ИЗПИТ

по Математически анализ, специалност "Приложна математика"
5 февруари 2014г.
Име:.. Фак.номер:.............

1. Нека A е подмножество на $\mathbb{R}^n$. Дефинирайте ∂A (контур на A). Докажете, че контурът на сечението на две множества се съдържа в обединението на техните контури:

$$\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B \ .$$

2. Дефинирайте риманов интеграл от ограничената функция $f : \Delta \to \mathbb{R}$ (тук Δ е паралелотоп в $\mathbb{R}^n$) чрез подхода на Дарбу. Формулирайте и докажете двете леми, необходими за това.

3. Дайте дефиниция на множество, пренебрежимо по Лебег. Докажете, че едно подмножество на $\mathbb{R}^n$ е пренебрежимо по Лебег точно тогава, когато за произволно $\varepsilon > 0$ то може да се покрие с изброимо много отворени паралелотопи със сумарна мярка, по-малка от ε.

4. Дайте дефиниция на "множество, измеримо по Пеано-Жордан" и формулирайте поне едно необходимо и достатъчно условие едно подмножество на $\mathbb{R}^n$ да е такова. Докажете, че криволинейните трапци са множества, измерими по Пеано-Жордан, като докажете в конкретната ситуация и лемата, необходима за това.

5. Нека $\alpha : \Delta \to \mathbb{R}^3$, където Δ е интервал, е гладко изображение, за което $\|\alpha(t)\| \equiv const$ в Δ. Докажете, че във всяка точка от съответната крива радиус-векторът е перпендикулярен на скоростта, т.е. $\langle \alpha(t), \dot{\alpha}(t) \rangle \equiv 0$. Нека сега $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ и $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ са изображенията $\alpha(t) := (e^t, e^{2t}, e^{3t})$, $\beta(t) := (t, t^2, t^3)$. Пресметнете производната на функцията $f(t) := \langle \alpha(t), \beta(t) \rangle$.

6. Опишете релативния контур ∂T (спрямо сферата $S := \{x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$) на сферичния триъгълник $T := \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0\Big\}$. Намерете координатите на центъра на масите на хомогенна материална нишка, разположена по ∂T.

7. Разгледайте криволинейния интеграл от втори род

$$I := \oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + xy + y^2} \ ,$$

където L е окръжност с център началото на координатната система и радиус $r > 0$, обикаляна в посока, обратна на часовниковата стрелка. Докажете, че $I = 2S$, където S е лицето на елипсата $\{x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$. **Упътване:** Първо докажете, че I е равен на интеграл от същото поле, но по елипсата $\{x^2 + xy + y^2 = 1\}$, обикаляна в посока, обратна на часовниковата стрелка. После сметнете интеграл от по-просто поле, което върху елипсата съвпада с нашето.

8. Напишете формулата на Гаус-Остроградски. Докажете я за област, която е цилиндрично тяло и по трите променливи.