

# ИЗПИТ

по Математически анализ и диференциална геометрия

февруари 2004г., група Г

Име:..... Фак.номер:..... Адм.група:.....

1. Пресметнете:

(а)  $f(t) = \cos \|\alpha(t)\|$ , където  $\alpha(t)$  е гладка векторна функция на скаларния аргумент  $t$ , която не се анулира.

(б)  $g(\alpha) = \int_1^{\ln \alpha} e^{x^2 \alpha^2} dx$

2. Дайте дефиниция на множество, измеримо по Пеано-Жордан. Докажете, че тялото, определено с неравенствата

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1, x \leq 0\}$$

е измеримо.

3. Дали функцията, дефинирана с  $f(x, y) = 1$ , ако  $x$  е рационално и  $1 \leq |x| + |y| \leq 4$  и с  $f(x, y) = 0$  в противен случай е интегрируема по Риман? Обосновете отговора си.

4. Напишете формулата на Грийн в стандартен вид и с помощта на дивергенция. Пресметнете интеграла

$$\int_{\Gamma} \frac{\langle x - x_0, n \rangle}{\|x - x_0\|^2} ds$$

където  $\Gamma$  е регулярна затворена крива в равнината без самопресичания,  $n$  е единичната външна нормала към нея и  $x_0$  е точка, не принадлежаща на крайната област, оградена от кривата.

5. Разгледайте изображението

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 5u)$$

(а) В кои точки на равнината това изображение има пълен ранг?

(б) Намерете коефициентите на първата квадратична форма на повърхнината  $S$ , зададена с  $\varphi$  (параметрите  $u$  и  $v$  се менят в областта, която сте определили в (а)).

(в) Докажете, че координатните линии върху  $S$  са перпендикулярни.

(г) Намерете силата на притегляне, която хомогенна повърхнина, зададена с  $\varphi$ , упражнява върху материална точка, разположена в началото на координатната система, ако

$$(u, v) \in \Omega = \{(\bar{u}, \bar{v}) : \frac{1}{2} < \bar{u} < 1, 0 < \bar{v} < 2\pi\}$$

6. Нека  $F$  е гладко векторно поле в  $\mathbb{R}^3$ . Да означим с  $S_\varepsilon$  сферата с център  $x$  и радиус  $\varepsilon$ . Докажете, че

$$\operatorname{div} F(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{S_\varepsilon} \langle F, n \rangle ds}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3}$$