**«Московский государственный технический университет
Имени Н.Э. Баумана»**

Домашнее задание по курсу «Численные методы линейной алгебры»

Вариант №14

Выполнил:
студент группы
СМ1-102
Щелканов Н.Ю.
Преподаватель:
Чередниченко А.В.

Москва, 2021 г

Оглавление

Условие задания

Дана исходная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Создать возмущенную СЛАУ, изменив элементы A(3,1) и A(1,3) в исходной матрице A на ± 0.05.

1. Решить заданную и возмущенную системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $A\vec{x} = \vec{b}$ следующими методами:

1. Методом Гаусса;

2. QR-разложением матрицы A;

3. Итерационным методом Гаусса-Зейделя;

4. Итерационным методом сопряженных градиентов;

Показать, что найдено верное решение.

2. Найти наибольшее и наименьшее собственные значения и соответствующие им собственные векторы исходной и возмущенной матриц. Показать, что найдено верное (или неверное) решение.

3. Найти SVD-разложение исходной и возмущенных матриц.

Объяснить полученные результаты.

Исходные данные:

$$A = \begin{bmatrix} 2.0000 & 1.0004 & 0.6667 & 0.5000 & 0.4004 \\ 1.0004 & 0.6667 & 0.5000 & 0.4000 & 0.3333 \\ 0.6667 & 0.5000 & 0.4000 & 0.3333 & 0.2814 \\ 0.5000 & 0.4000 & 0.3333 & 0.2857 & 0.2500 \\ 0.4004 & 0.3333 & 0.2814 & 0.2500 & 0.2222 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0.0500 \\ 0.6167 \\ 0.7333 \\ 0.7429 \\ 0.7187 \end{bmatrix}$$

Возмущенная матрица:

$$A = \begin{bmatrix} 2.0000 & 1.0000 & 0.7167 & 0.5009 & 0.4009 \\ 1.0000 & 0.6667 & 0.5000 & 0.4000 & 0.3333 \\ 0.7167 & 0.5000 & 0.4000 & 0.3333 & 0.2857 \\ 0.5009 & 0.4000 & 0.3333 & 0.2857 & 0.2500 \\ 0.4009 & 0.3333 & 0.2857 & 0.2500 & 0.2222 \end{bmatrix}$$

1. Метод Гаусса

Таблица 1. Результаты решения, получившегося в результате применения метода Гаусса

	Вектор решения	$A\vec{x}-\vec{b}$	$\left\Vert A\vec{x}-\vec{b}\right\Vert$	Число обусловленности
Невозмущенная система	$\begin{bmatrix}-0.2622\\-2.8622\\-0.8715\\7.5454\\0.6145\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0.2914\\-0.4441\\-0.1110\\0\\0\end{bmatrix}\cdot 10^{-15}$	$5.4266\cdot 10^{-15}$	$1.8803\cdot 10^{3}$
Возмущенная система	$\begin{bmatrix}-0.0853\\-3.5962\\-0.7165\\9.1302\\-0.5825\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.3192\\0.3331\\0.1110\\0.3331\\0\end{bmatrix}\cdot 10^{-15}$	$5.7972\cdot 10^{-15}$	$1.0210\cdot 10^{3}$

Найдем численную характеристику изменения вектора решения системы:

$$\Delta X = X1 - X2 = \begin{bmatrix}-0.1769\\0.7340\\-0.1550\\-1.5848\\1.1970\end{bmatrix}$$

Вывод:

1) Получено решение СЛАУ методом Гаусса для возмущенной и невозмущенной системы

2) Норма невязки как для невозмущённой, так и для возмущённой системы имеет порядок 10^{-15}, тогда как наименьший из элементов матрицы А в обоих случаях – величина порядка 10^{-1}. Такая разница в порядках элементов матрицы по сравнению с нормой невязки говорит о высокой точности полученного решения.

3) Из результатов решения СЛАУ полученных методом Гаусса для возмущенной и невозмущенной системы можно заметить, что при незначительном изменении элементов матрицы А, на выходе получаем значительное изменение вектора решения системы, порядок изменения элементов вектора решения ΔX сравним с порядком элементов вектора решений (X1, X2) Это объясняется тем, что матрица А является плохо обусловленной (показателем является число обусловленности много большее единицы)

2. Метод QR-разложения

Таблица 2. Результаты решения, получившегося в результате применения метода QR-разложения

	Вектор решения	$A\vec{x} - \vec{b}$	$\left\|A\vec{x} - \vec{b}\right\|$	Число обусловленности
Невозмущенная система	$X1 = \begin{bmatrix} -0.2622 \\ -2.8622 \\ -0.8715 \\ 7.5454 \\ 0.6145 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.6800 \\ -0.6661 \\ 0.5551 \\ 0.1110 \\ 0.1110 \end{bmatrix} \cdot 10^{-15}$	$1.1131 \cdot 10^{-15}$	$1.8803 \cdot 10^{3}$
Возмущенная система	$X2 = \begin{bmatrix} -0.0853 \\ -3.5962 \\ -0.7165 \\ 9.1302 \\ -0.5825 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.4857 \\ -0.2220 \\ 0.6661 \\ 0.3331 \\ -0.5551 \end{bmatrix} \cdot 10^{-15}$	$1.0715 \cdot 10^{-15}$	$1.0210 \cdot 10^{3}$

Найдем численную характеристику изменения вектора решения системы:

$$\Delta X = X1 - X2 = \begin{bmatrix} -0.1769 \\ 0.7340 \\ -0.1550 \\ -1.5848 \\ 1.1970 \end{bmatrix}$$

Вывод:

1) Получено решение СЛАУ методом QR-разложения

2) Норма невязки как для невозмущённой, так и для возмущённой системы имеет порядок 10^{-15}, тогда как наименьший из элементов матрицы А в обоих случаях – величина порядка 10^{-1}. Такая разница в порядках элементов матрицы по сравнению с нормой невязки говорит о высокой точности полученного решения.

3) Из результатов решения СЛАУ полученных методом QR-разложения для возмущенной и невозмущенной системы можно заметить, что при незначительном изменении элементов матрицы А, на выходе получаем значительное изменение вектора решения системы, порядок изменения элементов вектора решения ΔX сравним с порядком элементов вектора решений (X1, X2). Значения элементов вектора решения для невозмущенной системы отличается от значений элементов вектора решения для возмущенной системы на величину порядка элемента вектора решения. Это объясняется тем, что матрица А является плохо обусловленной (показателем является число обусловленности много большее единицы)

3. Итерационный метод Гаусса-Зейделя

Таблица 3. Нормы невязки для возмущенной и невозмущенной систем

Невозмущённая система	Возмущённая система
$M = \begin{bmatrix} 0 & -0.5002 & -0.3333 & -0.2500 & -0.2002 \\ 0 & 0.7506 & -0.2498 & -0.2248 & -0.1995 \\ 0 & -0.1045 & 0.8678 & -0.1355 & -0.1204 \\ 0 & -0.0535 & -0.0793 & 0.9104 & -0.1049 \\ 0 & -0.0319 & -0.0344 & -0.0649 & 0.9305 \end{bmatrix}$	$M = \begin{bmatrix} 0 & -0.5002 & -0.3584 & -0.2500 & -0.2002 \\ 0 & 0.7506 & -0.2122 & -0.2248 & -0.1995 \\ 0 & -0.0420 & 0.9074 & -0.1043 & -0.0954 \\ 0 & -0.1265 & -0.1343 & 0.8739 & -0.1340 \\ 0 & -0.0290 & -0.0340 & -0.0635 & 0.9317 \end{bmatrix}$
$\|M\| = 1{,}0125 > 1$	$\|M\| = 1{,}0415 > 1$

Для невозмущенной и возмущенной матрицы условие сходимости $\|M\| < 1$ не выполняется.

$$M = (D - E)^{-1} F$$

Ввиду того, что не выполняется условие сходимости, итерационный метод Гаусса-Зейделя не позволяет получить решение для исходных невозмущённой и возмущённой матриц.

Продемонстрируем результаты решения системы с применением метода Гаусса-Зейделя.

В результате применения метода Гаусса-Зейделя для невозмущенной и возмущенной систем получаем векторы решений:

Таблица 4. Результаты решения, получившегося в результате применения метода Гаусса-Зейделя

	Вектор решения
Невозмущенная система	$\begin{bmatrix} NaN \\ NaN \\ NaN \\ NaN \\ NaN \end{bmatrix}$
Возмущенная система	$\begin{bmatrix} NaN \\ NaN \\ NaN \\ NaN \\ NaN \end{bmatrix}$

<u>Вывод: Для</u> исходной матрицы решение методом Гаусса-Зейделя не может быть получено ввиду невыполнения условия сходимости.

Вывод:

1) Получен результат выполнения алгоритма, реализующего решение СЛАУ методом Гаусса-Зейделя

2) Ввиду того, что не выполняется условие сходимости, итерационный метод Гаусса-Зейделя не позволяет получить решение для исходных невозмущённой и возмущённой матриц

4. Итерационный метод сопряженных градиентов

Решение системы ищем с точностью $\varepsilon = 0.001$

Таблица 5. Результаты решения, получившегося в результате применения итерационного метода сопряженных градиентов

	Вектор решения	$A\vec{x} - \vec{b}$	$\left\|A\vec{x} - \vec{b}\right\|$	Число обусловленности
Невозмущенная система	$\begin{bmatrix} -0.2622 \\ -2.8622 \\ -0.8715 \\ 7.5454 \\ 0.6145 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1150 \\ 0.0667 \\ 0.0481 \\ 0.0379 \\ 0.0313 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$	$1.4965 \cdot 10^{-7}$	$1.8803 \cdot 10^{3}$
Возмущенная система	$\begin{bmatrix} -0.0853 \\ -3.5962 \\ -0.7165 \\ 9.1302 \\ -0.5825 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.2584 \\ -0.1492 \\ -0.1117 \\ -0.0849 \\ -0.0702 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7}$	$3.3708 \cdot 10^{-8}$	$1.0210 \cdot 10^{3}$

Найдем численную характеристику изменения вектора решения системы:

$$X1 - X2 = \begin{bmatrix} -0.1769 \\ 0.7340 \\ -0.1550 \\ -1.5848 \\ 1.1970 \end{bmatrix}$$

Несмотря на то, что наперед заданная точность решения была задана, как $\varepsilon = 0.001$. Точность полученного решения оказалась на несколько порядков выше.

Это происходит вследствие особенностей реализации программы алгоритма метода сопряженных градиентов Условие для возвращения результата и выхода из программы выглядит следующим образом:

```
if (A*x- b) < eps
   break
end
```

Следовательно, когда внутри цикла встречается решение, погрешность которого меньше eps, мы возвращаем результат

Мы не получаем решение того же порядка потому как для равных порядков малости погрешности решения, их мантисы могут отличаться.

Однако, следующее решение, в которое мы попадаем, имеет более высокий порядок малости и на нем срабатывает выход из цикла и возвращения результата, поэтому порядок невязки выше, чем порядок eps

При повышении наперед заданной точности до $\varepsilon = 0.000001$, точность полученного решения так же остается порядка 10^{-6}.

Вывод:

1) Получено решение СЛАУ итерационным методом сопряженных градиентов

2) Норма невязки как для невозмущённой, так и для возмущённой системы имеет порядок 10^{-7}, тогда как наименьший из элементов матрицы А в обоих случаях – величина порядка 10^{-1}. Такая разница в порядках элементов матрицы по сравнению с нормой невязки говорит о высокой точности полученного решения.

3) Из результатов решения СЛАУ полученных итерационным методом сопряженных градиентов для возмущенной и невозмущенной системы можно заметить, что при незначительном изменении элементов матрицы А, на выходе получаем значительное изменение вектора решения системы, порядок изменения элементов вектора решения сравним с порядком элементов вектора решений Это объясняется тем, что матрица А является плохо обусловленной (показателем является число обусловленности много большее единицы)

5. Нахождение наибольшего и наименьшего собственных значений, и соответствующих им собственных векторов

Наибольшее значение будем искать с помощью степенного метода, наименьшее значение будем искать с помощью обратного степенного метода. Наибольшее и наименьшее собственные значения ищем с точностью $\varepsilon = 0.0001$ (Тут была опечатка, на самом деле, решения искалось с точностью $\varepsilon = 0.0001$)

Таблица 6. Результаты решения, получившегося в результате применения метода Гаусса-Зейделя

	Наибольшее ($\varepsilon = 0.00001$)			**Наименьшее** ($\varepsilon = 0.00001$)		
	Собственное значение	Собственный вектор	Норма невязки для наибольшего собственного значения	Собственное значение	Собственный вектор	Норма невязки для наименьшего собственного значения
Невозмущенная	3.1339	$\begin{bmatrix} 0.7680 \\ 0.4459 \\ 0.3213 \\ 0.2534 \\ 0.2095 \end{bmatrix}$	$1.5049 \cdot 10^{-4}$	-0.0017	$\begin{bmatrix} 0.0115 \\ -0.1368 \\ 0.4924 \\ -0.7562 \\ 0.4086 \end{bmatrix}$	$6.5699 \cdot 10^{-5}$
Возмущенная	3.1590	$\begin{bmatrix} 0.7669 \\ 0.4424 \\ 0.3310 \\ 0.2515 \\ 0.2079 \end{bmatrix}$	$1.0696 \cdot 10^{-4}$	-0.0031	$\begin{bmatrix} -0.0695 \\ 0.0209 \\ 0.5752 \\ -0.7791 \\ 0.2386 \end{bmatrix}$	$9.8867 \cdot 10^{-5}$

Невязку определяем по формуле
$n = A \cdot x - \lambda \cdot x,$ где $A -$ исходная матрица, $x -$ собственный вектор для соответствующей матрицы, $\lambda -$ собственное значение, соответсвтующее исходной матрице

Вывод:

1) Получены с наперёд заданной точностью eps = 0,00001 (что видно по порядку нормы невязки) наибольшее и наименьшее собственные числа для исходной и возмущенной матриц, соответствующие этим собственным числам собственные вектора.

2) Значения собственных векторов и собственных значений им отвечающих для возмущённой и невозмущённой СЛАУ отличаются на порядок возмущения

Нахождение SVD-разложения

Таблица 7. Результаты, полученные в результате использования SVD-разложения

Невозмущенная система	
Матрица левых сингулярных векторов	$\begin{bmatrix} 0.7680 & -0.6020 & 0.2072 & 0.0685 & -0.0115 \\ 0.4459 & 0.2778 & -0.6713 & -0.5046 & 0.1368 \\ 0.3213 & 0.4232 & -0.2062 & 0.6578 & -0.4924 \\ 0.2534 & 0.4466 & 0.3163 & 0.2541 & 0.7562 \\ 0.2095 & 0.4265 & 0.6032 & -0.4934 & -0.4086 \end{bmatrix}$
Матрица с сингулярными числами	$\begin{bmatrix} 3.1339 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.4151 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0237 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0036 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0017 \end{bmatrix}$
Матрица правых сингулярных векторов	$\begin{bmatrix} 0.7680 & -0.6020 & 0.2072 & 0.0685 & -0.0115 \\ 0.4459 & 0.2778 & -0.6713 & -0.5046 & 0.1368 \\ 0.3213 & 0.4232 & -0.2062 & 0.6578 & -0.4924 \\ 0.2534 & 0.4466 & 0.3163 & 0.2541 & 0.7562 \\ 0.2095 & 0.4265 & 0.6032 & -0.4934 & -0.4086 \end{bmatrix}$
Возмущенная система	
Матрица левых сингулярных векторов	$\begin{bmatrix} 0.7669 & -0.6000 & 0.2113 & 0.0481 & -0.0695 \\ 0.4424 & 0.2874 & -0.8269 & 0.1936 & 0.0209 \\ 0.3310 & 0.3666 & 0.1718 & -0.6290 & 0.7552 \\ 0.2515 & 0.4697 & 0.2205 & -0.2462 & -0.7791 \\ 0.2079 & 0.4500 & 0.4399 & 0.7099 & 0.2386 \end{bmatrix}$
Матрица с сингулярными числами	$\begin{bmatrix} 3.1590 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.3913 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0232 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0042 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0031 \end{bmatrix}$
Матрица правых сингулярных векторов	$\begin{bmatrix} 0.7669 & -0.6000 & 0.2113 & 0.0481 & -0.0695 \\ 0.4424 & 0.2874 & -0.8269 & 0.1936 & 0.0209 \\ 0.3310 & 0.3666 & 0.1718 & -0.6290 & 0.7552 \\ 0.2515 & 0.4697 & 0.2205 & -0.2462 & -0.7791 \\ 0.2079 & 0.4500 & 0.4399 & 0.7099 & 0.2386 \end{bmatrix}$

Проведем проверку полученного разложения:

A” = [U * EE * V^T]

N = A” – A – невязка

Норма невязки :

$$1.4725 \cdot 10^{-15}$$

SVD - позволяет представить любую матрицу как три фактора: U, Sigma, V^T

U - фактор ортогональная матрица, Sigma – диагональная матрица,

V^T – ортогональная матрица, физическое значение этих факторов, соответственно, – поворот, растяжение, поворот.

С помощью SVD-декомпозиции можно разложить не только квадратичную, но и любую прямоугольную матрицу [M * N]

Вывод:

1) Получено SVD-разложение матрицы A.

2) Для матриц [EE] (матрица с сингулярными числами), полученных в результате SVD-разложения для обеих: исходной и возмущенной матриц, имеем: на диагонали матрицы [EE] в порядке убывания получены собственные значения соответствующей системы.

3) Левая и правая сингулярные матрицы совпадают, так как исходная матрица симметрична ($A = A^T$)

4) Сингулярные разложения исходной и возмущенной системы различаются на порядок возмущения элементов СЛАУ.

5) Норма невязки систем имеет порядок 10^{-15}, тогда как наименьший из элементов исходной матрицы в обоих случаях – величина порядка 10^{-3}. Разница в 12 порядков и более между элементами матриц и нормой невязки свидетельствует о корректной работе алгоритма.

6. Приложение

// Метод Гаусса

```
function g = gaussMethod(A,b)
    A(:,6) = b;
    [rowsCount, colsCount ] = size(A);
    for k = 1:rowsCount
        iMax = k;
        valueMax = A(iMax, k);
        for i = k+1:rowsCount
            if A(i,k) > valueMax
                valueMax = A(i,k);
                iMax = i;
            end
        end
        if iMax ~= k
            %swapRows
            A([k, iMax],:) = A([iMax, k],:);
        end

        for i = k+1:rowsCount
            f = A(i,k)/A(k,k);

            for j = k+1:rowsCount+1
                A(i,j) = A(i,j) - A(k,j)*f;
            end
            A(i,k) = 0;
        end

    end


    x = zeros(rowsCount,1);
    for i = rowsCount:-1:1
        x(i) = A(i, rowsCount+1);
        for j = i+1:rowsCount
            x(i) = x(i) - A(i, j)*x(j);
        end
        x(i) = x(i)/A(i,i);
    end
    g = x(:,1);
end
```

```
A =

    2.0000    1.0004    0.6667    0.5000    0.4004
    1.0004    0.6667    0.5000    0.4000    0.3333
    0.6667    0.5000    0.4000    0.3333    0.2814
    0.5000    0.4000    0.3333    0.2857    0.2500
    0.4004    0.3333    0.2814    0.2500    0.2222
```

```
>> b

b =

    0.0500
    0.6167
    0.7333
    0.7429
    0.7187



>> x = gaussMethod(A,b)

x =

   -0.2622
   -2.8622
   -0.8715
    7.5454
    0.6145



>> A * x - b

ans =

   1.0e-15 *

   -0.2914
   -0.4441
   -0.1110
         0
         0


>> norm(ans)

ans =

   5.4266e-16

>> %Для возмущенной матрицы


A =

    2.0000    1.0004    0.7167    0.5000    0.4004
    1.0004    0.6667    0.5000    0.4000    0.3333
    0.7167    0.5000    0.4000    0.3333    0.2814
    0.5000    0.4000    0.3333    0.2857    0.2500
    0.4004    0.3333    0.2814    0.2500    0.2222
```

```
>> gaussMethod(A, b)

ans =

   -0.0853
   -3.5962
   -0.7165
    9.1302
   -0.5825



A =

    2.0000    1.0004    0.7167    0.5000    0.4004
    1.0004    0.6667    0.5000    0.4000    0.3333
    0.7167    0.5000    0.4000    0.3333    0.2814
    0.5000    0.4000    0.3333    0.2857    0.2500
    0.4004    0.3333    0.2814    0.2500    0.2222


>> A*x-b

ans =

   1.0e-15 *

    0.3192
    0.3331
    0.1110
    0.3331
         0


>> norm(ans)

ans =

   5.7972e-16


>> cond(A)\

ans =

   1.0210e+03
```

>> %Решение методом Qr разложения

```
function x = qrDecomposition_grahm(A,b)
   r = zeros(size(A,1),size(A,2));
   [rows,cols] = size(A);
   m = rows;
   n = cols;
   for k=1:n
      for i=1:k-1
         s=0;
         for j=1:m
            s = A(j,i)*A(j,k);
            r(i,k)=s;
         end
      end

      for i=1:k-1

         for j=1:m
            A(j,k)= A(j,k)- A(j,i)*r(i,k);
         end
      end

      s=0;

      for j=1:m
         s= s + A(j,k).^2;
         r(k,k)=s.^0.5;
      end

      for j=1:m
         A(j,k)= A(j,k)/r(k,k);
      end

   end
   q = A;
   y = linsolve(q,b);
   x = linsolve(r,y);
end
```

```
A =

   2.0000   1.0004   0.6667   0.5000   0.4004
   1.0004   0.6667   0.5000   0.4000   0.3333
   0.6667   0.5000   0.4000   0.3333   0.2814
   0.5000   0.4000   0.3333   0.2857   0.2500
   0.4004   0.3333   0.2814   0.2500   0.2222

>> b

b =

   0.0500
```

```
    0.6167
    0.7333
    0.7429
    0.7187
>> x = qrDecomposition_grahm(A,b)

x =

   -0.2622
   -2.8622
   -0.8715
    7.5454
    0.6145

>> A * x -b

ans =

   1.0e-15 *

   -0.6800
   -0.6661
    0.5551
    0.1110
    0.1110

>> norm(ans)

ans =

   1.1131e-15

>> cond(A)

ans =

   1.8803e+03
>> % для возмущенной матрицы



>> A(1,3)  = A(1,3) + 0.05;
>> A(3,1) = A(3,1) + 0.05;
>> A

A =

  Columns 1 through 3

    2.0000    1.0004    0.7167
    1.0004    0.6667    0.5000
    0.7167    0.5000    0.4000
    0.5000    0.4000    0.3333
    0.4004    0.3333    0.2814

    0.5000    0.4004
    0.4000    0.3333
    0.3333    0.2814
    0.2857    0.2500
```

```
    0.2500    0.2222



>> x = qrDecomposition_grahm(A,b)

x =

   -0.0853
   -3.5962
   -0.7165
    9.1302
   -0.5825

>> A * x - b

ans =

   1.0e-15 *

    0.4857
   -0.2220
    0.6661
    0.3331
   -0.5551

>> norm(ans)

ans =

   1.0715e-15

>> cond(A)

ans =

   1.0210e+03
```

```
>> % Метод Гаусса-Зейделя

function x = gaussSeidel(A, b)
    F = -triu(A, 1);
    E = -tril(A, -1);
    D = diag(diag(A));
    n = length(A);
    M = inv(D-E) * F;
    if (norm(M) > 1)
        disp(M);
        disp("||M|| = ");
        disp(norm(M));
        disp(" > 1  -  решение не сходится");

    end

    eps = 0.0001;
    x = [0 0 0 0 0]';
    n = length(A);

    for i = 1:100000
        for j = 1:n
            s1 = sum(A(j,:)*x);
            s2 = A(j,j)*x(j);
            x(j) = (b(j) - s1 + s2)/A(j,j);
        end

        if (max(abs(A*x- b)) < eps)
            disp(x);
            break;
        end
    end
end


>> gaussSeidel(A,b)
         0   -0.5002   -0.3333   -0.2500   -0.2002
         0    0.7506   -0.2498   -0.2248   -0.1995
         0   -0.1045    0.8678   -0.1355   -0.1204
         0   -0.0535   -0.0793    0.9104   -0.1049
         0   -0.0319   -0.0344   -0.0649    0.9305

||M|| =
    1.0125

 > 1  -  решение не сходится

ans =

   NaN
   NaN
   NaN
   NaN
```

```
   NaN


>>
>> A(1,3)  = A(1,3) + 0.05;
A(3,1) = A(3,1) + 0.05;

>> A

A =

    2.0000    1.0004    0.7167    0.5000    0.4004
    1.0004    0.6667    0.5000    0.4000    0.3333
    0.7167    0.5000    0.4000    0.3333    0.2814
    0.5000    0.4000    0.3333    0.2857    0.2500
    0.4004    0.3333    0.2814    0.2500    0.2222

>> b

b =

    0.0500
    0.6167
    0.7333
    0.7429
    0.7187

>> gaussSeidel(A,b)
         0   -0.5002   -0.3584   -0.2500   -0.2002
         0    0.7506   -0.2122   -0.2248   -0.1995
         0   -0.0420    0.9074   -0.1043   -0.0954
         0   -0.1265   -0.1343    0.8739   -0.1340
         0   -0.0290   -0.0340   -0.0635    0.9317

||M|| =
    1.0415

 > 1  -  решение не сходится

ans =

   NaN
   NaN
   NaN
   NaN
   NaN
```

```
>> % Метод сопряженных градиентов

function x = conjugateGradientMethod(A,b)
    eps = 0.001;
    x0 = [0 0 0 0 0]';
    r0 = b - A*x0;
    z0 = r0;

    r = r0;
    z = r0;
    x = x0;
    z = z0;

    for k =1:10000
        rprev = r;
        zprev = z;
        alphk = (r'*r)/((A*z)'*z);
        x = x + alphk * z;
        r = r - alphk * A*z;
        betta = (r'*r)/(rprev'*rprev);
        z = r + betta * zprev;
        if (A*x - b) < eps
           break
        end
    end


end


>> % Для невозмущенной матрицы
>> conjugateGradientMethod(A,b)

ans =

   -0.2622
   -2.8622
   -0.8715
    7.5454
    0.6145

>> A*ans -b

ans =

   1.0e-06 *

    0.1150
    0.0667
    0.0481
    0.0379
    0.0313
```

```
>> norm(ans)

ans =

   1.4965e-07

>>


>> % Для возмущенной матрицы

A =

  Columns 1 through 3

    2.0000    1.0004    0.7167
    1.0004    0.6667    0.5000
    0.7167    0.5000    0.4000
    0.5000    0.4000    0.3333
    0.4004    0.3333    0.2814

  Columns 4 through 5

    0.5000    0.4004
    0.4000    0.3333
    0.3333    0.2814
    0.2857    0.2500
    0.2500    0.2222

>> A

A =

  Columns 1 through 3

    2.0000    1.0004    0.7167
    1.0004    0.6667    0.5000
    0.7167    0.5000    0.4000
    0.5000    0.4000    0.3333
    0.4004    0.3333    0.2814

  Columns 4 through 5

    0.5000    0.4004
    0.4000    0.3333
    0.3333    0.2814
    0.2857    0.2500
    0.2500    0.2222

>> b

b =

    0.0500
    0.6167
    0.7333
    0.7429
```

```
    0.7187


>> x = conjugateGradientMethod(A,b)

x =

   -0.0853
   -3.5962
   -0.7165
    9.1302
   -0.5825

>> A * x - b

ans =

   1.0e-07 *

   -0.2584
   -0.1492
   -0.1117
   -0.0849
   -0.0702

>> norm(ans)

ans =

   3.3708e-08

>> cond(A)

ans =

   1.0210e+03
```

>> %Поиск минимального и максимального собственного значения

>> % Поиск максимальрного значения невозмущеной матрицы

```
function [lamd, v] = potencyMethod(A)
    r = [1 1 1 1 1]';
    S = 10;
    eps = 0.00001;
    while S > eps
        r = (A*r)/(norm(A*r));
        lamd = (r'*A*r)/(r'*r);
        S = norm(A*r-lamd*r);
    end
    v = r;
end
```

```
A =

  Columns 1 through 4

    2.0000    1.0004    0.6667    0.5000
    1.0004    0.6667    0.5000    0.4000
    0.6667    0.5000    0.4000    0.3333
    0.5000    0.4000    0.3333    0.2857
    0.4004    0.3333    0.2814    0.2500

  Column 5

    0.4004
    0.3333
    0.2814
    0.2500
    0.2222

>> b

b =

    0.0500
    0.6167
    0.7333
    0.7429
    0.7187

>> [V,D] = potencyMethod(A)

V =

    3.1339


D =

    0.7680
    0.4459
```

```
    0.3213
    0.2534
    0.2095


>> % Поиск минимального значения невозмущеной матрицы

>> A2 = inv(A)

A2 =

  Columns 1 through 4

    4.1132  -14.9334    6.9066   12.3061
  -14.9334   79.5905  -46.6366 -106.7342
    6.9066  -46.6366  -21.6462  268.0663
   12.3061 -106.7342  268.0663 -320.1760
   -7.6042   86.6738 -216.6819  158.6738

  Column 5

   -7.6042
   86.6738
 -216.6819
  158.6738
  -15.9217

>> A2

A2 =

  Columns 1 through 4

    4.1132  -14.9334    6.9066   12.3061
  -14.9334   79.5905  -46.6366 -106.7342
    6.9066  -46.6366  -21.6462  268.0663
   12.3061 -106.7342  268.0663 -320.1760
   -7.6042   86.6738 -216.6819  158.6738

  Column 5

   -7.6042
   86.6738
 -216.6819
  158.6738
  -15.9217

>> [V2,D2] = potencyMethod(A2)

V2 =

 -599.9733


D2 =

    0.0115
   -0.1368
    0.4924
```

```
  -0.7562
   0.4086



>> 1/V2

ans =

  -0.0017

>> [V,D] = eig(A)

V =

  Columns 1 through 4

  -0.0115    0.0685    0.2072   -0.6020
   0.1368   -0.5046   -0.6713    0.2778
  -0.4924    0.6578   -0.2062    0.4232
   0.7562    0.2541    0.3163    0.4466
  -0.4086   -0.4934    0.6032    0.4265

  Column 5

   0.7680
   0.4459
   0.3213
   0.2534
   0.2095


D =

  Columns 1 through 4

  -0.0017         0         0         0
        0    0.0036         0         0
        0         0    0.0237         0
        0         0         0    0.4151
        0         0         0         0

  Column 5

        0
        0
        0
        0
   3.1339

>> [V,D] = potencyMethod(A)

V =

   3.1339


D =
```

```
    0.7680
    0.4459
    0.3213
    0.2534
    0.2095
>> A

A =

    2.0000    1.0004    0.6667    0.5000    0.4004
    1.0004    0.6667    0.5000    0.4000    0.3333
    0.6667    0.5000    0.4000    0.3333    0.2814
    0.5000    0.4000    0.3333    0.2857    0.2500
    0.4004    0.3333    0.2814    0.2500    0.2222

>> A2 = inv(A)

A2 =

    4.1132  -14.9334    6.9066   12.3061   -7.6042
  -14.9334   79.5905  -46.6366 -106.7342   86.6738
    6.9066  -46.6366  -21.6462  268.0663 -216.6819
   12.3061 -106.7342  268.0663 -320.1760  158.6738
   -7.6042   86.6738 -216.6819  158.6738  -15.9217

>> [V2,D2] = potencyMethod(A2)

V2 =

 -599.9733


D2 =

    0.0115
   -0.1368
    0.4924
   -0.7562
    0.4086

>> 1/V2

ans =

   -0.0017

>> -D2

ans =

   -0.0115
    0.1368
   -0.4924
    0.7562
   -0.4086

>> eig(A)
```

```
ans =

  -0.0017
   0.0036
   0.0237
   0.4151
   3.1339

>> [V,D] = eig(A)

V =

  -0.0115    0.0685    0.2072   -0.6020    0.7680
   0.1368   -0.5046   -0.6713    0.2778    0.4459
  -0.4924    0.6578   -0.2062    0.4232    0.3213
   0.7562    0.2541    0.3163    0.4466    0.2534
  -0.4086   -0.4934    0.6032    0.4265    0.2095


D =

  -0.0017         0         0         0         0
        0    0.0036         0         0         0
        0         0    0.0237         0         0
        0         0         0    0.4151         0
        0         0         0         0    3.1339

>> [V2,D2] = potencyMethod(A2)

V2 =

 -599.9733


D2 =

   0.0115
  -0.1368
   0.4924
  -0.7562
   0.4086

>> -D2

ans =

  -0.0115
   0.1368
  -0.4924
   0.7562
  -0.4086

>> A

A =

   2.0000    1.0004    0.6667    0.5000    0.4004
   1.0004    0.6667    0.5000    0.4000    0.3333
   0.6667    0.5000    0.4000    0.3333    0.2814
```

```
    0.5000    0.4000    0.3333    0.2857    0.2500
    0.4004    0.3333    0.2814    0.2500    0.2222
```

```
>> % Поиск максимального значения возмущеной матрицы

A(1,3)  = A(1,3) + 0.05;
A(3,1) = A(3,1) + 0.05;
>> A

A =

    2.0000    1.0004    0.7167    0.5000    0.4004
    1.0004    0.6667    0.5000    0.4000    0.3333
    0.7167    0.5000    0.4000    0.3333    0.2814
    0.5000    0.4000    0.3333    0.2857    0.2500
    0.4004    0.3333    0.2814    0.2500    0.2222

>> [V,D] = eig(A)

V =

   -0.0695   -0.0481   -0.2113   -0.6000    0.7669
    0.0209   -0.1936    0.8269    0.2874    0.4424
    0.5752    0.6290   -0.1718    0.3666    0.3310
   -0.7791    0.2462   -0.2205    0.4697    0.2515
    0.2386   -0.7099   -0.4399    0.4500    0.2079


D =

   -0.0031         0         0         0         0
         0    0.0042         0         0         0
         0         0    0.0232         0         0
         0         0         0    0.3913         0
         0         0         0         0    3.1590

>> [V,D] = potencyMethod(A)

V =

    3.1590

D =

    0.7669
    0.4424
    0.3310
    0.2515
    0.2079



>> % Поиск минимального значения возмущеной матрицы
```

```
>> A2 = inv(A)

A2 =

    2.0237   -5.1655    6.7618  -18.9792   16.8920
   -5.1655   38.5587  -38.8213  -13.6120   15.9495
    6.7618  -38.8213  -10.6501  183.9884 -147.4729
  -18.9792  -13.6120  183.9884 -179.0002   23.0057
   16.8920   15.9495 -147.4729   23.0057  111.0168
>> [V2,D2] = potencyMethod(A2)

V2 =

 -323.2228


D2 =

   -0.0695
    0.0209
    0.5752
   -0.7791
    0.2386

>> 1/V2

ans =

   -0.0031
```

```
>> % SVD-разложение


function [U,S,V] = svdDecomposition(A)
        A(3,1)=A(3,1)+0.05;
        A(1,3)=A(1,3)+0.05;
        R=A'*A;
        [V,S,U]=eig(R);
        j=5;
        for i=1:2
                buff=U(:,i);
                U(:,i)=U(:,j);
                U(:,j)=buff;
                buff=V(:,i);
                V(:,i)=V(:,j);
                V(:,j)=buff;
                buffS=S(i,i);
                S(i,i)=S(j,j);
                S(j,j)=buffS;
                j=j-1;
        end
        S=sqrt(S);
        disp('Матрица левых сингулярных векторов')
        disp(U);
        disp('Матрица с сингулярными числами')
        disp(S);
        disp('Матрица правых сингулярных векторов')
        disp(V);

        B=U*S*V';
        %Невязка
        dis=B-A;
        %Норма невязки
        norm(dis);

end

>> svdDecomposition(A)
Матрица левых сингулярных векторов
    0.7669   -0.6000    0.2113    0.0481   -0.0695
    0.4424    0.2874   -0.8269    0.1936    0.0209
    0.3310    0.3666    0.1718   -0.6290    0.5752
    0.2515    0.4697    0.2205   -0.2462   -0.7791
    0.2079    0.4500    0.4399    0.7099    0.2386

Матрица с сингулярными числами
    3.1590         0         0         0         0
         0    0.3913         0         0         0
         0         0    0.0232         0         0
         0         0         0    0.0042         0
         0         0         0         0    0.0031

Матрица правых сингулярных векторов
    0.7669   -0.6000    0.2113    0.0481   -0.0695
    0.4424    0.2874   -0.8269    0.1936    0.0209
    0.3310    0.3666    0.1718   -0.6290    0.5752
    0.2515    0.4697    0.2205   -0.2462   -0.7791
    0.2079    0.4500    0.4399    0.7099    0.2386
```

```
ans =

    0.7669   -0.6000    0.2113    0.0481   -0.0695
    0.4424    0.2874   -0.8269    0.1936    0.0209
    0.3310    0.3666    0.1718   -0.6290    0.5752
    0.2515    0.4697    0.2205   -0.2462   -0.7791
    0.2079    0.4500    0.4399    0.7099    0.2386

>> A(1,3)  = A(1,3) + 0.05;
>> A(3,1) = A(3,1) + 0.05;
>> svdDecomposition(A)
Матрица левых сингулярных векторов
    0.7659   -0.5942    0.1724   -0.1681    0.0480
    0.4389    0.3001   -0.8364    0.1049    0.0824
    0.3404    0.3033    0.3582    0.7711   -0.2632
    0.2496    0.4918    0.1782   -0.5813   -0.5711
    0.2063    0.4722    0.3327   -0.1680    0.7717

Матрица с сингулярными числами
    3.1847         0         0         0         0
         0    0.3713         0         0         0
         0         0    0.0286         0         0
         0         0         0    0.0117         0
         0         0         0         0    0.0017

Матрица правых сингулярных векторов
    0.7659   -0.5942    0.1724   -0.1681    0.0480
    0.4389    0.3001   -0.8364    0.1049    0.0824
    0.3404    0.3033    0.3582    0.7711   -0.2632
    0.2496    0.4918    0.1782   -0.5813   -0.5711
    0.2063    0.4722    0.3327   -0.1680    0.7717


ans =

    0.7659   -0.5942    0.1724   -0.1681    0.0480
    0.4389    0.3001   -0.8364    0.1049    0.0824
    0.3404    0.3033    0.3582    0.7711   -0.2632
    0.2496    0.4918    0.1782   -0.5813   -0.5711
    0.2063    0.4722    0.3327   -0.1680    0.7717
```