

ИЗПИТ

по Математически анализ

16 септември 2005г.

Име:..... Фак.номер:..... Специалност:.....

1. Формулирайте принципа на Кавалиери. Използвайте го, за да изведете формулата за обем на ротационно тяло. Като нейно приложение изведете формулата за обем на прав кръгов конус с радиус на основата R и височина H .

2. Разгледайте материална нишка, разположена по дъгата на астроидата, разположена в първи квадрант:

$$\alpha(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t),$$

където a е положителна константа и $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Нека плътността на нишката във всяка точка е равна на третата степен на разстоянието от тази точка до началото на координатната система. Каква е гравитационната сила, с която материалната нишка притегля материална точка с маса m_0 , разположена в началото на координатната система?

3. Дайте дефиниция на множество, пренебрежимо по Лебег. Докажете, че изброимо обединение на множества, пренебрежими по Лебег, е множество, пренебрежимо по Лебег.

4. Дайте дефиниция на потенциал на векторно поле. Пресметнете потенциала на гравитационното поле

$$F(x) = -\frac{x}{\|x\|^3}, \quad x \neq (0, 0, 0).$$

5. Нека F е двукратно гладко векторно поле, дефинирано в \mathbb{R}^3 .

(а) Формулирайте теоремата на Стокс.

(б) Пресметнете $\mathbf{div} \mathbf{rot} F$.

(в) Напишете формулата на Гаус-Остроградски за $\mathbf{rot} F$ и областта

$$G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}.$$

Можете ли да обясните резултата само чрез формулата на Стокс?

6. Напишете формулата за свеждане на повърхнинен интеграл от първи род към двоен риманов интеграл. Изведете формула за повърхнина на ротационно тяло.

7. Пресметнете площта на горната основа на "тялото на Вивиани":

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$
$$x^2 + y^2 \leq x$$