

ИЗПИТ

по Математически анализ, специалност "Приложна математика"

7 февруари 2005г., група Б

Име:..... Фак.номер:.....

1. Напишете тройния интеграл, даващ обема на множеството

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 5, \frac{1}{6} \leq z, z(1 + x^2 + y^2) \leq 1\}.$$

Представете получения интеграл като повторен по два начина: с двукратен външен интеграл и с еднократен външен интеграл. Няма нужда да пресмятате интеграла.

2. Разгледайте множеството

$$A = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y \in \mathbb{Q}\},$$

където \mathbb{Q} е множеството на рационалните числа.

(а) Напишете дефиницията на множество, пренебрежимо по Лебег. Формулирайте основните свойства на тези множества.

(б) Докажете, че множеството A е пренебрежимо.

(в) Намерете контура (границата) на A , множеството ∂A . Това множество пренебрежимо ли е? Обосновете отговора си.

(г) Формулирайте дефиницията на множество, измеримо по Пеано-Жордан. Множеството A измеримо ли е по Пеано-Жордан? Използвайте резултата от подточка (в).

3. Да разгледаме гладкото векторно поле

$$F(x) = x \sin \|x\|,$$

където $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

(а) Пресметнете $\operatorname{div} F(x)$ и $\operatorname{rot} F(x)$.

(б) Напишете дефиницията на потенциално векторно поле. Формулирайте условия, еквивалентни на условието за потенциалност.

(в) Формулирайте необходимото условие за потенциалност (в \mathbb{R}^3) и условие върху областта, при което необходимото условие е и достатъчно.

(г) Използвайте подточки (а) и (в), за да отговорите обосновано на въпроса потенциално ли е полето F .

4. Пресметнете повърхнинния интеграл от първи род

$$\int_{S^+} z \, ds$$

където $S^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\}$ е горната полусфера с радиус 2.

(Упътване: Параметризирайте полусферата, като използвате стандартните сферични координати.) Напишете външната и вътрешната нормали към S^+ . Коя от тях е съгласувана с параметризацията?

5. Формулирайте и докажете формулата на Грийн за област, която е криволинеен трапец по двете променливи едновременно.