Выберем базис гауссовых волновых пакетов, центрированных в фазовом пространстве в точках $(a,0),\ (-a,0),\ (0,a),\ (0,-a)$, где a — варьируемый параметр. Данные функции имеют вид:

$$\psi_1(x|a) = e^{-0.5\omega(x-a)^2}$$

$$\psi_2(x|a) = e^{-0.5\omega(x+a)^2}$$

$$\psi_3(x|a) = e^{-0.5\omega x^2+iax}$$

$$\psi_4(x|a) = e^{-0.5\omega x^2-iax}$$

Изучим, как выглядят вариации функций ψ_i. Для этого запишем выражения для $\psi_i(x|a+\delta a)$:

$$\psi_1(x|a+\delta a) = e^{-0.5\omega(x-a-\delta a)^2} = e^{-0.5\omega(x-a)^2+\omega(x-a)\delta a} =$$

$$= e^{-0.5\omega(x-a)^2}e^{\omega(x-a)\delta a} = \psi_1(1+\omega(x-a)\delta a) = \psi_1 + \omega(x-a)\psi_1\delta a$$

Получили, что первая вариация функции ψ_1 равна $\omega(x-a)\psi_1$. Аналогично, получим и значения первых вариаций остальных функций:

$$\delta\psi_2 = -\omega(x+a)\psi_2\delta a$$

$$\delta\psi_3 = ix\psi_3\delta a$$

$$\delta\psi_4 = -ix\psi_4\delta a$$

В общем виде:

$$\psi_i = e^{f_i},\ \delta\psi_i = \frac{df_i}{da}\psi_i\delta a$$

Запишем стационарное уравнение Шредингера:

$$\hat{H}\tilde{\psi}_m = E_m\tilde{\psi}_m$$

Пусть собственные функции $\tilde{\psi}_m$ могут быть разложены по выбранному базису следующим образом:

$$\tilde{\psi}_m = \sum_{i=1}^{4}\psi_i D_{im}$$

Подставим разложение в стационарную задачу, умножим слева на ψ_j^* и проинтегрируем. Получим:

$$\sum_{i=1}^{4} D_{im}\langle\psi_j|\hat{H}|\psi_i\rangle = \sum_{i=1}^{4} E_m D_{im}\langle\psi_j|\psi_i\rangle$$

Изучим поведение решения при замене параметра a на $a + \delta a$ в базисных функциях:

$$\sum_{i=1}^{4} D_{im} \langle \psi_j + \delta\psi_j | \hat{H} | \psi_i + \delta\psi_i \rangle = \sum_{i=1}^{4} E_m D_{im} \langle \psi_j + \delta\psi_j | \psi_i + \delta\psi_i \rangle$$

$$\sum_{i=1}^{4} D_{im} \left(\langle \psi_j | \hat{H} | \psi_i \rangle + \langle \delta\psi_j | \hat{H} | \psi_i \rangle + \langle \psi_j | \hat{H} | \delta\psi_i \rangle \right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{4} E_m D_{im} \left(\langle \psi_j | \psi_i \rangle + \langle \delta\psi_j | \psi_i \rangle + \langle \psi_j | \delta\psi_i \rangle \right)$$

$$\sum_{i=1}^{4} D_{im} \left(\langle \psi_i | \hat{H} | \delta\psi_j \rangle^* + \langle \psi_j | \hat{H} | \delta\psi_i \rangle \right) = \sum_{i=1}^{4} E_m D_{im} \left(\langle \psi_i | \delta\psi_j \rangle^* + \langle \psi_j | \delta\psi_i \rangle \right)$$

$$\sum_{i=1}^{4} D_{im} \left(\langle \psi_i | \hat{H} \frac{df_j}{da} | \psi_j \rangle^* + \langle \psi_j | \hat{H} \frac{df_i}{da} | \psi_i \rangle \right) = \sum_{i=1}^{4} E_m D_{im} \left(\langle \psi_i | \frac{df_j}{da} | \psi_j \rangle^* + \langle \psi_j | \frac{df_i}{da} | \psi_i \rangle \right)$$

$$\sum_{i=1}^{4} D_{im} \left(\mathbb{A}_{ij}^* + \mathbb{A}_{ji} \right) = \sum_{i=1}^{4} E_m D_{im} \left(\mathbb{B}_{ij}^* + \mathbb{B}_{ji} \right)$$
$$\sum_{i=1}^{4} D_{im} \left(\mathbb{A}^\dagger + \mathbb{A} \right)_{ji} = \sum_{i=1}^{4} E_m D_{im} \left(\mathbb{B}^\dagger + \mathbb{B} \right)_{ji}$$
$$\left(\left(\mathbb{A}^\dagger + \mathbb{A} \right) \mathbb{D} \right)_{jm} = E_m \left(\left(\mathbb{B}^\dagger + \mathbb{B} \right) \mathbb{D} \right)_{jm}$$
$$\left(\mathbb{A}^\dagger + \mathbb{A} \right) \mathbb{D} = \mathbb{E} \left(\mathbb{B}^\dagger + \mathbb{B} \right) \mathbb{D}$$

где $\mathbb{E}$ — диагональная матрица.