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ е интегруема и $f(x) \geq 0$ за всяко $x \in A$. Тогава $\int_A f \geq 0$.

(Директно от свойството монотонност на интеграла върху паралелотоп и от факта, че $f^*(x) \geq 0$ за всяко $x \in \Delta$, където $\Delta \supset A$.)

Следствие 1. Нека A е множество, измеримо по Пеано-Жордан, $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ са интегруеми функции и $f(x) \geq g(x)$ за всяко $x \in A$. Тогава $\int_A f \geq \int_A g$.

(Наистина, $\int_A f - \int_A g = \int_A (f-g) \geq 0$ от линейността и монотонността.)

Следствие 2. Ако $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ е интегруема в измеримото множество A, то $|f|$ е интегруема в A и $|\int_A f| \leq \int_A |f|$.

(Интегруемостта е директна от критерия 4.11, а неравенството от $-|f| \leq f \leq |f|$ и предишното следствие.)

4. **Теорема за средните стойности.** Нека A е множество, измеримо по Пеано-Жордан, $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ са интегруеми функции и $g(x) \geq 0$ за всяко $x \in A$. Тогава

$$m \cdot \int_A g \leq \int_A (f \cdot g) \leq M \cdot \int_A g \ , \text{ където } \ m := \inf_A f \ , \ M := \sup_A f \ .$$

(Следствие от монотонността и от неравенството $m \cdot g \leq f \cdot g \leq M \cdot g$. Интегруемостта на $f \cdot g$ се получава от Следствие 3.10.)

Следствие 1. Нека в горната формулировка функцията g е константата едно. Тогава получаваме

$$m \cdot \mu_n(A) \leq \int_A f \leq M \cdot \mu_n(A) \ .$$

За да получим още едно следствие от Теоремата за средните стойности, отнасящо се за непрекъснати подинтегрални функции, имаме нужда от следната

Дефиниция 4.12. Едно подмножество A на $\mathbb{R}^n$ се нарича *линейно свързано*, ако всеки две точки от A могат да бъдат съединени с непрекъсната крива, лежаща изцяло с A.

Следствие 2. Нека K е свързан компакт, измерим по Пеано-Жордан, $g : K \longrightarrow \mathbb{R}$ е интегруема функция с $g(x) \geq 0$ за всяко $x \in K$ и $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната. Тогава

$$\int_K (f \cdot g) = f(\xi) \cdot \int_K g \ \text{ за някоя точка } \ \xi \in K \ .$$

Доказателство. От монотонността на интеграла и $g \geq 0$ следва $\int_K g \geq 0$. Ако $\int_K g = 0$, от теоремата за средните стойности получаваме търсеното равенство при произволен избор на $\xi \in K$. Ако $\int_K g > 0$, да означим

$$c := \frac{\int_K (f \cdot g)}{\int_K g} \ . \text{ Тогава } \ \inf_K f = m \leq c \leq M = \sup_K f$$

от теоремата за средните стойности. От непрекъснатостта на f и теоремата на Вайерщрас намираме $x_{min} \in K$ с $f(x_{min}) = m$ и $x_{max} \in K$ с $f(x_{max}) = M$. Сега от свързаността на K следва, че съществува непрекъсната крива с начало x_{min} и край x_{max}, лежаща изцяло в K. Формално записано, това означава, че съществува непрекъснато изображение $\varphi : [0, 1] \longrightarrow K$, за което $\varphi(0) = x_{min}$, $\varphi(1) = x_{max}$. Тогава композицията $f \circ \varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ е добре дефинирана и непрекъсната. Сега теоремата на Болцано (в комбинация с теоремата на Вайерщрас) за $f \circ \varphi$ влече съществуването на точка $\tilde{t} \in [0, 1]$ такава, че $(f \circ \varphi)(\tilde{t}) = c$. Означаваме $\xi = \varphi(\tilde{t}) \in K$ и получаваме $f(\xi) = c$, което и трябваше да се докаже. $\square$

5 Лекция 5: Теорема на Фубини. Интегриране върху криволинеен трапец и цилиндрично тяло. Принцип на Кавалиери. Физически приложения на кратните интеграли. Примери

6 Лекция 6: Теорема за смяна на променливите в кратен интеграл 1

7 Лекция 7: Теорема за смяна на променливите в кратен интеграл 2

8 Лекция 8: Криволинеен интеграл от първи род

9 Лекция 9: Криволинеен интеграл от втори род

10 Лекция 10: Независимост от пътя на криволинейния интеграл от втори род

11 Лекция 11: Лице на повърхнина

В следващата част от курса ще изучаваме интегрирането върху двумерна повърхнина в тримерното евклидово пространство. Такава повърхнина може да бъде зададена с уравнение, но в този курс ние ще използваме параметричния подход.

11.1 Елементарна гладка параметрично зададена повърхнина. Допирателно пространство

Параметрите ще се менят в област Ω, съдържаща се в $\mathbb{R}^2$. Най-често ще ги означаваме с $u = (u_1, u_2) \in \Omega$. Параметризацията φ е гладко изображение с дефиниционна област Ω и област от стойности $\mathbb{R}^3$. Условието за регулярност (съответстващо на условието производната да не се анулира в случая на параметрично зададена крива) е матрицата $\varphi'(u)$ да има пълен ранг във всяка точка на Ω. Скаларно записано,

$$\varphi(u_1,u_2) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u_1,u_2) \\ \varphi_2(u_1,u_2) \\ \varphi_3(u_1,u_2) \end{pmatrix} \quad , \quad \varphi'(u_1,u_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}(u_1,u_2) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_2}(u_1,u_2) \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_1}(u_1,u_2) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_2}(u_1,u_2) \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial u_1}(u_1,u_2) & \frac{\partial\varphi_3}{\partial u_2}(u_1,u_2) \end{pmatrix}$$

и условията са $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ (т.е. частните производни $\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}$, $i \in \{1,2,3\}$, $j \in \{1,2\}$ съществуват и са непрекъснати в Ω) и $\mathrm{rg}\ \varphi' = 2$ в Ω. Тогава множеството $S = \varphi(\Omega)$ наричаме *елементарна гладка параметрично зададена повърхнина.*

Кривите $\varphi(t, u_2)$, $(t, u_2) \in \Omega$, където u_2 е фиксирано произволно, лежат върху S и се наричат *координатни линии.* Другото семейство координатни линии е $\varphi(u_1, t)$, $(u_1, t) \in \Omega$, където u_1 е фиксирано произволно.

Пример 11.1. Цилиндрична повърхнина.

Нека Γ е гладка регулярна параметрично зададена равнинна крива. Означаваме с $\alpha \in C^1(\Delta, \mathbb{R}^2)$, където Δ е отворен интервал и $\dot\alpha \neq \mathbf{0}$, една параметризация на $\Gamma = \alpha(\Delta)$. Тогава $\varphi(t,z) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ z \end{pmatrix}$, където $t \in \Delta$, $z \in \mathbb{R}$, е параметризация на цилиндричната повърхност $S = \varphi(\Delta \times \mathbb{R})$. Наистина, рангът на $\alpha'(t,z) = \begin{pmatrix} \dot\alpha_1(t) & 0 \\ \dot\alpha_2(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ е пълен, защото ако допуснем, че всички минори от втори ред на $\alpha'(t,z)$ са нули, ще получим $\dot\alpha(t) = \mathbf{0}$, което е противоречие с регулярността на кривата.

Пример 11.2. Ротационна повърхнина.

Нека Γ е гладка регулярна параметрично зададена равнинна крива, лежаща в горната полуравнина. Означаваме с $\alpha \in C^1(\Delta, \mathbb{R}^2)$, където Δ е отворен интервал, $\dot\alpha \neq \mathbf{0}$ и $\alpha_2 > 0$, една параметризация на $\Gamma = \alpha(\Delta)$. Тогава

$$\varphi(t,\theta) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t)\cos\theta \\ \alpha_2(t)\sin\theta \end{pmatrix} \ , \text{ където } t \in \Delta \text{ и } \theta \in \mathbb{R} \ ,$$

задава гладка повърхнина в пространството. От проверка се нуждае само условието за ранга. Пресмятаме минорите от втори ред на

$$\varphi'(t,\theta) = \begin{pmatrix} \dot\alpha_1(t) & 0 \\ \dot\alpha_2(t)\cos\theta & -\alpha_2(t)\sin\theta \\ \dot\alpha_2(t)\sin\theta & \alpha_2(t)\cos\theta \end{pmatrix} .$$

Ако допуснем, че всички те се анулират, имаме

$$-\dot\alpha_1(t)\alpha_2(t)\sin\theta = \dot\alpha_1(t)\alpha_2(t)\cos\theta = \alpha_2(t)\dot\alpha_2(t)(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = 0$$

и следователно, отчитайки $\alpha_2(t) > 0$ и факта, че $\cos\theta$ и $\sin\theta$ не могат да се анулират едновременно, получаваме $\dot\alpha_2(t) = \dot\alpha_1(t) = 0$, противоречие с регулярността на кривата.

Пример 11.3. Сфера.

В сегашната постановка не можем да напишем параметризация на цялата сфера (това е дълбок и неочевиден факт), затова ще използваме стандартните ъгли, за да напишем параметризация на сферата без двата полюса:

$$\varphi(\theta_1,\theta_2) = \begin{pmatrix} R\cos\theta_1\sin\theta_2 \\ R\sin\theta_1\sin\theta_2 \\ R\cos\theta_2 \end{pmatrix} \ , \ \theta_1 \in \mathbb{R} \ , \theta_2 \in (0,\pi) \ .$$

За да проверим условието за ранга, пресмятаме минорите на

$$\varphi'(\theta_1,\theta_2) = \begin{pmatrix} -R\sin\theta_1\sin\theta_2 & R\cos\theta_1\cos\theta_2 \\ R\cos\theta_1\sin\theta_2 & R\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ 0 & -R\sin\theta_2 \end{pmatrix}$$

и използваме, че $\sin\theta_2 > 0$, за да се убедим, че не е възможно всички минори от втори ред на горната матрица да се анулират.

За упражнение разберете как изглеждат двете семейства координатни линии във всеки от горните примери.

Гладкостта на параметризацията и условието за ранга гарантират съществуването на еднозначно определена допирателна равнина към повърхнината във всяка точка. За да се убедим в това, първо ще дадем геометрично определение на понятието "допирателно пространство", което се съгласува с геометричната ни интуиция. И тъй, нека S е двумерна повърхнина в $\mathbb{R}^3$ и нека $p \in S$. С S_p ще означаваме множеството от свързаните вектори $(p;w) \in S \times \mathbb{R}^3$, които са допирателни в точката p към някаква гладка крива, лежаща изцяло в S:

$$S_p := \{(p;w) \in S \times \mathbb{R}^3 \ : \ \exists\, \delta > 0 \ \exists\, \alpha \in C^1(\Delta, S) \ (\Delta \equiv (-\delta,\delta)), \ \alpha(0) = p, \ \dot\alpha(0) = w\} \ .$$

Ако не знаем нещо повече за S, предварително не е ясно дали S_p е равнина и дори дали не се състои само от нулевия вектор. Ще се убедим, че $\{w \in \mathbb{R}^3 : \ (p;w) \in S_p\}$ е двумерно линейно подпространство на $\mathbb{R}^3$, ако S е елементарна гладка параметрично зададена повърхнина.

Дефиниция 11.4. Нека $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$, където Ω е област в $\mathbb{R}^2$, е гладко изображение. Диференциал на φ наричаме изображението $\mathrm{d}\varphi : \Omega \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, зададено с формулата

$$\mathrm{d}\varphi(u; v) := \left(\varphi(u) \; ; \; \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \cdot v_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) \cdot v_2 \right) \; ,$$

където

$$v = (v_1, v_2) \; , \; \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}(u) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1}(u) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_1}(u) \end{pmatrix} \text{ и } \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2}(u) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2}(u) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_2}(u) \end{pmatrix} \; .$$

За да разберем смисъла на тази дефиниция, ще покажем, че ако φ носи една гладка крива $\Gamma \subset \Omega$ в кривата $\tilde{\Gamma} = \varphi(\Gamma)$, то $\mathrm{d}\varphi$ носи допирателните вектори към Γ в допирателни вектори към $\tilde{\Gamma}$ в съответната точка.

Лема 11.5. *Нека $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$, където Ω е област в $\mathbb{R}^2$, е гладко изображение и нека $\Gamma = \alpha(\Delta)$ е гладка крива (Δ е интервал и $\alpha \in C^1(\Delta, \Omega)$). Нека $\tilde{\Gamma} = \varphi(\Gamma) = \varphi(\beta(\Delta))$ е нейният образ ($\beta(t) := \varphi(\alpha(t))$, $t \in \Delta$). Тогава $d\varphi(\alpha(t); \dot{\alpha}(t)) = (\beta(t); \dot{\beta}(t))$, $t \in \Delta$.*

Доказателство. Наистина, пресмятайки производната на $\beta(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \\ \varphi_2(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \\ \varphi_3(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \end{pmatrix}$, получаваме $\dot{\beta}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1(\alpha(t))}{\partial u_1}\dot{\alpha}_1(t) + \frac{\partial \varphi_1(\alpha(t))}{\partial u_2}\dot{\alpha}_2(t) \\ \frac{\partial \varphi_2(\alpha(t))}{\partial u_1}\dot{\alpha}_1(t) + \frac{\partial \varphi_2(\alpha(t))}{\partial u_2}\dot{\alpha}_2(t) \\ \frac{\partial \varphi_3(\alpha(t))}{\partial u_1}\dot{\alpha}_1(t) + \frac{\partial \varphi_3(\alpha(t))}{\partial u_2}\dot{\alpha}_2(t) \end{pmatrix} = \frac{\partial \varphi(\alpha(t))}{\partial u_1}\dot{\alpha}_1(t) + \frac{\partial \varphi(\alpha(t))}{\partial u_2}\dot{\alpha}_2(t)$. □

Да отбележим, че от горното пресмятане се получава, че свързаните вектори $\left(\varphi(u); \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u)\right)$ са допирателни към първото семейство координатни линии, а $\left(\varphi(u); \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u)\right)$ са допирателни към второто семейство координатни линии.

Лема 11.6. *Нека Ω е област в равнината, $\varphi \in (\Omega, \mathbb{R}^3)$ и $rg\ \varphi' = 2$ в Ω. Тогава за всяка точка $p = \varphi(u)$ от елементарната гладка параметрично зададена повърхнина $S = \varphi(\Omega)$ съществуват $U \subset \Omega$ околност на u и V околност p такива, че $\varphi \restriction_U$ е биекция между U и $S \cap V$. При това обратната биекция $(\varphi \restriction_U)^{-1}$ е рестрикция върху $S \cap V$ на гладко изображение, дефинирано във V.*

Доказателство. Тъй като $\mathrm{rg}\ \varphi'(u) = 2$, без ограничение на общността можем да приемем, че

$$det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2}(u) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2}(u) \end{pmatrix} \neq 0 \; .$$

От Теоремата за обратната функция получаваме, че съществуват $U \subset \Omega$ околност на u и $\tilde{V}$ околност $(\varphi_1(u), \varphi_2(u))$ такива, че

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(v_1, v_2) \\ x_2 = \varphi_2(v_1, v_2) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} v_1 = \psi_1(x_1, x_2) \\ v_2 = \psi_2(x_1, x_2) \end{array} \right.$$

за $(v_1, v_2) \in U$ и $(x_1, x_2) \in \tilde{V}$, където ψ_1 и ψ_2 са гладки функции, дефинирани във $\tilde{V}$. Полагаме $V := \tilde{V} \times \mathbb{R}$ и забелязваме, че

$$(\varphi \restriction_U)^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (\psi_1(x_1, x_2), \psi_2(x_1, x_2)) \in U$$

за $(x_1, x_2, x_3) \in V \cap S$. Освен това

$$S \cap V = \Big\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;:\; (x_1, x_2) \in \tilde{V},\; x_3 = \varphi_3(\psi_1(x_1, x_2), \psi_2(x_1, x_2)) \Big\}$$

и V е околност на p. $\square$

Забележете, че от горното доказателство се вижда, че всяка елементарна гладка параметрично зададена повърхнина локално може да бъде задена явно, т.е. две от променливите могат да бъдат използвани за параметри, а третата да е тяхна функция.

Теорема 11.7. *Нека Ω е област в равнината, $\varphi \in (\Omega, \mathbb{R}^3)$ и rg $\varphi' = 2$ в Ω. Тогава за всяка точка $p = \varphi(u)$ от елементарната гладка параметрично зададена повърхнина $S = \varphi(\Omega)$ е в сила $S_p \equiv d\varphi(u; \mathbb{R}^2)$, т.е. $\{w \in \mathbb{R}^3 : \ (p; w) \in S_p\}$ е линейната обвивка на векторите $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u)$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u)$:*

$$S_p \equiv \left\{ (p; w) \in S \times \mathbb{R}^3 \;:\; w = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \cdot v_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) \cdot v_2 \text{ за някой вектор } (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} .$$

Доказателство. Нека $(p; w) \in S_p$. Следователно съществува гладко изображение $\beta : (-\delta, \delta) \longrightarrow S$ (тук δ е някакво положително число) такова, че $(p; w) = (\beta(0), \dot{\beta}(0))$. Нека U и V са околностите на u и p съответно, получени от Лема 11.6. С цената на намаляване на δ можем да предположим, че $\beta(t) \in V$ за всяко $t \in (-\delta, \delta)$. Полагаме $\alpha(t) := (\varphi \restriction_U)^{-1} (\beta(t))$ за $t \in (-\delta, \delta)$. Ясно е, че това е параметризация на гладка крива в U, за която $\alpha(0) = u$ и $\beta(t) = \varphi(\alpha(t))$. Сега Лема 11.5 ни дава

$$\mathrm{d}\varphi(u; \dot{\alpha}(0)) = \mathrm{d}\varphi(\alpha(0); \dot{\alpha}(0)) = (\beta(0); \dot{\beta}(0)) = (p; w) .$$

Обратно, нека $(p; w) = \mathrm{d}\varphi(u; v)$. За достатъчно малко δ имаме, че $\alpha(t) = u + t \cdot v \in \Omega$ за всяко $t \in (-\delta, \delta)$. Тогава $\beta(t) = \varphi(\alpha(t))$, $t \in (-\delta, \delta)$ е гладка крива в S, като $\beta(0) = \varphi(\alpha(0)) = \varphi(u) = p$. Отново от Лема 11.5 и от $\dot{\alpha}(t) = v$ получаваме

$$(p; w) = \mathrm{d}\varphi(u; v) = \mathrm{d}\varphi(\alpha(0); \dot{\alpha}(0)) = (\beta(0); \dot{\beta}(0)) \in S_p .$$

$\square$

Важно е да осъзнаем, че линейната обвивка на векторите $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u)$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u)$ е равнина, защото условието за ранга rg $\varphi'(u) = 2$ е еквивалентно на линейната независимост на тези два вектора.

11.2 Формула за лице на гладка повърхнина

Да напомним, че в курса по ДИС1 строго се дефинира понятието "дължина на параметрично зададена крива". В случая на параметрично зададена повърхност нещата са по-сложни, защото подходът с частично плоски повърхнини, вписани в дадената, не дава разумен резултат. Наистина, има пример на Hermann Schwarz (виж Фихтенгольц трети том), който показва, че в цилиндър могат да бъдат вписвани редици от частично плоски повърхнини с диаметър на парчендата, клонящ към нула, и с граница на лицата произволно достатъчно голямо реално число. Затова ще дадем само евристично обяснение на формулата за лице и ще покажем, че резултатите от тази формула се съгласуват с целия ни досегашен опит.

Нека Ω е област в равнината, $\varphi \in (\Omega, \mathbb{R}^3)$ е инекция, $\operatorname{rg} \varphi' = 2$ в Ω и Δ е правоъгълник, съдържащ се в Ω. Искаме да апроксимираме лицето на $S = \varphi(\Delta)$. Избираме произволно подразделяне $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ на Δ и някакви представителни точки $\xi_i \in \Delta_i$, $i = 1, \dots, i_0$ за това подразделяне. Апроксимираме лицето на парченцето $\varphi(\Delta_i)$ от S с лицето на успоредника, опънат върху векторите $a_i \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(\xi_i)$ и $b_i \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(\xi_i)$, където a_i и b_i са съответно дължината на основата и дължината на височината на правоъгълника Δ_i:

$$\mu_2(\varphi(\Delta_i)) \sim a_i \cdot b_i \cdot \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(\xi_i) \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(\xi_i) \right\| = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(\xi_i) \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(\xi_i) \right\| \cdot \mu_2(\Delta_i) \ .$$

Тогава приближението на лицето на цялата повърхнина е римановата сума

$$\mu_2(S) \sim \Sigma_{i=1}^{i_0} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(\xi_i) \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(\xi_i) \right\| \cdot \mu_2(\Delta_i) = \sigma_g(\Pi, \xi)$$

за функцията g, подразделянето Π и представителните точки $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_{i_0}\}$, където

$$g(u) = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) \right\| = \sqrt{\det\left(\varphi'(u)^T \cdot \varphi'(u)\right)} \ .$$

Когато диаметърът на подразбиването клони към нула, римановите суми клонят към

$$\int_\Delta \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) \right\| \mathrm{d}u = \int_\Delta \sqrt{\det\left(\varphi'(u)^T \cdot \varphi'(u)\right)} \mathrm{d}u \ .$$

Дефиниция 11.8. Нека Ω е област в равнината, φ е гладка инекция с дефиниционна област Ω и област от стойности $\mathbb{R}^3$, $\operatorname{rg} \varphi' = 2$ в Ω и K е измерим компакт, съдържащ се в Ω. Тогава *лице* на $S = \varphi(K)$ наричаме числото

$$\mu_2(S) := \int_K \sqrt{\det\left(\varphi'(u)^T \cdot \varphi'(u)\right)} \ \mathrm{d}u \ .$$

Елементите на матрицата $\varphi'^T(u) \cdot \varphi'(u)$ имат приети имена:

$$E(u) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \right\rangle \ , \ F(u) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) \right\rangle \ , \ G(u) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) \right\rangle \ .$$

В тези означения имаме

$$\mu_2(S) = \int_K \sqrt{E(u)G(u) - F^2(u)} \ \mathrm{d}u \ .$$

Да отбележим, че горният интеграл съществува, защото K е измеримо по Пеано-Жордан и подинтегралната функция е непрекъсната поради гладкостта на φ.

Пример 11.9. Първата проверка, която е редно да извършим, е дали тази формула дава правилен резултат, ако φ е идентитетът, т.е. S всъщност съвпада с подмножеството K на равнината. Тогава $\varphi(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E(u_1, u_2) = 1$, $F(u_1, u_2) = 0$, $G(u_1, u_2) = 1$ и следователно

$$\mu_2(S) = \int_K \sqrt{E(u)G(u) - F^2(u)} \ \mathrm{d}u = \int_K 1 \ \mathrm{d}u = \mu_2(K) \ ,$$

където отдясно стои лицето (по Пеано-Жордан) на множеството K, въведено в първата част на курса.

Пример 11.10. Лице на цилиндрична повърхнина.

Да разгледаме повърхнината от Пример 11.1 и да намерим лицето на $S = \varphi([a,b]\times[c,d])$ $(t \in [a,b] \subset \Delta$ и $z \in [c,d])$. Имаме $\varphi(t,z) = \begin{pmatrix}\alpha_1(t)\\ \alpha_2(t)\\ z\end{pmatrix}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,z) = \begin{pmatrix}\dot\alpha_1(t)\\ \dot\alpha_2(t)\\ 0\end{pmatrix}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(t,z) = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$, $E(t,z) = \dot\alpha_1^2(t) + \dot\alpha_2^2(t)$, $F(t,z) = 0$, $G(t,z) = 1$ и следователно

$$\mu_2(S) = \int\int_{[a,b]\times[c,d]} \sqrt{\dot\alpha_1^2(t) + \dot\alpha_2^2(t)}\ \mathrm{d}t\mathrm{d}z = (d-c)\int_a^b \|\dot\alpha(t)\|\ \mathrm{d}t\ ,$$

тоест лицето на цилиндъра е равно на дължината на кривата, служеща за негова основа, умножена по височината. Следователно и в този пример резултатът от пресмятането по формулата се съгласува с нашия опит.

Пример 11.11. Лице на ротационна повърхнина.

Да разгледаме повърхнината от Пример 11.2. Тогава

$$\varphi(t,\theta) = \begin{pmatrix}\alpha_1(t)\\ \alpha_2(t)\cos\theta\\ \alpha_2(t)\sin\theta\end{pmatrix}\ ,\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,\theta) = \begin{pmatrix}\dot\alpha_1(t)\\ \dot\alpha_2(t)\cos\theta\\ \dot\alpha_2(t)\sin\theta\end{pmatrix}\ ,\ \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(t,\theta) = \begin{pmatrix}0\\ -\alpha_2(t)\sin\theta\\ \alpha_2(t)\cos\theta\end{pmatrix}$$

и следователно $E(t,\theta) = \dot\alpha_1^2(t) + \dot\alpha_2^2(t)$, $F(t,\theta) = 0$, $G(t,\theta) = \alpha_2^2(t)$. Да намерим лицето на ротационната повърхнина S, получена при завъртане на кривата $\alpha(t)$, $t \in [a,b]$, т.е. $S = \varphi([a,b]\times[0,2\pi])$:

$$\mu_2(S) = \int\int_{[a,b]\times[0,2\pi]} \sqrt{\left(\dot\alpha_1^2(t) + \dot\alpha_2^2(t)\right)\alpha_2^2(t)}\ \mathrm{d}t\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_a^b \alpha_2(t)\,\|\dot\alpha(t)\|\,\mathrm{d}t\ .$$

Ако кривата е графика на гладка функция, т.е. $\alpha(x) = (x, f(x))$, $x \in [a,b]$ за някаква гладка функция f с положителни стойности, то получаваме $\mu_2(S) = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\ \mathrm{d}x$, което е точно формулата, позната ви от курса по ДИС1.

Пример 11.12. Лице на сфера.

Използвайки стандартната параметризация на сферата (виж Пример 11.3), получаваме

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_1}(\theta_1,\theta_2) = \begin{pmatrix}-R\sin\theta_1\sin\theta_2\\ R\cos\theta_1\sin\theta_2\\ 0\end{pmatrix}\ ,\ \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_2}(\theta_1,\theta_2) = \begin{pmatrix}R\cos\theta_1\cos\theta_2\\ R\sin\theta_1\cos\theta_2\\ -R\sin\theta_2\end{pmatrix}$$

и оттук $E(\theta_1,\theta_2) = R^2\sin^2\theta_2$, $F(\theta_1,\theta_2) = 0$, $G(\theta_1,\theta_2) = R^2$. Тъй като сферата S се получава за $\theta_1 \in [0,2\pi]$, $\theta_2 \in [0,\pi]$, имаме

$$\mu_2(S) = \int\int_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} \sqrt{R^2\sin^2\theta_2\cdot R^2}\ \mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2 = 2\pi\int_0^\pi R^2\sin\theta_2\mathrm{d}\theta_2 = 4\pi R^2\ ,$$

което е резултатът, познат от училище.

Забележка: В последните три примера допуснахме известна неточност, като разрешихме условието за инективност (а в последния пример и условието за ранга) да се нарушават в множество с мярка нула. Интуитивно тези множества не могат да повлияят на резултата от интегрирането. Ако искаме да бъдем строги, трябва например в Пример 11.11 да вземем $\theta \in [0, 2\pi - \varepsilon]$, да интегрираме и да намерим границата на резултата при ε клонящо към нула с положителни стойности. Разбира се, ще се окаже същият.

Забележка: В горните примери получихме $F = 0$. Геометрически това означава, че върху тези повърхнини двете семейства координатни линии се пресичат под прав ъгъл.

11.3 Формулата за лице на гладка повърхнина като частен случай на по-обща формула

Това, което научихме за лице на параметрично зададена гладка повърхнина, може да бъде разглеждано от малко по-обща гледна точка: Нека n и k са естествени числа с $n \geq k$. Нека Ω е област в $\mathbb{R}^k$, φ е гладка инекция с дефиниционна област Ω и област от стойности $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{rg}\, \varphi' \equiv k$ и K е измерим компакт, съдържащ се в Ω. Можем да мислим за $S = \varphi(K)$ като за "гладка k-мерна повърхнина, вложена в $\mathbb{R}^n$". Тогава *k-мерна мярка* на S наричаме числото

$$\mu_k(S) := \int_K \sqrt{\det\left(\varphi'(u)^T \cdot \varphi'(u)\right)}\, \mathrm{d}u \ .$$

Ясно е, че формулата за лице, която разглеждахме досега, е горната за случая $k = 2$, $n = 3$. Това обяснява защо предпочетохме този запис пред записа с норма на векторното произведение. Добре е да си спомните лекцията за детерминанта на Грам от курса по Линейна алгебра и да направите връзката с нашите разглеждания.

Да разгледаме "екстремните случаи": $k = 1$ и $k = n$.

Ако $k = 1$, става въпрос за гладка крива $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \dots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$ в $\mathbb{R}^n$ и нейната дължина. Нека $t \in K = [a, b]$. Имаме $\varphi'(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \dots \\ \varphi_n'(t) \end{pmatrix}$, следователно

$$\mu_1(S) = \int_K \sqrt{\langle \varphi'(t), \varphi'(t) \rangle} dt \ = \ \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt \ ,$$

значи формулата от този параграф съдържа в себе си формулата за дължина на гладка крива.

Ако $k = n$, "повърхнината" S е подмножество на евклидовото пространство $\mathbb{R}^n$ и се интересуваме от нейната n-мерна мярка $\mu_n(S) = \int_S 1 \mathrm{d}x$ (според първата част от този курс). От друга страна, формулата от този параграф дава

$$\mu_n(S) = \int_K \sqrt{\det\left(\varphi'(u)^T \cdot \varphi'(u)\right)} \mathrm{d}u = \int_K \sqrt{\det\left(\varphi'(u)^T\right) \cdot \det\left(\varphi'(u)\right)} \mathrm{d}u = \int_K \left|\det\left(\varphi'(u)\right)\right| \mathrm{d}u.$$

От предположението за инективност на φ получаваме, че φ е биекция между K и S. При това φ е гладко изображение, дефинирано в околност на K, а обратната биекция е рестрикция на гладко изображение, дефинирано в околност на S (от Лема 11.6 – разбира се, в размерност n – и от факта, че гладкостта е локално свойство). Следователно можем да приложим Теоремата за смяна на променливите в n-кратен интеграл, за да получим

$$\mu_n(S) = \int_S 1 \mathrm{d}x = \int_{\varphi(K)} 1 \mathrm{d}x = \int_K \left|\det\left(\varphi'(u)\right)\right| \mathrm{d}u \ .$$

Следователно и в този случай резултатът от формулата от този параграф се съгласува с досегашните ни знания.

Твърдение 11.13. *Въведената в този параграф мярка не зависи от параметризацията на "гладката k-мерна повърхнина". По-точно, нека Ω и $\widetilde{\Omega}$ са области в $\mathbb{R}^k$, φ и ψ са гладки инекции с дефиниционни области Ω и $\widetilde{\Omega}$ съответно и област от стойности $\mathbb{R}^n$, $rg\,\varphi' \equiv k$ и $rg\,\psi' \equiv k$, $\varphi(\widetilde{\Omega}) = \psi(\Omega)$. Нека K е измерим компакт, съдържащ се в Ω и $\widetilde{K}$ е измерим компакт, съдържащ се в $\widetilde{\Omega}$. Нека $S = \varphi(K) = \psi(\widetilde{K})$. Тогава*

$$\int_K \sqrt{det\left(\varphi'(u)^T \cdot \varphi'(u)\right)}\ du = \int_{\widetilde{K}} \sqrt{det\left(\psi'(v)^T \cdot \psi'(v)\right)}\ dv \ .$$

Доказателство. Да разгледаме изображението $h = \varphi^{-1} \circ \psi : \widetilde{\Omega} \longrightarrow \Omega$. То е добре дефинирано и е биекция поради $\varphi(\widetilde{\Omega}) = \psi(\Omega)$ и факта, че φ и ψ са инекции. При това както h, така и h^{-1} са гладки (от Лема 11.6 – разбира се, в размерност k – и от факта, че гладкостта е локално свойство, получаваме, че φ^{-1} и ψ^{-1} са рестрикции на гладки изображения, дефинирани в околност на $\varphi(\widetilde{\Omega}) = \psi(\Omega)$). Следователно h е дифеоморфизъм, дефиниран в околност на $\widetilde{K}$, и можем да приложим теоремата за смяна на променливите в кратен интеграл. Тъй като $h(\widetilde{K}) = \varphi^{-1}(\psi(\widetilde{K})) = \varphi^{-1}(\varphi(K)) = K$, получаваме

$$\int_K \sqrt{\det\left(\varphi'(u)^T \cdot \varphi'(u)\right)}\ \mathrm{d}u = \int_{\widetilde{K}} \sqrt{\det\left(\varphi'(h(v))^T \cdot \varphi'(h(v))\right)} \cdot \left|\det h'(v)\right|\ \mathrm{d}v \ .$$

Тъй като $\psi = \varphi \circ h$, теоремата за диференциране на съставна функция ни дава $\psi'(v) = \varphi'(h(v)) \cdot h'(v)$. Оттук получаваме $\psi'(v)^T = h'(v)^T \cdot \varphi'(h(v))^T$ и следователно

$$\det\left(\psi'(v)^T \cdot \psi'(v)\right) = \det\left(h'(v)^T \cdot \varphi'(h(v))^T \cdot \varphi'(h(v)) \cdot h'(v)\right) =$$

$$= \det h'(v)^T \cdot \det\left(\varphi'(h(v))^T \cdot \varphi'(h(v))\right) \cdot \det h'(v) = \det\left(\varphi'(h(v))^T \cdot \varphi'(h(v))\right) \cdot \left(\det h'(v)\right)^2 \ .$$

Оттук получаваме, че

$$\sqrt{\det\left(\psi'(v)^T \cdot \psi'(v)\right)} = \sqrt{\det\left(\varphi'(h(v))^T \cdot \varphi'(h(v))\right)} \cdot \left|\det h'(v)\right| \ ,$$

с което доказателството е завършено. □

Ще използваме това твърдение по-нататък за случая $k = 2$, $n = 3$.

12 Лекция 12: Повърхнинен интеграл от първи род

13 Лекция 13: Повърхнинен интеграл от втори род. Повърхнини с край. Индуцирана ориентация на края

14 Лекция 14: Формула на Стокс

15 Лекция 15: Формула на Гаус-Остроградски