Лекционни записки по Математически Анализ

проф. Надежда Рибарска
Набрани от Никола Юруков

21 октомври 2015 г.

Съдържание

1 Лекция 1 - преговор с разширение **3**
1.1 Евклидовото пространство $\mathbb{R}^n$ . . . 3
1.2 Топология в $\mathbb{R}^n$ . . . 4
1.3 Основни теореми . . . 6

1 Лекция 1 - преговор с разширение

1.1 Евклидовото пространство $\mathbb{R}^n$

Като множество $\mathbb{R}^n$ е множеството $\{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, .., n\}$ от наредените n-торки реални числа. Ако го снабдим със стандартните линейни операции събиране на вектори и умножение на вектор с реално число, получаваме реално линейно пространство (спомнете си аксиомите от курса по линейна алгебра). Да напомним формалните дефиниции: сума на векторите $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ е векторът $x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, ..., x_n+y_n)$ (събирането е покоординатно). Произведение на скалара $\lambda \in \mathbb{R}$ с вектора x е векторът $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$ (умножението със скалар също е покоординатно). Ще означаваме с $\mathbf{0}$ нулевия вектор $(0, \dots, 0)$.

За да можем да правим анализ (да говорим за граница, непрекъснатост, производна и т.н.), освен линейната структура ни е необходима и някаква "мярка на близост"в нашето пространство. Както помните от курса по ДИС2, стандартната мярка на близост между два вектора е евклидовото разстояние между тях:

$$\rho(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\ , \text{ където } x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ y = (y_1, y_2, ..., y_n)\ .$$

Забележете, че в $\mathbb{R}^2$ това е просто питагоровата теорема. Това разстояние е добре съгласувано с линейната структура в смисъл, че $\rho(x, y) = \|x - y\|$, където в дясната част стои евклидовата норма (или дължината) на вектора $x - y$:

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ ,\ x = (x_1, x_2, ..., x_n)\ .$$

Да напомним, че една функция $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty)$ се нарича норма, ако за нея са в сила свойствата

1. $\|x\| = 0 \iff x = \mathbf{0}$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (неравенство на триъгълника)

В курса по ДИС2 е проверено, че евклидовата норма е норма. За упражнение проверете, че

- $\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$
- $\|(x_1, x_2)\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$
- $\|(x_1, x_2)\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p}$, $1 < p < \infty$

са норми в $\mathbb{R}^2$. По-общо, проверете, че

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}\ ,\ 1 \le p < \infty \text{ е норма в } \mathbb{R}^n\ .$$

Разбира се, за целта трябва да използвате неравенството на Минковски от курса по ДИС2.

Евклидовата норма има по-хубави геометрични свойства от горните примери, защото е съгласувана със скаларното произведение

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ , \text{ където } x = (x_1, x_2, ..., x_n) \text{ и } \ y = (y_1, y_2, ..., y_n),$$

по стандартния начин $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Да напомним основното неравенство на Коши-Буняковски-Шварц:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \ .$$

Да напомним също означенията

$$B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\}$$

за отворено кълбо с център x и радиус r и

$$\overline{B}_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq r\}$$

за затворено кълбо с център x и радиус r. Като упражнение можете да скицирате кълбата с радиус 1 и център началото на координатната система за нормите $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$ от предишното упражнение.

1.2 Топология в $\mathbb{R}^n$

Дефиниция 1.1. Подмножеството U на $\mathbb{R}^n$ се нарича отворено, ако за всяка точка x от U съществува $\epsilon > 0$ такова, че $B_\epsilon(x) \subset U$.

Основните свойства на отворените множества, проверени в курса по ДИС2, са

1. $\emptyset$ и $\mathbb{R}^n$ са отворени

2. Сечение на краен брой отворени множества е отворено, т.е. ако $U_1, U_2, ..., U_k$ са отворени, то $\bigcap_{i=1}^k U_i$ е отворено.

3. Обединение на произволна фамилия от отворени множества е отворено, т.е. ако U_α са отворени за всяко $\alpha \in I$, то $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ е отворено.

Пример 1.2. Отворените кълба са отворени множества.
Да разгледаме $B_r(x_0)$, $r > 0$. Взимаме си произволно x от кълбото, т.е. растоянието между x и x_0 е по-малко от r. Нека $\epsilon := r - \|x_0 - x\| > 0$. Тогава $B_\epsilon(x) \subset \mathcal{B}_r(x_0)$. Наистина, нека $y \in B_\epsilon(x)$, т.е. $\|y - x\| < \epsilon$. Получаваме

$$\begin{aligned}
\|x_0 - y\| &\leq \|x - y\| + \|x - x_0\| < \epsilon + \|x - x_0\| \\
\|x_0 - y\| &< r - \|x_0 - x\| + \|x - x_0\| \\
\|x_0 - y\| &< r
\end{aligned}$$

Пример 1.3. Нека функцията $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е **непрекъсната**. Тогава множеството $U = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) > 0\}$ е отворено.

Доказателство. Взимаме произволна точка $x_0 \in U$, следователно $\epsilon = g(x_0) > 0$. От непрекъснатостта на функцията получаваме, че съществува положително число δ такова, че $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon$ за всяко $x \in B_\delta(x_0)$. Следователно $g(x) > g(x_0) - \epsilon = 0$ и оттук $x \in U$ за всяко $x \in B_\delta(x_0)$. $\square$

Дефиниция 1.4. Едно подмножество F на $\mathbb{R}^n$ се нарича затворено, ако $\mathbb{R}^n \setminus F$ е отворено множество.

Основните свойства на затворените множества, проверени в курса по ДИС2, са

1. $\emptyset, \mathbb{R}^n$ са затворени.

2. Обединие на краен брой затворени множества е затворено, т.е. ако $F_1, F_2, ..., F_k$ са затворени, то $\bigcup_{i=1}^{k} F_i$ е затворено.

3. Сечение на произволна фамилия от затворени множества е затворено, т.е. ако F_α са затворени за всички $\alpha \in I$, то $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ е затворено.

Пример: Затворените кълба са затворени множества.

Да напомним още едно свойство на затворените множества, доказано в ДИС2: Едно множество F е затворено точно тогава, когато F съдържа границите на всички редици, съставени от негови елементи. Иначе казано,

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \exists \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset F, \ x_m \to x\} \ .$$

Дефиниция 1.5. Контур на множество.
Нека $A \subset \mathbb{R}^n$. Тогава контур на A наричаме множеството

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in U, \ \forall U \text{ отворено} \wedge U \cap A \neq \emptyset \wedge M \setminus A \neq \emptyset\}$$

Също можем да напишем

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n, \text{ за които същ. } \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset A, x_m \to x, \text{ същ. } \{y_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n \setminus A, y_m \to x\}$$

$A \to \partial A$ е затворено множество

Дефиниция 1.6. Затворена обвивка на множество.

$$\overline{A} = A \cup \partial A = \cap F (F\text{зaтв} \supset A)$$

Най-малкото затворено съдържащо A.

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset A, \ x_m \to x\}$$

Контурът е затворена обвивка на множеството пресечена със затворената обвивка на допълнението.

Дефиниция 1.7. Вътрешност на $A \subset \mathbb{R}^n$.

$$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{U \text{отв.} \\ U \subset A}} U = \mathbb{R}^n \setminus \overline{(\mathbb{R}^n \setminus A)} = int(A)$$

Обединението на отворените множества, които се съдържат в A.

Дефиниция 1.8. Компактност.
$A \subset \mathbb{R}^n$ се нарича компакт $\iff$ A е ограничено и затворено.

От всеки ред от негови елементи може да се избере сходяща подредица, чиято граница е също в множеството.

$$\forall \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset A \ \exists x_{m_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} x_0 \in A$$

Каквото и отворено покритие на A да вземем, можем да изберем негово крайно подпокритие.

$$\forall \{U_\alpha\}_{\alpha \in I} : U_\alpha \text{ са отворени и } \cup_{\alpha \in I} U_\alpha \supset A, \text{тогава } \exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in I : \cup_{i=1}^{k} U_{\alpha_i} \supset A$$

1.3 Основни теореми

Теорема 1.9 (Теорема на Вайерщрас)**.** *Непрекъснат образ на компакт е компакт.*

$$\text{непр. } f : (K \subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m \Rightarrow f(K) = \{f(x) : x \in K\} \text{ е компакт в } \mathbb{R}^m$$

Доказателство. Взимаме $\{y_l\}_{l=1}^{\infty} \subset f(K)$ и търсим нейна сходяща подредица. $y(l) = f(x_l),\ x_l \in K$. $\{x_l\}_{l=1}^{\infty} \subset K$ компакт. $x_{l_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0 \in K$.

f е непрекъсната $\Rightarrow f(x_{l_k}) = y_{l_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0) \in f(K)$ □

Теорема 1.10 (Теорема на Кантор)**.** *Нека f е дефинирана в $D \subset \mathbb{R}^n$. Нека K компакт $\subset D$. f е непрекъсната в K, т.е. непрекъсната във всяка точка от K. Тогава твърдим, че f е равномерно непрекъсната в K. Тоест*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in K \quad \forall x' \in D \quad \|x' - x\| < \delta$$

да е в сила

$$|f(x) - f(x')| < \epsilon$$

Доказателство. Допускаме противното.

$\exists \epsilon_0 > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x_\delta \in K$ зависещо от δ, $\exists x'_\delta \in D, \|x_\delta - x'_\delta\| < \delta : |f(x) - f(x')| \geq \epsilon$ Даваме стойности на $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...$, за да клони към 0. Така се образуват две редици: $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset K$ и $\{x'_m\}_{m=1}^{\infty} \subset D$. Знаем, че разстоянието $< \delta = \frac{1}{m}$, тоест $\|x_m - x'_m\| < \frac{1}{m}$ и

$$|f(x_m) - f(x'_m)| \geq \epsilon_0 > 0 \tag{1.1}$$

K е компакт $\Rightarrow \exists$ сходяща подредица $x_{m_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0 \in K$ от непрекъснатостта на f. Следователно $f(x_{m_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0)$. И така съществува подредица с примове, такава че $\|x'_{m_k} - x_0\| \leq \|x'_{m_k} - x_{m_k}\| + \|x_{m_k} - x_0\| < \frac{1}{m} + \|x_{m_k} - x_0\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Следователно $x'_{m_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0 \in K \Rightarrow f(x'_{m_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0)$.

$$f(x_{m_k}) - f(x'_{m_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \tag{1.2}$$

Така от (1.1) и (1.2) се получава противоречие. Следователно теоремата е доказана. □

Дефиниция 1.11. Релативно отворено множество. Нека $A \subset \mathbb{R}^m$. $U \subset A$ наричаме релативно отворено в A, ако съществува множество отворено в цялото пространство ($V \subset \mathbb{R}^m$), такова че $U = A \cap V$.

Твърдение 1.12. *Нека $f : (D \subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$. Ако f е непрекъсната в $D \iff \forall U$ отворено $\subset \mathbb{R}^m : f^{-1}(U) = \{x \in D : f(x) \in U\}$ е релативно отворено в D.*

Доказателство. Първо ще докажем обратната посока $\Leftarrow$.

Избираме точка от D ($x \in D$) и $\epsilon_0 > 0$ Взимаме първообраз $f^-1(\mathcal{B}_{\epsilon_0}(f(x)) = D \cap V \Rightarrow x \in V$ отворено и $\exists \delta > 0 : \mathcal{B}_\delta(x) \subset V$. Сега $x' \in D \cap \mathcal{B}_\delta(x) \Rightarrow x' \in D \cap V \Rightarrow f(x') \in \mathcal{B}_{\epsilon_0}(f(x))$.

Сега обратната посока $\Rightarrow$. Взимаме $U \subset \mathbb{R}^n$ и $x \in f^{-1}(U) \Rightarrow f(x) \in U$ отворено. Следователно $\exists \epsilon > 0; \mathcal{B}_\epsilon(f(x)) \subset U$, f е непрекъсната $\Rightarrow \exists \delta_x > 0, f(\mathcal{B}_{\delta_x}(x) \cap D) \subset \mathcal{B}_\epsilon(f(x)) \subset U$. И така нека имаме отвореното множество $V = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} \mathcal{B}_{\delta_x}(x)$. Имаме, че $V \cap D = f^{-1}(U)$, защото:

1. $\supset$, защото е център.

2. $\subset$, защото $y \in V \cap D$, $y \in D$ $y \in \mathcal{B}_{\delta_x}(x)$, $\Rightarrow$ $f(y) \in f(\mathcal{B}_{\delta_x}(x) \cap D) \subset \mathcal{B}_\epsilon(f(x)) \subset U$ и следователно $y \in f^{-1}(U)$.

$\square$

За упражнение да се докаже теоремата на Вайерщрас, използвайки горното твърдение.