

ИЗПИТ

по Математически анализ, специалност "Приложна математика"

17 февруари 2011г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Нека Δ е правоъгълник в равнината и $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ е ограничена функция. Дефинирайте малка и голяма сума на Дарбу за функцията f . Дайте дефиниция на риманов интеграл от f върху Δ чрез подхода на Дарбу. Формулирайте критерия за интегрируемост във втора форма.

2. Представете интеграла $\int \int_K f(x, y) dx dy$ (тук K е множеството $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y \geq 0, x^2 + y^2 \geq 2x, y^2 \leq 2x\}$, а $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъснатата функция) като повторен веднъж с външно интегриране по x и веднъж с външно интегриране по y .

3. Дайте дефиниция на множество, пренебрежимо по Лебег. Докажете, че изброимо обединение на пренебрежими множества е пренебрежимо.

4. Формулирайте теоремата на Лебег (за интегрируемост по Риман). Дайте дефиниция на индикаторна (характеристична) функция на подмножество A на \mathbb{R}^n . Намерете (с обосновка) множеството от точки на прекъсване на тази функция. Кое е множеството от точки на прекъсване на характеристичната функция на K , където K е множеството, дефинирано в задача 2?

Име:..... Фак.номер:.....

5. Нека F е непрекъснато векторно поле, дефинирано в областта $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Докажете, че ако криволинейният интеграл от втори род върху частично гладка крива $\Gamma \subset \Omega$ с начало A и край B не зависи от Γ , а само от A и B , то полето F е потенциално.

6. Напишете формулата за свеждане на повърхнинен интеграл от първи род към двоен риманов интеграл. Нека φ_1 и φ_2 ($\varphi_1 < \varphi_2$) са дължините на два меридиана, а ψ_1 и ψ_2 ($\psi_1 < \psi_2$) са ширините на два паралела (в радиани) върху сфера с радиус R . Пресметнете площта на частта от сферата, заключена между тези два паралела и два меридиана.

7. Нека Ω е област в \mathbb{R}^2 с частично гладка граница $\partial\Omega$ и нека $F = (F_1, F_2)$ е гладко векторно поле, дефинирано в околност на $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Докажете формулата на Грийн за F и Ω , ако $\overline{\Omega}$ е криволинеен трапец и по двете променливи.

8. Нека S е явно зададената повърхнина $z = \sqrt{4x - x^2 - y^2}$, $(x, y) \in D := \{x^2 + y^2 \leq 2x\}$. Напишете единично нормално векторно поле, което ориентира S и е съгласувано с естествената параметризация. Нека Γ е крайт на S , ориентиран така, че S да остава от лявата страна (Γ е сечението на повърхнините, определени с уравненията $z = \sqrt{4x - x^2 - y^2}$ и $x^2 + y^2 = 2x$). Приложете формулата на Стокс към криволинейния интеграл от втори род

$$\int_{\Gamma} (y^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (x^2 + y^2)dz$$

и повърхнината S . Ще можете да пресметнете получения интеграл особено лесно, ако използвате подсказването, че $\iint_D \frac{y}{\sqrt{4x - x^2 - y^2}} dx dy = 0$.