

ИЗПИТ

по Математически анализ, специалност "Приложна математика"

15 февруари 2006г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Докажете, че контурът на обединението на две множества се съдържа в обединението на техните контури:

$$\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$$

2. Разгледайте тялото

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, 5 \geq z \geq 0, \frac{z^2}{5^2} \geq \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} \right\}$$

Напишете неговия обем като троен интеграл. Представете получения интеграл като повторен веднъж с най-вътрешно интегриране по z и веднъж с най-вътрешно интегриране по x . Не е необходимо да пресмятате получените интеграли.

3. Функцията $f : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$, зададена по-долу, интегрируема ли е по Риман? Обосновете отговора си.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako } \sin\left(\frac{1}{x}\right) > 0, x \neq 0 \\ -1, & \text{ako } \sin\left(\frac{1}{x}\right) < 0, x \neq 0 \\ 0, & \text{ako } \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0, x \neq 0 \\ 0, & \text{ako } x = 0 \end{cases}$$

4. Пресметнете криволинейния интеграл от втори род

$$\oint_{\Gamma} \frac{y-2}{(x-3)^2 + (y-2)^2} dx - \frac{x-3}{(x-3)^2 + (y-2)^2} dy,$$

където Γ е произволна проста затворена частично гладка крива, не съдържаща точката $(3, 2)$. **Упътване:** Отговорът зависи от взаимното разположение на точката и кривата!

5. Формулирайте теоремата на Гаус-Остроградски. Докажете я за област, която е цилиндрично тяло и по трите променливи.

6. Да разгледаме гладкото векторно поле

$$F(x) = x \operatorname{tg} \|x\|,$$

където $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

(а) Пресметнете $\operatorname{div} F(x)$ и $\operatorname{rot} F(x)$.

(б) Напишете дефиницията на потенциално векторно поле. Формулирайте условия, еквивалентни на условието за потенциалност.

(в) Формулирайте необходимото условие за потенциалност (в \mathbb{R}^3) и условие върху областта, при което необходимото условие е и достатъчно.

(г) Намерете дефиниционната област на полето F . Приложимо ли е към нейните компоненти на свързаност (максимални свързани подмножества) условието от подточка (в)?

7. Да се намери масата на материална сфера, ако повърхностната ѝ плътност във всяка точка е равна на разстоянието от тази точка до вертикалния диаметър.