ИЗПИТ

по Математически анализ, специалност "Приложна математика"
1 септември 2009г.

Име:... Фак.номер:.............

1. Нека A е произволно подмножество на $\mathbb{R}^n$. Дайте дефиниция на ∂A(контура на A). Докажете, че ∂A е затворено множество.

2. Дефинирайте риманов интеграл от ограничената функция $f : \Delta \to \mathbb{R}$ (тук Δ е паралелотоп в $\mathbb{R}^n$) чрез суми на Дарбу. Докажете, че f е интегруема точно тогава, когато за всеки две положителни числа ε и η съществува подразделяне $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ на Δ такова, че

$$\sum_{M_i - m_i \geq \eta} \mu(\Delta_i) < \varepsilon$$

където $M_i = \sup\{f(x) \ : \ x \in \Delta_i\}$ и $m_i = \inf\{f(x) \ : \ x \in \Delta_i\}$.

3. Нека $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната функция, дефинирана в компактното множество $D \subset \mathbb{R}^2$. Докажете, че графиката на f е пренебрежимо множество в $\mathbb{R}^3$. Използвайте доказаното твърдение, за да покажете, че цилиндричните тела са множества, измерими по Пеано-Жордан. Представете тройния интеграл

$$\int\int\int_K g(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

като повторен. Тук g е непрекъсната функция, дефинирана върху тялото на Вивиани

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ x^2 + y^2 \leq x\} \ .$$

4. Дайте дефиниция на това какво значи едно поле да е потенциално. Докажете, че криволинейният интеграл от втори род не зависи от пътя, а само от крайните точки, точно тогава, когато непрекъснатото векторно поле е потенциално. Намерете потенциал за полето

$$F(x, y) = \left(2 \ln x + \frac{y}{x} + 2 \ , \ \ln x\right)$$

6. Нека S е компактна гладка параметрично зададена повърхнина в $\mathbb{R}^3$ ($S = \varphi(K)$, $\varphi \in C^1(K, \mathbb{R}^3)$, K измерим компакт в $\mathbb{R}^2$) и $f : S \to \mathbb{R}$ е непрекъсната функция. Как се свежда повърхнинният интеграл $\int\int_S f \mathrm{d}s$ към риманов? Пресметнете

$$\int\int_S \frac{\mathrm{d}s}{(10 - y)^2} \ , \quad S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + 2y + 3z = 6, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0\right\}$$

6. Пресметнете интеграла на Гаус

$$\int\int_S \left\langle \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|^3}, \mathbf{n} \right\rangle$$

където S е частично гладка повърхнина, контур на областта G и $x_0 \in G$.