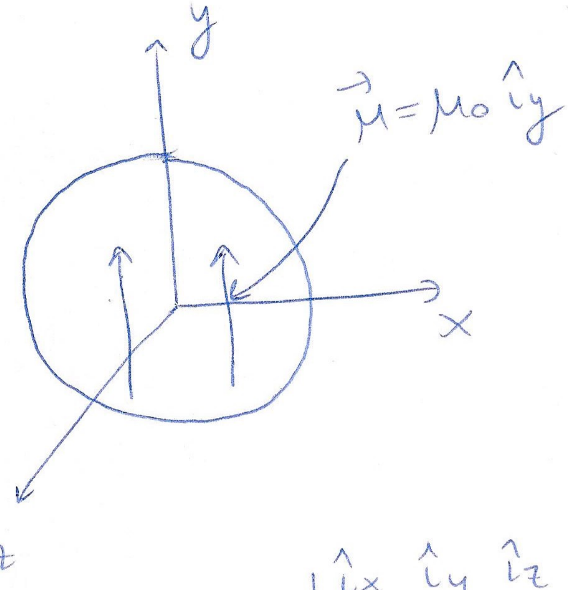
Άσκηση 10

α)



$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} = \begin{vmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & M_0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

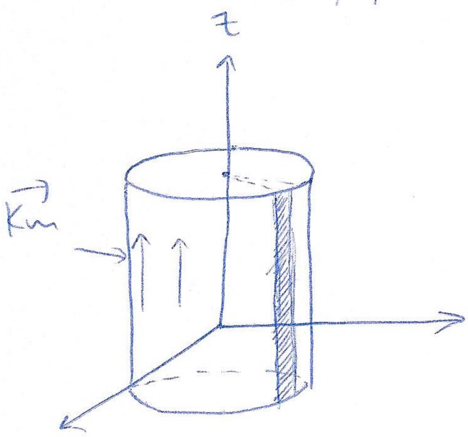
$$\vec{K}_m = -\hat{i}_n \times \vec{M} = -\hat{i}_{r_T} \times (M_0 \hat{i}_y) = -M_0 \sin\theta_0 \, \hat{i}_z$$

όπου θ_0 η γωνία μεταξύ $\hat{i}_{r_T}, \hat{i}_y$

αλλά $\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi'$, όπου φ' η γωνία $\hat{i}_x, \hat{i}_{r_T}$.

άρα: $\vec{K}_m = -M_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi'\right) \hat{i}_z = -M_0 \cos\varphi' \, \hat{i}_z$

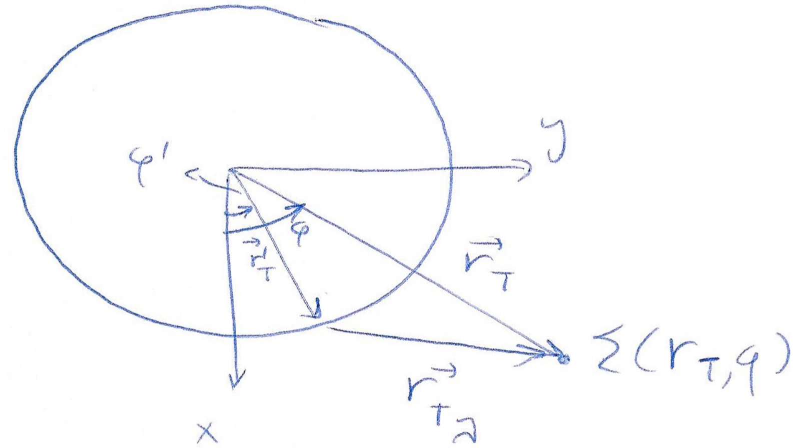
Τμηματοποιούμε τον κύλινδρο σε απειροελάχιστα τμήματα, επιφανειακά σε αυτόν, ώστε το ρεύμα που διαρρέει κάθε τμήμα να θεωρείται γραμμικό. Κάθε τμήμα έχει άπειρο μήκος και πάχος $dl = \alpha d\varphi'$



Το ρεύμα που διαπερνά κάθε τμήμα είναι

$K_m dl = (-M_0 \cos\varphi')(\alpha d\varphi')$

Κάτοψη του κυλίνδρου στο xy επίπεδο:



Λόγω απειρίας στον άξονα z, δεν θα έχουμε εξάρτηση από το z.
Επομένως μπορούμε να αγνοήσουμε το z στο $\Sigma(r_T,\varphi,z)$.

Έτσι έχουμε:

$\vec{r}_T' = \alpha\cos\varphi'\,\hat{i}_x + \alpha\sin\varphi'\,\hat{i}_y$ (Διάνυσμα κάθε λωρίδας)

$\vec{r}_T = r_T\cos\varphi\,\hat{i}_x + r_T\sin\varphi\,\hat{i}_y$ (Διάνυσμα σημείου $\Sigma(r_T,\varphi)$)

άρα $\vec{r}_{T\lambda} = \vec{r}_T - \vec{r}_T' = (r_T\cos\varphi - \alpha\cos\varphi')\hat{i}_x + (r_T\sin\varphi - \alpha\sin\varphi')\hat{i}_y$

(Διάνυσμα απόστασης λωρίδας-σημείου Σ)

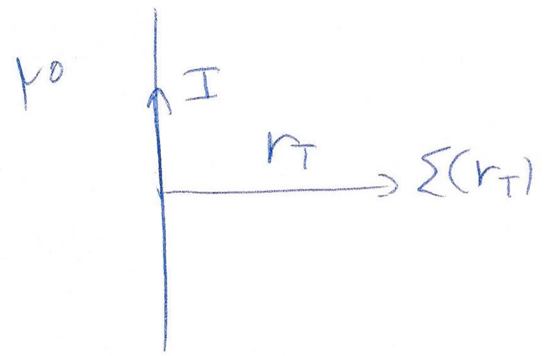
και έτσι: $r_{T\lambda} = \left[(r_T\cos\varphi - \alpha\cos\varphi')^2 + (r_T\sin\varphi - \alpha\sin\varphi')^2\right]^{1/2} =$

$= \left[\underline{r_T^2\cos^2\varphi} - 2\alpha r_T\cos\varphi\cos\varphi' + \alpha^2\cos^2\varphi' + \underline{r_T^2\sin^2\varphi} - 2\alpha r_T\sin\varphi\sin\varphi' + \alpha^2\sin^2\varphi'\right]^{1/2}$

$= \left[r_T^2 + \alpha^2 - 2\alpha r_T(\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi')\right]^{1/2}$

$= \left[r_T^2 + \alpha^2 - 2\alpha r_T\cos(\varphi - \varphi')\right]^{1/2}$

Χρησιμοποιούμε το εξής αποτέλεσμα!



σημείο αναφοράς

$$A=\frac{\mu_0}{2\pi} I \ln\frac{r_{T0}}{r_T}$$

Αν λάβουμε ως σημείο αναφοράς $r_{T0}=\alpha$ και $I=K_m dl$:

και $r_T = r_{T\lambda}$

$$A=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{r_{T0}}{r_T}\right)=\frac{\mu_0 (K_m dl)}{2\pi}\ln\frac{\alpha}{r_{T\lambda}}$$

Δηλαδή: $d\vec{A}=\frac{\mu_0}{2\pi}(K_m dl)\ln\frac{\alpha}{r_{T\lambda}}\hat{i}_z=-\frac{\mu_0}{2\pi}M_0\,\alpha\cos\varphi' d\varphi' \ln\frac{\alpha}{r_{T\lambda}}\hat{i}_z$

(στοιχειώδες)

άρα: $\vec{A}=\int d\vec{A}=\int_0^{2\pi}-\frac{\mu_0 M_0}{2\pi}\alpha\cos\varphi' d\varphi' \ln\frac{\alpha}{r_{T\lambda}}\hat{i}_z \Longrightarrow$

$$\vec{A}=-\frac{\mu_0}{2\pi}M_0\,\alpha\,\hat{i}_z\int_0^{2\pi}\cos\varphi' \ln\frac{\alpha}{\left[r_T^2+\alpha^2-2r_T\alpha\cos(\varphi-\varphi')\right]^{1/2}}\,d\varphi'$$

$\vec{A}(r_T,\varphi)$

β) Για το πεδίο έχουμε: $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

• με $A_z = -\frac{\mu_0 M_0}{2\pi} \alpha \int_0^{2\pi} \cos\varphi' \left(\ln\alpha - \ln\left[r_T^2 + \alpha^2 - 2\alpha r_T \cos(\varphi - \varphi') \right]^{1/2} \right) d\varphi'$

αλλά το $r_T^2 + \alpha^2 - 2\alpha r_T \cos(\varphi - \varphi')$ είναι ίσο με $r_{T\lambda}^2$, το οποίο μπορεί να εκφραστεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες ως: (β) σχήμα ερωτ (α)).

$$\vec{r}_{T\lambda} = \vec{r}_T - \vec{r}_{T'} = (x - \alpha\cos\varphi')\hat{i}_x + (y - \alpha\sin\varphi')\hat{i}_y$$

όπου x, y οι συντεταγμένες του $\Sigma(x, y, z)$

οπότε: $A_z = -\frac{\mu_0}{2\pi} M_0 \alpha \int_0^{2\pi} \cos\varphi' \left(\ln\alpha - \ln\left[(x - \alpha\cos\varphi')^2 + (y - \alpha\sin\varphi')^2 \right]^{1/2} \right) d\varphi'$

Έτσι λοιπόν: $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \cancel{\frac{\partial A_y}{\partial z}} \right)\hat{i}_x + \left(\cancel{\frac{\partial A_x}{\partial z}} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)\hat{i}_y + \cancel{\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)\hat{i}_z}$

$$= \frac{\partial A_z}{\partial y}\hat{i}_x - \frac{\partial A_z}{\partial x}\hat{i}_y$$

• $\frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{\mu_0}{2\pi} M_0 \alpha \int_0^{2\pi} \cos\varphi' \left(-\frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}(y - \alpha\sin\varphi')}{\underbrace{(x - \alpha\cos\varphi')^2 + (y - \alpha\sin\varphi')^2}_{r_{T\lambda}^2}} \right) d\varphi'$

• $\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\mu_0}{2\pi} M_0 \alpha \int_0^{2\pi} \cos\varphi' \left(-\frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}(x - \alpha\cos\varphi')}{\underbrace{(x - \alpha\cos\varphi')^2 + (y - \alpha\sin\varphi')^2}_{r_{T\lambda}^2}} \right) d\varphi'$

Τελικά:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 M_0 \alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\hat{i}_x \frac{(y-a\sin\varphi')\cos\varphi'}{r_T^2+\alpha^2-2r_T\alpha\cos(\varphi-\varphi')} - \hat{i}_y \frac{(x-\alpha\cos\varphi')\cos\varphi'}{r_T^2+\alpha^2-2r_T\alpha\cos(\varphi-\varphi')}\right]d\varphi'$$

όσον αφορά το $\vec{H}$ έχουμε:

$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ $(r_T > \alpha)$ και $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - M_0 \hat{i}_y$ $(r_T < \alpha)$ (λόγω της μαγνήτισης)