

Εισαγωγή στις Τηλεπικοινωνίες

Αναφορά Εργαστηριακής Άσκησης 2020-2021

Ονοματεπώνυμο: Νικόλαος Παγώνας, el18175

Συνεργάτης: Αναστάσιος Παπαζαφειρόπουλος, el18079

Ομάδα: A Telecom 17

Ερώτημα 1ο

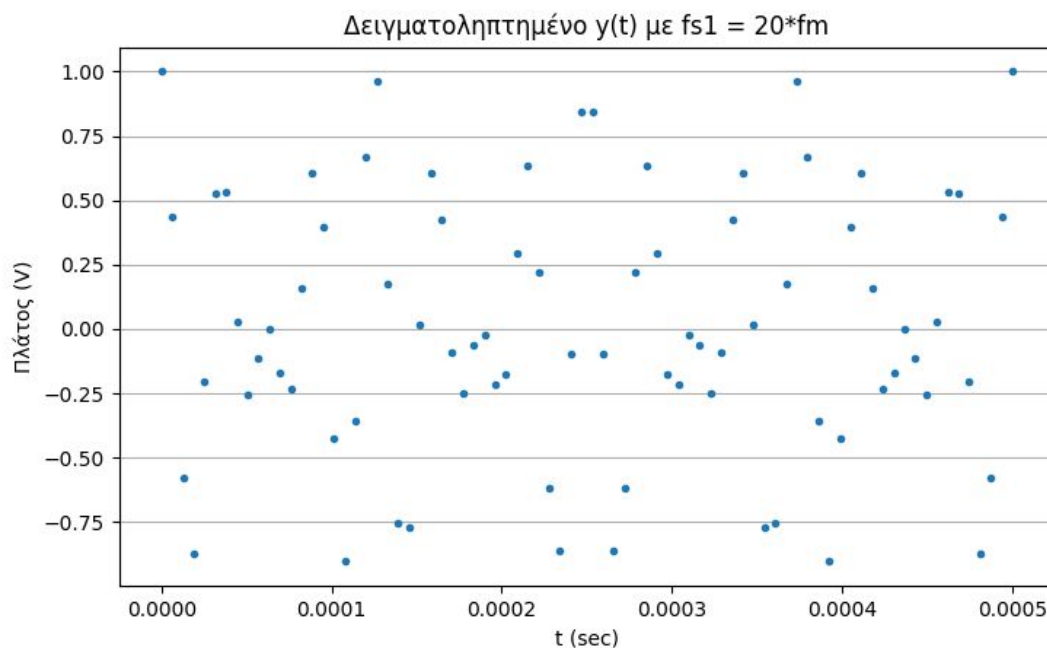
Για αριθμό μητρώου el18175 έχουμε **AM=5** και **fm=4 kHz** (αφού $1+7+5=13$, $1+3=4$). Έτσι το σήμα είναι:

$$y(t) = A \cos(2\pi 4000t) \cos(2\pi \cdot 7 \cdot 4000t) = \cos(2\pi 4000t) \cos(2\pi 28000t)$$

Με βάση τη γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα που μετατρέπει το γινόμενο συνημιτόνων, γνωρίζουμε ότι θα προκύψει άθροισμα δύο συνημιτόνων, το ένα με συχνότητα $28000+4000$ και το άλλο με συχνότητα $28000-4000$, δηλαδή 32 kHz και 24 kHz αντίστοιχα. Έτσι, η θεμελιώδης περίοδος του σήματος θα είναι το ΕΚΠ($1/32000, 1/24000$), δηλαδή $1/8000 \text{ sec} = 0.000125 \text{ sec}$

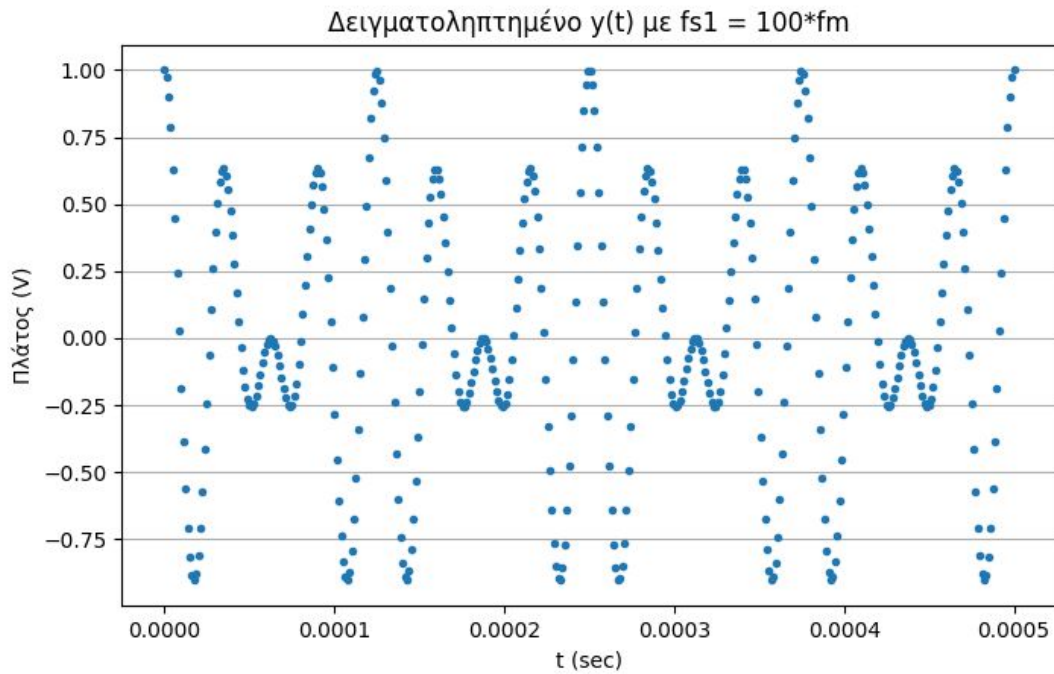
α.

(i) Δειγματοληπτούμε το σήμα με συχνότητα δειγματοληψίας **fs1 = 20fm = 80kHz**.



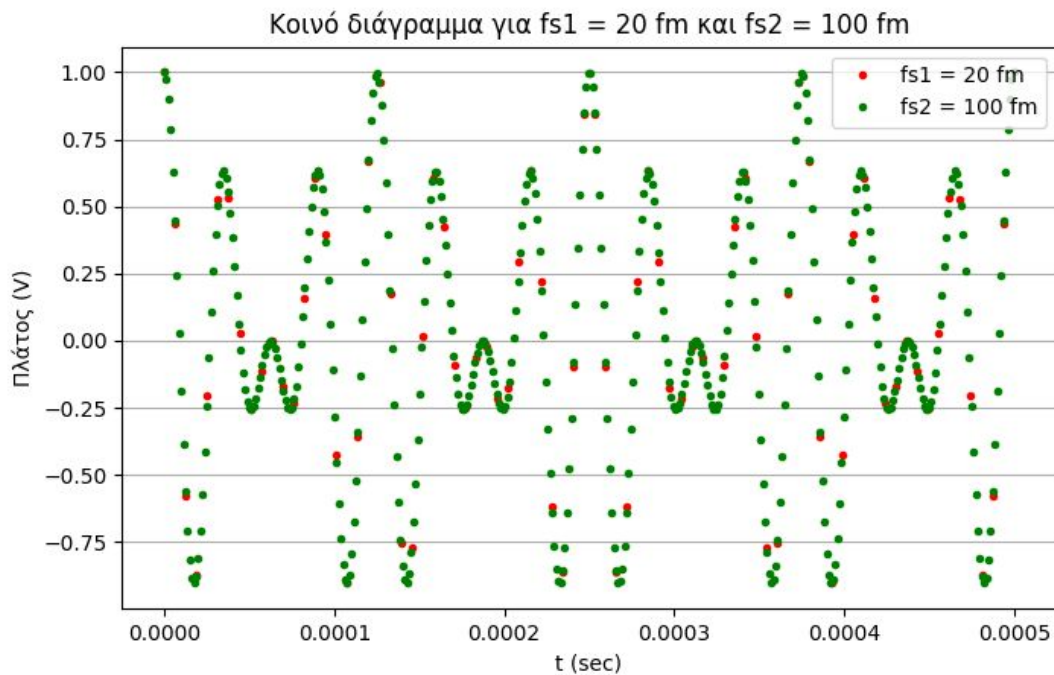
Παρατηρούμε ότι η μορφή του σήματος δεν είναι τόσο ευδιάκριτη. Αυτό οφείλεται στην σχετικά χαμηλή συχνότητα δειγματοληψίας $fs1$.

(ii) Στη συνέχεια δειγματοληπτούμε το σήμα με συχνότητα **fs2 = 100fm = 400 kHz**.

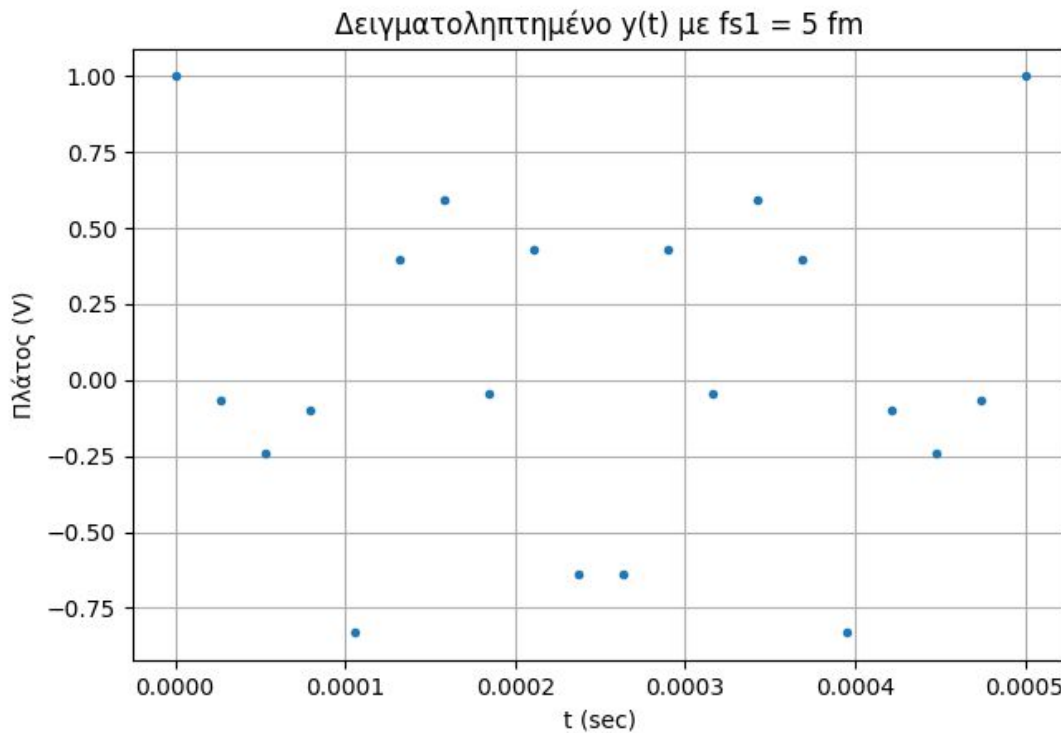


Πλέον η μορφή του σήματος είναι πολύ πιο ευκρινής, αφού αυξήσαμε τη συχνότητα δειγματοληψίας.

(iii) Παρουσιάζουμε τα δείγματα από τα ερωτήματα (i) και (ii) σε κοινό διάγραμμα.



β. Τέλος, δειγματοληπτούμε το σήμα με $f_s = 5f_m = 20\text{kHz}$.



Παρατηρούμε ότι η μορφή του σήματος δεν διακρίνεται σχεδόν καθόλου.

Συγκεκριμένα, η ελάχιστη θεωρητική συχνότητα δειγματοληψίας ώστε να είναι δυνατή η ακριβής ανακατασκευή του σήματος δίνεται από το θεώρημα δειγματοληψίας Nyquist-Shannon. Αν το σήμα είναι φασματικά περιορισμένο στο $[-B, B]$, τότε η παραπάνω ελάχιστη συχνότητα είναι $f_s = 2B$.

Το παρόν σήμα είναι φασματικά περιορισμένο στο $[-32\text{kHz}, 32\text{kHz}]$ αφού το φάσμα του αποτελείται από 4 συναρτήσεις δέλτα, αφού ο μετασχηματισμός Fourier του

$$\cos(2\pi f_c t)$$

είναι

$$0.5\delta(f - f_c) + 0.5\delta(f + f_c)$$

Έτσι, οι συναρτήσεις δέλτα θα βρίσκονται στις θέσεις -32kHz , -24kHz , 24kHz και 32kHz .

Επομένως $f_{s\min} = 64\text{kHz}$, και άρα η συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 20\text{kHz}$ δεν επαρκεί για την ανακατασκευή του σήματος.

Ερώτημα 2ο

Θεωρούμε ως είσοδο σε mid-riser κβαντιστή το σήμα $y(t)$ του πρώτου ερωτήματος μετά από δειγματοληψία συχνότητας $f_s = 20 \cdot f_m = 80$ kHz. Επειδή $f_m = 4$ (άρτια), γίνεται κβάντιση με **4 bits**.

α. Για την έξοδο f του ομοιόμορφου (mid-riser) κβαντιστή ισχύει:

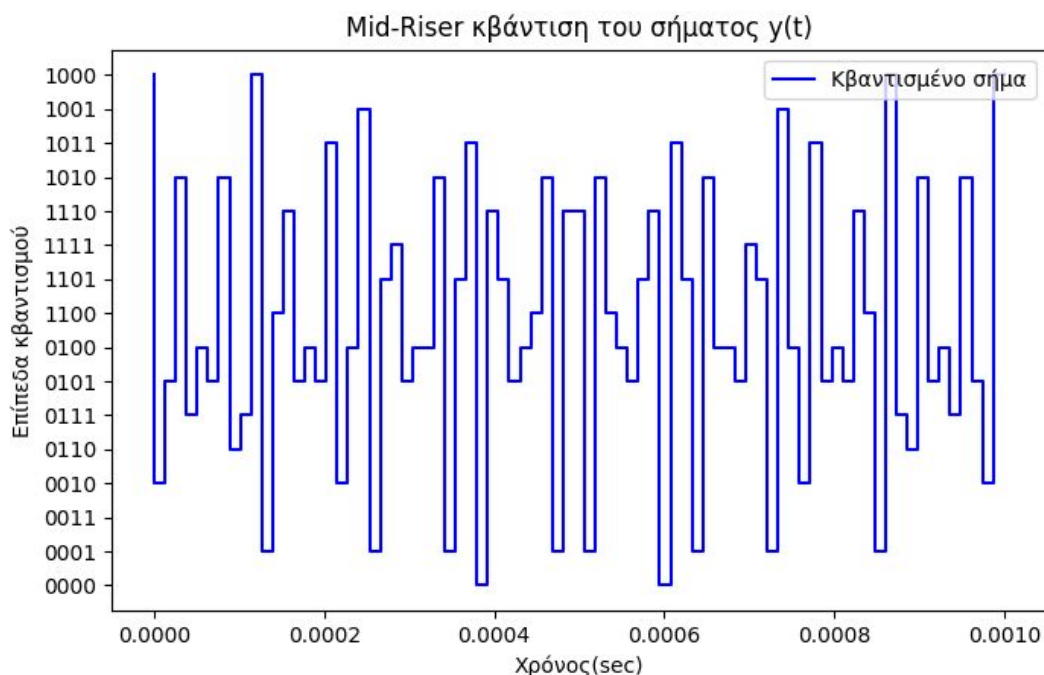
$$f(x) = \Delta \cdot \left(\left\lfloor \frac{x}{\Delta} \right\rfloor + \frac{1}{2} \right)$$

με

$$\Delta = \frac{2m_{max}}{L}$$

όπου m_{max} η μέγιστη κατά μέτρο τιμή του σήματος και L ο αριθμός των επιπέδων κβάντισης. Για το L ισχύει: $L = 2^R$, όπου R ο αριθμός των bits του κβαντιστή. Άρα στην περίπτωση μας έχουμε **16 στάθμες κβάντισης**.

Η έξοδος του κβαντιστή φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Στον κατακόρυφο άξονα φαίνονται τα επίπεδα κβαντισμού κωδικοποιημένα κατά Gray.



β. Για την τυπική απόκλιση του σφάλματος κβάντισης χρησιμοποιούμε την εντολή `numpy.std()`, η οποία δέχεται ως λίστα τα σφάλματα για τα N πρώτα δείγματα και υπολογίζει την αντίστοιχη τυπική απόκλιση. Έτσι έχουμε:

(i) Τυπική απόκλιση για τα πρώτα 10 δείγματα: 0.04163277673503003

(ii) Τυπική απόκλιση για τα πρώτα 20 δείγματα: 0.0429309311854336

(iii) Για το SNR έχουμε:

$$SNR(dB) = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{signal}}{P_{noise}^{RMS}} \right)$$

Προκύπτει:

SNR για τα πρώτα 10 δείγματα: 21.328741359543507 dB

SNR για τα πρώτα 20 δείγματα: 21.319934344567763 dB

Ενώ για το θεωρητικό SNR ισχύει:

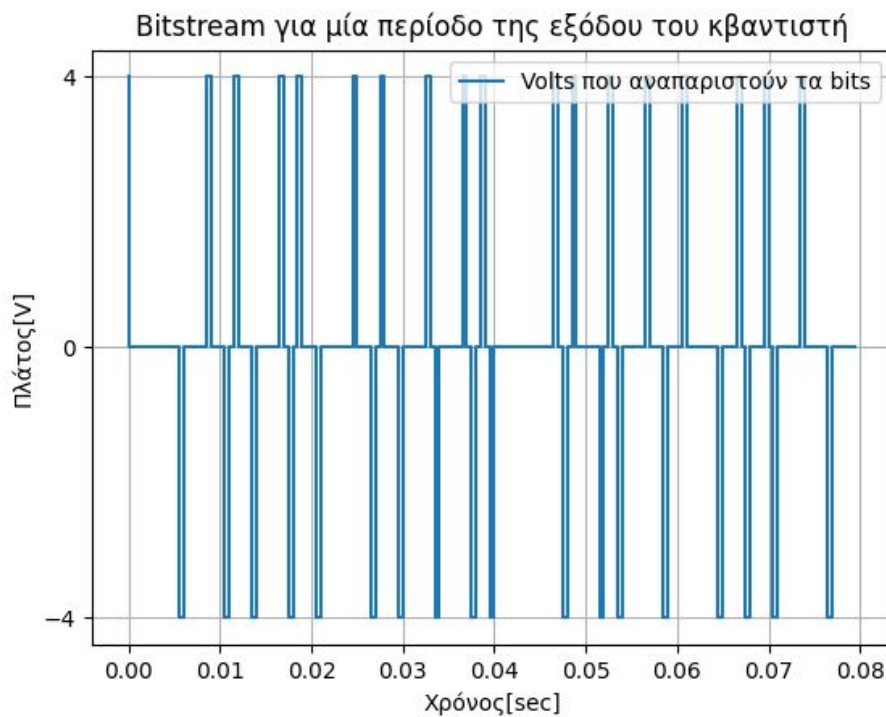
$$SNR = \left(\frac{3P}{m_{max}^2} \right) \cdot 2^{2R}, \quad \mu\epsilon \quad m_{max} = 1V \quad \kappa\alpha\iota \quad P = \frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt = \frac{1}{4}$$

Έτσι έχουμε:

Θεωρητικό SNR: 22.833012287035498 dB

Παρατηρούμε ότι οι θεωρητικές τιμές είναι κοντά στις πειραματικές. Η μικρή απόκλιση οφείλεται στον σχετικά μικρό αριθμό δειγμάτων. Τέλος, επιβεβαιώνεται ο κανόνας των 5 dB για κάθε extra bit.

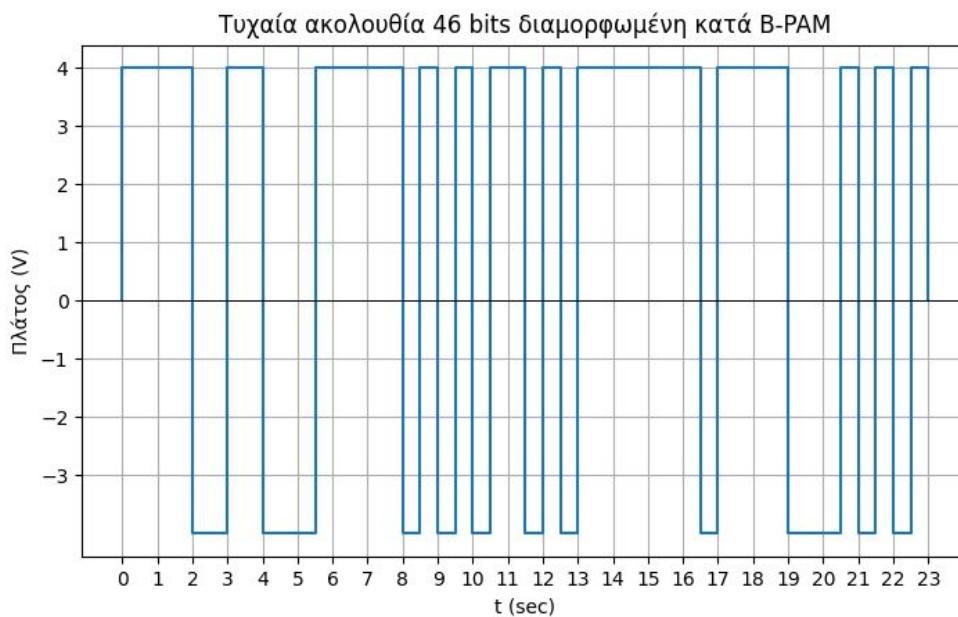
γ. Η κωδικοποίηση γραμμής είναι η διαδικασία μετατροπής μιας ακολουθίας bits σε κυματομορφές τάσης (παλμούς), ώστε να μεταδοθούν στη συνέχεια στο δίαυλο. Εδώ, επειδή έχουμε κωδικοποίηση POLAR NRZ, το bit 1 αντιστοιχίζεται σε θετική τάση (4 V λόγω αριθμού μητρώου) και το bit 0 αντιστοιχίζεται σε αρνητική τάση (-4 V). Η θετική/αρνητική τάση διατηρείται για όλη τη διάρκεια του bit (NRZ). Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η κωδικοποίηση του bitstream για μία περίοδο της εξόδου του κβαντιστή:



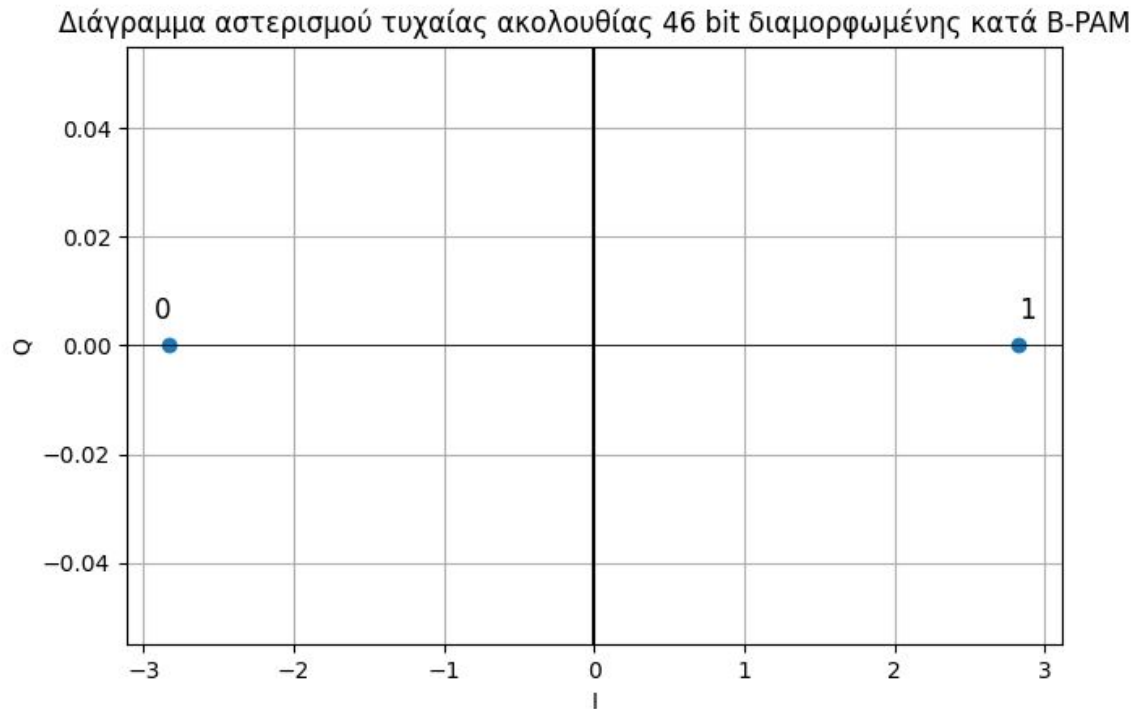
Ερώτημα 3ο

Παράγουμε τυχαία ακολουθία 46 bits με ίση πιθανότητα 0 ή 1. Θεωρούμε ότι η διάρκεια του bit είναι $T_b=0.5$ sec.

α. Διαμορφώνουμε την ακολουθία κατά B-PAM πλάτους A Volt. Για αριθμό μητρώου el18175 έχουμε $1+7+5=13$, $1+3=4$, άρα $A=4$ V. Στη διαμόρφωση B-PAM (ισοδύναμο NRZ-Polar), αντιστοιχούμε το 1 στα +4 Volts και το 0 στα -4 Volts για όλη τη διάρκεια του bit, δηλαδή χωρίς να επιστρέφουμε στα 0 Volts. Η διαμορφωμένη κατά B-PAM ακολουθία φαίνεται στο σχήμα:



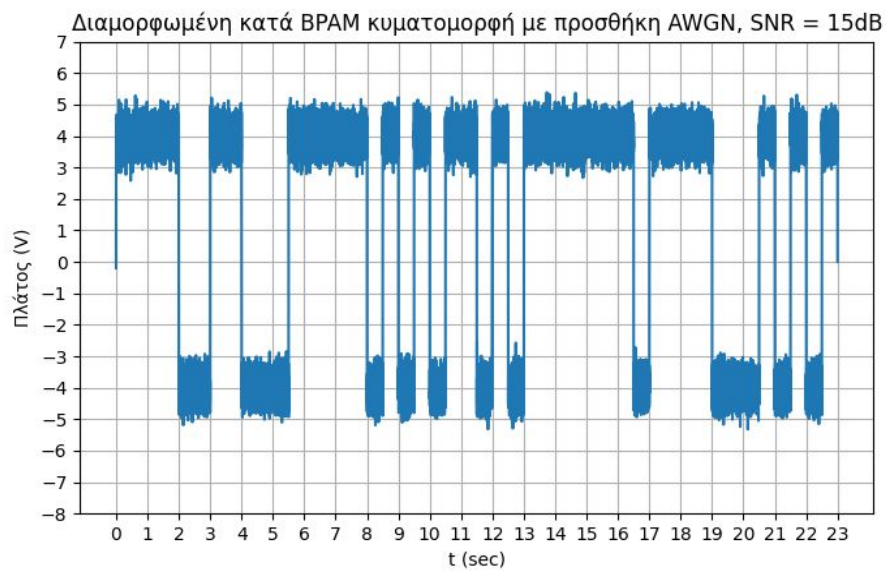
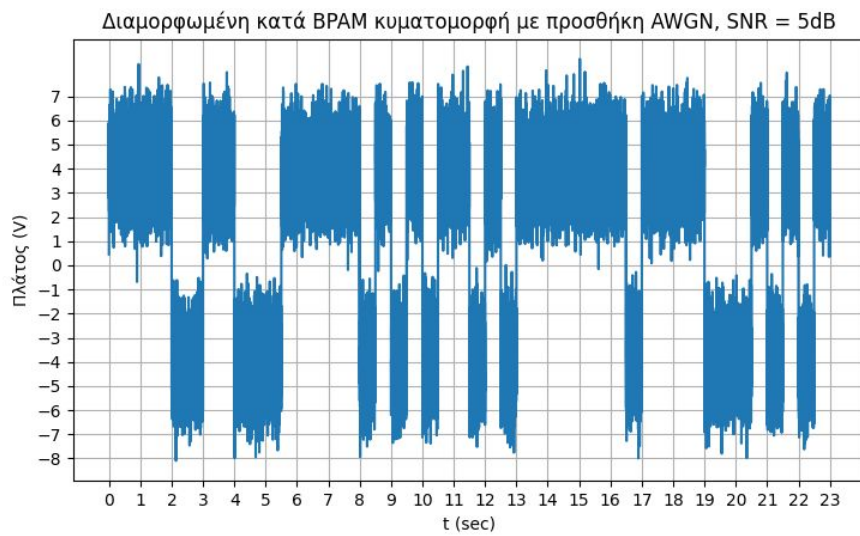
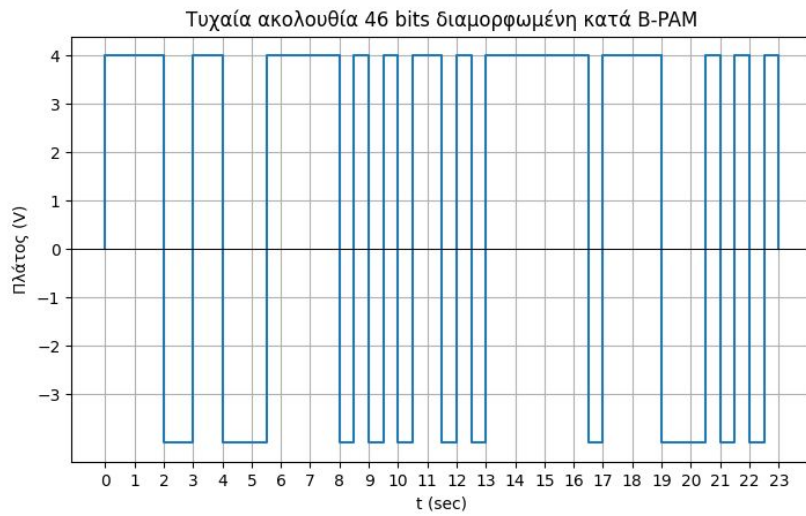
β. Όσον αφορά το διάγραμμα αστερισμού του παραπάνω σήματος, διαλέγουμε ως συνάρτηση βάσης την $\phi_1(t) = \sqrt{E_b}$, οπότε έχουμε $s_0(t) = -\phi_1(t)$ και $s_1(t) = \phi_1(t)$, όπως φαίνεται και στο σχήμα που ακολουθεί:



γ. Στη συνέχεια παράγουμε θόρυβο AWGN και τον προσθέτουμε στο διαμορφωμένο κατά BPAM σήμα, με

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{E_b}{N_0} = 5 \text{ dB και } 15 \text{ dB}$$

Παραθέτουμε ξανά το σήμα πριν τον θόρυβο για ευκολία στη σύγκριση:



Παρατηρούμε ότι ενώ η αρχική κυματομορφή είχε τιμές ακριβώς στα +4 Volts ή στα -4 Volts, η εξιδανικευμένη αυτή κατάσταση σταματά να υφίσταται μόλις προσθέσουμε θόρυβο AWGN.

Όταν το SNR είναι ίσο με 5dB, αυτό σημαίνει ότι η επίδραση του θορύβου είναι ισχυρότερη απ' ό,τι στην περίπτωση όπου SNR = 15 dB, κάτι που γίνεται εύκολα αντιληπτό από την μεγαλύτερη διακύμανση του σήματος για SNR = 5 dB.

Μάλιστα βλέπουμε ότι για SNR = 5dB, υπάρχουν στιγμές που το σήμα παίρνει αρνητική τιμή ακόμα και κατά τη διάρκεια μετάδοσης bit 1. Αντίστοιχα παίρνει θετικές τιμές ακόμα και κατά τη διάρκεια μετάδοσης bit 0. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα την ύπαρξη σφαλμάτων κατά την αποδιαμόρφωση, όπως θα φανεί στη συνέχεια.

Αντίθετα για SNR = 15dB, η εικόνα είναι πολύ πιο ξεκάθαρη. Πάλι υπάρχει πιθανότητα λάθους, αλλά αναμένουμε να είναι πολύ μικρότερη. Πράγματι, κάτι τέτοιο θα δειχθεί στη συνέχεια, τόσο πειραματικά όσο και θεωρητικά.

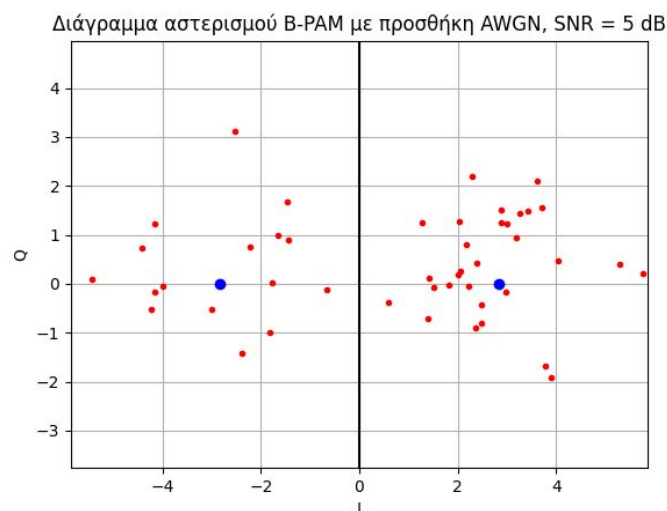
δ. Όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία, για την αναπαράσταση του θορύβου απαιτείται ένα πλήρες ορθοκανονικό σύνολο από ντετερμινιστικές συναρτήσεις. Εδώ ο θόρυβος προσομοιώνεται ως τυχαία μεταβλητή $\mathbf{Z}=\mathbf{X}+\mathbf{jY}$, με τις X και Y να είναι ανεξάρτητες και να ακολουθούν κατανομή:

$$N(\mu = 0, \sigma^2 = \frac{N_0}{2})$$

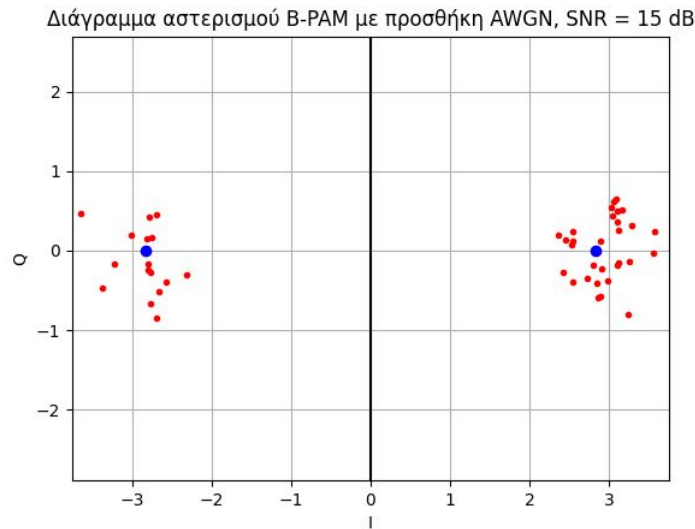
Αφού προβάλουμε τη ληφθείσα κυματομορφή (μαζί με το θόρυβο) στην ορθοκανονική βάση και ολοκληρώσουμε για τη διάρκεια του bit, δειγματοληπτούμε τα σήματα ανά T_b , όπως υπαγορεύει η δομή του δέκτη συσχέτισης.

Στο διάγραμμα αστερισμού λήψης απεικονίζουμε τα αποτελέσματα της διαδικασίας αυτής.

Για **SNR = 5dB**:



Για **SNR = 15dB**:



Όπως έχει αποδειχθεί στη θεωρία, στη διαμόρφωση B-PAM το κριτήριο μέγιστου λόγου πιθανοφάνειας ισοδυναμεί με το κριτήριο ελάχιστης απόστασης (τονίζεται ότι αυτή η ισοδυναμία δεν ισχύει πάντοτε, και επίσης ότι είναι απαραίτητη η υπόθεση **P1=P2**, δηλαδή ότι οι πιθανότητες εμφάνισης bit 1 και bit 0 είναι ίσες). Επομένως το σύνορο απόφασης είναι ο κατακόρυφος άξονας $x=0$.

Ε. Τέλος, με βάση την παραπάνω ανάλυση, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε και πειραματικά την πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου (BER-BEP) συναρτήσει του SNR, για τιμές από 0-15 dB με βήμα 1 dB ως εξής:

- Παράγουμε μία τυχαία ακολουθία από N bits (Για παράδειγμα $N = 100.000$, γενικά θέλουμε να είναι μεγάλο ώστε να έχουμε όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ταύτιση με τα θεωρητικά αποτελέσματα, λόγω του Νόμου των Μεγάλων Αριθμών)
- Διαμορφώνουμε την ακολουθία κατά B-PAM
- Προσθέτουμε AWGN, διαφορετικού SNR κάθε φορά ($SNR = 0, \dots, 15$ dB)
- Αποδιαμορφώνουμε το προκύπτον σήμα και συγκρίνουμε την αρχική ακολουθία (αυτή που εκπέμφθηκε) με την τελική (αυτή που ελήφθη)
- Διαιρούμε τον αριθμό των λαθών με τον συνολικό αριθμό των bits. Το αποτέλεσμα αυτής της διαίρεσης είναι η πειραματική προσέγγιση του BER

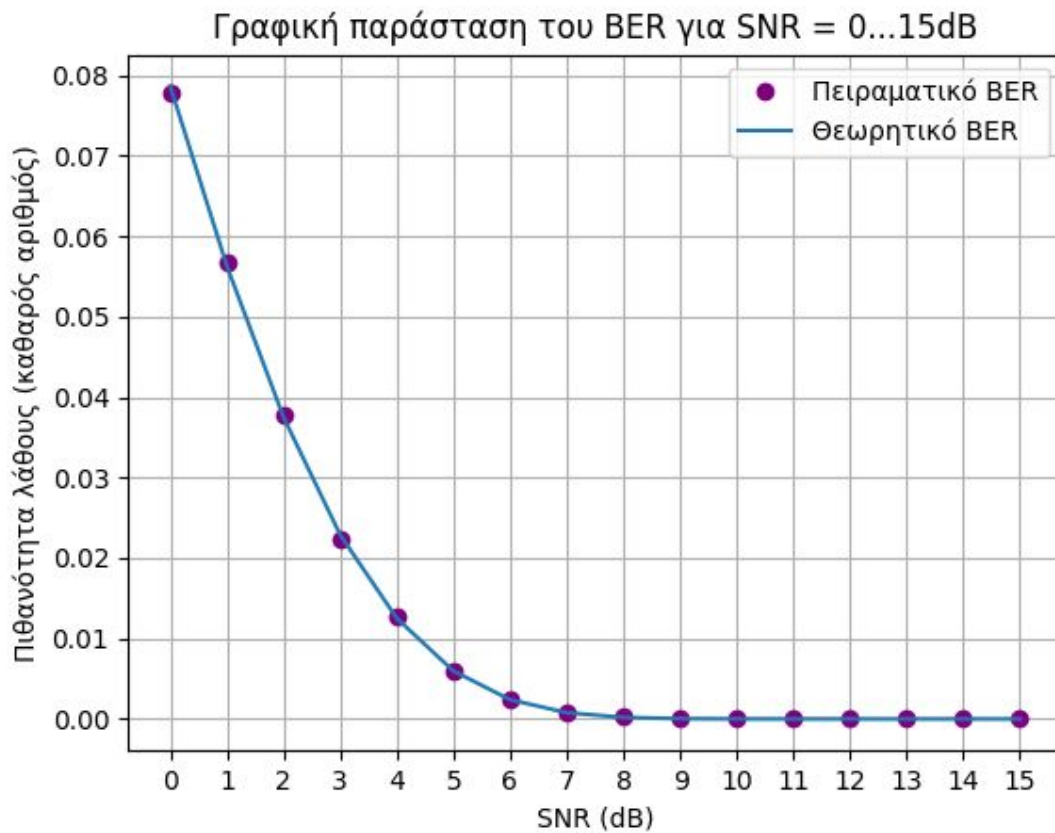
Όσον αφορά το θεωρητικό BER της B-PAM, αυτό γνωρίζουμε ότι είναι ίσο με:

$$Q\left(\frac{\text{distance between signals}}{2 \cdot \text{Noise RMS Value}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

όπου:

$$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Έτσι προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα:



Παρατηρούμε ότι οι πειραματικές τιμές σχεδόν ταυτίζονται με τις θεωρητικές.

Ερώτημα 4ο

Αρχικά διαμορφώνουμε την ακολουθία 46 bits του 3ου ερωτήματος κατά $(\pi/4)$ QPSK με σύμβολα πλάτους 4 Volts. Για τις κυματομορφές της διαμόρφωσης QPSK ισχύει:

$$s0 = V \cos(2\pi ft)$$

$$s1 = V \sin(2\pi ft)$$

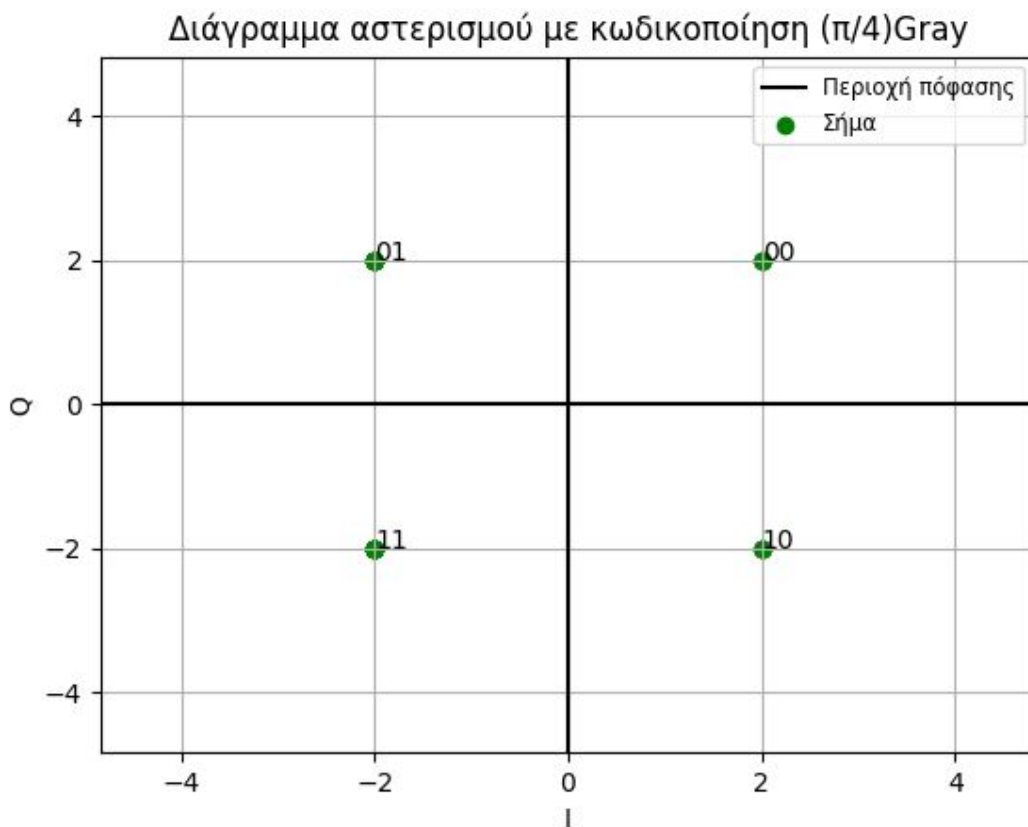
$$s2 = -V \cos(2\pi ft)$$

$$s3 = -V \sin(2\pi ft)$$

Έτσι στην διαμόρφωση $(\pi/4)$ QPSK, αρκεί να στρέψουμε το διάγραμμα αστερισμού της QPSK κατά $\pi/4$ rad.

Προκύπτει ότι η απόσταση των σημείων 00,01,11,10 είναι ίση με $\sqrt{E_s}$

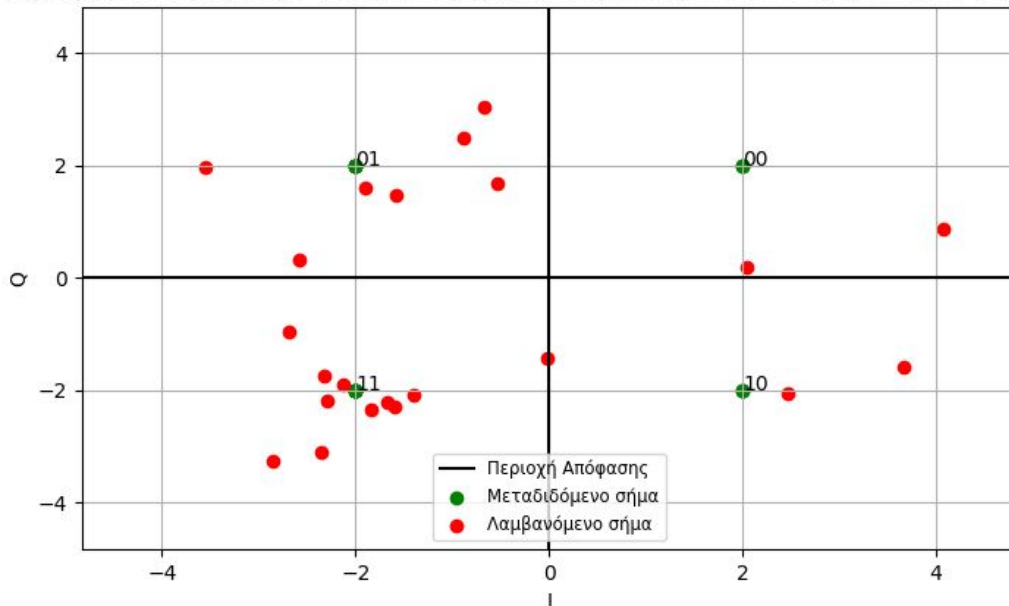
α. Το διάγραμμα αστερισμού με κωδικοποίηση $\pi/4$ Gray που προκύπτει είναι το εξής:



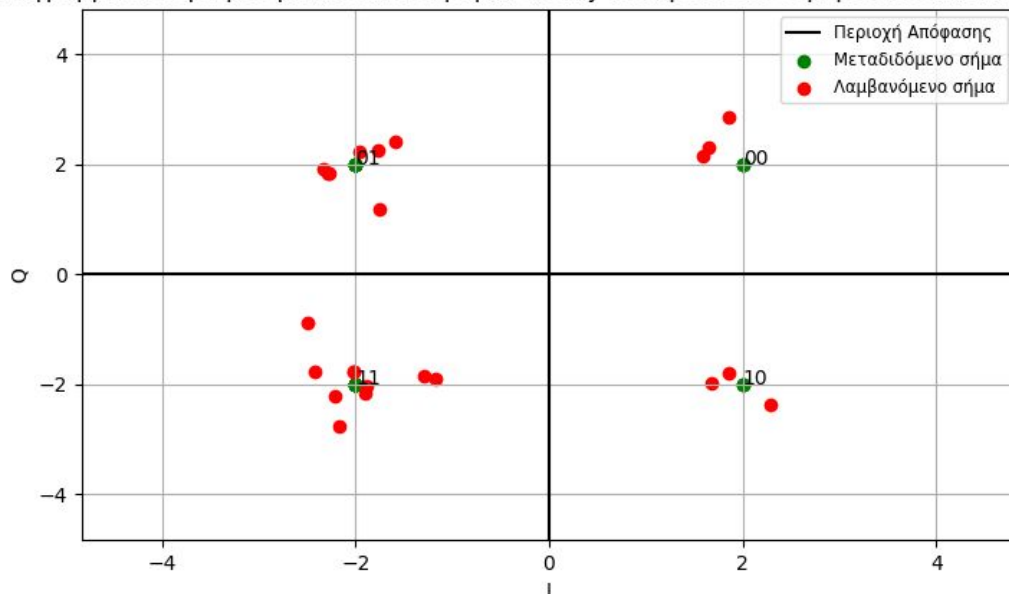
β. Στη συνέχεια παράγουμε θόρυβο AWGN όπως και στο προηγούμενο ερώτημα, και τον προσθέτουμε στο σήμα για δύο τιμές $SNR = 5$ dB και $SNR = 15$ dB αντίστοιχα.

Τα διαγράμματα αστερισμού λήψης που προκύπτουν είναι τα εξής: (κάθε κουκκίδα αντιστοιχεί σε ένα σύμβολο, κι έτσι έχουμε 23 κουκκίδες αντί για 46 που είχαμε στο 3ο ερώτημα)

Διάγραμμα αστερισμού με κωδικοποίηση (π/4)Gray και πρόσθετο θόρυβο AWGN (SNR=5dB)



Διάγραμμα αστερισμού με κωδικοποίηση (π/4)Gray και πρόσθετο θόρυβο AWGN (SNR=15dB)



Στην διαμόρφωση QPSK, και για $P_1=P_2=P_3=P_4$, ξέρουμε από την θεωρία ότι το κριτήριο μέγιστου λόγου πιθανότητας ισοδυναμεί με το κριτήριο ελάχιστης απόστασης (τονίζεται ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει γενικά). Επομένως τα σύνορα απόφασης είναι ο οριζόντιος και ο κατακόρυφος άξονας (αφού μιλάμε για π/4-QPSK).

Παρατηρούμε ότι για $\text{SNR} = 14\text{dB}$ ο αστερισμός λήψης είναι περισσότερο συγκεντρωμένος γύρω από τις θέσεις των συμβόλων εκπομπής, και άρα η πιθανότητα λάθους είναι λογικό να είναι μικρότερη. Κάτι τέτοιο θα θεμελιωθεί και στη συνέχεια, πειραματικά και θεωρητικά.

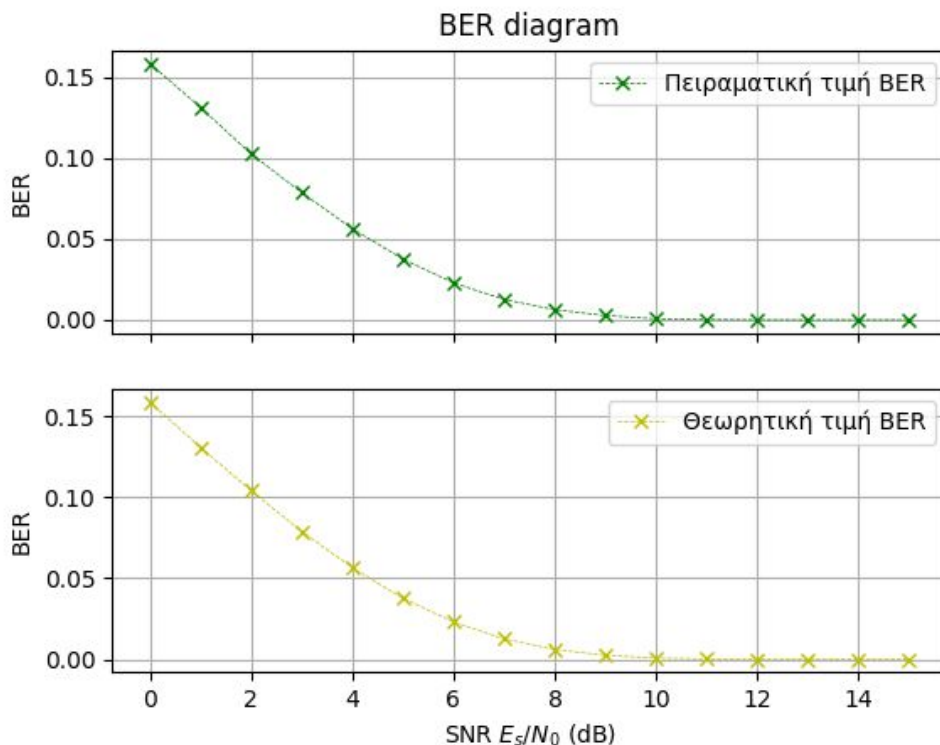
γ. Όπως και στο 3ο ερώτημα για να βρούμε το BER της QPSK:

- Παράγουμε μία τυχαία ακολουθία από N bits (Για παράδειγμα $N = 100.000$, γενικά θέλουμε να είναι μεγάλο ώστε να έχουμε όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ταύτιση με τα θεωρητικά αποτελέσματα, λόγω του Νόμου των Μεγάλων Αριθμών)
- Διαμορφώνουμε την ακολουθία κατά QPSK
- Προσθέτουμε AWGN, διαφορετικού SNR κάθε φορά ($\text{SNR} = 0, \dots, 15 \text{ dB}$)
- Αποδιαμορφώνουμε το προκύπτον σήμα και συγκρίνουμε την αρχική ακολουθία (αυτή που εκπέμφθηκε) με την τελική (αυτή που ελήφθη)
- Διαιρούμε τον αριθμό των λαθών με τον συνολικό αριθμό των bits. Το αποτέλεσμα αυτής της διαίρεσης είναι η πειραματική προσέγγιση του BER

Όσον αφορά το θεωρητικό BER της QPSK, αυτό γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι είναι ίσο με:

$$Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

Έτσι προκύπτει:



Παρατηρούμε ότι το πειραματικό διάγραμμα σχεδόν ταυτίζεται με το θεωρητικό.

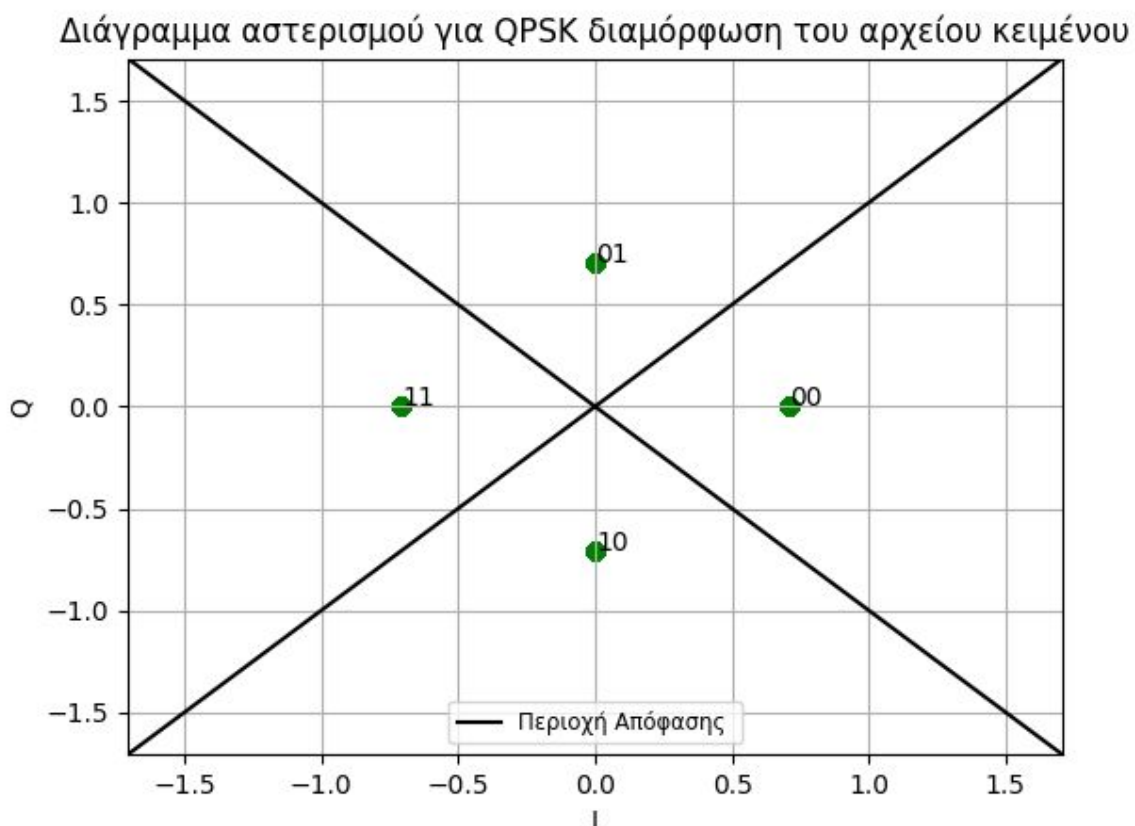
Στο 3ο ερώτημα θεωρήσαμε ως SNR το E_b/N_0 (για την BPAM), ενώ στο 4ο ερώτημα θεωρήσαμε ως SNR το E_s/N_0 . Έτσι, για $SNR = 0, \dots, 15$ οι θεωρητικές πιθανότητες διαφέρουν, αφού το όρισμα της συνάρτησης Q έχει έναν παράγοντα $\sqrt{2}$ στην πρώτη περίπτωση (3ο ερώτημα), ενώ στην δεύτερη (4ο ερώτημα) όχι. Η Q είναι ραγδαία φθίνουσα συνάρτηση, και άρα η πιθανότητα λάθους είναι μικρότερη στην BPAM, αφού το όρισμα της Q είναι μεγαλύτερο κατά $\sqrt{2}$ σε σχέση με την QPSK. Αυτό φαίνεται και πειραματικά, αφού η πιθανότητα λάθους στην BPAM κυμαίνεται από 0-0.08, ενώ στην QPSK από 0-0.16. Αντίστοιχα ισχύουν και για την BPSK, επομένως η πιθανότητα λάθους για την ίδια ενέργεια bit είναι μικρότερη στην BPSK απ' ό,τι στην QPSK.

δ. Στα πλαίσια αυτού του υποερωτήματος θα χρησιμοποιηθεί το αρχείο κειμένου **shannon_odd.txt** (αφού αριθμός μητρώου = el18175, $1+7+5 = 13$ περιττός αριθμός)

(i) Διαβάζουμε το αρχείο κειμένου μετατρέποντας την κωδικοσειρά ASCII σε bits.

(ii) Κβαντίζουμε το σήμα χρησιμοποιώντας mid-riser κβαντιστή 8-bits.

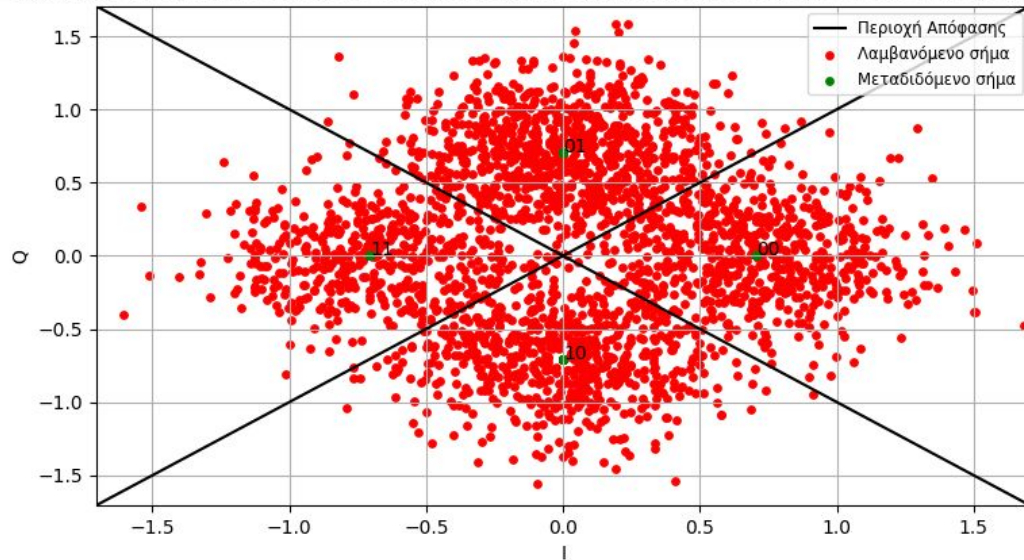
(iii) Διαμορφώνουμε το κβαντισμένο σήμα κατά QPSK θεωρώντας απεικόνιση με κωδικοποίηση Gray και σύμβολα πλάτους 1 Volt. Το διάγραμμα αστερισμού για την QPSK διαμόρφωση που προκύπτει είναι το εξής:



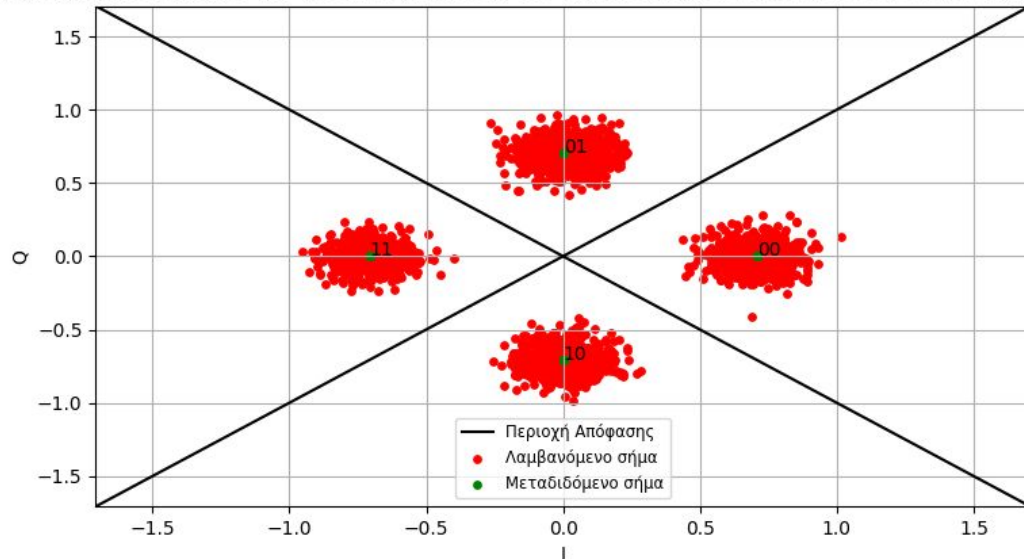
(iv) Παράγουμε θόρυβο AWGN όπως στο προηγούμενο ερώτημα και τον προσθέτουμε στο διαμορφωμένο κατά QPSK σήμα, για δύο τιμές $SNR = E_s/N_0 = 5$ dB και $SNR = 15$ dB.

(v) Τα διαγράμματα αστερισμού λήψης που προκύπτουν είναι τα εξής, για 5 dB και 15 dB αντίστοιχα:

Διάγραμμα αστερισμού για QPSK διαμόρφωση του αρχείου κειμένου με πρόσθετο θόρυβο AWGN 5dB



Διάγραμμα αστερισμού για QPSK διαμόρφωση του αρχείου κειμένου με πρόσθετο θόρυβο AWGN 15dB



(vi) Για την πειραματική πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου συγκρίνουμε την εκμπεμπόμενη με την ληφθείσα ακολουθία και διαιρούμε τον συνολικό αριθμό λαθών με το μήκος της ακολουθίας σε bits.

Για την θεωρητική πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου στην QPSK, γνωρίζουμε ότι είναι ίση με

$$Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

Τελικά έχουμε:

Πειραματική τιμή BER με SNR=5dB: 0.0423861852433281

Θεωρητική τιμή BER με SNR=5dB: 0.03767898814746339

Πειραματική τιμή BER με SNR=15dB: 0.0

Θεωρητική τιμή BER με SNR=15dB: 9.361039990685109e-09

Παρατηρούμε ότι η πειραματική πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου είναι πολύ κοντά στην θεωρητική.

(vii) Τελικά, αφού έχουμε αποδιαμορφώσει τα σήματα στο υποερώτημα (v), μπορούμε να ανακατασκευάσουμε το αρχείο κειμένου για τις δύο περιπτώσεις SNR. Μετατρέπουμε την binary ακολουθία σε κείμενο με κωδικοποίηση ASCII. Τα ανακατασκευασμένα κείμενα που προκύπτουν είναι τα εξής:

Ανακατασκευασμένο αρχείο κειμένου με 5dB θόρυβο AWGN:

Gæ can ühiNk flä discbetesour#e aS\$ge~era<ing`t`e m\$ssage,\$sy}b/l by(s9obgm*
ô`will #hooose\$SuCcressve(symbols accoðfkNg to"bepvqil probabiliédôidb te0eodyng.`in
ggnerad,oo pre#edAno cikices\$q\$ vell as\$the pqvtiã4lar sy=bos in q}ðs|io..A phywical
w]stem, r a matjeiAtiral model!if a(qystem which prgfebe3 sUch\$q swUuencu ~f {yobolw
ggvårned\$by a"sut og pbkfabilljie3, hs0km~un as a qtoAiistic rroces{. We ma}\$cn.sydeb á
d@wcrâtq qnqrce, txâRefore, to be rePpesented fy a r|oc(astie proce3s.\$COnverSely, any
stociastik`process w`ibx proluces a î!scret d smyuã~cg of symbol{ cxoce. vrom a"fi.ite set
ma}(be"coNsidered a0diqc2etm\$sowrcu.

Ανακατασκευασμένο αρχείο κειμένου με 15dB θόρυβο AWGN:

We can think of a discrete source as generating the message, symbol by symbol. It will choose successive symbols according to certain probabilities depending, in general, on preceding choices as well as the particular symbols in question. A physical system, or a mathematical model of a system which produces such a sequence of symbols governed by a set of probabilities, is known as a stochastic process. We may consider a discrete source, therefore, to be represented by a stochastic process. Conversely, any stochastic process which produces a discrete sequence of symbols chosen from a finite set may be considered a discrete source.

Παρατηρούμε ότι το ανακατασκευασμένο κείμενο διαφέρει πολύ από το αρχικό στην περίπτωση των 5dB. Μπορούμε ακόμα να βρούμε κάποιες λέξεις που έχουν αλλάξει σε ένα γράμμα, ή σε κανένα, όμως οι περισσότερες λέξεις έχουν καταστραφεί.

Αντίθετα, για 15 dB δεν έχει γίνει κανένα λάθος στην ανακατασκευή.

Σημείωση: Παρατηρήσαμε ότι το ανακατασκευασμένο αρχείο κειμένου για θόρυβο 5dB περιείχε non-ASCII χαρακτήρες, κάτι που δημιουργούσε πρόβλημα στην εκτέλεση. Γι' αυτό τελικά προτιμήσαμε utf-8 encoding (του οποίου το ASCII encoding αποτελεί υποσύνολο).

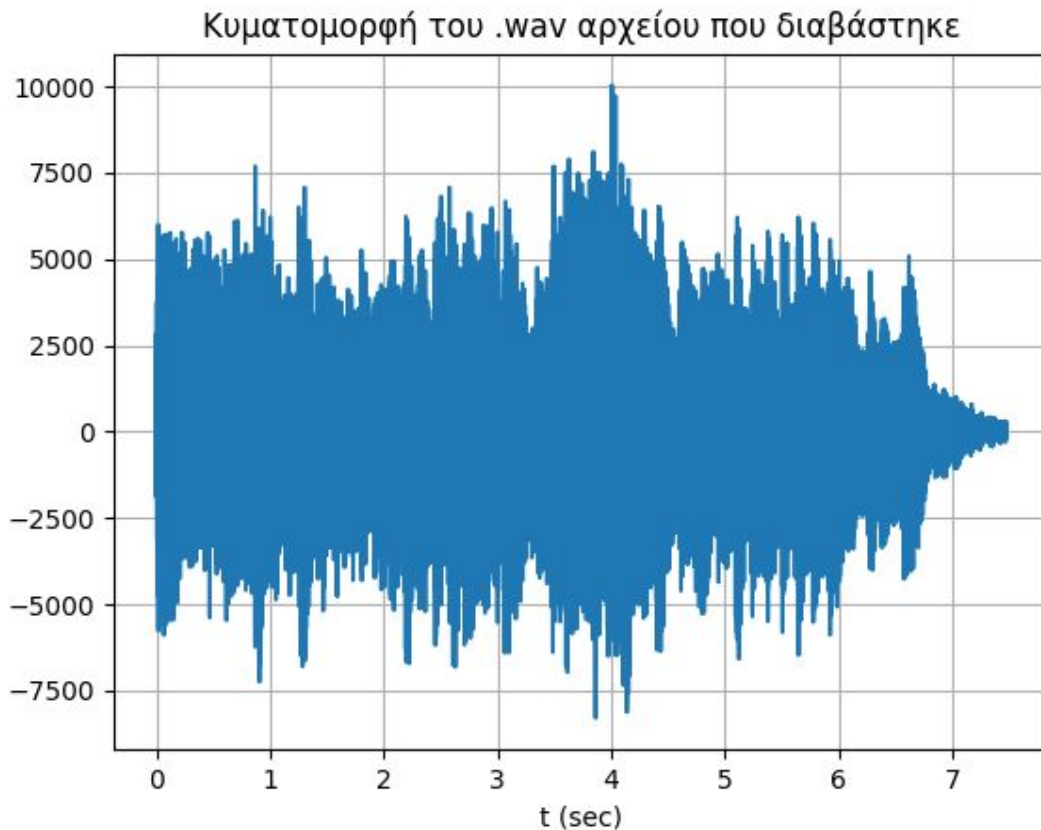
Έτσι, όταν οι χαρακτήρες είναι σωστοί κατά την αποκωδικοποίηση δεν αλλάζει κάτι (γιατί εξακολουθούν να είναι ASCII χαρακτήρες), ενώ όταν έχουμε σφάλματα αυτά απλά απεικονίζονται στα utf-8 ισοδύναμά τους.

Επίσης, ίσως να χρειαστεί να ανοιχθούν τα ανακατασκευασμένα αρχεία κειμένου συγκεκριμένα με utf-8 encoding ώστε να είναι ορατό το αποτέλεσμα. Σε κάθε περίπτωση, τα αρχεία κειμένου ταυτίζονται με αυτά της αναφοράς.

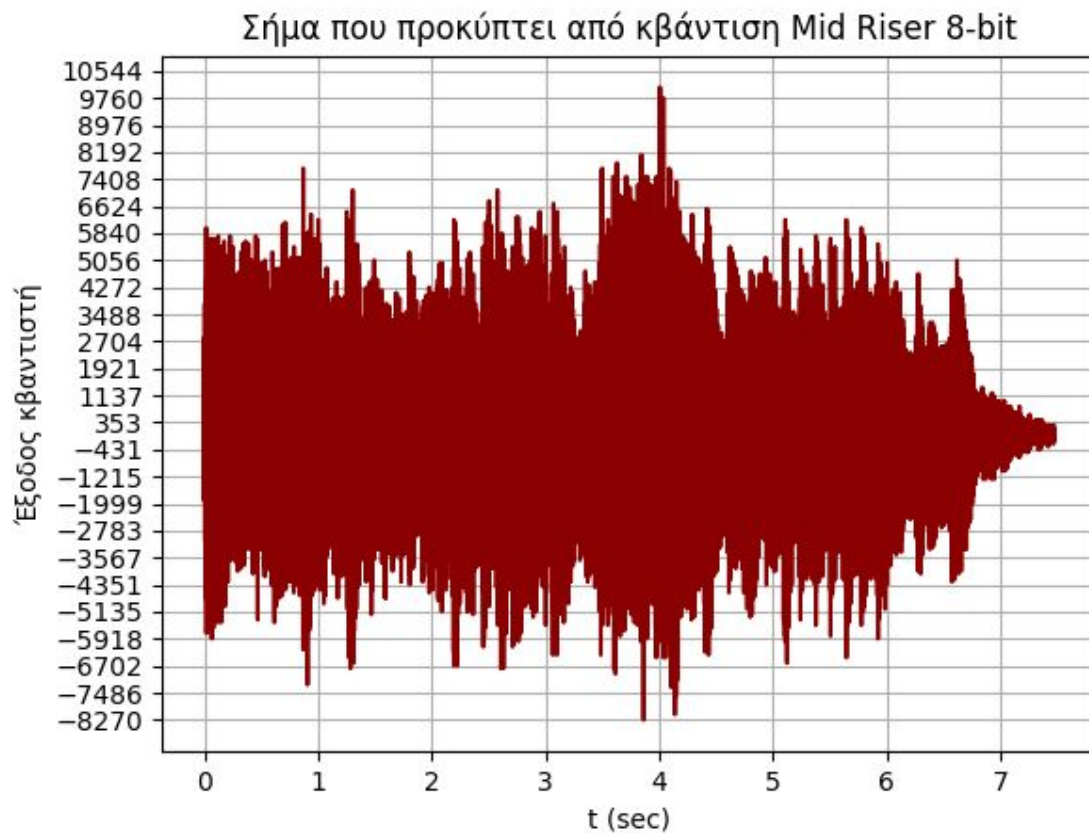
Ερώτημα 5ο

Στα πλαίσια του ερωτήματος αυτού θα χρησιμοποιηθεί αρχείο .wav signed 16-bit PCM Mono 44100 Hz. Για αριθμό μητρώου el18175 έχουμε $1+7+5=13$ (περιττός αριθμός), άρα χρησιμοποιούμε το αρχείο **soundfile1_lab2.wav**.

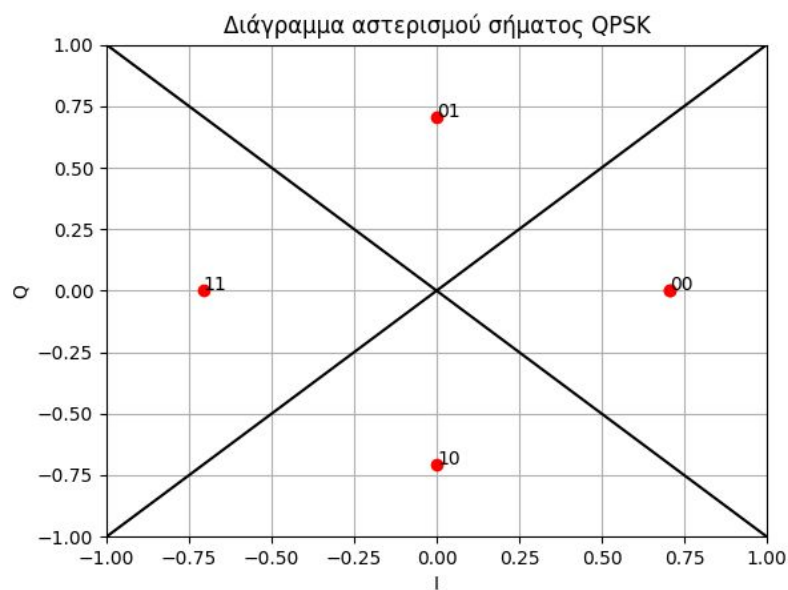
α. Διαβάζουμε το αρχείο .wav χρησιμοποιώντας την εντολή `scipy.io.wavfile.read()` της python. Η κυματομορφή του σήματος που διαβάστηκε φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:



β. Κβαντίζουμε το σήμα χρησιμοποιώντας ομοιόμορφο κβαντιστή (mid-riser) 8 bits. Έτσι θα δημιουργηθούν $2^8=256$ στάθμες κβάντισης. Στον κατακόρυφο άξονα του παρακάτω διαγράμματος φαίνονται μόνο ένα μικρό ποσοστό από αυτές χάριν ευκρίνειας.



γ. Διαμορφώνουμε το κβαντισμένο σήμα χρησιμοποιώντας διαμόρφωση QPSK θεωρώντας απεικόνιση με κωδικοποίηση Gray και σύμβολα πλάτους 1 Volt. Το διάγραμμα αστερισμού της QPSK διαμόρφωσης για το σήμα είναι το εξής:

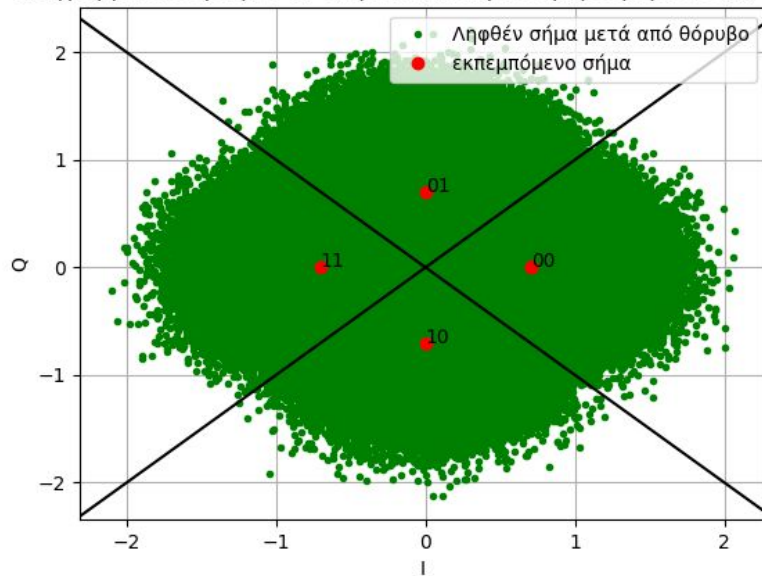


δ. Στη συνέχεια παράγουμε θόρυβο AWGN όπως έχουμε ξανακάνει στα προηγούμενα ερωτήματα και τον προσθέτουμε στο διαμορφωμένο σήμα, για $SNR = 4 \text{ dB}$ και $SNR = 14 \text{ dB}$ αντίστοιχα. Στην άσκηση αυτή,

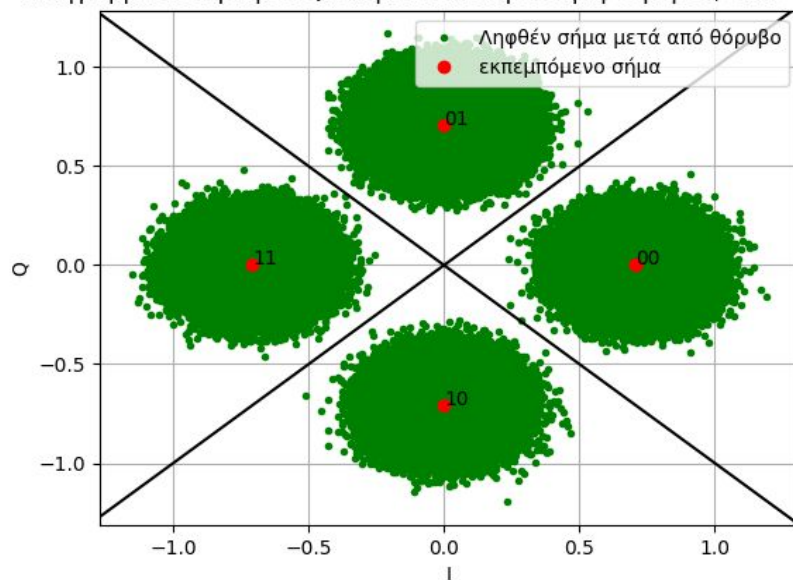
$$SNR = 10 \log_{10} \left(\frac{E_s}{N_0} \right)$$

ε. Τα διαγράμματα αστερισμού λήψης και για τις δύο περιπτώσεις είναι τα εξής:

Διάγραμμα αστερισμού QPSK μετά από προσθήκη θορύβου, $SNR = 4 \text{ dB}$



Διάγραμμα αστερισμού QPSK μετά από προσθήκη θορύβου, $SNR = 14 \text{ dB}$



Στη διαμόρφωση QPSK, και για **P1=P2=P3=P4**, ξέρουμε από τη θεωρία ότι το κριτήριο μέγιστου λόγου πιθανότητας ισοδυναμεί με το κριτήριο ελάχιστης απόστασης (τονίζεται ότι αυτή η ισοδυναμία δεν ισχύει πάντοτε). Επομένως τα σύνορα απόφασης θα είναι οι άξονες **y=x** και **y=-x** (με έντονη μαύρη γραμμή στα διαγράμματα). Παρατηρούμε ότι για SNR = 15dB είναι πολύ πιο εύκολο να αποφασίσουμε με απλή επισκόπηση ποιο σύμβολο εστάλη κάθε φορά, καθώς λίγες πράσινες κουκκίδες (σύμβολα που ελήφθησαν) βρίσκονται κοντά στα σύνορα απόφασης. Αντίθετα στην περίπτωση SNR = 4dB, πολύ μεγάλος αριθμός από ληφθέντα σύμβολα βρίσκεται πολύ κοντά στο σύνορο απόφασης, κάτι που διαισθητικά σημαίνει και μεγαλύτερη πιθανότητα λάθους κατά την αποδιαμόρφωση. Αυτά τα εποπτικά αποτελέσματα θα αποδειχθούν ευθύς αμέσως τόσο πειραματικά, όσο και θεωρητικά.

στ. Για την πειραματική πιθανότητα λάθους βρίσκουμε τον αριθμό των λάθος ψηφίων και έπειτα διαιρούμε με τον συνολικό αριθμό των bits. Για την θεωρητική πιθανότητα λάθους, ξέρουμε από την θεωρία ότι είναι ίση με

$$Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

Τελικά έχουμε:

Πειραματικό BER με SNR=4dB : 0.056345681560837

Θεωρητικό BER με SNR=4dB : 0.05649530174936167

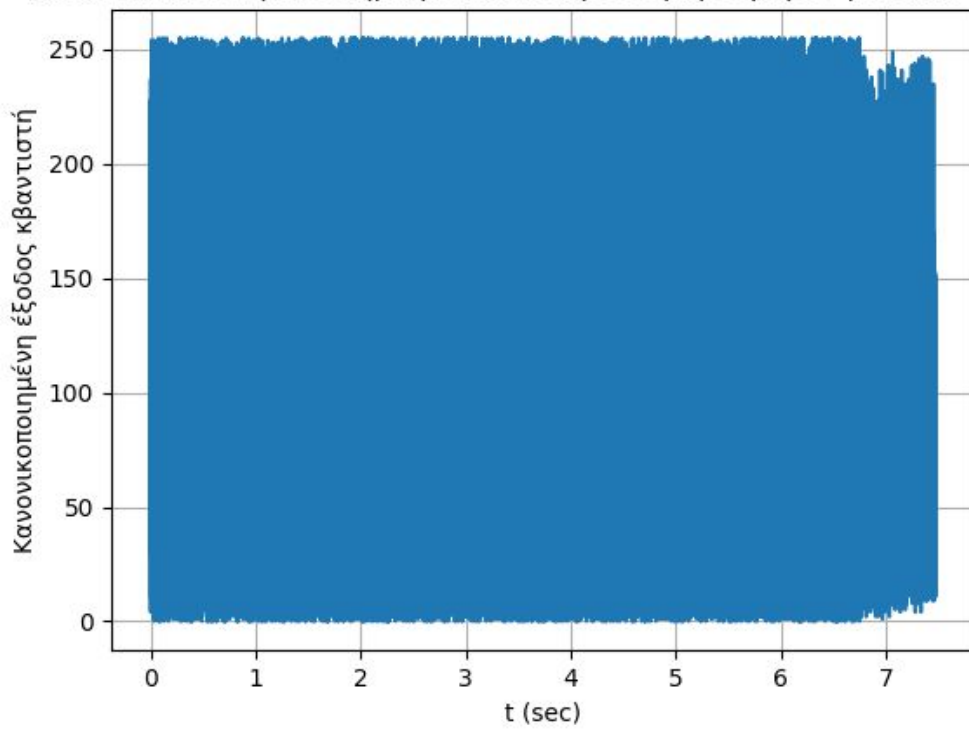
Πειραματικό BER με SNR=14dB : 3.794628627285505e-07

Θεωρητικό BER με SNR=14dB : 2.6951481173667145e-07

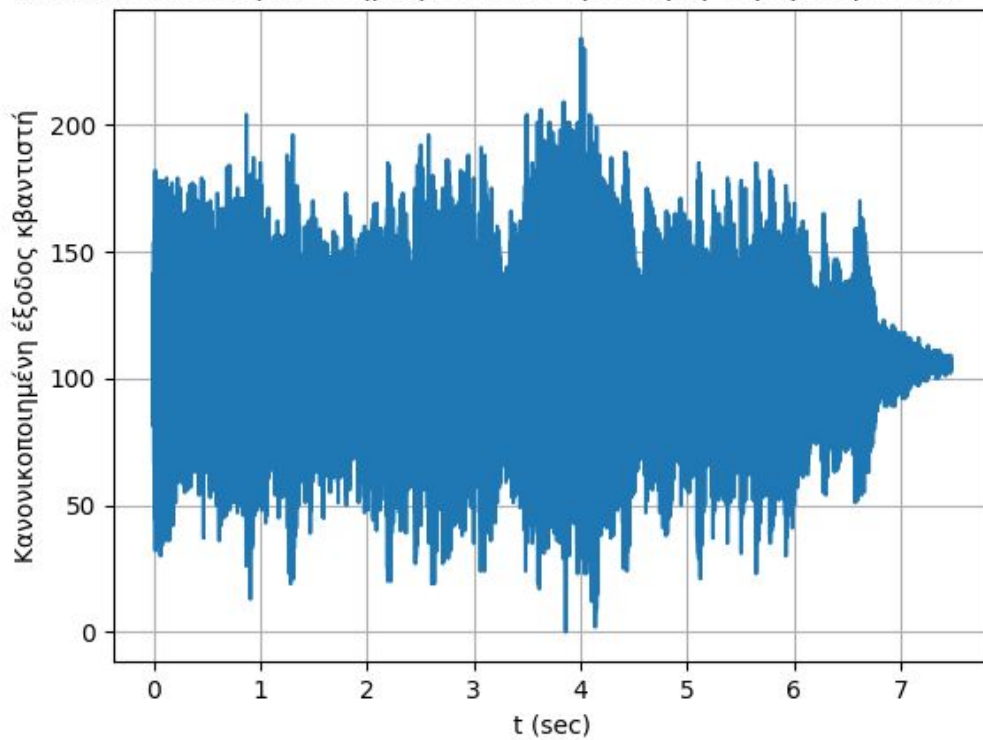
Παρατηρούμε ότι τα πειραματικά αποτελέσματα συμφωνούν κατά πολύ με τα θεωρητικά.

ζ. Τέλος, έχοντας αποδιαμορφώσει το σήμα στο υποερώτημα (ε), μπορούμε να το ανακατασκευάσουμε, για SNR = 4 dB και SNR = 14 dB αντίστοιχα. Αντιστοιχίζουμε κάθε οκτάδα από bits σε μία από τις 256 στάθμες κβάντισης (με βάση την κωδικοποίηση Gray που ορίσαμε προηγουμένως). Επομένως, στον κατακόρυφο άξονα οι τιμές είναι κανονικοποιημένες (0-255). Τα ανακατασκευασμένα σήματα είναι τα ακόλουθα:

Ανακατασκευασμένο σήμα μετά από προσθήκη θορύβου με $\text{SNR} = 4 \text{ dB}$



Ανακατασκευασμένο σήμα μετά από προσθήκη θορύβου με $\text{SNR} = 14 \text{ dB}$



Παρατηρούμε ότι για $SNR=4dB$, το σχήμα της κυματομορφής του ανακατασκευασμένου σήματος είναι κατά πολύ διαφοροποιημένο από το αρχικό, ενώ για $SNR = 14dB$ η διαφορά δεν φαίνεται με απλή επισκόπηση. Και στις δύο περιπτώσεις αναμένουμε να υπάρχει θόρυβος, ο οποίος θα είναι σαφώς πολύ μεγαλύτερος στην περίπτωση των 4dB.

Με χρήση της εντολής `scipy.io.wavfile.write()` γράφουμε σε .wav αρχεία τα δύο ανακατασκευασμένα σήματα, σε μορφή unsigned 8-bit PCM Mono 44100 Hz.

Ακούγοντας και τα δύο αρχεία, παρατηρούμε ότι στην περίπτωση των 4dB η ποιότητα του ήχου έχει γίνει πολύ κακή, καθώς ο θόρυβος ακούγεται πολύ ισχυρότερα από την αρχική μελωδία.

Αντίθετα, στην περίπτωση των 14dB ο θόρυβος είναι πολύ δυσκολότερα αντιληπτός. Η αρχική μελωδία επικρατεί.

Και στις δύο περιπτώσεις, εκτός από τα σφάλματα κατά την αποδιαμόρφωση, η ποιότητα του ήχου έχει υπονομευθεί επειδή χρησιμοποιήσαμε κβαντιστή 8-bit και στη συνέχεια γράψαμε τα αρχεία σε μορφή 8-bit unsigned Mono, ενώ αρχικά τα αρχεία ήταν σε μορφή 16-bit signed. Αυτό σημαίνει ότι από τις 2^{16} στάθμες του αρχικού αρχείου, το ανακατασκευασμένο αρχείο έχει 2^8 στάθμες, και έτσι ακούγεται ένας πολύ χαμηλός θόρυβος, ο οποίος δεν οφείλεται στα σφάλματα. Στην περίπτωση 14 dB αυτή είναι και η κύρια αιτία του θορύβου, καθώς υπάρχουν απειροελάχιστα σφάλματα κατά την αποδιαμόρφωση. Από την άλλη, στην περίπτωση 4dB ο θόρυβος αυτός είναι πολύ ασθενής σε σχέση με τον θόρυβο που προέρχεται από τα σφάλματα στην αποδιαμόρφωση.