ИЗПИТ

по Математически анализ и диференциална геометрия
8 февруари 2004г., група А
Име:.. Фак.номер:........... Адм.група:.....

1. Диференцирайте:
(a) $f(t) = e^{\|\alpha(t)\|}$, където $\alpha(t)$ е гладка векторна функция на скаларния аргумент t, която не се анулира.
(b) $g(\alpha) = \int_1^{\alpha^2} e^{x^2 \sin\alpha} dx$

2. Дайте дефиниция на множество, измеримо по Пеано-Жордан. Докажете, че тялото, определено с неравенствата

$$K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4, x \geq 0\right\}$$

е измеримо.

3. Дали функцията, дефинирана с $f(x, y) = 1$, ако x е рационално и $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ и с $f(x, y) = 0$ в противен случай е интегруема по Риман? Обосновете отговора си.

4. Напишете формулата на Грийн в стандартен вид и с помощта на дивергенция. Пресметнете интеграла

$$\int_\Gamma \frac{< x - x_0, n >}{\| x - x_0 \|^2} ds$$

където Γ е регулярна затворена крива в равнината без самопресичания, n е единичната външна нормала към нея и x_0 е точка, принадлежаща на крайната област, оградена от кривата.

5. Разгледайте изображението

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 4u)$$

(а) В кои точки на равнината това изображение има пълен ранг?
(б) Намерете коефициентите на първата квадратична форма на повърхнината S, зададена с φ (параметрите u и v се менят в областта, която сте определили в (а)).
(в) Докажете, че координатните линии върху S са перпендикулярни.
(г) Намерете координатите на центъра на тежестта на хомогенна повърхнина, зададена с φ, ако

$$(u, v) \in \Omega = \{(\bar{u}, \bar{v}) : 0 < \bar{u} < 1, 0 < \bar{v} < 2\pi\}$$

6. Нека F е гладко векторно поле в $\mathbb{R}^3$. Да означим с S_ε сферата с център x и радиус ε. Докажете, че

$$divF(x) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{\int\int_{S_\varepsilon} < F, n > ds}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3}$$