પ્રકરણ 4

સમતલમાં ગતિ

4.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

વિદ્યાર્થીમિત્રો, આપણે આગળ સુરેખપથ પર (એક પરિમાણમાં) પદાર્થની ગતિના વર્ણન માટે જરૂરી ભૌતિક રાશિઓ, સ્થાનાંતર, વેગ અને પ્રવેગ વિશે શીખ્યા. આપણે જોયું કે એક પરિમાણમાં માત્ર બે જ દિશાઓની શક્યતા હોવાથી (+) (ધન) અને (–) (ઋણ) ચિહ્નોનો ઉપયોગ કરવાથી દિશાઓની કાળજી આપોઆપ લઈ શકાય છે, પરંતુ પદાર્થની ગતિનું દ્વિપરિમાણમાં (સમતલમાં) અથવા ત્રિપરિમાણમાં (અવકાશમાં) વર્ણન કરવા માટે ઉપર્યુક્ત ભૌતિક રાશિઓને દર્શાવવા માટે સદિશની જરૂર પડે છે. આ માટે સદિશ એટલે શું ? સદિશના સરવાળા, બાદબાકી અને ગુણાકાર કેવી રીતે કરવા ? સદિશને વાસ્તવિક સંખ્યાથી ગુણતાં પરિણામ શું મળે તે સમજવું જરૂરી છે. સમતલમાં વેગ અને પ્રવેગને વ્યાખ્યાયિત કરવા માટે આપણે સદિશનો ઉપયોગ કરીશું. ત્યાર બાદ આપણે સમતલમાં પદાર્થની ગતિની ચર્ચા હાથ ધરીશું. સમતલમાં ગતિના સાદા કિસ્સા તરીકે આપણે અચળ પ્રવેગવાળી તથા વિગતવાર રીતે પ્રક્ષિપ્ત ગતિની ચર્ચા કરીશું. વર્તુળાકાર ગતિનું રોજબરોજના જીવનમાં ખાસ મહત્ત્વ હોવાથી આપણે નિયમિત વર્તુળગતિનો વિગતવાર અભ્યાસ કરીશું.

સમતલમાંની ગતિ માટે મેળવેલાં સમીકરણોને સહેલાઈથી ત્રિપરિમાણિક ગતિનાં સમીકરણોમાં પરિવર્તિત કરી શકાય છે.

4.2 અદિશ અને સદિશ રાશિઓ (Scalar and Vector Quantities)

ભૌતિક વિજ્ઞાનમાં રાશિઓનું વર્ગીકરણ (1) અદિશ રાશિઓ (Scalar quantities) અને (2) સદિશ રાશિઓ (Vector quantities) તરીકે કરવામાં આવે છે. સદિશ રાશિઓ અને અદિશ રાશિઓ વચ્ચે મૂળભૂત ફરક એટલો છે કે અદિશ રાશિઓ સાથે દિશા સંકળાયેલી નથી, જ્યારે સદિશ રાશિઓ સાથે દિશા સંકળાયેલી છે.

જે રાશિઓનાં ફક્ત મૂલ્ય જાણવાથી જ તેમના વિષેની સંપૂર્ણ માહિતી મળી શક્તી હોય તેવી રાશિઓને અદિશ રાશિઓ કહે છે. દા. ત., તાપમાન (temperature), સમય (time), દળ (mass), ઘનતા (density), કદ (volume), કાર્ય (work) વગેરે. અદિશ રાશિને તેનું મૂલ્ય દર્શાવતા અંક અને યોગ્ય એકમ સાથે દર્શાવવામાં આવે છે. અદિશ રાશિઓનું સંયોજન સામાન્ય બીજગણિતના નિયમોને અનુસરે છે. સામાન્ય અંકોની જેમ જ અદિશ રાશિઓના સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકાર થઈ શકે છે.

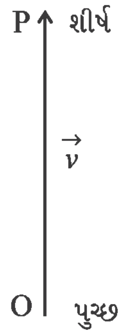
જે રાશિઓ વિશેની સંપૂર્ણ માહિતી મેળવવા માટે તેમના મૂલ્ય ઉપરાંત દિશાની પણ જરૂર પડતી હોય, તેવી રાશિઓને સદિશ રાશિઓ કહેવામાં આવે છે. દા. ત., વેગ (velocity), પ્રવેગ (acceleration), બળ (force), ટૉર્ક (torque), ક્ષેત્રફળ (area), સ્થાનાંતર (displacement) વગેરે.

સદિશ રાશિઓને દર્શાવવા માટે તે રાશિની સંજ્ઞા પર તીર મૂકવામાં આવે છે અથવા તે રાશિની સંજ્ઞાને ઘાટી (bold) કરીને દર્શાવવામાં આવે છે. જેમકે બળના સદિશને $\vec{F}$ અથવા **F** વેગના સદિશને $\vec{v}$ અથવા **v** વડે દર્શાવાય છે. સદિશ રાશિના મૂલ્યને તે સદિશ સંજ્ઞાને માનાંકમાં મૂકીને અથવા તો તે રાશિની સંજ્ઞાને તીર વગર લખીને દર્શાવાય છે. દા.ત., $\vec{A}$ નું મૂલ્ય $|\vec{A}|$ અથવા A વડે દર્શાવાય છે.

સદિશ રાશિઓ ચોક્કસ પ્રકારનાં યૌગિક સંયોજનોને અનુસરે છે.

4.3 સદિશ રાશિની આકૃતિ સ્વરૂપે (ભૌમિતિક સ્વરૂપે) રજૂઆત (Presentation of Vector by Graphical or Geometrical Method)

સદિશ રાશિને આકૃતિ સ્વરૂપે રજૂ કરવા માટે તીર દોરવામાં આવે છે અને આ તીરની લંબાઈ યોગ્ય સ્કેલ પર, તે સદિશ રાશિના મૂલ્ય જેટલી લેવામાં આવે છે. આ સદિશ રાશિની અસર જે દિશામાં પ્રવર્તતી હોય તે દિશામાં તીરનું શીર્ષ (head) મૂકવામાં આવે છે. આ તીર ગમે તે બિંદુએથી દોરી શકાય છે. આવા સદિશોને મુક્ત સદિશો (free vectors) કહે છે. દા. ત., એક ટ્રેન દક્ષિણથી ઉત્તર તરફની દિશામાં 40km/hrના વેગથી ગતિ કરે છે. આ વેગસદિશને દર્શાવવા આકૃતિ 4.0 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે દક્ષિણથી ઉત્તર દિશામાં તીર દોરો. તીરની લંબાઈ વેગના મૂલ્યને સમપ્રમાણમાં (એટલે કે સ્કેલમાપ 10km/hr = 1cm લેતાં) 4cm રાખો. ગતિ ઉત્તર દિશામાં છે, તેથી ઉત્તર દિશામાં (P બિંદુએ) તીરનું શીર્ષ (head) મૂકો. O બિંદુને સદિશની પુચ્છ (tail) કહે છે. આમ વેગસદિશ $\vec{v} = \vec{OP}$ વડે દર્શાવાય છે.

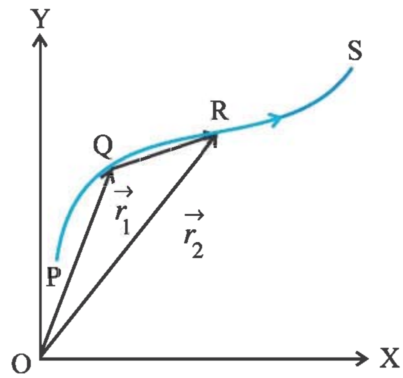


આકૃતિ 4.0

4.4 સ્થાન અને સ્થાનાંતર સદિશો (Position and Displacement Vecotrs)

પદાર્થનું સ્થાન દર્શાવવા માટે સંદર્ભબિંદુનો ઉલ્લેખ જરૂરી છે. જે સામાન્ય રીતે યામાક્ષોના ઉગમબિંદુને લેવામાં આવે છે. આકૃતિ (4.1)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે કોઈ પદાર્થ PQRS... માર્ગે ગતિ કરે છે. કોઈક t_1 સમયે તે Q બિંદુએ છે. ઉદ્દગમ બિંદુ O અને Qને સુરેખા વડે જોડતાં બનતો સદિશ $\vec{OQ} = \vec{r_1}$ એ પદાર્થનો t_1 સમયે સ્થાનસદિશ કહેવાય. ધારો કે t_2 સમયે તે R બિંદુએ પહોંચે છે. O અને Rને સુરેખા વડે જોડતાં બનતો સદિશ $\vec{OR} = \vec{r_2}$ એ t_2 સમયે પદાર્થનો સ્થાન સદિશ બનશે. આમ, પદાર્થ $t_2 - t_1$ સમયમાં Q થી R પર પહોંચે છે. તેનો સ્થાનાંતર સદિશ $\vec{QR}$ વડે દર્શાવાય છે.

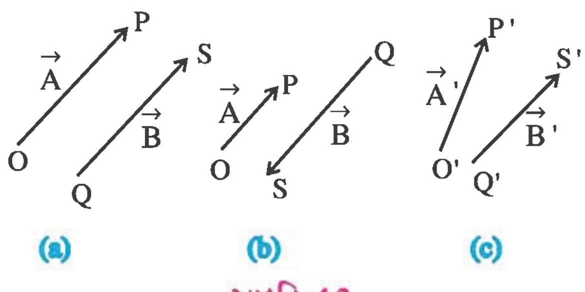
અત્રે અગત્યની નોંધવા જેવી બાબત એ છે કે સ્થાનાંતર સદિશનું મૂલ્ય એ પ્રારંભિક સ્થાન અને અંતિમ સ્થાન વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર છે.



આકૃતિ 4.1

4.5 સદિશોની સમાનતા (Equality of Vectors)

સમાન સદિશો : જો બે સદિશોનાં મૂલ્ય અને દિશા સમાન હોય, તો તેવા સદિશોને સમાન સદિશો કહેવાય (આકૃતિ 4.2(a)).



આકૃતિ 4.2

સમાંતર સદિશો : એક જ દિશામાંના સદિશોને સમાંતર સદિશો (parallel vectors) કહેવાય. (આવા સદિશોનાં મૂલ્યો સમાન કે જુદાં-જુદાં હોઈ શકે.) જુઓ આકૃતિ 4.2 (a).

પ્રતિ સમાંતર સદિશો (Antiparallel Vectors) : પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાંના સદિશોને પ્રતિ સમાંતર સદિશો કહે છે. આકૃતિ 4.2 (b).

અસમાંતર સદિશો (Aparallel Vectors) : સમાંતર કે પ્રતિસમાંતર ન હોય તેવા સદિશોને અસમાંતર સદિશો કહે છે. આકૃતિ 4.2 (c)

4.6 સદિશોનું બીજગણિત (Vector Algebra)

4.6.1 વાસ્તવિક સંખ્યા વડે સદિશોનો ગુણાકાર (Multiplication of Vectors by Real Numbers)

સદિશ રાશિને વાસ્તવિક સંખ્યા વડે ગુણતાં મળતું પરિણામ સદિશ રાશિ જ હોય છે. સદિશ $\vec{A}$ નો ધન સંખ્યા k સાથે ગુણાકાર કરતાં મળતા સદિશ $k\vec{A}$ નું મૂલ્ય સદિશ $\vec{A}$ ના મૂલ્ય કરતાં k ગણું થાય છે.

$$|k\vec{A}| = k|\vec{A}| \qquad \text{જો } k > 0$$

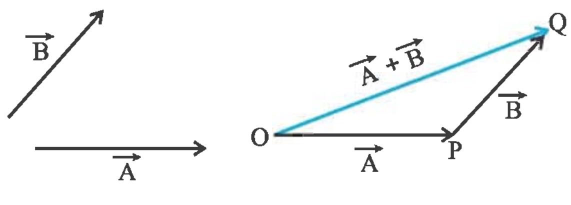
સદિશ $\vec{A}$ ને ઋણ સંખ્યા $-k$ વડે ગુણતાં મળતા પરિણામી સદિશ $k\vec{A}$ ની દિશા સદિશ $\vec{A}$ ની દિશા કરતાં વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે તથા તેનું માનાંક $|k\vec{A}|$ હોય છે.

સદિશ $\vec{A}$ સાથે ગુણાકારમાં લેવાતો ગુણાંક k ભૌતિક પરિમાણ ધરાવતો અદિશ પણ હોઈ શકે છે. તેથી પરિણામી સદિશ $k\vec{A}$ ના પરિમાણ k અને $\vec{A}$ પરિમાણોનો ગુણાકાર છે. દા. ત., અચળ વેગનો સમયના ગાળા સાથેનો ગુણાકાર, સ્થાનાંતર સદિશ આપે છે.

4.6.2 સદિશોનાં સરવાળા અને બાદબાકી (Addition and Subtraction of Vectors)

આલેખની (ભૌમિતિક) રીત (Graphical or Geometrical Method)

બે સદિશોનો ભૌમિતિક રીતે સરવાળો નીચે પ્રમાણે કરવામાં આવે છે :



(a) (b)

આકૃતિ 4.3

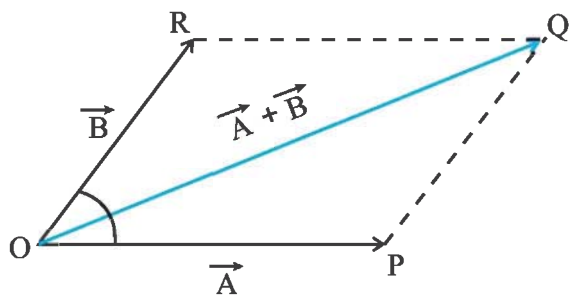
ધારો કે (આકૃતિ 4.3 (a)) બે સદિશો $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ નો સરવાળો કરવો છે.

આ માટે આકૃતિ 4.3 (b) માં દર્શાવ્યા મુજબ કોઈ એક બિંદુ Oમાંથી $\vec{A}$ ના જેટલા મૂલ્યનો અને $\vec{A}$ ની દિશામાં હોય તેવો એક સદિશ $\vec{OP}$ દોરો. માટે $\vec{OP} = \vec{A}$ થશે. હવે આ સદિશ $\vec{OP}$ ના શીર્ષ (head) P પર બીજા સદિશ $\vec{B}$ નું પુચ્છ (tail) મૂકીને $\vec{PQ} = \vec{B}$ દોરો. ત્યાર બાદ પ્રથમ સદિશ $\vec{A}$ ની પુચ્છ (tail) O ને દ્વિતીય સદિશ $\vec{B}$ ના શીર્ષ (head) Qને જોડતો સદિશ $\vec{OQ}$ દોરતાં તે $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ નો સરવાળો દર્શાવતો **પરિણામી સદિશ** $\vec{R}$ છે.

અર્થાત્ $\vec{A} + \vec{B} = \vec{OQ} = \vec{R}$.

સદિશોના સરવાળાની આ રીતમાં બે સદિશો અને તેમનો પરિણામી સદિશ ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓની રચના કરતા હોવાથી તેને સદિશ સરવાળાની **ત્રિકોણની રીત** પણ કહે છે.

કોઈ બિંદુ O માંથી સદિશો $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ ને રજૂ કરતા સદિશો $\vec{OP}$ અને $\vec{OR}$ દોરો. હવે OP અને OR સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની સંલગ્ન બાજુઓ બને તે રીતે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ (આકૃતિ 4.4માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે) OPQR પૂર્ણ કરો.



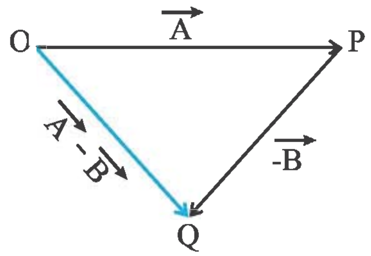
આકૃતિ 4.4

અત્રે સ્પષ્ટ છે કે $\vec{OR} = \vec{PQ} = \vec{B}$. આ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના O બિંદુમાંથી દોરેલ વિકર્ણ OQ એ $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ નો પરિણામી સદિશ $\vec{R}$ બનશે. એટલે કે $\vec{OQ} = \vec{A} + \vec{B}$.

આ રીતને સદિશોના સરવાળાની સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની રીત પણ કહે છે. (આ રીતની વિગતવાર ચર્ચા આર્ટીકલ 4.9.4માં કરીશું.)

4.6.3 સદિશોની બાદબાકી (Subtraction of Vectors)

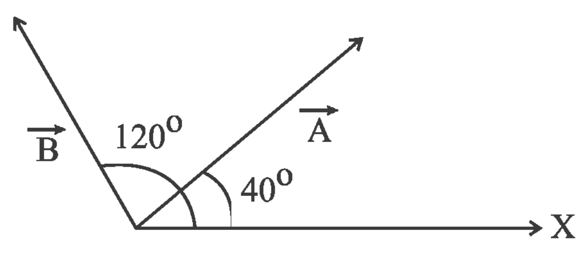
ધારો કે આકૃતિ 4.3(a) માં દર્શાવેલા $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ની બાદબાકી કરવી છે. હવે $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$ હોઈ આનો અર્થ એ થાય કે $\vec{A}$માંથી $\vec{B}$ને બાદ કરવો એટલે $\vec{A}$માં $-\vec{B}$ (અર્થાત્ $\vec{B}$ના મૂલ્ય જેટલું જ મૂલ્ય ધરાવતો પરંતુ તેનાથી વિરુદ્ધ દિશામાંનો સદિશ) ઉમેરવો. જુઓ આકૃતિ 4.5.



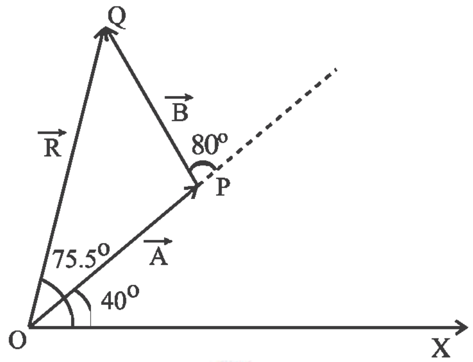
આકૃતિ 4.5

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની રીતમાં આકૃતિ 4.5 માં બિંદુ P અને Rને જોડતાં વિકર્ણ વડે દર્શાવાતો સદિશ $\vec{OQ} = \vec{A} - \vec{B}$ દર્શાવે છે. (આ હકીકત જાતે ચકાસો.) વળી ચકાસી જુઓ કે $\vec{A} - \vec{B} \neq \vec{B} - \vec{A}$.

ઉદાહરણ 1 : બે સદિશો $\vec{A}$ અને $\vec{B}$, X-અક્ષ સાથે 40° અને 120° ખૂણા બનાવે છે. જો $|\vec{A}| = 6$ અને $|\vec{B}| = 5$ એકમ હોય તો, આ બે સદિશોનો પરિણામી સદિશ શોધો.



(a)



(b)

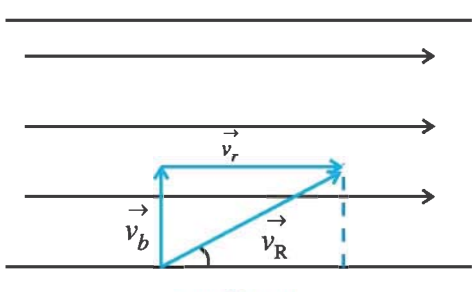
આકૃતિ 4.6

ઉકેલ : આકૃતિ 4.6(a) માં આ બે સદિશોને દર્શાવ્યા છે. તેમનો સરવાળો કરવા માટે ગ્રાફપેપર લઈ, આકૃતિ 4.6(b) માં દર્શાવ્યા મુજબ તેના પરના કોઈ બિંદુ Oમાંથી પસાર થતો X-અક્ષ દર્શાવો. યોગ્ય સ્કેલ નક્કી કરી Oમાંથી $\vec{A}$ને રજૂ કરતો સદિશ $\vec{OP}$ દોરી આ સદિશના P બિન્દુ પરથી બીજા સદિશ $\vec{B}$ની પુચ્છ મૂકીને $\vec{PQ} = \vec{B}$ દોરો.

O અને Qને સુરેખા વડે જોડતાં $\vec{OQ}$એ $\vec{A}$ અને $\vec{B}$નો પરિણામી સદિશ $\vec{R}$ મળે છે. અર્થાત્ $\vec{OQ} = \vec{R}$ પરિણામી સદિશ $\vec{OQ}$નું મૂલ્ય માપપટ્ટીથી શોધતાં તે 8.4 એકમ મળે છે. આ પરિણામી સદિશ X-અક્ષ સાથેનો ખૂણો 75.5° રચે છે.

ઉદાહરણ 2 : એક નદીમાં પાણીના પ્રવાહનો વેગ 40km/h છે. આ નદીમાં માછીમાર મોટરબોટને કાંઠાને લંબ રૂપે 30km/hના વેગથી હંકારવા પ્રયત્ન કરે છે, તો મોટરબોટનો પરિણામી વેગ તથા પરિણામી વેગની દિશા કાંઠાની સાપેક્ષે શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિ 4.7માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પાણીના પ્રવાહના વેગને $\vec{v_r}$ અને મોટરબોટના વેગને $\vec{v_b}$ વડે દર્શાવેલ છે. સદિશ સરવાળા માટે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની રીત વાપરતાં ત્યાં બંને વેગોનો પરિણામી વેગ $\vec{v_R}$ વડે દર્શાવેલ છે. આકૃતિ 4.7 પરથી સ્પષ્ટ છે કે,



આકૃતિ 4.7

$$\left|\vec{v}_R\right| = \sqrt{\left|\vec{v}_r\right|^2 + \left|\vec{v}_b\right|^2}$$

$$= \sqrt{(40)^2 + (30)^2}$$

$$= 50 \text{ km/h}$$

ધારો કે $\vec{v}_R$ નદીના પ્રવાહ સાથે θ કોણ બનાવે છે. આકૃતિની ભૂમિતિ પરથી

$$\therefore \tan\theta = \frac{v_b}{v_r} = \frac{30}{40} = 0.75$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}(0.75) \approx 37^\circ$$

આમ, બોટનો પરિણામી વેગ 50km/hr અને તેની દિશા પ્રવાહ સાથે 37°નો ખૂણો બનાવતી દિશામાં છે.

4.6.4 સદિશોના સરવાળાના ગુણધર્મો (Properties of vector addition)

(1) સદિશોના સરવાળા સમક્રમી (commutative) છે, પરંતુ બાદબાકી સમક્રમી નથી.

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

$$\vec{A} - \vec{B} \neq \vec{B} - \vec{A}$$

(2) સદિશોનો સરવાળો જૂથના નિયમ (associative law) ને અનુસરે છે. અર્થાત્

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$

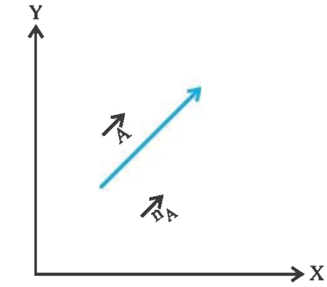
4.7 શૂન્ય સદિશ (Null or Zero Vector)

બે સમાન મૂલ્યના અને પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાંના સદિશોનો સરવાળો કરતાં મળતા સદિશને શૂન્ય સદિશ કહે છે અને તેને $\vec{0}$ વડે દર્શાવાય છે. આમ, $\vec{A} - \vec{A} = \vec{0}$. શૂન્ય સદિશનું મૂલ્ય શૂન્ય હોઈને તેની દિશા દર્શાવી શકાય નહિ. દા.ત., અચળ વેગથી ગતિ કરતી ટ્રેનનો પ્રવેગ શૂન્ય સદિશ છે.

4.8 એકમસદિશ (Unit Vector)

એકમમૂલ્ય ધરાવતા સદિશને એકમસદિશ કહે છે. એકમસદિશને સંકેત $\hat{n}$ (વંચાય એન હેટ અથવા એન કેરટ) વડે દર્શાવાય છે. કોઈ પણ સદિશને તેના મૂલ્ય વડે ભાગતાં તે સદિશની દિશામાંનો એકમસદિશ મળે છે.

દા.ત., આકૃતિ 4.8માં સદિશ $\vec{A}$ દર્શાવ્યો છે. ધારો કે $|\vec{A}| = 6$ છે.



આકૃતિ 4.8

આ સદિશની દિશામાંના એકમ સદિશને $\hat{n}_A$ વડે દર્શાવીએ તો,

$$\hat{n}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{\vec{A}}{6} \qquad (4.8.1)$$

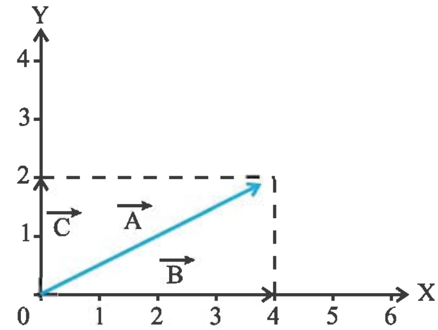
આમ, કોઈ પણ સદિશને તેના મૂલ્ય અને તે સદિશની દિશામાંના એકમ સદિશના ગુણાકાર સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય.

$$\vec{A} = |\vec{A}|\,\hat{n}_A = A\hat{n}_A \qquad (4.8.2)$$

કાર્તેઝીય યામપદ્ધતિમાં X, Y અને Z–અક્ષની દિશામાંના એકમસદિશોને અનુક્રમે $\hat{i}$, $\hat{j}$ અને $\hat{k}$ વડે દર્શાવાય છે. આકૃતિ 4.9માં દર્શાવેલ સદિશોને નીચે મુજબ રજૂ કરી શકાય :

$$\vec{B} = 4\hat{i},\ \vec{C} = 2\hat{j}$$

$$\vec{A} = 4\hat{i} + 2\hat{j} \qquad (4.8.3)$$

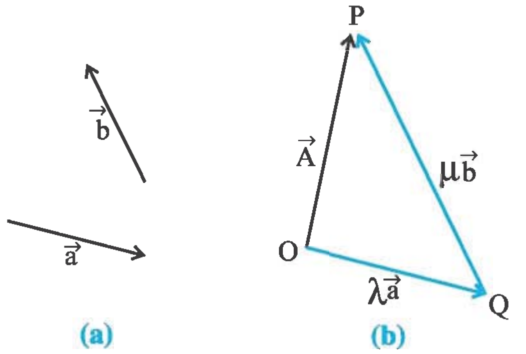


આકૃતિ 4.9

4.9 સમતલમાં સદિશનું વિભાજન (Resolution of a Vector in a Plane)

આકૃતિ 4.10 (a)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક સમતલમાં બે અશૂન્ય સદિશ $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ તથા બીજો એક અશૂન્ય સદિશ $\vec{A}$ માં ધ્યાનમાં લો. સદિશ $\vec{A}$ ને બે સદિશોના સરવાળારૂપે દર્શાવી શકાય. જેમાંનો એક સદિશ, $\vec{a}$ ને વાસ્તવિક સંખ્યા λ વડે ગુણીને મેળવેલ હોય અને બીજો

સદિશ, $\vec{b}$ ને વાસ્તવિક સંખ્યા μ વડે ગુણીને મેળવેલો હોય તો ઉપર્યુક્ત વિધાનને ચકાસવા માટે સદિશ $\vec{A}$ ની પુચ્છ Oમાંથી પસાર થતી અને $\vec{a}$ ને સમાંતર સુરેખા દોરો. તેવી જ રીતે સદિશ $\vec{A}$ ના શીર્ષ Pમાંથી પસાર થતી તથા $\vec{b}$ ને સમાંતર સુરેખા દોરો. આ બંને સુરેખાઓના છેદબિંદુને Q વડે દર્શાવવામાં આવે, તો આકૃતિ 4.10 (b) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે



આકૃતિ 4.10

$$\vec{A} = \vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP} \quad (4.9.1)$$

પરંતુ $\vec{OQ}$ સદિશ $\vec{a}$ ને સમાંતર છે અને $\vec{QP}$ સદિશ $\vec{b}$ ને સમાંતર છે, તેથી

$$\vec{OQ} = \lambda \vec{a} \text{ અને } \vec{QP} = \mu \vec{b} \quad (4.9.2)$$

આને સદિશ $\vec{A}$ નું સદિશ $\vec{a}$ અને સદિશ $\vec{b}$ ની દિશામાં અનુક્રમે સદિશ ઘટકો $\lambda \vec{a}$ અને $\mu \vec{b}$ માં વિભાજન કર્યું કહેવાય. જ્યાં λ અને μ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

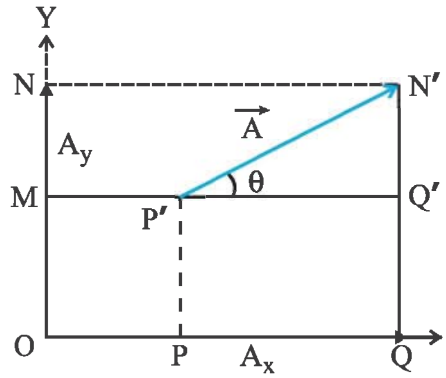
$$\therefore \vec{A} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \quad (4.9.3)$$

આમ આપેલ સદિશનું બે સદિશ ઘટકોમાં આપેલ બે સદિશોની દિશામાં રહે તથા આ ત્રણે સદિશો એક જ સમતલમાં રહે તે રીતે વિભાજન કરી શકાય.

લંબયામાક્ષ પદ્ધતિમાં એકમસદિશનો ઉપયોગ કરી સામાન્ય સદિશનું અક્ષોની દિશાઓમાં સરળતાથી વિભાજન કરી શકાય છે.

4.9.1 સદિશના લંબઘટકો (Perpendicular components of a vector)

આકૃતિ 4.11 માં દ્વિ-પરિમાણમાં એક સદિશ $\vec{A}$ દર્શાવેલ છે. આ સદિશના પુચ્છ અને શીર્ષમાંથી X અને Y-અક્ષો પર લંબ દોરેલા છે. આમ કરતાં PQ = $\vec{A}$ નો X-અક્ષની દિશામાંનો અદિશ ઘટક અથવા $\vec{A}$ નો X-અક્ષના દિશાનો પ્રક્ષેપ (A_x) અને MN = $\vec{A}$ નો Y-અક્ષની દિશામાંનો અદિશ ઘટક અથવા $\vec{A}$ નો Y-અક્ષની દિશાનો પ્રક્ષેપ (A_y).



આકૃતિ 4.11

હવે સદિશોના સરવાળાના નિયમ પરથી

$$\vec{A} = \vec{P'Q'} + \vec{Q'N'} = \vec{PQ} + \vec{MN} \quad (4.9.4)$$

$$\therefore \vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \quad (4.9.5)$$

અહીં, $A_x\hat{i} = \vec{A_x}$ = સદિશ $\vec{A}$ નો X-દિશામાંનો સદિશ ઘટક તથા $A_y\hat{j} = \vec{A_y}$ = સદિશ $\vec{A}$ નો Y-દિશામાંનો સદિશ ઘટક છે.

$$\cos\theta = \frac{P'Q'}{P'N'} = \frac{A_x}{A}$$

$$\therefore A_x = A \cos\theta \quad (4.9.6)$$

અને આ જ રીતે $A_y = A \cos(90^\circ - \theta)$

$$\therefore A_y = A \sin\theta \quad (4.9.7)$$

આ પરથી કહી શકાય કે આપેલ સદિશનો કોઈ પણ દિશામાંનો ઘટક એટલે તે સદિશનું મૂલ્ય અને તે સદિશે તે દિશા સાથે બનાવેલ ખૂણાની cosineનો ગુણાકાર.

આમ, કોઈ પણ સદિશનું બે પરસ્પર લંબઘટકોમાં વિભાજન કરી શકાય છે.

કોઈ પણ સદિશને બે રીતે વર્ણવી શકાય છે :

(1) તે સદિશનું મૂલ્ય અને તેણે નિશ્ચિત દિશા સાથે બનાવેલ ખૂણા વડે અથવા

(2) તે સદિશના ઘટકો વડે.

આકૃતિ 4.11 માં $\Delta P'Q'N'$માં

$$|\vec{A}| = P'N' = \sqrt{(P'Q')^2 + (Q'N')^2}$$

$$= \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad (4.9.8)$$

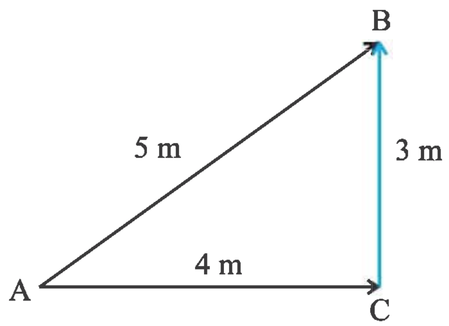
આમ, કોઈ પણ સદિશનું મૂલ્ય તેના પરસ્પર લંબ ઘટકોના વર્ગના સરવાળાના વર્ગમૂળ જેટલું હોય છે અને દિશા માટે

$$\tan\theta = \frac{N'Q'}{P'Q'} = \frac{A_y}{A_x} \qquad (4.9.9)$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right), \qquad (4.9.10)$$

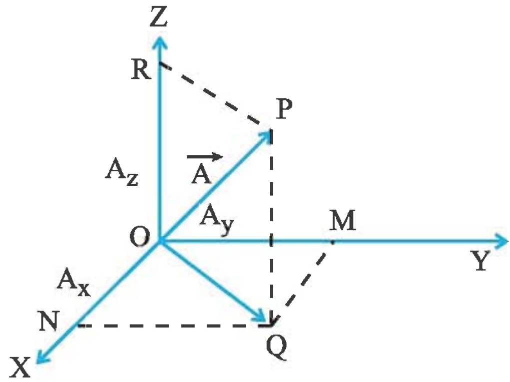
જ્યાં θ એ $\vec{A}$ અને X-અક્ષ વચ્ચેનો કોણ છે. અત્યાર સુધીની ચર્ચામાં આપણે (XY) સમતલમાં રહેલ સદિશની જ ચર્ચા કરી છે. આ જ રીતે ત્રિ-પરિમાણમાં રહેલા સદિશને ત્રણ પરસ્પર લંબઘટકો (X, Y અને Z)માં વિભાજિત કરી શકાય છે.

કોઈ ભૌતિક રાશિને રજૂ કરતાં સદિશનો કોઈ પણ દિશામાંનો ઘટક તે ભૌતિક રાશિની તે દિશામાંની અસરકારકતા સૂચવે છે. જેમકે આકૃતિ 4.12 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે કોઈ વ્યક્તિ Aથી B સુધી 5mનું સ્થાનાંતર કરે તો સ્પષ્ટ છે કે તેણે સમક્ષિતિજ દિશામાં કાપેલ અંતર (Aથી C સુધી) 4m છે અને ઊર્ધ્વદિશામાં કાપેલ અંતર (C થી B સુધી) 3m. છે.



આકૃતિ 4.12

આકૃતિ 4.13 માં ત્રિ-પરિમાણમાં એક સદિશ $\vec{A}$ દર્શાવ્યો છે. આ સદિશનો XY સમતલ પરનો પ્રક્ષેપ OQ છે. બિંદુ Q માંથી X અને Y-અક્ષો પર લંબ દોરતાં તે અક્ષો પરના સદિશ $\vec{A}$ના X અને Y ઘટકો અનુક્રમે $ON = A_x$ અને $OM = A_y$ મળે છે. ત્રિ-પારિમાણિક દૃષ્ટિએ જોતાં માલૂમ પડે છે કે $PQ = RO = A_z$ છે.



આકૃતિ 4.13

હવે પાઈથાગોરસના પ્રમેય પરથી

$$OQ^2 = MQ^2 + OM^2 = A_x^2 + A_y^2 \quad (4.9.11)$$

તથા $OP^2 = OQ^2 + PQ^2$

$$\therefore OP^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \qquad (4.9.12)$$

$$|\vec{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

$$\therefore |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (4.9.13)$$

ત્રિપરિમાણમાં સદિશ $\vec{A}$ને નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

બીજી રીતે સદિશને નીચે મુજબ પણ લખવામાં આવે છે.

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

કોઈ બિંદુના યામો (x, y, z) હોય, તો તેનો સ્થાનસદિશ ઉગમબિંદુની સાપેક્ષે નીચે મુજબ લખી શકાય છે :

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = (x, y, z) \quad (4.9.14)$$

અહીં, x, y અને z એ $\vec{r}$ ના X, Y, અને Z-અક્ષની દિશામાંના ઘટકો છે. સ્થાનસદિશનું મૂલ્ય,

$$\left|\vec{r}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (4.9.15)$$

4.9.2 સદિશોના સરવાળા અને બાદબાકી (ઘટકોની મદદથી) : બૈજિક રીત (Addition and subtraction of vectors (using component) : Algebraic or analytical method)

આપણે સદિશોના સરવાળાની ભૌમિતિક રીત શીખી ગયા. આ રીત બે કે ત્રણ સદિશોનો સરવાળો કરવાનો હોય

ત્યાં સુધી સરળ રહે છે, પરંતુ વધારે સંખ્યામાં સદિશોનો સરવાળો કરવાનો હોય ત્યારે કંટાળાજનક છે અને તેની ચોકસાઈ પણ મર્યાદિત છે. આવા સંજોગોમાં સદિશ સરવાળાની બૈજિક રીત ખૂબ જ અનુકૂળ પડે છે.

આપણે જોઈ ગયા કે કોઈ પણ સદિશનું પરસ્પર લંબ ઘટકોમાં વિભાજન થઈ શકે છે. સદિશોના ઘટકોના સંયોજનની મદદથી સદિશોનું સંયોજન ઘણી જ સરળતાથી થઈ શકે છે.

ધારો કે $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ એ XY-સમતલમાં આવેલા સદિશો છે અને તેમના ઘટકો A_x, A_y અને B_x, B_y છે માટે,

$$\therefore \vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \qquad (4.9.16)$$

અને $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$ (4.9.17)

આ બે સદિશોનો સરવાળો કરતાં મળતા પરિણામી સદિશને $\vec{R}$ વડે દર્શાવીએ તો,

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$= (A_x\hat{i} + A_y\hat{j}) + (B_x\hat{i} + B_y\hat{j}) \qquad (4.9.18)$$

સદિશોના સરવાળા સમક્રમી છે અને તે જૂથના નિયમને અનુસરે છે, માટે,

$$\vec{R} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} \qquad (4.9.19)$$

વળી, $\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j}$ હોઈને

$R_x = A_x + B_x$ અને $R_y = A_y + B_y$

આમ, પરિણામી સદિશ $\vec{R}$ નો દરેક ઘટક એ $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ ના અનુરૂપ ઘટકોના સરવાળા જેટલો હોય છે.

આ જ રીતે, ત્રિ-પરિમાણમાં

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{i} +$$
$$(A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k} \qquad (4.9.20)$$

હવે, ઉદાહરણ દ્વારા જોઈ શકીશું કે સરવાળા માટેની બૈજિક રીત ભૌમિતિક રીત કરતાં કઈ રીતે સરળ પડે છે.

ઉદાહરણ 3 : જો $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ અને $\vec{B} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}$, હોય તો, $\vec{A} + \vec{B}$ અને $\vec{A} - \vec{B}$ નાં મૂલ્યો શોધો.

ઉકેલ : $\vec{A} + \vec{B} = 6\hat{i} + 8\hat{j} + 7\hat{k}$

$$\therefore \left|\vec{A} + \vec{B}\right| = \sqrt{(6)^2 + (8)^2 + (7)^2}$$

$= 12.2$ એકમ

$$\vec{A} - \vec{B} = -2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$\therefore \left|\vec{A} - \vec{B}\right|$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (1)^2}$$

$= 3$ એકમ

ઉદાહરણ 4 : આકૃતિ 4.14 માં દર્શાવેલા બે સદિશો $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ નો સરવાળો બૈજિક રીતની મદદથી કરો. $|\vec{A}| = 10$ એકમ અને $|\vec{B}| = 8$ એકમ છે.

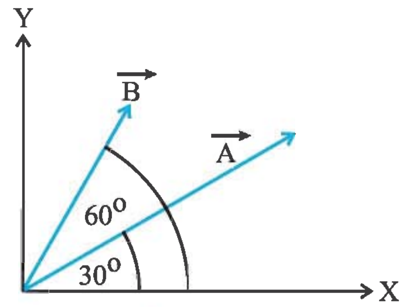
ઉકેલ : આ માટે આપણે બન્ને સદિશના X અને Y ઘટકો મેળવીશું.

$A_x = A\ cos\ 30^\circ = 10\ cos\ 30^\circ$

$= 10 \times 0.8660 = 8.66$

$B_x = B\ cos\ 60^\circ = 8 cos 60^\circ = 8 \times 0.5$

$= 4.0$



આકૃતિ 4.14

$A_y = A\ sin\ 30^\circ = 10\ sin\ 30^\circ$

$= (10)(0.5) = 5.0$

$B_y = B\ sin\ 60^\circ = 8\ sin\ 60^\circ$

$= (8)(0.8660) = 6.928 \approx 6.93$

હવે આ બંને સદિશોના પરિણામીને $\vec{R}$ કહીએ, તો

$R_x = A_x + B_x = 8.66 + 4.0 = 12.66$

$R_y = A_y + B_y = 5 + 6.93 = 11.93$

$\therefore$ પરિણામી સદિશ $\vec{R}$ નું મૂલ્ય

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2}}$$

$$= \sqrt{(12.66)^2 + (11.93)^2}$$

= 17.4 એકમ

ધારો કે પરિણામી સદિશ X-અક્ષ સાથે θ કોણ બનાવે છે તો,

$$tan\ \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{11.93}{12.66} = 0.9423$$

$$\therefore\ \theta = \tan^{-1} 0.9423 \approx 43^\circ\ 8'$$

આ પ્રક્રિયાને સરળ નીચે મુજબ બનાવી શકાય. X અને Y-અક્ષો આપણે આપણી અનુકૂળતા પ્રમાણે લઈ શકીએ છીએ.

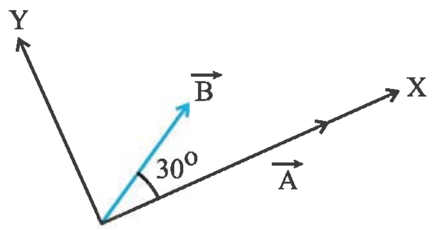
ધારો કે X-અક્ષ $\vec{A}$ ની દિશામાં લઈએ તો હવે $\vec{A}$ અને X-અક્ષ વચ્ચેનો ખૂણો 0° થશે અને $\vec{B}$ અને X-અક્ષ વચ્ચેનો ખૂણો 30° થશે. આ સંજોગોમાં (આકૃતિ 4.15)

$$A_x = A\ cos\ \ 0^\circ = 10\ cos\ 0^\circ = 10$$

$$B_x = B\ cos\ 30^\circ = 8(0.8660) = 6.93$$

$$A_y = A\ sin\ \ 0^\circ = 10\ sin\ 0^\circ = 0$$

$$B_y = B\ sin\ 30^\circ = (8)\ (0.5) = 4.0$$



આકૃતિ 4.15

$$\therefore\ R_x = A_x + B_x = 10 + 6.93 = 16.93$$

$$R_y = A_y + B_y = 0 + 4 = 4$$

$$\therefore\ |\vec{R}| = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2}}$$

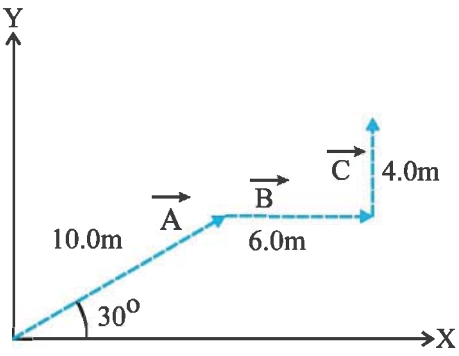
$$= \sqrt{(16.93)^2 + (4)^2}$$

$\approx$ 17.4 એકમ

પરિણામીની દિશાની ખાતરી જાતે કરી જુઓ.

ઉદાહરણ 5 : આકૃતિ 4.16માં દર્શાવેલા ત્રણ સદિશોનો પરિણામી સદિશ શોધો.

ઉકેલ : આ ત્રણેય સદિશોના x અને y ઘટકો શોધીને અનુરૂપ ઘટકોના સરવાળા પરથી પરિણામી સદિશ શોધીશું.



આકૃતિ 4.16

$\vec{A}$, $\vec{B}$ અને $\vec{C}$ ના x-ઘટકો લેતાં

$$A_x = Acos30^\circ = 10cos30^\circ$$

$$= (10)(0.8660) = 8.66$$

$$B_x = Bcos0^\circ = 6cos0^\circ = 6$$

$$C_x = Ccos90^\circ = 4(0) = 0$$

$\vec{A}$, $\vec{B}$ અને $\vec{C}$ ના y-ઘટકો લેતાં

$$A_y = Acos60^\circ = (10)(0.5) = 5$$

$$B_y = Bcos90^\circ = (6)(0) = 0$$

$$C_y = Ccos0^\circ = (4)(1) = 4$$

જો પરિણામી સદિશને $\vec{R}$ કહીએ તો,

$$R_x = A_x + B_x + C_x$$

$$= 8.66 + 6 + 0 = 14.66m$$

$$R_y = A_y + B_y + C_y = 5 + 0 + 4 = 9m$$

R નું મૂલ્ય $= |\vec{R}| = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2}}$

$$= \sqrt{(14.66)^2 + (9)^2}$$

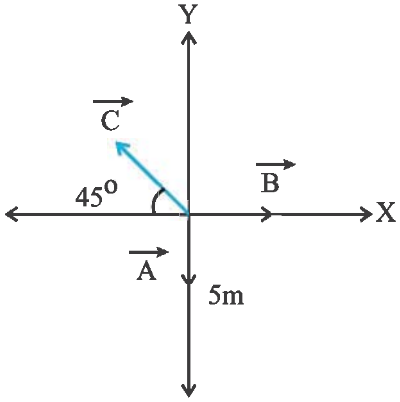
$$= 17.2m$$

જો $\vec{R}$ X-અક્ષ સાથે θ ખૂણો બનાવતો હોય, તો

$$tan\ \theta = \frac{Ry}{Rx} = \frac{9}{14.66} = 0.6139$$

$$\therefore\ \theta = tan^{-1}\ (0.6139)$$
$$= 31^{o}\ 27'$$

ઉદાહરણ 6 : આકૃતિ 4.17માં દર્શાવેલા ત્રણ સદિશોનો સરવાળો શૂન્ય થતો હોય, તો સદિશો $\vec{B}$ અને $\vec{C}$ નાં મૂલ્યો શોધો.



આકૃતિ 4.17

ઉકેલ : આ ત્રણેય સદિશોના x ઘટકો લેતાં

$A_x = A\ cos\ 270^o = 0$

$B_x = B\ cos\ 0^o = B$

$C_x = C\ cos\ 135^o = -\frac{1}{\sqrt{2}}C$

હવે, ત્રણેય સદિશો $\vec{A}$, $\vec{B}$ અને $\vec{C}$ ના y–ઘટકો લેતાં.

$A_y = A\ cos\ 180^o = -A$

$B_y = B\ cos\ 90^o = 0$

$C_y = C\ cos\ 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}}C$

જો પરિણામી સદિશને $\vec{R}$ કહીએ તો

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ હોવાથી

$$R_x = A_x + B_x + C_x = 0 + B - \frac{1}{\sqrt{2}}\ C$$

$$R_y = A_y + B_y + C_y = -A + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\ C$$

હવે આપેલ છે કે પરિણામી સદિશ $\vec{R}$ નું મૂલ્ય શૂન્ય છે. માટે સ્પષ્ટ છે કે તેના ઘટકોનાં મૂલ્યો પણ શૂન્ય થવાં જોઈએ. આમ કરતાં,

$$R_x = 0 + B - \frac{1}{\sqrt{2}}C = 0 \Rightarrow B = \frac{1}{\sqrt{2}}C$$

$$R_y = -A + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}C = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2}}C$$

$\therefore$ A = B

આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે કે $|\vec{A}| = A = 5m$

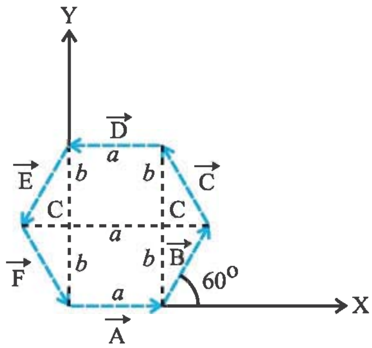
$\therefore C = A\sqrt{2} = 5\sqrt{2}\,m$

અને B = A = 5m

ઉદાહરણ 7 : આકૃતિ 4.18 દર્શાવ્યા મુજબ છ સદિશો $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$, $\vec{E}$ અને $\vec{F}$ એક નિયમિત ષટ્કોણ (regular hexagon) બનાવે છે., તો સદિશોના સરવાળાની બૈજિક રીતનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે તેમનો સરવાળો શૂન્ય છે.

ઉકેલ : નિયમિત hexagon હોઈને સ્પષ્ટ છે કે તેની બાજુઓ સમાન હોય એટલે કે આ બધા સદિશોનાં મૂલ્ય સમાન હશે. ધારો કે આ મૂલ્ય = P છે. અર્થાત્ A = B = C = D = E = F = P.

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા અનુસાર X અને Y અક્ષો લઈને આ સદિશોના અનુક્રમે x અને y ઘટકો લેતાં.



આકૃતિ 4.18

આકૃતિ 4.18 પરથી,

$\vec{A} = a\hat{i}$

$\vec{B} = c\hat{i} + b\hat{j}$

$\vec{C} = -c\hat{i} + b\hat{j}$

$\vec{D} = -a\hat{i}$

$\vec{E} = -c\hat{i} - b\hat{j}$

$$\vec{F} = c\hat{i} - b\hat{j}$$

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E} + \vec{F}$$

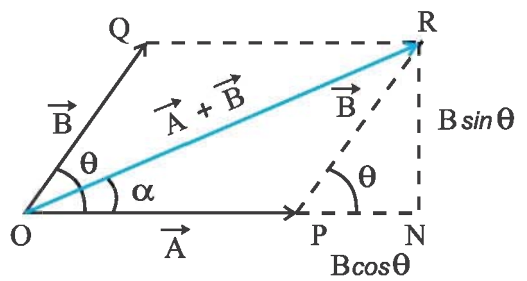
$$= (a\hat{i}) + (c\hat{i} + b\hat{j}) + (-c\hat{i} + b\hat{j}) +$$

$$(-a\hat{i}) + (-c\hat{i} - b\hat{j}) + (c\hat{i} - b\hat{j}) = 0$$

આમ જ્યારે સદિશો બંધગાળો રચે ત્યારે તેમનો સદિશ સરવાળો શૂન્ય થાય.

4.9.3 બે સદિશોના સરવાળા માટેનો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો નિયમ (Law of parallelogram for addition of two vectors)

"આપેલ બે સદિશોને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની પાસ પાસેની બાજુઓ તરીકે લઈ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પુરો કરવામાં આવે, તો જે સામાન્ય બિંદુમાંથી બે સદિશ દોરેલા હોય, તેમાંથી દોરેલો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો વિકર્ણ આ બે સદિશનો સરવાળો દર્શાવતો સદિશ બને છે." તથા બીજો વિકર્ણ $\vec{A} - \vec{B}$ એટલે કે $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ની બાદબાકી દર્શાવે છે. આકૃતિ 4.19 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ ને પાસપાસેની બાજુઓ તરીકે લઈ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ OQRP પૂરો કરો. અત્રે $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ વચ્ચેનો કોણ θ છે. વિકર્ણ OR એ પરિણામી સદિશ $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{OR}$ બનશે. જે નીચે પ્રમાણે જોઈ શકાય છે.



આકૃતિ 4.19

ધારો કે $\vec{A}$ X-અક્ષની દિશામાં છે.

$\vec{A} = A_x\hat{i}$ અને $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$

∴ બૈજિક રીતે

$$\vec{R} = A_x\hat{i} + B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$$

$$= (A_x + B_x)\hat{i} + B_y\hat{j} \qquad (4.9.20)$$

$$\therefore \left|\vec{R}\right| = \left[(A_x + B_x)^2 + {B_y}^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

$$= [{A_x}^2 + 2A_xB_x + {B_x}^2 + {B_y}^2]^{\frac{1}{2}}$$

જો પરિણામી $\vec{R}$ સદિશ $\vec{A}$ સાથે α કોણ બનાવતો હોય તો $\tan\alpha = \dfrac{B_y}{A_x + B_x}$

$$\therefore \alpha = \tan^{-1}\frac{B_y}{A_x + B_x} \qquad (4.9.21)$$

આકૃતિની ભૂમિતિ પરથી

$B_x = PN = B\cos\theta$ અને $B_y = NR = B\sin\theta$ (4.9.22)

પરંતુ $A_x = A$ અને ${B_x}^2 + {B_y}^2 = B^2$

$$\therefore \left|\vec{R}\right| = \left[A^2 + B^2 + 2AB_x\right]^{\frac{1}{2}}$$

હવે $B_x = B\cos\theta$ હોવાથી,

$$\therefore \left|\vec{R}\right| = \left[A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (4.9.23)$$

જો પરિણામી $\vec{R}$ સદિશ $\vec{A}$ સાથે એટલે કે X– અક્ષ સાથે α કોણ બનાવતો હોય, તો આકૃતિ પરથી

$$\tan\alpha = \frac{RN}{OP + PN} = \frac{B_y}{A_x + B_x}$$

$$= \frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta}$$

$$\therefore \alpha = \tan^{-1}\frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta} \qquad (4.9.24)$$

આમ, સમીકરણ (4.9.23) અને સમીકરણ (4.9.24)થી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના નિયમનો ઉપયોગ કરી $\vec{A} + \vec{B}$ નું અનુક્રમે મૂલ્ય અને દિશા મેળવી શકાય છે. તમારી જાતે $\vec{A} - \vec{B}$ માટે

$$|\vec{R}| = \left[A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta\right]^{\frac{1}{2}}$$

અને $\alpha = \tan^{-1}\dfrac{B\sin\theta}{A - B\cos\theta}$ જાતે મેળવો.

અત્રે θ એ $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ વચ્ચેનો કોણ છે.

4.10 બે સદિશોના ગુણાકાર (Multiplication of Two Vectors)

સદિશ રાશિઓને મૂલ્ય અને દિશા બંન્ને હોવાથી તેમના ગુણાકાર સાદા બીજગણિતના નિયમોને અનુસરતા નથી. બે સદિશ રાશિઓના વિશિષ્ટ ગુણાકાર કરીને નવી ભૌતિક રાશિઓ મેળવી શકાય છે. આ રીતે મળતી નવી રાશિ

સદિશ અથવા અદિશ હોઈ શકે છે. આ પ્રકારના ગુણાકારોને અનુક્રમે સદિશ અને અદિશ ગુણાકાર કહે છે. અહીં ગુણાકારનો વ્યાપક અર્થ એ સમજવાનો છે કે તે સદિશોનું ગુણાકાર જેવું લાગતું ચોક્કસ પ્રકારનું સંયોજન છે. અર્થાત્ સદિશોના ગુણાકાર બે રીતે કરી શકાય છે. (1) અદિશ ગુણાકાર અને (2) સદિશ ગુણાકાર.

4.10.1 બે સદિશોનો અદિશ ગુણાકાર (Scalar products of two vectors)

બે સદિશ $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ના અદિશ ગુણાકારને નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયીત કરવામાં આવે છે :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}|\ |\vec{B}|\cos\theta$$

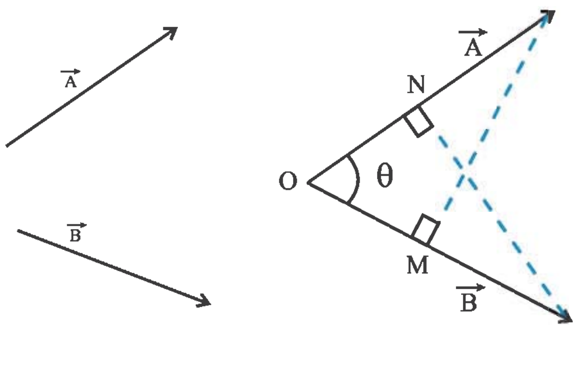
$$\therefore\ \vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta \qquad (4.10.1)$$

જ્યાં θ એ $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ વચ્ચેનો ખૂણો છે.

આવા ગુણાકારને આપેલા બે સદિશો વચ્ચે ડોટ (·)નું ચિહ્ન મૂકીને દર્શાવાતો હોઈ તેને ડોટ ગુણાકાર પણ કહે છે.

આકૃતિ 4.20.(a) માં દર્શાવેલ બે સદિશો $\vec{A}$ અને $\vec{B}$નો સદિશ ગુણાકાર કરવા માટે કોઈ એક સામાન્ય બિંદુ O માંથી (જુઓ આકૃતિ 4.20 (b)). આ સદિશો દોરો.

હવે સદિશ $\vec{A}$ના શીર્ષ (head) પરથી $\vec{B}$ પર લંબ દોરીએ, તો OM સદિશ $\vec{A}$નો સદિશ $\vec{B}$ પરનો પ્રક્ષેપ કહેવાય. સમીકરણ (4.10.1) પરથી



આકૃતિ 4.20

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$$

$$\therefore\ \vec{A} \cdot \vec{B} = B(A\cos\theta) \qquad (4.10.2)$$

આકૃતિ 4.20.(b) પરથી સ્પષ્ટ છે કે

$$\cos\theta = \frac{OM}{A}$$

$$\therefore\ OM = (A)(\cos\theta) \qquad (4.10.3)$$

$$\therefore\ \vec{A} \cdot \vec{B} = B(OM)$$

= ($\vec{B}$નું મૂલ્ય) ($\vec{A}$ નો $\vec{B}$ પરનો પ્રક્ષેપ) (4.10.4)

અથવા આ જ રીતે,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A(B\cos\theta) = A(ON)$$

= ($\vec{A}$નું મૂલ્ય) ×

($\vec{B}$નો $\vec{A}$ પરનો પ્રક્ષેપ) (4.10.5)

આમ, બે સદિશોનો સદિશ ગુણાકાર એટલે બેમાંથી એક સદિશનું મૂલ્ય અને બીજા સદિશનો પહેલા સદિશ પરના પ્રક્ષેપનો ગુણાકાર.

4.10.2 અદિશ ગુણાકારના ગુણધર્મો (Properties of scalar product)

(1) ક્રમનો નિયમ (Commutative Law) :

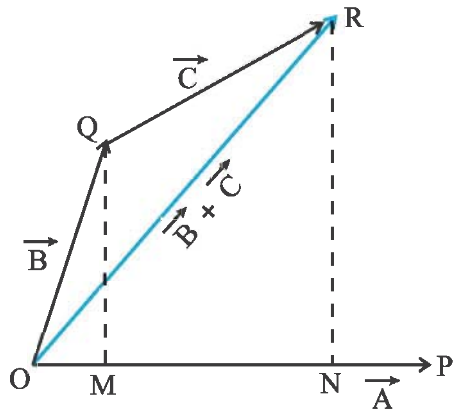
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta = BA\cos\theta = \vec{B}\cdot\vec{A} \qquad (4.10.6)$$

આમ, બે સદિશોનો અદિશ ગુણાકાર સમક્રમી છે.

(2) વિભાજનનો નિયમ (Distributive Law) :

આકૃતિ 4.21માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે,

$\vec{OP} = \vec{A}$, $\vec{OQ} = \vec{B}$ અને $\vec{QR} = \vec{C}$ હવે,



આકૃતિ 4.21

$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})$ = ($\vec{A}$નું મૂલ્ય) (($\vec{B}+\vec{C}$) નો $\vec{A}$ પરનો પ્રક્ષેપ)

$$= |\vec{A}|(ON)$$

$$= |\vec{A}|(OM + MN)$$

$$= |\vec{A}|(OM) + |\vec{A}|(MN) \qquad (4.10.7)$$

$\therefore\ \vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = |\vec{A}|$ ($\vec{B}$નો $\vec{A}$ પરનો પ્રક્ષેપ)

$+\ |\vec{A}|$ ($\vec{C}$ નો $\vec{A}$ પરનો પ્રક્ષેપ)

$$\therefore\ \vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C} \tag{4.10.8}$$

આમ, બે સદિશોનો અદિશ ગુણાકાર સરવાળાના સંદર્ભમાં વિભાજનનો ગુણધર્મ ધરાવે છે.

(3) જો $\vec{A} \parallel \vec{B}$, હોય, તો $\theta = 0^\circ$

$$\therefore\ \vec{A}\cdot\vec{B} = AB\ cos\ 0^\circ = AB \tag{4.10.9}$$

વળી, $\vec{A}\cdot\vec{A} = |\vec{A}|\ |\vec{A}| = A^2$

$$\therefore\ |\vec{A}| = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}} \tag{4.10.10}$$

આમ, સદિશનું મૂલ્ય તેના પોતાની સાથેના અદિશ ગુણાકારના વર્ગમૂળના મૂલ્ય જેટલું હોય છે.

(4) જો $\vec{A} \perp \vec{B}$ હોય, તો $\theta = 90^\circ$:

$$\therefore\ \vec{A}\cdot\vec{B} = AB\ cos\ 90^\circ = 0$$

આમ, પરસ્પર લંબ એવા બે સદિશોનો અદિશ ગુણાકાર શૂન્ય હોય છે.

(5) કાર્તેઝીય યામપદ્ધતિના એકમ સદિશોનો અદિશ ગુણાકાર (Scalar products of unit vectors in Cartesian co-ordinate system) :

$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$ અને

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0 \tag{4.10.11}$$

(6) સદિશોના કાર્તેઝીય ઘટકોના સ્વરૂપમાં અદિશ ગુણાકાર (Scalar product in terms of Cartesian Component of vectors) :

જો $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ અને

$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ હોય તો,

$$\vec{A}\ .\ \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$\therefore\ \vec{A}\ .\ \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{4.10.12}$$

(7) બે સદિશો વચ્ચેનો કોણ (Angle between two vectors) $\vec{A}\ .\ \vec{B} = |\vec{A}|\ |\vec{B}|\ cos\theta$

$$\therefore\ cos\ \theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\ |\vec{B}|}$$

$$= \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\ \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} \tag{4.10.13}$$

આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને આપેલા બે સદિશો વચ્ચેનો કોણ શોધી શકાય છે.

ઉદાહરણ 8 : બે સદિશો $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ અને $\vec{B} = \hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$નો અદિશ ગુણાકાર શોધો.

ઉકેલ : $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_y\,B_y + A_z\,B_z$

$= 2 + 3 + 12$

$= 17$ એકમ

ઉદાહરણ 9 : સદિશો વચ્ચેનો $\vec{A} = -2\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ અને $\vec{B} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ વચ્ચેનો કોણ શોધો.

ઉકેલ :

$$cos\ \theta = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\ \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

$$= \frac{-4 + 8 + 8}{\sqrt{24}\ \sqrt{24}} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

$\therefore\ \theta = 60^\circ$

ઉદાહરણ 10 : જો સદિશ $\vec{A} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$ અને $\vec{B} = 6\hat{i} + 8\hat{j} + m\hat{k}$ પરસ્પર લંબ હોય, તો mની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ પરસ્પર લંબ હોવાથી

$\vec{A}.\vec{B} = 0$

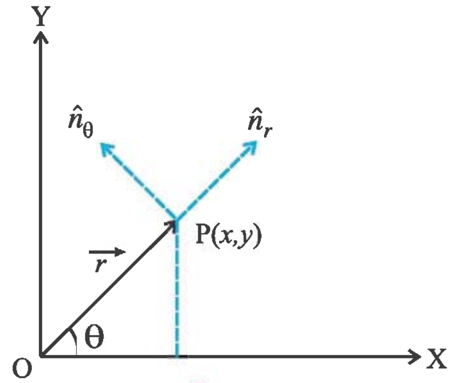
$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_y\,B_y + A_z\,B_z = 0$

$= 24 - 48 + 2m = 0$

$\therefore\ 2m = 24$

$\therefore\ m = 12$

ઉદાહરણ 11 : XY સમતલમાં બિંદુ Pના યામ $(x,\ y)$ છે. આ બિંદુનો સ્થાનસદિશ $\vec{r}$, X-અક્ષ સાથે θ કોણ બનાવે છે, તો X Y સમતલમાં સદિશ $\vec{r}$ની દિશામાંનો એકમસદિશ $\hat{n}_r$ તથા $\vec{r}$ને લંબ દિશામાંનો એકમસદિશ $\hat{n}_\theta$ શોધો. (આકૃતિ 4.22).



આકૃતિ 4.22

ઉકેલ : વ્યાખ્યા અનુસાર

$$\hat{n}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{r}$$

$$\therefore \ \hat{n}_r = \frac{x}{r}\hat{i} + \frac{y}{r}\hat{j}$$

or $\hat{n}_r = cos\,\theta\hat{i} + sin\,\theta\,\hat{j}$, (આકૃતિ 4.22 પરથી)

$\hat{n}_r$ સદિશને $\frac{\pi}{2}$ જેટલું ભ્રમણ આપતાં મળતો સદિશ $\hat{n}_r$ ને લંબ હોય છે. આ સદિશને $\hat{n}_\theta$.

$$\hat{n}_\theta = cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\hat{i} + sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\hat{j}$$

$$\therefore \hat{n}_\theta = -sin\theta\ \hat{i} + cos\theta\ \hat{j}$$

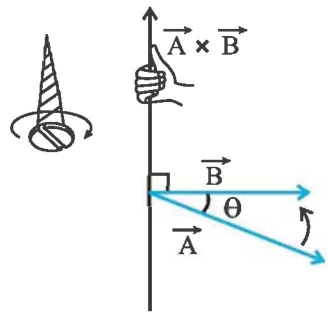
નોંધ : અત્રે આપણે θ માં વિષમઘડી (anti-clockwise) દિશામાં $\frac{\pi}{2}$ જેટલો વધારો લીધો છે.

4.10.3 બે સદિશોનો સદિશ ગુણાકાર (Vector product of two vectors)

બે સદિશો $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ના સદિશ ગુણાકારને નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે :

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}|\ |\vec{B}|\ sin\ \theta\ \hat{n}$$

જ્યાં θ એ $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ વચ્ચેનો કોણ છે. $\hat{n}$ એ $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ વડે રચાતા સમતલને લંબદિશામાંનો એકમસદિશ છે, જેની દિશા જમણા હાથના સ્ક્રૂના નિયમ અનુસાર નક્કી કરી શકાય છે. જમણા હાથના સ્ક્રૂનો નિયમ



આકૃતિ 4.23

આકૃતિ 4.23માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે જમણા હાથના સ્ક્રૂને સદિશ $\vec{A}$ તથા $\vec{B}$ વડે રચાતા સમતલને લંબ રૂપે ગોઠવી $\vec{A}$થી $\vec{B}$ તરફ ફેરવતાં જે દિશામાં સ્ક્રૂ આગળ વધે તે દિશા $\hat{n}$ની એટલે કે પરિણામી સદિશ $\vec{A} \times \vec{B}$ની દિશા છે. બે સદિશોના સદિશ ગુણાકારની દિશા જમણા હાથના નિયમ પરથી પણ શોધી શકાય છે. જમણા હાથના પંજાને પ્રસારો અને આંગળીઓને $\vec{A}$ થી $\vec{B}$ તરફ વાળતાં, બહારની દિશા તરફ વિસ્તરેલ અંગૂઠો, $\vec{A} \times \vec{B}$ ની દિશા દર્શાવે છે. સદિશ ગુણાકારને બે સદિશો વચ્ચે ક્રૉસ (×)નું ચિહ્ન મૂકીને દર્શાવાતો હોઈ, તેને બે સદિશોનો ક્રૉસ ગુણાકાર પણ કહે છે.

4.10.4 બે સદિશોના સદિશ ગુણાકારના ગુણધર્મો (Properties of vector product of two vectors)

(1) $\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$, બે સદિશોના સદિશ ગુણાકાર સમક્રમી નથી.

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \qquad (4.10.14)$$

આ પરિણામ જમણા હાથના સ્ક્રૂનો નિયમ વાપરીને સમજી શકાય છે.

(2) વિભાજનનો નિયમ,

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{B}) + (\vec{A}\times\vec{C}) \quad (4.10.15)$$

સદિશ ગુણાકારને પણ લાગુ પડે છે.

(3) જો બે સદિશો સમાંતર ($\theta = 0^o$) કે પ્રતિસમાંતર ($\theta = 180^o$) હોય, તો $sin\ (0^o) = sin\ (180^o) = 0$.

હોવાથી આવા સદિશોનો સદિશ ગુણાકાર શૂન્ય સદિશ થશે.

(4) જો $\vec{A} \perp \vec{B}$ હોય તો, $\theta = 90^o$

$$\therefore sin\ \theta = sin\ 90^o = 1$$

$$\therefore\ \vec{A} \times \vec{B} = AB\ sin\ 90^o = AB\,\hat{n} \qquad (4.10.16)$$

(5) કાર્તેઝીય યામપદ્ધતિમાં એકમસદિશ માટે સદિશ ગુણાકારો

$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$ (4.10.17)

અને $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$, $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$, $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$, $\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$, $\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$ (4.10.18)

(6) કાર્તેઝીય ઘટકોના સ્વરૂપમાં સદિશ ગુણાકાર

$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ અને

$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ હોય તો,

$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \times (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$

$\vec{A} \times \vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}$ (4.10.19)

$\therefore$ હવે નિશ્ચાયક , $\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} =$

$(A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}$ (4.10.20)

સમીકરણ (4.10.19) અને (4.10.20) પરથી

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (4.10.21)$$

ઉદાહરણ 12 : સદિશો $\vec{A} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ અને $\vec{B} = \hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$નો સદિશ ગુણાકાર શોધો.

ઉકેલ : $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

$= (8 + 3)\hat{i} + (-1 - 16)\hat{j} + (12 - 2)\hat{k}$

$= 11\hat{i} - 17\hat{j} + 10\hat{k}$

ઉદાહરણ 13 : જો સદિશ $\vec{A} = 2\hat{i} - 10\hat{j}$ અને સદિશ $\vec{B} = 4\hat{i} - 20\hat{j}$ હોય, તો સાબિત કરો કે બંને સદિશો એકબીજાને સમાંતર છે.

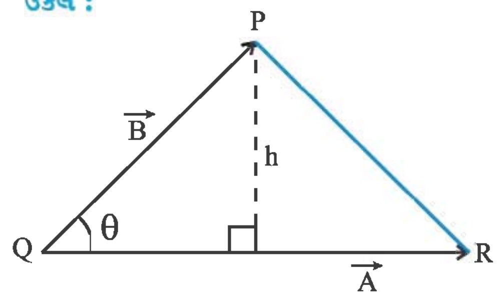
ઉકેલ : બે સદિશો એકબીજાને સમાંતર હોય, તો તેમનો ક્રોસ (સદિશ) ગુણાકાર શૂન્ય થવો જોઈએ.

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -10 & 0 \\ 4 & -20 & 0 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\vec{A}$ અને $\vec{B}$ એકબીજાને સમાંતર છે.

ઉદાહરણ 14 : સાબિત કરો કે $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ના સદિશ ગુણાકારનું મૂલ્ય, $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ને સંલગ્ન બાજુઓ વડે દર્શાવીને બનાવેલ ત્રિકોણનાં ક્ષેત્રફળ કરતાં બમણું હોય છે.

ઉકેલ :



આકૃતિ 4.24

આકૃતિ 4.24 માં ΔPQRનું ક્ષેત્રફળ

$= \frac{1}{2}|\vec{A}|h$

$= \frac{1}{2}|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$

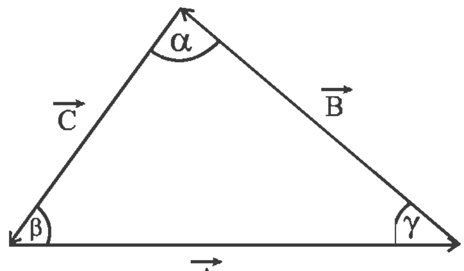
$\therefore$ 2(ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ) $= |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta = |\vec{A} \times \vec{B}|$

$\therefore |\vec{A} \times \vec{B}| = 2$ (ΔPQRનું ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ)

ઉદાહરણ 15 : સદિશ ગુણાકારોનો ઉપયોગ કરી, સમતલીય ત્રિકોણ (plane triangle) માટે સાબિત કરો કે,

$$\frac{\sin\alpha}{A} = \frac{\sin\beta}{B} = \frac{\sin\gamma}{C}$$

ઉકેલ : જ્યાં α, β તથા γ ત્રિકોણના ખૂણાઓ છે અને A, B, C તે અનુક્રમે ખૂણાઓ α, β અને γ સામેની ત્રિકોણની બાજુઓની લંબાઈઓ છે. આપણે જાણીએ છીએ કે બે સદિશોના સદિશ ગુણાકારનું મૂલ્ય, તે બે સદિશો જેની પાસપાસેની બે બાજુઓ હોય તેવા ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળ કરતાં બમણું હોય છે. આ પરિણામના સંદર્ભમાં આકૃતિ 4.25 તપાસતાં.



આકૃતિ 4.25

$$\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = \left|\vec{B} \times \vec{C}\right| = \left|\vec{C} \times \vec{A}\right|$$

$\therefore$ AB sin $(\pi - \gamma)$ = BC sin $(\pi - \alpha)$ = CA sin $(\pi - \beta)$

$\therefore$ AB $sin\ \gamma$ = BC $sin\ \alpha$ = CA $sin\ \beta$

બધાં પદોને ABC વડે ભાગતાં,

$$\therefore \frac{sin\ \gamma}{C} = \frac{sin\ \alpha}{A} = \frac{sin\ \beta}{B}$$

4.11 તત્કાલીન વેગ (Instantaneous Velocity)

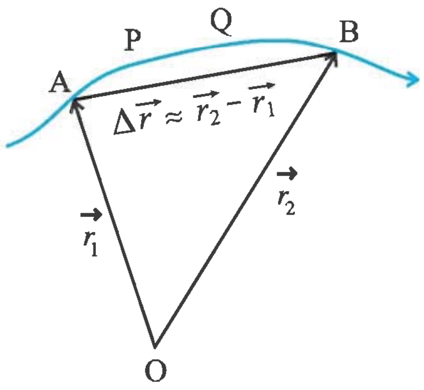
આકૃતિ 4.26(a)માં કોઈ કણનો XY સમતલમાં APQB વક્રાકાર ગતિપથ દર્શાવેલ છે. ધારો કે t સમયે કણ A બિંદુ પર અને ત્યાર બાદ $t + \Delta t$ સમયે B બિંદુ પર છે. કોઈ સંદર્ભબિંદુની સાપેક્ષે આ બે બિંદુઓના સ્થાન. સદિશો અનુક્રમે $\vec{r_1} = \vec{OA}$ અને $\vec{r_2} = \vec{OB}$ છે.

કણ A બિંદુથી B બિંદુ પર જાય તે દરમિયાન તેના સ્થાનમાં થતો ફેરફાર, સ્થાનાંતર સદિશ $\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$ વડે દર્શાવ્યો છે. આ સ્થાનાંતર માટે લાગતો સમય Δt છે.

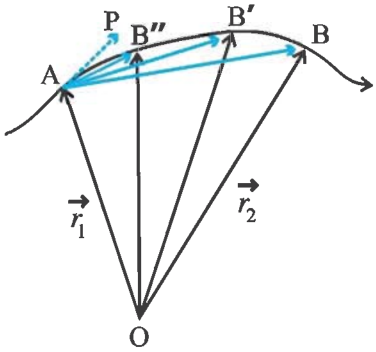
આપેલ સમયગાળા Δt દરમિયાન કણના સરેરાશ વેગની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે અપાય છે.

$$\text{સરેરાશ વેગ} = \frac{\text{સ્થાનાંતર (સદિશ)}}{\text{સમય (અદિશ)}}$$

$$\therefore <\vec{v}> = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (4.11.1)$$



(a)



(b)

આકૃતિ 4.26

સરેરાશ વેગ $<\vec{v}>$ એ સદિશ રાશિ છે. અને તેની દિશા $\Delta\vec{r} = \vec{AB}$ ની દિશામાં છે. જુદા-જુદા સમયગાળા દરમ્યાન મળતો સરેરાશ વેગ સમાન હોય, તો તે કણ અચળ-વેગી ગતિ કરે છે તેમ કહેવાય. આપેલ સમયગાળા Δt દરમિયાનનો સ્થાનાંતરસદિશ $\Delta\vec{r}$ એ કણની પ્રારંભિક સ્થિતિ અને Δt જેટલા સમય બાદની સ્થિતિને જોડતો સદિશ જ છે, તેથી તે કણે કાપેલું ખરેખર અંતર દર્શાવતો ન પણ હોય. ખરેખર તો કણ APQB માર્ગે ગતિ કરીને A થી B પર ગયું છે. વળી, Δt જેટલા સમયગાળા દરમિયાન કણના વેગમાં ફેરફારો પણ થયા હોય. **આમ, કણના સરેરાશ વેગ પરથી કણનો ખરેખરો ગતિપથ તેમજ ગતિપથના જુદા જુદા બિંદુ પાસે તેના વેગની માહિતી મળતી નથી.**

આકૃતિ 4.26(b) માં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે આપણે સમયગાળા Δtને નાનો ને નાનો કરતા જઈએ, તો તે t સમયે બિંદુ A પર રહેલ કણ Δt સમયગાળા બાદ B બિંદુના બદલે B' પર, B'ના બદલે B'' પર... હશે. આ રીતે સમયગાળો સૂક્ષ્મ કરતા કણને તેનો વેગ બદલવા માટેનો સમયગાળો અતિસૂક્ષ્મ આપીએ છીએ

$(\Delta t \to 0)$. આમ, $\lim_{\Delta t \to 0}$ લેતાં આકૃતિ 4.26(b) પરથી જોઈ શકાય છે કે કણનો સ્થાનાંતરસદિશ કણના ગતિપથને બિંદુ A પાસે સ્પર્શક APની દિશામાં ગોઠવાશે. આમ, આવા સંજોગોમાં કણનો વેગ એક ચોક્કસ મૂલ્ય અને દિશા ધારણ કરે છે. આ વેગને t સમયે કણનો બિંદુ A પાસેનો તત્કાલીન (તાત્ક્ષણિક) વેગ ($\vec{v}$) કહે છે. તેને સંકેતમાં નીચે મુજબ દર્શાવવામાં આવે છે :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (4.11.2)$$

અહીં $\frac{d\vec{r}}{dt}$ ને $\vec{r}$ નું સમય t પ્રત્યે વિકલિત (derivative) કહે છે. $\frac{d\vec{r}}{dt}$ ને સંકેત $\dot{\vec{r}}$ વડે દર્શાવાય છે. સામાન્ય રીતે તત્કાલીન વેગને વેગ કહે છે. વેગનો SI એકમ m s^{-1} છે.

પદાર્થના ગતિપથના કોઈ પણ બિંદુ પાસે તેનો વેગ તે બિંદુ પાસે ગતિપથને દોરેલા સ્પર્શકની દિશામાં હોય છે.

વેગને તેના ઘટકોના સ્વરૂપ દર્શાવવા માટે આકૃતિ 4.26(a)માં દર્શાવેલાં બિંદુઓ A અને B ના યામો ધારો કે (x_1, y_1) અને (x_2, y_2) છે.

$$\therefore \ \vec{r}_1 = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} \text{ અને } \vec{r}_2 = x_2\hat{i} + y_2\hat{j}$$

$$\therefore \ \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}$$

$$= \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} \qquad (4.11.3)$$

જ્યાં $\Delta x = x_2 - x_1$ અને $\Delta y = y_2 - y_1$ છે.

સમીકરણ (4.11.3) નો ઉપયોગ સમીકરણ (4.11.2)માં કરતાં,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}}{\Delta t}$$

$$= \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \qquad (4.11.4)$$

જ્યાં $v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$ કણના વેગ $\vec{v}$ નો X ઘટક (4.11.5)

અને $v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$ કણના વેગ $\vec{v}$ નો Y ઘટક છે. (4.11.6)

જો ગતિ કરતા કણના યામો x અને y સમયના વિધેય હોય, તો ઉપર્યુક્ત સૂત્રોનો ઉપયોગ કરી કણના વેગના x અને y ઘટકો (v_x અને v_y) મેળવી શકાય છે અને તેનો ઉપયોગ કરી વેગનું મૂલ્ય $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ પરથી અને દિશા $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$ પરથી મેળવી શકાય છે. અહીં θ એ વેગની દિશા અને X-અક્ષ વચ્ચેનો ખૂણો છે.

ઉદાહરણ 16 : કોઈ કણનો સ્થાનસદિશ સૂત્ર $\vec{r}(t) = t^2\hat{i} + 3t\hat{j} + 24\hat{k}$ વડે આપી શકાય છે : તો (i) કણના વેગનું સૂત્ર અને (ii) $t = 2$ s માટે તેના વેગનું મૂલ્ય અને દિશા શોધો.

યાદ રાખો કે, $\left[\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}\right]$

ઉકેલ :

(i) કોઈ પણ સમયે

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2\hat{i} + 3t\hat{j} + 24\hat{k})$$

$$\therefore \ \vec{v}(t) = 2t\hat{i} + 3\hat{j}$$

(ii) $t = 2$ સેકન્ડે વેગ મેળવવા માટે ઉપરના સૂત્રમાં $t = 2$ s મૂકતાં

$$\vec{v}(2) = 2(2)\hat{i} + 3\hat{j}$$

$$= 4\hat{i} + 3\hat{j}$$

∴ $v_x = 4\text{m s}^{-1}$ અને $v_y = 3\text{m s}^{-1}$

∴ વેગનું મૂલ્ય =

$$\left|\vec{v}(2)\right| = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = 5\text{m s}^{-1}$$

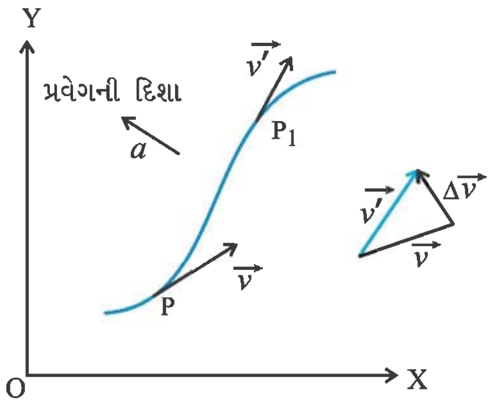
જો વેગની દિશા X-અક્ષ સાથે θ કોણ બનાવતી હોય તો

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = tan^{-1}\,0.75 \approx 37^\circ$$

4.12 પ્રવેગ (Acceleration)

વેગના ફેરફારના સમયદરને પ્રવેગ કહે છે.

ધારો કે આકૃતિ 4.27 દર્શાવ્યા પ્રમાણે t સમયે કોઈ કણ X સમતલમાં તેના ગતિપથના P બિંદુ પાસે વેગ $\vec{v}$ છે. $t + \Delta t$ સમયે કણ P_1 પર પહોંચે છે અને તેનો વેગ ત્યાં $\vec{v'}$ છે. આમ, Δt સમયમાં કણના વેગમાં થતો ફેરફાર $\Delta\vec{v} = \vec{v'} - \vec{v}$ છે.



આકૃતિ 4.27

∴ વ્યાખ્યા મુજબ સરેરાશ પ્રવેગ = $\frac{\text{વેગમાં થતો ફેરફાર}}{\text{સમય}}$

$$\therefore <\vec{a}> = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad (4.12.1)$$

સરેરાશ પ્રવેગ $<\vec{a}>$ એ સદિશ રાશિ છે જેની દિશા વેગનો ફેરફાર દર્શાવતા સદિશ $\Delta\vec{v}$ ની દિશામાં હોય છે.

સરેરાશ પ્રવેગ પરથી P અને P_1 વચ્ચેના કણના ખરેખર પથ પર ક્ષણે-ક્ષણે કણનો વેગ કઈ રીતે બદલાય છે, તેની માહિતી મળતી નથી.

સમીકરણ (4.12.1)માં $\lim_{\Delta t \to 0}$ લેતાં t સમયે તત્કાલીન પ્રવેગ (Instantaneous acceleration) $\vec{a}$ મળે છે. તત્કાલીન પ્રવેગને સામાન્ય રીતે પ્રવેગ કહે છે. પ્રવેગનો SI એકમ m s^{-2} છે.

∴ t સમયે તત્કાલીન પ્રવેગ =

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (4.12.2)$$

હવે, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$$\therefore \vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \qquad (4.12.3)$$

સમીકરણ (4.12.2) માં $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$ મૂકતાં

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v_x\hat{i} + v_y\hat{j}) = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j}$$

$$\therefore \vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

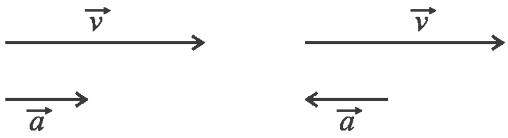
જ્યાં, $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x$ = કણના પ્રવેગ $\vec{a}$ નો X-ઘટક (4.12.4)

$a_y = \frac{dy}{dt} = \dot{v}_y$ = કણના પ્રવેગ $\vec{a}$ નો Y-ઘટક (4.12.5)

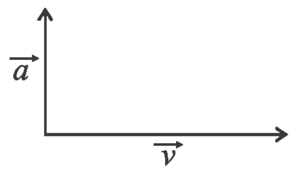
જો ગતિ કરતા કણના યામો x અને y સમયના વિધેય તરીકે હોય તો સમીકરણ (4.12.4) અને સમીકરણ (4.12.5) નો ઉપયોગ કરીને કણના વેગના X અને Y ઘટકો (v_x અને v_y) મેળવી શકાય અને તેના પરથી સમીકરણ (4.12.4) અને (4.12.5)નો ઉપયોગ કરી કણના પ્રવેગના X અને Y ઘટકો (a_x અને a_y) મેળવી શકાય.

વેગ એ સદિશ રાશિ હોઈ તેનામાં ફેરફાર ત્રણ રીતે થઈ શકે :

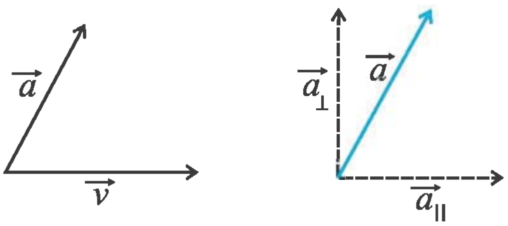
(i) માત્ર મૂલ્યમાં ફેરફાર કરીને (ii) માત્ર દિશામાં ફેરફાર કરીને અને (iii) મૂલ્ય અને દિશા બન્નેમાં ફેરફાર કરીને.



આકૃતિ 4.27 (a)



આકૃતિ 4.27 (b)



આકૃતિ 4.27 (c)

આકૃતિ 4.27(a) માં દર્શાવ્યા મુજબ જો પ્રવેગ $\vec{a}$ ની દિશા વેગ ($\vec{v}$) ની દિશામાં અથવા વેગ ($\vec{v}$)ની વિરુદ્ધ દિશામાં હોય, તો વેગના માત્ર મૂલ્યમાં અનુક્રમે વધારો અથવા ઘટાડો થાય છે.

આકૃતિ 4.27(b) માં દર્શાવ્યા મુજબ જો પ્રવેગ $\vec{a}$ ની દિશા વેગ ($\vec{v}$) ની દિશાને લંબ હોય, તો વેગની માત્ર દિશા જ બદલાય છે.

આકૃતિ 4.27(c) માં દર્શાવ્યા મુજબ જો પ્રવેગ ($\vec{a}$) અને વેગ ($\vec{v}$)ની દિશા વચ્ચે અમુક ખૂણો (0°, 90° અથવા 180° સિવાયનો) બનતો હોય, તો પ્રવેગ $\vec{a}$ ના વેગને સમાંતર (a_{11}) અને વેગને લંબ ($a_{\perp}$) એવા બે ઘટકો લેતાં જોઈ શકાય છે કે (a_{11}) ને કારણે વેગના મૂલ્યમાં ફેરફાર થાય છે, જ્યારે $a_{\perp}$ના કારણે વેગની દિશામાં ફેરફાર થાય છે.

ઉદાહરણ 17 : કણનો t સમયે વેગ $\vec{v}(t) = 7t\hat{i} + 16\hat{k}$ છે, તો કણનો પ્રવેગ મેળવો.

ઉકેલ : પ્રવેગ $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

$$\therefore \ \vec{a} = \frac{d}{dt}(7t\hat{i} + 16\hat{k})$$

$$= 7\hat{i} \text{ m s}^{-2}$$

ઉદાહરણ 18 : ગતિ કરતાં કોઈ કણનો સ્થાનસદિશ સમયની સાપેક્ષે સૂત્ર $\vec{r} = \alpha t\hat{i} - \beta t^2\hat{j}$ અનુસાર બદલાય છે, અહીં α અને β એ ધન અચળાંક છે, તો (a) કણનો ગતિમાર્ગ નક્કી કરો, (b) વેગ અને પ્રવેગને સમયના વિધેય તરીકે મેળવો અને તેનાં મૂલ્યો પણ મેળવો.

ઉકેલ :

(a) $\vec{r} = \alpha t\hat{i} - \beta t^2\hat{j}$ આપેલ છે અને

$$\vec{r} = x\hat{i} - y\hat{j}$$

$\therefore$ $x = \alpha t$ અને $y = -\beta t^2$. આમાંથી t નો લોપ કરતાં,

$y = -\dfrac{\beta x^2}{\alpha^2}$ કે જે પરવલય (parabola) ના સમીકરણ

$y = ax - bx^2$ પ્રકારનું ($a = 0$ અને $b = \dfrac{\beta}{\alpha^2}$) છે.

માટે કહી શકાય કે કથિત કણનો ગતિમાર્ગ પરવલયાકાર છે.

(b) કણનો વેગ $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

$$\therefore \ \vec{v} = \frac{d}{dt}(\alpha t\hat{i} - \beta t^2\hat{j}) = \alpha\hat{i} - 2\beta t\hat{j}$$

આ સમીકરણ કણના વેગને સમયના વિધેય તરીકે દર્શાવે છે.

$$\therefore \text{ વેગનું મૂલ્ય } |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$= \sqrt{\alpha^2 + (-2\beta t)^2} = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2}$$

હવે કણનો પ્રવેગ $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

$$\therefore \ \vec{a} = \frac{d}{dt}(\alpha\hat{i} - 2\beta t\hat{j}) = -2\beta\hat{j}$$

આ સમીકરણમાં સમય t આવતો ન હોઈને કહી શકાય કે કણનો પ્રવેગ અચળ છે અને તે ઋણ Y દિશામાં છે.

પ્રવેગનું મૂલ્ય

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(0)^2 + (-2\beta)^2}$$

$$= 2\beta$$

ઉદાહરણ 19 : કોઈ કણનો સ્થાનસદિશ સમયના વિધેય તરીકે નીચેના સૂત્ર વડે મળે છે :

$\vec{r} = \vec{b}\, t\,(1 - \alpha t)$; જ્યાં $\vec{b}$ એ અચળ સદિશ છે અને α એ કોઈ ધન સંખ્યા છે. તો (i) તે કણના વેગ અને પ્રવેગને સમયના વિધેય સ્વરૂપે મેળવો અને (ii) કોઈ એક બિંદુથી શરૂ કરીને ત્યાં જ પાછા આવવા માટે કણને લાગતો સમય શોધો.

ઉકેલ : (i) $\vec{r} = \vec{b}\, t\,(1 - \alpha t)$ (1)

$$\therefore \ \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\{\vec{b}\, t\,(1 - \alpha t)\}$$

$$= \frac{d}{dt}\{(\vec{b}\, t - \vec{b}\,\alpha t^2)\}$$

$$\therefore \ \vec{v}(t) = \vec{b} - 2\vec{b}\,\alpha\, t$$

$$= \vec{b}\,(1 - 2\alpha t) \quad (2)$$

આ જ રીતે પ્રવેગ,

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\{\vec{b} - 2\vec{b}\,\alpha t\}$$

$$= 0 - 2\vec{b}\,\alpha$$

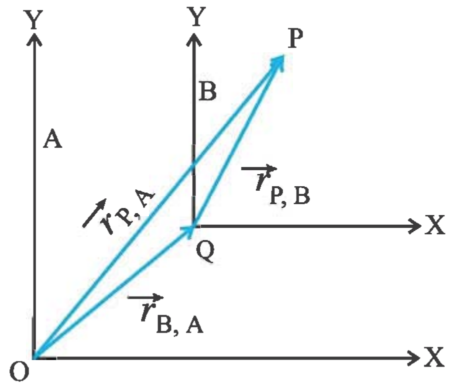
$$\therefore \ \vec{a}(t) = -2\vec{b}\,\alpha$$

(ii) આ કણની ગતિની શરૂઆત (એટલે કે $t = 0$ સમયે) $\vec{r} = \vec{0}$ થી કરે છે. સમીકરણ (1) પરથી જોઈ શકાય છે કે $t = \frac{1}{\alpha}$ સમયે પાછું $\vec{r} = \vec{0}$ થાય છે. આમ, $\Delta t = \frac{1}{\alpha}$ જેટલા સમયગાળા દરમિયાન કણે જ્યાંથી ગતિની શરૂઆત કરી હોય ત્યાં જ પાછો ફરે છે.

4.13 સાપેક્ષ વેગ (Relative Velocity)

અત્યાર સુધીની ચર્ચામાં આપણે આપેલ નિર્દેશફ્રેમની સાપેક્ષે કણની ગતિની ચર્ચા કરી છે તથા એ પણ નોંધ્યું કે નિર્દેશફ્રેમ આપણી મરજી પ્રમાણે લઈ શકાય તથા કોઈ પણ કણનો સ્થાનસદિશ $\vec{r}$, વેગ $\vec{v}$ અને પ્રવેગ $\vec{a}$ એ નિર્દેશફ્રેમ પર આધાર રાખે છે.

હવે જોઈશું કે બે જુદી-જુદી નિર્દેશફ્રેમમાંના આપેલ કણના, સ્થાનસદિશ, વેગ અને પ્રવેગના વચ્ચેના સંબંધો નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય છે :



આકૃતિ 4.28

આકૃતિ 4.28 એકબીજાની સાપેક્ષે અચળ વેગથી ગતિ કરતી બે નિર્દેશફ્રેમો A અને B દર્શાવી છે. આવી નિર્દેશફ્રેમોને જડત્વીય નિર્દેશફ્રેમો કહે છે, જેના વિશે વિગતવાર ચર્ચા પરિચ્છેદ 5.11.માં કરેલ છે. ધારો કે એક અવલોકનકાર Aમાંથી અને બીજો અવલોકનકાર Bમાંથી કોઈ એક કણનો અભ્યાસ કરે છે.

ધારો કે t સમયે ગતિ કરતા કણ Pનો ફ્રેમ Aના ઊગમબિંદુ Oને સાપેક્ષે સ્થાનસદિશ $\vec{r}_{P,A} = \vec{OP}$ અને ફ્રેમ B ના ઊગમબિંદુ O'ને સાપેક્ષે સ્થાનસદિશ $\vec{r}_{P,B} = \vec{O'P}$ છે તથા Oની સાપેક્ષે O'નો સ્થાનસદિશ $\vec{r}_{B,A} = \vec{OO'}$ છે.

આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે,

$$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P} = \vec{O'P} + \vec{OO'}$$

$$\therefore \ \vec{r}_{P,A} = \vec{r}_{P,B} + \vec{r}_{B,A} \quad (4.13.1)$$

આ સમીકરણનું સમયની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_{P,A}) = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{P,B}) + \frac{d}{dt}(\vec{r}_{B,A})$$

$$\therefore \ \vec{v}_{P,A} = \vec{v}_{P,B} + \vec{v}_{B,A} \quad (4.13.2)$$

અહીં, $\vec{v}_{P,A}$ એ નિર્દેશફ્રેમ Aની સાપેક્ષે કણનો વેગ, $\vec{v}_{P,B}$ એ નિર્દેશફ્રેમ Bની સાપેક્ષે કણનો વેગ અને $\vec{v}_{B,A}$ એ નિર્દેશફ્રેમ Aની સાપેક્ષે નિર્દેશફ્રેમ Bનો વેગ છે.

ધારો કે કોઈ બે કણો A અને B ના કોઈ એક નિર્દેશફ્રેમ (ધારો કે જમીન) ને સાપેક્ષે વેગ અનુક્રમે $\vec{v}_A$ અને $\vec{v}_B$ છે, તો Bની સાપેક્ષે Aનો વેગ $\vec{v}_{AB}$.

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B \quad (4.13.3)$$

અને Aની સાપેક્ષે Bનો વેગ ($\vec{v}_{BA}$)

$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A \text{ થાય} \quad (4.13.4)$$

આમ, $\vec{v}_{AB} = -\vec{v}_{BA}$

અને $|\vec{v}_{AB}| = |\vec{v}_{BA}|$

ઉદાહરણ તરીકે પૂર્વથી પશ્ચિમ દિશામાં આવેલા એક હાઈવે પર એક કાર 80 km/h ના વેગથી પૂર્વ તરફ, એક ટ્રક પૂર્વ તરફ 60 km/h ના વેગથી ગતિ કરે છે તથા એક મોટરબાઈક પશ્ચિમ તરફ 40 km/h ના વેગથી ગતિ કરે છે. આ બધા વેગો જમીનની સાપેક્ષે લીધેલા છે જે નીચે મુજબ લખી શકાય :

$\vec{v}_{CG} = 80\hat{i}$ km/h, $\vec{v}_{TG} = 60\hat{i}$ km/h અને $\vec{v}_{BG} = -40\hat{i}$ km/h

હવે મોટરબાઈકની સાપેક્ષે કારનો વેગ

$$\vec{v}_{CB} = \vec{v}_{CG} - \vec{v}_{BG}$$

$= 80\hat{i} - (-40\hat{i}) = 120\hat{i}$, ટ્રકની સાપેક્ષે કારનો વેગ $\vec{v}_{CT} = \vec{v}_{CG} - \vec{v}_{TG} = 80\hat{i} - 60\hat{i} = 20\hat{i}$

તથા ટ્રકની સાપેક્ષે મોટરબાઈકનો વેગ

$$\vec{v}_{BT} = \vec{v}_{BG} - \vec{v}_{TG} = -40\hat{i} - 60\hat{i}$$

$= -100\hat{i}$ થાય.

વ્યાપક રીતે કોઈ પણ પદાર્થો P અને Q ના ત્રીજા પદાર્થ X ની સાપેક્ષમાં વેગો જાણતા હોઈએ તો,

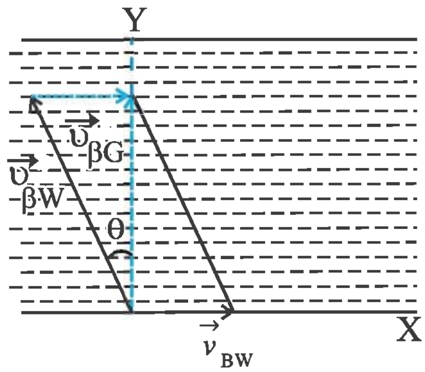
$$\vec{v}_{PQ} = \vec{v}_{PX} + \vec{v}_{XQ} = \vec{v}_{PX} - \vec{v}_{QX} \quad (4.13.5)$$

આ સૂત્ર વેગનાં મૂલ્યો પ્રમાણમાં બહુ મોટા ના હોય ત્યારે (એટલે કે પ્રકાશના વેગની નજીક ન હોય ત્યારે) તથા આમાંનો કોઈ પદાર્થ ભ્રમણ (ચાકગતિ)ના કરતો હોય ત્યારે જ સાચા છે. આ ઉપરાંત આપણે બધી નિર્દેશફ્રેમો માટે સમયના ગાળા સમાન લીધા છે.

ઉદાહરણ 20 : એક હોડી નદીના પાણીમાં 8 km/hની ઝડપથી ગતિ કરી શકે છે. આ હોડીને 4 km/h ના વેગથી વહેતી નદીના એક કાંઠેથી લંબદિશામાં આવેલા બીજા કાંઠાના સ્થાને પહોંચવું હોય તો (i) હોડીને કઈ દિશામાં હંકારવી જોઈએ ? (ii) જો નદી 600 m પહોળી હોય, તો આ નદી પાર કરતાં હોડીને કેટલો સમય લાગશે ?

નોંધ : જ્યારે આપણે એમ કહીએ કે હોડી પાણીમાં 8 km/h ના વેગથી ગતિ કરી શકે છે. ત્યારે તેનો અર્થ એ થાય કે પાણીની સાપેક્ષે હોડીનો વેગ 8 km/h છે. પ્લેનમાં જ્યારે એરહોસ્ટેસ એવું એનાઉન્સમેન્ટ કરે કે પ્લેન 700 km/hના વેગથી ઊડી રહ્યું છે ત્યારે આ પ્લેનનો વેગ વાતાવરણની સાપેક્ષે છે તેમ ગણવું.

ઉકેલ : (i) આકૃતિ 4.29માં દર્શાવ્યા અનુસાર નદી ધન X-દિશામાં વહેતી હોય, તો સામા કાંઠે (એટલે કે Y-અક્ષ પરના બિંદુ સુધી) પહોંચવા માટે હોડીને Y-અક્ષ સાથે ડાબી બાજુ θ ખૂણો બનાવતી દિશામાં હંકારવી પડશે. આ ખૂણો એવો હોવો જોઈએ કે જેથી હોડીનો સામા કાંઠાની સાપેક્ષમાં વેગ કાંઠાને લંબરૂપે મળે.



આકૃતિ 4.29

ધારો કે, $\vec{v}_{BW}$ = પાણીની સાપેક્ષે હોડીનો વેગ કે જે Y–અક્ષ સાથે θ ખૂણો બનાવતી દિશામાં 8 km/h જેટલો છે.

$\vec{v}_{WG}$ = કાંઠાની સાપેક્ષે પાણીનો વેગ કે જે ધન X દિશામાં 4 km/h જેટલો છે અને $\vec{v}_{BG}$ કાંઠાની સાપેક્ષે હોડીનો વેગ જે શોધવો પડશે.

આકૃતિ 4.29 પરથી સ્પષ્ટ છે કે,

$$\text{(i)} \quad \vec{v}_{BG} = \vec{v}_{BW} + \vec{v}_{WG} \quad (a)$$

આ સમીકરણમાં x ઘટકો લેતાં

$0 = 8\cos(90+\theta) + 4\cos 0 = -8\sin\theta + 4$

$$\therefore \sin\theta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \therefore \theta = 30^\circ$$

(ii) સમીકરણ (a) માં Y–ઘટકો લેતાં.

$v_{BG} = 8\cos 30^\circ + 0 = 8 \times 0.866 = 6.928 \approx 6.93$ km/h

આમ હોડીનો કાંઠાની સાપેક્ષે વેગ $v_{BG} = 6.93$ km/h થશે અને આટલા વેગથી 600 m મીટર જેટલું અંતર કાપતાં લાગતો સમય

$$= \frac{\text{Y દિશામાં થતું સ્થાનાંતર}}{\text{Y દિશામાંનો વેગ}}$$

$$= \frac{0.6\text{km}}{6.93\text{km/h}}$$

$= 0.8658$ hr ≈ 5.2 મિનિટ

4.14 સમતલમાં (દ્વિ-પરિમાણમાં) થતી અચળ પ્રવેગી ગતિનાં સમીકરણો (Equations of motion in a plane (two dimensions) with uniform acceleration

ધારો કે કોઈ કણ (પદાર્થ) X–Y સમતલમાં અચળ પ્રવેગ $\vec{a}$ થી ગતિ કરે છે. $t = 0$ સમયે તેનો વેગ $\vec{v}_0$ અને $t = t$ સમયે વેગ $\vec{v}$ છે. પ્રવેગ અચળ હોઈને કોઈ પણ સમયગાળામાં તેનો સરેરાશ પ્રવેગ અને તત્કાલીન પ્રવેગ સમાન હશે.

હવે સમયગાળા $\Delta t = t - 0$ માં વેગનો ફેરફાર $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$ છે.

$$\Delta t = t - 0,\ \Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$$

$$\therefore \vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \text{ નો ઉપયોગ કરતાં,}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - 0} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t} \quad (4.14.1)$$

$$\therefore \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t \quad (4.14.1a)$$

આ સમીકરણને ઘટકોના સ્વરૂપમાં લખતાં (x અને y ઘટકો)

$$v_x = v_{0x} + a_x t \quad (4.14.2)$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t \quad (4.14.3)$$

ધારો કે $t = 0$ સમયે પદાર્થનું સ્થાન $\vec{r}_0$ અને $t = t$ સમયે $\vec{r}$ સદિશો વડે દર્શાવેલ છે. આ સમયગાળા $(t - 0)$ દરમિયાન પદાર્થનો સરેરાશ વેગ

$$= \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}}{2} \text{ થશે.}$$

$\therefore$ t સમયમાં થતું સ્થાનાંતર = સરેરાશ વેગ $\times$ સમય.

$$\therefore \vec{r} - \vec{r}_0 = \left(\frac{\vec{v}_0 + \vec{v}}{2}\right)t \quad (4.14.4)$$

$\vec{v}$ નું મૂલ્ય સમીકરણ (4.14.1)માંથી મુકતાં

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \left(\frac{\vec{v}_0 + \vec{v}_0 + \vec{a}\,t}{2}\right)t$$

$$= \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2$$

$$\therefore \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2 \quad (14.14.5)$$

આ સમીકરણને ઘટકોના સ્વરૂપમાં લખતાં (x અને y ઘટકો)

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (14.14.6)$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad (14.14.7)$$

સમીકરણ (4.14.6) અને (4.14.7) પરથી સ્પષ્ટ છે કે X અને Y દિશામાંની ગતિઓને એકબીજાથી સ્વતંત્ર રીતે વર્ણવી શકાય છે.

આમ સમતલમાં (દ્વિ-પરિમાણમાં) થતી અચળ પ્રવેગી ગતિને બે પરસ્પર લંબ દિશાઓમાં એકીસાથે, જુદા જુદા અચળ પ્રવેગથી થતી એક પારિમાણિક ગતિઓના સંયોજન સ્વરૂપે ગણી શકાય છે. આ એક અગત્યનું પરિણામ છે. (આવાં જ સમીકરણો ત્રિ-પરિમાણમાં થતી ગતિ માટે પણ વાપરી શકાય છે.) બે પરસ્પર લંબદિશાઓ કઈ લેવી તે આપણા ઉપર આધારિત છે.

આમ સમતલ (દ્વિ-પરિમાણ)માં અચળ પ્રવેગ $\vec{a}$ થી થતી ગતિ માટેનાં સમીકરણો નીચે મુજબ લખી શકાય છે.

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2$$

સમીકરણ (4.14.1) અને સમીકરણ (4.14.4) નો ડોટ ગુણાકાર લેતાં,

$$(\vec{a})\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0) = (\vec{v} - \vec{v}_0)\cdot\left(\frac{\vec{v}_0 + \vec{v}}{2}\right)$$

$$v^2 - v_0^2 = 2\vec{a}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

આના પરથી એક પરિમાણમાં અચળપ્રવેગ a થી થતી સુરેખગતિના સમીકરણો નીચે મુજબ થશે :

$$v = v_0 + at$$

$$d = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad \text{અહીં, } d = r - r_0$$

$$v^2 - v_0^2 = 2ad$$

અહીં, d એ t સમયમાં થતું સ્થાનાંતર છે.

ઉદાહરણ 21 : એક કણ ઊગમબિંદુ પાસેથી $2\hat{i}$ m s^{-1} ના વેગથી શરૂ કરીને XY સમતલમાં અચળ પ્રવેગ $\hat{i} + 3\hat{j}$ થી ગતિ કરે છે. (i) જ્યારે તેનો x યામ 30 m હોય ત્યારે તેનો Y યામ કેટલો હશે ? (ii) તે સમયની ઝડપ કેટલી હશે ?

ઉકેલ : (i) દ્વિ-પરિમાણમાં કણના સ્થાનનું સૂત્ર

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2 \text{ છે.}$$

અહીં, $\vec{r}_0 = 0$

$$\therefore \vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2$$

$$\vec{v}_0 = 2\hat{i}\text{ m s}^{-1} \text{ અને } \vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j}\text{ m s}^{-2}$$

$$\therefore \vec{r}(t) = (2\hat{i})t + \frac{1}{2}(\hat{i} + 3\hat{j})^2$$

$$= (2t + \frac{1}{2}t^2)\hat{i} + \frac{3}{2}\hat{j}\,t^2$$

$$\therefore x(t) = 2t + \frac{1}{2}t^2 \text{ અને } y(t) = \frac{3}{2}t^2$$

સમયની કોઈ ક્ષણ માટે $x(t)$ = 30m આપેલ છે.

$$\therefore 30 = 2t + \frac{1}{2}t^2$$

$$\therefore t^2 + 4t - 60 = 0$$

$$\therefore (t + 10)(t - 6) = 0$$

$\therefore$ $t = -10$ s અથવા $t = 6$ s પરંતુ $t = -10$ s શક્ય નથી.

$\therefore$ $t = 6$ sec.

હવે $y(t) = \frac{3}{2}t^2$ માં

$t = 6$ s મૂકતાં $y(t) = \frac{3}{2}(6)^2 = 54$ m

$$y(t) = \frac{3}{2}t^2 \Rightarrow y(6) = \frac{3}{2}(6)^2 = 54 \text{ m}$$

કોઈ પણ સમયે વેગ

$$\therefore \vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\left((2t + \frac{1}{2}t^2)\hat{i} + \frac{3}{2}t^2\hat{j}\right)$$

$$\therefore \vec{v}(t) = (2 + t)\hat{i} + 3t\hat{j}$$

$$\therefore \vec{v}(6) = 8\hat{i} + 18\hat{j}$$

$v_x = 8$ m s^{-1} અને $v_y = 18$ m s^{-1}

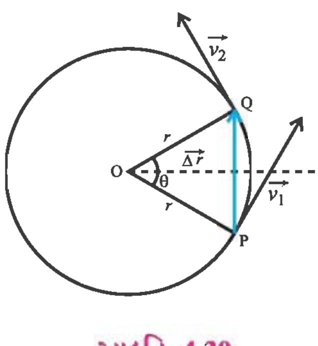
$$\therefore v = \sqrt{(8)^2 + (18)^2}$$

$$= \sqrt{64 + 324}$$

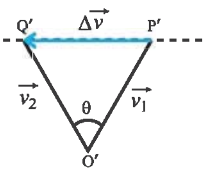
$$= 19.698 \text{ m s}^{-1}$$

4.15 નિયમિત વર્તુળાકાર ગતિ (Uniform Circular Motion)

અચળ ઝડપથી વર્તુળાકાર માર્ગ પર ગતિ કરતા કણની ગતિને નિયમિત વર્તુળાકાર ગતિ કહે છે. આકૃતિ 4.30માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારો કે કોઈ કણ r ત્રિજ્યાના વર્તુળાકાર પથ પર અચળ ઝડપ v થી ગતિ કરે છે.



આકૃતિ 4.30



આકૃતિ 4.31

કોઈ કણ r ત્રિજ્યાના વર્તુળાકાર પથ પર અચળ ઝડપ v થી ગતિ કરે છે. વક્રાકાર માર્ગે ગતિ કરતા કણનો કોઈ બિંદુ પાસે વેગ તે બિંદુ પાસે વક્રને દોરેલા સ્પર્શકની દિશામાં હોય છે. માટે સ્પષ્ટ છે કે વર્તુળ પરના દરેક બિંદુ પાસે કણના વેગની દિશા સતત બદલાતી જાય છે, પરંતુ તેનું મૂલ્ય અચળ રહે છે.

વેગની દિશા બદલાતી હોવાથી કણની ગતિ તો પ્રવેગિત જ કહેવાય. આમ, નિયમિત વર્તુળગતિ કરતા કણની ગતિ પ્રવેગિત ગતિનું ઉદાહરણ છે. (અત્રે પ્રવેગ સદિશની દિશા પણ બદલાય છે, તેથી આ ઉદાહરણને અચળ મૂલ્ય ધરાવતા ચલિત પ્રવેગવાળી ગતિ પણ કહી શકાય.)

પરિચ્છેદ 4.12 માં જોયું કે જો વેગની માત્ર દિશા જ બદલાતી હોય, તો તેવા કિસ્સામાં પ્રવેગની દિશા વેગની દિશાને લંબ હોય છે. હવે વેગની દિશા સ્પર્શકની દિશા છે અને સ્પર્શકની લંબ દિશા એ ત્રિજ્યાની (કેન્દ્ર તરફની) દિશા હોઈને આવા પ્રવેગને **ત્રિજ્યાવર્તી પ્રવેગ a_r** અથવા **કેન્દ્રગામી પ્રવેગ a_c** કહે છે.

આપણે ત્રિજ્યાવર્તી પ્રવેગનું સૂત્ર મેળવવા માટે આકૃતિ 4.30માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારો કે વર્તુળગતિ કરતા કણના તેના પથનાં બિંદુઓ P અને Q પાસે વેગ અનુક્રમે $\vec{v}_1$ અને $\vec{v}_2$ છે, તથા કણને P થી Q સુધી જતાં લાગતો સમય Δt છે. આમ, Δt જેટલા સમયગાળામાં કણના વેગમાં થતો ફેરફાર $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ છે, જે આકૃતિ 4.31માં દર્શાવેલ છે.

આકૃતિની ભૂમિતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે ΔOPQ અને ΔO'P'Q' એ સમરૂપ ત્રિકોણો છે. માટે,

$$\frac{P'Q'}{OP'} = \frac{PQ}{OP} \quad \therefore \frac{\Delta v}{v_1} = \frac{\Delta r}{r}$$

$$\text{પરંતુ } \left|\vec{v}_1\right| = \left|\vec{v}_2\right| = v$$

$$\therefore \Delta v = \frac{v}{r} \cdot \Delta r$$

$\therefore$ Δt સમયગાળા દરમિયાન સરેરાશ પ્રવેગનું મૂલ્ય

$$< a > = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{\Delta r}{\Delta t}$$

આ ગુણોત્તરમાં $\lim_{\Delta t \to 0}$ લેતાં t સમયે તત્કાલીન પ્રવેગ મળશે.

$$\text{પ્રવેગ } a_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v}{r}\frac{\Delta r}{\Delta t}$$

$$= \frac{v}{r}\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}\right)$$

$$= \frac{v}{r}\frac{dr}{dt}$$

પરંતુ $\frac{dr}{dt} = v = t$ સમયે તત્કાલીન ઝડપ હોઈને

$$\text{પ્રવેગ } a_c = \frac{v^2}{r} \qquad (4.15.1)$$

આકૃતિ 4.31 પરથી જોઈ શકાય છે કે $\Delta\vec{v}$ ની દિશા કેન્દ્ર તરફ છે. અર્થાત્ પ્રવેગની દિશા કેન્દ્ર તરફ હોય છે. આમ, વર્તુળગતિમાં આ પ્રવેગને કેન્દ્રગામી પ્રવેગ કે ત્રિજ્યાવર્તી પ્રવેગ કહે છે. આ પ્રવેગને અનુરૂપ બળને કેન્દ્રગામી બળ કહે છે.

અહીં જોઈ શકાય છે કે જો કોઈ કણને વક્રમાર્ગે ગતિ કરાવવી હોય, તો તેના વક્રમાર્ગના કેન્દ્ર તરફ યોગ્ય એવું કેન્દ્રગામી બળ લગાડવું જોઈએ.

નિયમિત વર્તુળગતિ કરતા કણના કેન્દ્રગામી પ્રવેગનું મૂલ્ય અચળ હોય છે. પણ દિશા સતત બદલાતી હોઈને કેન્દ્રગામી પ્રવેગ દર્શાવતો સદિશ અચળ નથી.

ઉદાહરણ 22 : નીરવ 1 મીટર લાંબી દોરીના છેડે નાનકડો પથ્થર બાંધી હાથ વડે સમક્ષિતિજ સમતલમાં અચળ ઝડપથી ગોળ-ગોળ ફેરવે છે. (અત્રે ગુરુત્વાકર્ષણ બળને ધ્યાનમાં ન લેતાં) જો પથ્થર 314 સેકન્ડમાં 100 પરિભ્રમણ કરતો હોય, તો (i) તેની રેખીય ઝડપ કેટલી હશે ? (ii) તેના કેન્દ્રગામી પ્રવેગનું મૂલ્ય શોધો. શું તેના પ્રવેગ દર્શાવતા સદિશને અચળ ગણી શકાય ?

ઉકેલ : અહીં પથ્થરના વર્તુળપથની ત્રિજ્યા $r = 1$ મીટર છે.

(i) પથ્થરને 100 પરિભ્રમણ કરતાં 314 સેકન્ડ લાગે છે.

$\therefore$ એક પરિભ્રમણ કરતાં લાગતો સમય અર્થાત

$$\text{આવર્તકાળ (T)} = \frac{314}{100} = 3.14$$

પથ્થરની રેખીય ઝડપ $(v) = \frac{\text{અંતર}}{\text{સમય}}$

$$= \frac{2\pi r}{T} = \frac{2 \times 3.14 \times 1}{3.14} = 2 \text{ m s}^{-1}$$

$\therefore\ v = 2 \text{ m s}^{-1}$

(ii) કેન્દ્રગામી પ્રવેગનું મૂલ્ય $a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(2)^2}{1}$

$= 4\text{m s}^{-2}$. આ પ્રવેગની દિશા સતત બદલાતી હોઈને પ્રવેગ દર્શાવતા સદિશને અચળ ગણી શકાય નહિ.

4.16 પ્રક્ષિપ્તગતિ (Projectile Motion)

જ્યારે કોઈ પદાર્થ ગુરૂત્વાકર્ષી ક્ષેત્રમાં ફેંકવામાં આવે છે, ત્યારે તે નિયમિત સમક્ષિતિજ વેગ અને નિયમિત ઊર્ધ્વ માત્ર ગુરુત્વપ્રવેગ સાથે ગતિ કરે છે. આવી દ્વિ-પારિમાણિક ગતિને પ્રક્ષિપ્ત ગતિ અને પદાર્થને પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ કહે છે. દા. ત., જો હવાના અવરોધને અવગણીએ તો કીક મારેલા ફૂટબૉલની ગતિ, ક્રિકેટરે હવામાં ફેંકેલા ક્રિકેટબૉલની ગતિ પ્રક્ષિપ્ત ગતિ કહેવાય તથા ક્રિકેટબૉલ પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ કહેવાય.

પ્રક્ષિપ્ત ગતિ એ એકીસાથે પરસ્પર લંબદિશામાં થતી બે જુદી-જુદી સ્વતંત્ર ઘટક-ગતિઓની પરિણામી ગતિ છે. એક ઘટક-ગતિ સમક્ષિતિજ દિશામાંની અચળ વેગથી થતી ગતિ છે. જ્યારે બીજી ઘટક-ગતિ શિરોલંબ (ઊર્ધ્વ દિશામાં) થતી અચળપ્રવેગી ગતિ છે. અહીં અચળ પ્રવેગ, ગુરુત્વપ્રવેગ g છે. ઈ.સ. 1632માં ગૅલિલિયોએ આ બન્ને ઘટક-ગતિઓને એકબીજાથી સ્વતંત્ર ગણી શકાય તેમ પ્રતિપાદિત કરેલું.

આકૃતિ 4.32 દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારો કે કોઈ પદાર્થને X–અક્ષ (સમક્ષિતિજ દિશા) સાથે θ કોણ બનાવતી દિશામાં $\vec{v_0}$ વેગથી પ્રક્ષિપ્ત કરવામાં આવે છે. સરળતા ખાતર આપણે આ ચર્ચામાં હવાના અવરોધને અવગણીશું.

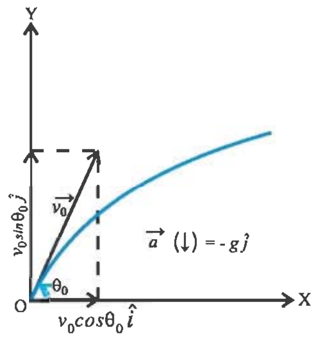
પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ પર લાગતો પ્રવેગ એ ગુરુત્વપ્રવેગ g છે અને તે અધોદિશામાં હોવાથી

$\therefore\ \vec{a} = -g\hat{j}$ થશે

અથવા તો $a_x = 0,\ a_y = -g$ (4.16.1)

પ્રારંભિક વેગ $\vec{v_0}$ ના x અને y દિશામાંના એટલે કે સમક્ષિતિજ અને ઊર્ધ્વ (શિરોલંબ) દિશામાંના ઘટકો નીચે મુજબ થશે :

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \quad (4.16.2a)$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\theta_0 \quad (4.16.2b)$$



આકૃતિ 4.32

પ્રક્ષિપ્તબિંદુને (જે બિંદુએથી પદાર્થને પ્રક્ષિપ્ત કરેલો છે તે બિંદુ) યામાક્ષોના ઊગમબિંદુ તરીકે લેતાં તેના યામ (x_0, y_0) નીચે મુજબ છે :

$x_0 = 0,\ y_0 = 0$

$\therefore$ સમીકરણ (4.14.6) અને (4.14.7)નો ઉપયોગ કરતાં,

$$x = v_{0x}t = (v_0 cos\ \theta_0)t \quad (4.16.3)$$

$$\text{અને } y = (v_0 sin\ \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (4.16.4)$$

કોઈ સમય t એ વેગના ઘટકો સમીકરણ (4.16.2) અને (4.16.3) પરથી મેળવી શકાય.

$$v_x = v_{0x} = v_0 cos\ \theta_0 \quad (4.16.5)$$

$$\text{અને } v_y = v_0 sin\ \theta_0 - gt \quad (4.16.6)$$

સમીકરણો (4.16.3) અને (4.16.4) પરથી કોઈ પણ સમયે પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થના યામોનાં મૂલ્યો પ્રાચલો v_0 અને θ_0 ના સ્વરૂપમાં મેળવી શકાય છે.

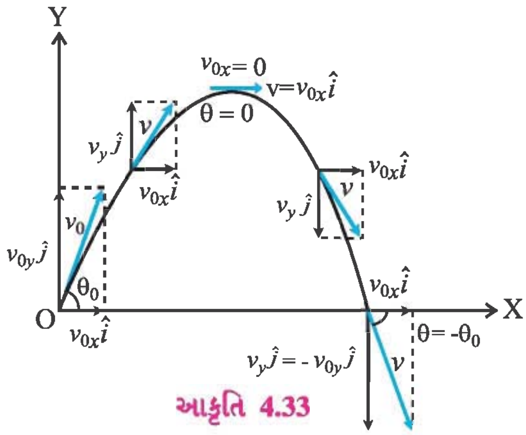
પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થના ગતિપથનું સમીકરણ (Equation of trajectory of projectile) :

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની સમગ્ર ગતિ દરમિયાન સમક્ષિતિજ દિશામાંનો વેગનો ઘટક v_x (વેગનો x ઘટક) અચળ રહે છે. જ્યારે શિરોલંબ ઘટક v_y શિરોલંબ દિશામાં ગતિ કરતા પદાર્થના વેગની જેમ બદલાય છે. હવે, ગતિ કરતા કણના x અને y યામો વચ્ચે સંબંધ દર્શાવતા સમીકરણને તે કણના ગતિપથનું સમીકરણ કહેવાય. આથી પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થના ગતિ પથનું સમીકરણ મેળવવા માટે સમીકરણ (4.16.3) માંથી

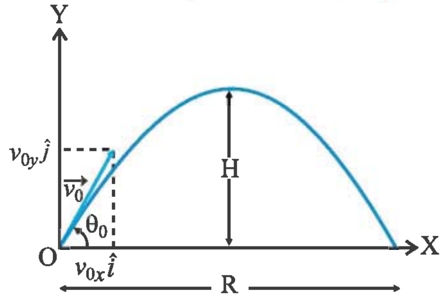
$t = \frac{x}{v_0 cos\ \theta_0}$ સમીકરણ (4.16.4) માં મૂકતાં

$$y = (v_0 \sin\ \theta_0)\left(\frac{x}{v_0 cos\ \theta_0}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x^2}{v_0^2\ cos^2\ \theta_0}\right)$$

$$y = (\tan\ \theta_0)\ x - \frac{g}{2(v_0 cos\ \theta_0)^2} \cdot x^2 \quad (4.16.7)$$



આકૃતિ 4.33



આકૃતિ 4.34

આ સમીકરણમાં આપેલ પરિસ્થિતિમાં v_0, θ_0 અને g અચળ હોઈ તે $y = ax - bx^2$ સ્વરૂપનું છે. અહીં a અને b અચળો છે. આ સમીકરણ પરવલયનું હોઈ તે કહી શકાય કે પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થનો ગતિપથ પરવલયાકારનો હોય છે. જુઓ (આકૃતિ 4.33 અને 4.34)

મહત્તમ ઉંચાઈ પ્રાપ્ત કરવા માટે લાગતો સમય (Time taken to Achieve Maximum Height) :

ધારો કે મહત્તમ ઊંચાઈ H પ્રાપ્ત કરવા માટે પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થને લાગતો સમય t_m છે. (જુઓ આકૃતિ 4.34) પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ મહત્તમ ઊંચાઈ પ્રાપ્ત કરે છે, ત્યારે તેનો વેગનો ઘટક v_y તે ક્ષણે શૂન્ય હોય છે. (જુઓ આકૃતિ 4.33) માટે સમીકરણ (4.16.6) પરથી

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - g t_m = 0$$

$$\therefore \; t_m = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \qquad (4.16.8)$$

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થે પ્રાપ્ત કરેલ મહત્તમ ઊંચાઈ (H) (Maximum height attained by projectile) :

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થે પ્રાપ્ત કરેલ મહત્તમ ઊંચાઈ (H) (ઊર્ધ્વ દિશામાં કાપેલ મહત્તમ અંતર મેળવવા સમીકરણ (4.16.4)માં

$$t = t_m = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \text{ મૂકતાં}$$

$$y = H = (v_0 \sin \theta_0)\left(\frac{v_0 \sin \theta_0}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \theta_0}{g}\right)^2$$

$$\therefore \; H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} \qquad (4.16.9)$$

ઉડ્ડયનનો કુલ સમય (t_F) (Time of flight (t_F)) :

ઉડ્ડયનનો કુલ સમય t_F મેળવવા સમીકરણ (4.16.4) માં $y = 0$ મૂકતાં.

$$0 = (v_0 \sin \theta_0) t_F - \frac{1}{2} g t_F^2$$

$$t_F = \frac{2 v_0 \sin \theta_0}{g} = 2 t_m \qquad (4.16.10)$$

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની અવધિ (R) (Range of a projectile (R)) :

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થે પોતાની પ્રારંભિક સ્થિતિ ($x = y = 0$) માંથી અંતિમ સ્થિતિ ($x = R$, $y = 0$) સુધી પહોંચતા, સમક્ષિતિજ દિશામાં કાપેલા કુલ અંતરને તેની અવધિ (range) (R) કહે છે.

સરળતાથી સમજી શકાય છે કે અવધિ એટલે ઉડ્ડયનના કુલ સમય દરમિયાન કાપેલું અંતર છે. અવધિ (R) શોધવા માટે સમીકરણ (4.16.3)માં $x = R$ અને $t = t_F$ મૂકતાં

$$R = (v_0 \cos \theta_0)(t_F)$$

$$= (v_0 \cos \theta_0)\left(\frac{2 v_0 \sin \theta_0}{g}\right)$$

$$\therefore \; R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$\therefore \text{મહત્તમ અવધિ } R_{max} = \frac{v_0^2}{g} \qquad (4.16.11)$$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણ પરથી જોઈ શકાય છે કે આપેલા v_0 માટે R નું મૂલ્ય મહત્તમ R_{max} થવા માટે $2\theta_0 = 90^\circ$ એટલે કે $\theta_0 = 45^\circ$ થવું જોઈએ. એટલે કે આપેલ પ્રારંભિક વેગ v_0 થી પદાર્થને પ્રક્ષિપ્તકોણ 45° હોવો જોઈએ.

નોંધો કે અવધિનું મૂલ્ય પદાર્થના પ્રારંભિક વેગ અને પ્રક્ષિપ્તકોણ પર આધારિત છે. જ્યારે મહત્તમ અવધિનું મૂલ્ય માત્ર પ્રારંભિક વેગ પર આધારિત છે. શિરોલંબ દિશામાં ફેંકેલા પદાર્થ માટે ઉપર્યુક્ત ચર્ચામાં $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ લઈને t_m અને t_F શોધો.

ઉદાહરણ 23 : જમીન પર રહેલા એક ફૂટબૉલને કીક મારતાં 28 m s^{-1}ના વેગથી સમક્ષિતિજ દિશા સાથે 30° નો ખૂણો બનાવતી દિશામાં ગતિ કરે છે તો (i) ફૂટબૉલે પ્રાપ્ત કરેલી મહત્તમ ઊંચાઈ (ii) તેને જમીન પર પાછો ફરતાં લાગતો સમય તથા (iii) તે મૂળ સ્થળેથી કેટલે દૂર જમીન પર પાછો ફરશે ? (ગુરુત્વપ્રવેગ $g = 9.8$ m s^{-2} લો.)

ઉકેલ : (i) ફૂટબૉલે પ્રાપ્ત કરેલ મહત્તમ ઊંચાઈ (H)

અત્રે $v_0 = 28\ m\ s^{-1}$ તથા $\theta_0 = 30°$ તથા $g = 9.8\ m\ s^{-2}$

$$\therefore H = \frac{v_0^2 sin^2\theta_0}{2g} = \frac{(28)^2\ (sin30)^2}{2 \times 9.8}$$

$$= \frac{(28)^2\ (0.5)^2}{2 \times 9.8} = 10.0\ m$$

(ii) જમીન પર પાછો ફરતાં લાગતો સમય એટલે કુલ ઉડ્ડયન સમય,

$$\therefore t_F = \frac{2v_0 sin\theta_0}{2g} = \frac{2 \times 28 \times sin30}{9.8}$$

$$= \frac{28}{9.8} = 2.9\ s$$

(iii) જે સ્થળેથી કીક મારવામાં આવે ત્યાંથી જેટલે અંતરે જમીન પર પાછો ફરે તે અવધી R થાય.

$$\therefore R = \frac{v^2_0 sin2\theta_0}{g}$$

$$= \frac{28 \times 28 \times sin60^o}{g}$$

$$= 69\ m$$

ઉદાહરણ 24 : ગૅલિલિયોએ તેના પુસ્તક "Dialogues on the Two new sciences" માં એવું વિધાન કર્યું છે કે "45° ના ખૂણા સાથે સમાન તફાવત ધરાવતા બે જુદા-જુદા કોણે પદાર્થને પ્રક્ષિપ્ત કરવામાં આવે, તો તેમની અવધિ સમાન હોય છે." આ વિધાન સાબિત કરો.

ઉકેલ : ધારો કે પદાર્થને 45° સાથે θ જેટલો તફાવત ધરાવતા એટલે 45°– θ અને 45° + θ ના બે જુદા-જુદા કોણે પ્રક્ષિપ્ત કરતાં મળતી અવધિ R_1 અને R_2 છે.

સૂત્ર : $R = \dfrac{v^2_0 sin\ 2\theta^{\circ}}{g}$ પરથી

$$R_1 = \frac{v_0^2\ sin\ 2(45-\theta^{\circ})}{g}$$

$$= \frac{v_0^2\ sin\ (90-2\theta^{\circ})}{g}$$

$$= \frac{v_0^2\ cos\ 2\theta^{\circ}}{g}$$ અને

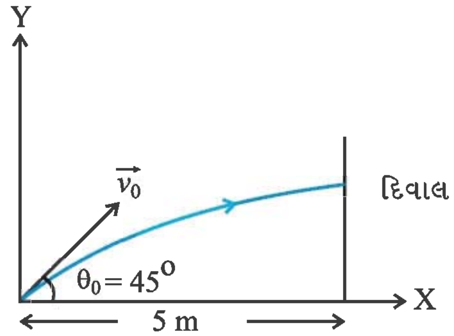
$$R_2 = \frac{v_0^2\ sin\ 2(45+\theta^{\circ})}{g}$$

$$= \frac{v_0^2\ sin\ (90+2\theta^{\circ})}{g}$$

$$= \frac{v^2_0 \cos 2\theta^{\circ}}{g}$$

આમ, જોઈ શકાય છે કે $R_1 = R_2$

ઉદાહરણ 25 : જમીન પર રહેલી એક પાણીની પાઇપમાં છિદ્ર પડતાં તેમાંથી નીકળતી પાણીની ધાર સમક્ષિતિજ દિશા સાથે 45° નો કોણ બનાવતી દિશામાં $10\ m\ s^{-1}$ ના વેગથી જાય છે. આ છિદ્રથી 5 m મીટર દૂર આવેલ દીવાલ પર કેટલી ઊંચાઈએ આ ધાર પહોંચશે ?



આકૃતિ 4.35

ઉકેલ : $\theta_0 = 45°$, $v_0 = 10\ m\ s^{-1}$, $x = 5\ m$

સૂત્ર : $y = x(tan\ \theta_0) - \dfrac{g}{2(\ v_0\ cos\ \theta_0\ )^2} \cdot x^2$

પરથી

$$y = 5(tan\ 45°) - \frac{9.8 \times 25}{2 \times (10 \times cos\ 45°)^2}$$

$$= 5 - \frac{9.8 \times 25}{2 \times 100 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= 5 - \frac{9.8}{4} = 5 - 2.45$$

$$= 2.55\ m$$

આમ, દીવાલ પર પાણીની ધાર 2.55 mની ઊંચાઈ સુધી પહોંચશે.

સારાંશ

1. આ પ્રકરણમાં આપણે સદિશ અને અદિશ રાશિઓ વિષેની વિગતવાર માહિતી મેળવી. સદિશ રાશિઓને આકૃતિ સ્વરૂપે (ભૌમિતિક રીતે) કેવી રીતે રજૂ કરી શકાય, તે જોયું. ત્યાર બાદ કોઈ બિંદુ (કણ કે પદાર્થ)નું સ્થાન દર્શાવતા સદિશ સમજ્યા. સ્થાનસદિશ અને સ્થાનાંતર સદિશ વચ્ચેનો ભેદ સ્પષ્ટ કર્યો અને સ્થાનસદિશનો ઉપયોગ કરી સ્થાનાંતર સદિશ કેવી રીતે મેળવી શકાય તે જોયું.
2. સદિશ સામાન્ય બીજગણિતના નિયમોને અનુસરતા નથી. માટે સદિશોના બીજગણિતની માહિતી મેળવી. શૂન્યસદિશ, એકમસદિશને વ્યાખ્યાયિત કર્યા. એકમસદિશનો ઉપયોગ કરી સદિશની રજૂઆત કેવી રીતે થઈ શકે છે તે જોયું. આપેલા સદિશનું સમતલમાં વિભાજન કઈ રીતે થઈ શકે છે તે જોયું. બે સદિશોના ગુણાકારમાં તેમના સદિશ અને અદિશ ગુણાકારને વ્યાખ્યાયિત કર્યા.
3. તત્કાલીન વેગ શું છે તે સમજ્યા અને તેના પરથી પ્રવેગનું સૂત્ર મેળવ્યું. સાપેક્ષગતિ દરમિયાન સાપેક્ષવેગની સમજૂતી મેળવી, સાપેક્ષવેગ મેળવવાનું સૂત્ર મેળવ્યું. સમતલમાં (દ્વિ-પરિમાણમાં) થતી અચળ ગતિનાં સમીકરણો મેળવ્યાં.
4. નિયમિત વર્તુળાકાર ગતિની વિગતે ચર્ચા કરી કેન્દ્રવર્તી પ્રવેગનું સૂત્ર મેળવ્યું. ત્યાં તેની દિશા કેન્દ્ર તરફ ત્રિજ્યા પર હોય છે તેમ દર્શાવ્યું.
5. પ્રક્ષિપ્ત ગતિ એટલે શું ? તે સમજીને પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ માટેના ગતિપથનું સમીકરણ મેળવ્યું. મહત્તમ ઊંચાઈ પ્રાપ્ત કરવા માટે લાગતા સમયનું સૂત્ર મેળવ્યું. ત્યાં મહત્તમ ઊંચાઈ અને અવધિ માટેનાં સૂત્રો મેળવ્યા અને દર્શાવ્યું કે આપેલા વેગ માટે મહત્તમ અવધિ મેળવવા પદાર્થને 45^{o} ખૂણે પ્રક્ષિપ્ત કરવો જોઈએ.

સદિશ ગુણાકાર

↓

- **અદિશ સાથે**
  - સંખ્યા સાથે (સાદો ગુણાકાર)

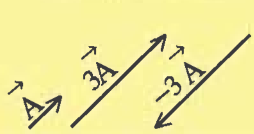
    સદિશ $\vec{A}$ ને કોઈ સંખ્યા m વડે ગુણતાં નવો સદિશ $m\vec{A}$ મળે છે.

    • જો m ધન હોય, તો નવો સદિશ $\vec{A}$ ની દિશામાં.

    • જો m ઋણ હોય, તો નવો સદિશ $\vec{A}$ ની વિરુદ્ધ દિશામાં.

    દા.ત. : $3 \times \vec{A} = 3\vec{A}$

    $-3 \times \vec{A} = -3\vec{A}$

  - ભૌતિક રાશિ સાથે (સાદો ગુણાકાર)

    (1) દળ × વેગ = વેગમાન

    (અદિશ) × (સદિશ) = (સદિશ)

    (2) દળ × પ્રવેગ = બળ

    આમ, સદિશ ભૌતિક રાશિને અદિશ ભૌતિક રાશિ વડે ગુણતાં નવી સદિશ ભૌતિક રાશિ મળે છે જેની દિશા મૂળ સદિશ રાશિની દિશામાં હોય છે.

- **સદિશ સાથે**
  - પરિણામ અદિશ

    (સદિશ)·(સદિશ) = (અદિશ)

    અદિશ ગુણાકાર અથવા (ડૉટ પ્રોડક્ટ)

  - પરિણામ સદિશ

    (સદિશ) × (સદિશ) = (સદિશ)

    સદિશ ગુણાકાર અથવા (ક્રૉસ પ્રોડક્ટ)

સ્વાધ્યાય

નીચેનાં વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. નીચેની ભૌતિક રાશિઓમાંથી કઈ રાશિ અદિશ છે ?

(A) પ્રવેગ (B) વેગ

(C) રેખીય વેગમાન (D) તાપમાન

2. જો $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ અને $\vec{B} = 4\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$, હોય તો $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ વચ્ચેનો ખૂણો

(A) π (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) 0^{o}

3. એક પદાર્થ વર્તુળાકાર પથ પર આપેલી ક્ષણે $\vec{v}$ વેગથી ગતિ કરે છે. તે જ્યારે અર્ધું પરિભ્રમણ પૂરું કરશે ત્યારે તેના વેગમાં .... જેટલો ફેરફાર થયો હશે.

(A) $\vec{v}$ (B) $-2\vec{v}$ (C) શૂન્ય (D) $\sqrt{2}\,\vec{v}$

4. એક ભૌતિક રાશિને રજૂ કરતો સદિશ $\vec{C} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ છે, તો X-અક્ષ અને આ સદિશ વચ્ચેનો કોણ

(A) $cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{29}}$ (B) $cos^{-1}\frac{4}{\sqrt{29}}$

(C) $cos^{-1}\frac{5}{\sqrt{29}}$ (D) $cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{29}}$

5. સમતલમાં ગતિ કરતાં એક કણના યામો કોઈ પણ સમય t એ $x = \alpha t^2$ અને $y = \beta t^2$ વડે આપી શકાય છે, તો આ કણના વેગનો માનાંક .... થાય.

(A) $2t\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ (B) $2t\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

(C) $2t(\alpha + \beta)$ (D) $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

6. પ્રક્ષિપ્ત ગતિમાં પદાર્થે પ્રાપ્ત કરેલી મહત્તમ ઊંચાઈ તેની અવધિ કરતાં અડધી હોય, ($H = \frac{1}{2}R$)નો સમક્ષિતિજ સાથેનો પ્રક્ષિપ્તકોણ ....

(A) $tan^{-1}(1)$ (B) $tan^{-1}(2)$ (C) $tan^{-1}(3)$ (D) $tan^{-1}(4)$

7. એક પદાર્થને $\vec{v}$ જેટલા વેગથી પ્રક્ષિપ્ત કરવામાં આવે છે. જો તેની અવધિ મહત્તમ ઊંચાઈ કરતાં બમણી હોય, તો અવધિનું મૂલ્ય (**સૂચન :** ઉપરના પ્રશ્ન 6ના પરિણામનો ઉપયોગ કરો.)

(A) $\frac{v^2}{g}$ (B) $\frac{3}{5}\frac{v^2}{g}$ (C) $\frac{4}{5}\frac{v^2}{g}$ (D) $\frac{1}{2}\frac{v^2}{g}$

8. $(\vec{A} \cdot \vec{B})^2 + |\vec{A} \times \vec{B}|^2 =$ .... છે.

(A) AB (B) A^2B^2 (C) $\sqrt{AB}$ (C) શૂન્ય

9. વરસાદ અધોદિશામાં 4 km/hના વેગથી પડે છે. એક માણસ સુરેખ રસ્તા પર 3 km/hના વેગથી ચાલે છે, તો આ માણસની સાપેક્ષે વરસાદનો દેખીતો વેગ (માણસ વડે અનુભવાતો વેગ)

(A) 3 km h^{-1} (B) 4 km h^{-1} (C) 5 km h^{-1} (D) 7 km h^{-1}

10. કયા પ્રક્ષિપ્તકોણે અવધિ અને મહત્તમ ઊંચાઈ સમાન બનશે ?

(A) $\theta_0 = 45^\circ$ (B) $\theta_0 = tan^{-1}(4)$

(C) $\theta_0 = tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ (D) $\theta_0 = 30^\circ$

11. એક મોટરકાર ઉત્તર તરફ $30 m\ s^{-1}$ ના વેગથી ગતિ કરે છે. જો તે વળીને પશ્ચિમ તરફ તેટલી જ ઝડપથી ગતિ કરે, તો તેના વેગમાં થતો ફેરફાર ....

(A) $60 m\ s^{-1}$ ઉત્તર-પશ્ચિમ (B) $30\sqrt{2}\ m\ s^{-1}$ ઉત્તર-પશ્ચિમ

(C) $30\sqrt{2}\ m\ s^{-1}$ દક્ષિણ-પશ્ચિમ (D) $60 m\ s^{-1}$ દક્ષિણ-પશ્ચિમ

12. $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ સદિશોનો પરિણામી સદિશ $\vec{A}$ સાથેનો α-કોણ અને સદિશ $\vec{B}$ સાથે β-કોણ બનાવતો હોય, તો

(A) હંમેશાં $\alpha < \beta$ (B) જો $A < B$ હોય, તો $\alpha < \beta$

(C) જો $A > B$ હોય, તો $\alpha < \beta$ (D) જો $A = B$ હોય, તો $\alpha < \beta$

13. ઘડિયાળના સેકન્ડ-કાંટાના છેડાની રેખીય ઝડપ v છે, તો 15 સેકન્ડમાં તેના રેખીય વેગના ફેરફારનું મૂલ્ય .... છે.

(A) શૂન્ય (B) $\frac{v}{\sqrt{2}}$ (C) $\sqrt{2}\,v$ (D) $2v$

14. એક બોટનો જમીનની સાપેક્ષે વેગ $3\hat{i} + 4\hat{j}$ છે અને પાણીનો જમીનની સાપેક્ષે વેગ $-3\hat{i} - 4\hat{j}$ છે, તો બોટનો પાણીની સાપેક્ષે વેગ .... છે. રાશિઓમાં છે.

(A) $8\hat{i}$ (B) $-6\hat{i} - 8\hat{j}$ (C) $6\hat{i} + 8\hat{j}$ (D) $6\hat{i}$

15. જ્યારે પ્રતિક્ષિપ્તકોણ 25° હોય ત્યારે એક પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની અવધિ R છે. જો પ્રતિક્ષિપ્તકોણ .... હોય, તો તેની અવધિ R જ રહેશે.

(A) 40° (B) 45° (C) 65° (D) 60°

16. જો બે સદિશોના સદિશ ગુણાકારનું માનાંક $|\vec{A} \times \vec{B}|$ તેમના અદિશ ગુણાકાર $(\vec{A} \cdot \vec{B})$ કરતાં $\sqrt{3}$ ગણું હોય, તો તેમની વચ્ચેનો ખૂણો ....

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

17. પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થના ગતિપથની મહત્તમ ઊંચાઈએ પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થનો પ્રવેગ

(A) શૂન્ય (B) g (C) મહત્તમ (D) લઘુત્તમ

18. એક પદાર્થને સમક્ષિતિજ સાથે 45° ના કોણે K જેટલી ગતિ-ઊર્જાથી પ્રક્ષિપ્ત કરવામાં આવે છે, તો મહત્તમ ઊંચાઈએ તેની ગતિ-ઊર્જા .... હશે. $[K = \frac{1}{2}mv^2]$

(A) 0 (B) $\frac{K}{2}$ (C) $\frac{K}{\sqrt{2}}$ (D) K

19. નદીના પાણીમાં એક બોટની ઝડપ $5\ km\ h^{-1}$ છે. તે 1.0 km પહોળાઈવાળી નદીને સૌથી ટૂંકા માર્ગ પર 15 મિનિટમાં ઓળંગે છે, તો નદીના વહેણની ઝડપ .... $km\ h^{-1}$ છે.

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 5

20. સમાન પ્રારંભિક વેગ v ધરાવતી અનેક ગોળીઓ સમતલ સપાટી પરથી જુદી-જુદી દિશાઓમાં ફાયર કરવામાં આવે છે. આ ગોળીઓ આ સપાટી પર .... જેટલા મહત્તમ ક્ષેત્રફળ પર પડી હશે.

(A) $\frac{\pi v^2}{g}$ (B) $\frac{\pi v^2}{g^2}$ (C) $\frac{\pi^2 v^2}{g^2}$ (D) $\frac{\pi v^4}{g^2}$

21. એક પ્રક્ષિપ્ત ગતિ માટે $y(t) = 8t - 5t^2$ અને $x(t) = 6t$ છે, જ્યાં x અને y મીટરમાં તથા t સેકન્ડમાં છે, તો પ્રારંભિક વેગ .... છે.

(A) 6 m/s (B) 8 m/s (C) 10 m/s (D) 14 m/s

22. જો $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A}| = |\vec{B}|$ હોય, તો $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ વચ્ચેનો કોણ ....

(A) 90° (B) 120° (C) 0° (D) 60°

23. જો $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ અને $A = \sqrt{3}$, $B = \sqrt{3}$ અને $C = 3$ હોય, તો સદિશો $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ વચ્ચેનો કોણ ....

(A) 0° (B) 30° (C) 60° (D) 90°

24. સદિશો $3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ અને $2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ને લંબ એવો એકમ સદિશ .... થશે.

(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})$ (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$

(C) $(\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})$ (D) $\sqrt{3}(\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})$

25. સદિશ $\vec{P} = a\hat{i} + a\hat{j} + 3\hat{k}$ અને સદિશ $\vec{Q} = a\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ પરસ્પર લંબ હોય તો 'a' નું ધનમૂલ્ય કેટલું હશે ?

(A) 3 (B) 4 (C) 9 (D) 13

જવાબો

1. (D)	**2.** (D)	**3.** (B)	**4.** (D)	**5.** (B)	**6.** (B)
7. (C)	**8.** (B)	**9.** (C)	**10.** (B)	**11.** (C)	**12.** (C)
13. (C)	**14.** (C)	**15.** (C)	**16.** (C)	**17.** (B)	**18.** (B)
19. (B)	**20.** (D)	**21.** (C)	**22.** (B)	**23.** (C)	**24.** (A) **25.** (A)

નીચેના પ્રશ્નોના અતિ ટૂંકમાં જવાબ આપો :

1. સદિશ અને અદિશ રાશિઓ વચ્ચેનો મૂળભૂત ફરક શું છે ?
2. કોઈ પણ બે અદિશ રાશિઓ અને બે સદિશ રાશિઓ જણાવો.
3. પદાર્થનું સ્થાન દર્શાવવા માટે શાનો ઉલ્લેખ જરૂરી છે ?
4. સમાન સદિશો કોને કહેવાય ?
5. સમાંતર સદિશોની વ્યાખ્યા આપો.
6. પ્રતિસમાંતર સદિશોની વ્યાખ્યા આપો.
7. અસમાંતર સદિશો કોને કહેવાય ?
8. કોઈ પણ સદિશને કઈ બે રીતે વર્ણવી શકાય ?
9. બે સદિશોનો સદિશ ગુણાકાર કઈ રીતે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે ?
10. બે સદિશોનો સદિશ ગુણાકાર કઈ રીતે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે ?
11. બે સદિશો વચ્ચેનો કોણ શૂન્ય હોય, તો બે સદિશોના સદિશ ગુણાકારનું મૂલ્ય .... થાય.
12. બે સદિશો વચ્ચેનો કોણ 90° હોય, બે સદિશોના અદિશ ગુણાકારનું મૂલ્ય .... થાય.

13. બે સદિશો વચ્ચેનો કોણ શૂન્ય હોય, તો તેમના સદિશ ગુણાકારનું મૂલ્ય .... થાય.
14. પદાર્થના ગતિપથના કોઈ પણ બિંદુ પાસે તેનો વેગ .... ની દિશામાં હોય છે.
15. વેગ સદિશરાશિ છે. તેનામાં ફેરફાર કઈ-કઈ રીતે થઈ શકે ?
16. પ્રવેગના વેગને સમાંતર (a_{11}) ઘટકને લીધે વેગના .... માં ફેરફાર અને લંબ ($a_{\perp}$) ઘટકને લીધે .... માં ફેરફાર થાય છે.
17. નિયમિત વર્તુળાકાર ગતિમાં વર્તુળના સ્પર્શકની દિશામાં પ્રવેગ .... હોય છે.
18. પ્રક્ષિપ્ત ગતિ કોને કહેવાય ?
19. પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થના ગતિપથની ટોચે (મહત્તમ ઊંચાઈએ) તેનો વેગ .... હોય છે.
20. પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થના ગતિપથની ટોચે (મહત્તમ ઊંચાઈએ) તેનો પ્રવેગ .... હોય છે.
21. પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની અવધિ મહત્તમ મેળવવા માટે તેને આપેલા વેગ માટે સમક્ષિતિજ દિશા સાથે .... કોણે પ્રક્ષિપ્ત કરવો જોઈએ.

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. સદિશ રાશિઓને આકૃતિ સ્વરૂપે (ભૌમિતિક સ્વરૂપે) કેવી રીતે દર્શાવવામાં આવે છે ?
2. સ્થાનસદિશ અને સ્થાનાંતરસદિશ વચ્ચેનો ભેદ સમજાવો.
3. વાસ્તવિક સંખ્યા વડે સદિશોના ગુણાકારની સમજૂતી આપો.
4. બે સદિશોની બાદબાકી કેવી રીતે થાય તે સમજાવો.
5. સદિશોના સરવાળાના ગુણધર્મો જણાવો.
6. એકમસદિશની વ્યાખ્યા આપી વિગતે સમજાવો.
7. સદિશના લંબઘટકો કેવી રીતે મેળવી શકાય ?
8. સદિશોના અદિશ ગુણાકારના ગુણધર્મો જણાવો.
9. બે સદિશોના સદિશ ગુણાકારમાં પરિણામી સદિશની દિશા માટેના જમણા હાથના સ્ક્રૂનો નિયમ સમજાવો.
10. સદિશોના સદિશ ગુણાકારના ગુણધર્મો લખો.
11. પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થને મહત્તમ ઊંચાઈ પ્રાપ્ત કરવા લાગતા સમય t_m નું સૂત્ર મેળવો.
12. પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થે પ્રાપ્ત કરેલ મહત્તમ ઊંચાઈ H નું સૂત્ર મેળવો.
13. પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની અવધી R માટેનું સૂત્ર મેળવો તથા તેના પરથી મહત્તમ અવધિનું સૂત્ર મેળવો.
14. પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થના કુલ ઉડ્ડયનસમય t_F નું સૂત્ર મેળવો.

નીચેના પ્રશ્નોના સવિસ્તારથી ઉત્તર આપો :

1. સદિશોના સરવાળા માટેની ત્રિકોણની રીતનું વર્ણન કરો. (જરૂરી આકૃતિ દોરો)
2. સદિશોના સરવાળા માટેની સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની રીતનું યોગ્ય આકૃતિ દોરી વર્ણન કરો. તેના પરિણામીના માનાંક અને દિશાનાં સૂત્રો ઘટકોનો ઉપયોગ કરી મેળવો.
3. સમતલમાં સદિશોનું વિભાજન સમજાવો.
4. સદિશોના સરવાળા અને બાદબાકીની બૈજિક રીતનું વર્ણન કરો.
5. યોગ્ય આકૃતિ દોરી તત્કાલીન વેગ સમજાવો અને સૂત્ર $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ મેળવો.
6. યોગ્ય આકૃતિનો ઉપયોગ કરી પ્રવેગની સમજૂતિ આપો તથા સૂત્ર

   $\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$ મેળવો.
7. યોગ્ય આકૃતિ દોરી સાપેક્ષવેગની સમજૂતી આપો.
8. સમતલમાં થતી અચળપ્રવેગી ગતિનાં સમીકરણો.

   $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t$

   $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2$ મેળવો.

9. યોગ્ય આકૃતિનો ઉપયોગ કરી નિયમિત વર્તુળાકાર ગતિમાં પ્રવેગ $a_c = \frac{v^2}{r}$ સૂત્ર મેળવો અને દર્શાવો કે તેની દિશા ત્રિજ્યા પર કેન્દ્ર તરફ હોય છે.

10. પ્રક્ષિપ્ત ગતિની વ્યાખ્યા આપી ગતિપથનું સમીકરણ $y = (tan\theta_0)\, x - \frac{g}{(2cos\theta_0)} x^2$ મેળવો.

નીચેના દાખલા ગણો :

1. બે સમાન માનાંક F ધરાવતાં બળો એક કણ ઉપર લાગે છે. જો આ બે બળો વચ્ચેનો કોણ θ હોય, તો પરિણામી બળનો માનાંક શોધો.

[**જવાબ** : $2F\, cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$]

2. જો સદિશો $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ એકમ અને $\vec{B} = -\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ એકમ હોય, તો સદિશ $\vec{A} - \vec{B}$ નો એકમસદિશ શોધો. [**જવાબ** : $\frac{3\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{10}}$ એકમ]

3. જો સદિશો $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ અને $\vec{B} = 4\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ હોય, તો દર્શાવો કે બંને સદિશો સમાંતર સદિશો છે.

4. એક મુસાફર એક નવા શહેરમાં સ્ટેશન પર ઊતરીને ટેક્ષી કરે છે. સ્ટેશનથી સુરેખ રોડ ઉપર તેની હોટેલ 10 km દૂર છે. ડાઇવર્ઝનના કારણે ટેક્ષીડ્રાઈવર મુસાફરને 23 km લંબાઈના વાંકા-ચૂંકા માર્ગે 28 મિનિટમાં હોટેલ ઉપર પહોંચાડે છે, તો

(a) ટેક્ષીની સરેરાશ ઝડપ કેટલી હશે ?

(b) સરેરાશ વેગનું માનાંક કેટલું હશે ? શું આ બંને સમાન હશે ?

[**જવાબ** : (a) 49.3 km h^{-1} (b) 21.26 km h^{-1} આ બંને સમાન નથી.]

5. એક કણ ઊગમબિંદુએથી $t = 0$ સમયે $10\hat{j}$ m s^{-1} ના વેગથી ગતિ શરૂ કરી X–Y સમતલમાં $8\hat{i} + 2\hat{j}$ m s^{-2} જેટલા અચળ પ્રવેગથી આગળ વધે છે, તો

(a) કયા સમયે તેનો x-યામ 16m થશે. ત્યાં આ સમયે તેનો y-યામ કેટલો હશે ?

(b) આ સમયે કણની ઝડપ કેટલી હશે ?

[**જવાબ** : (a) સમય 2 s, y યામ 24 m (b) ઝડપ 21.26 m s^{-1}]

6. એક વિમાન જમીનથી 3600 m ની ઊંચાઈએ ઊડે છે. જમીન પરના અવલોકનબિંદુ પાસે વિમાન 10 સેકન્ડમાં 30°નો ખૂણો રચતું હોય તો આ વિમાનની ઝડપ કેટલી હશે ?

[**જવાબ** : 60π m s^{-1}]

7. બંદૂકમાંથી સમક્ષિતિજ સાથે 30°ના કોણે છોડેલી ગોળી જમીનને 3 km દૂર અથડાય છે. પ્રક્ષિપ્ત-કોણનું મૂલ્ય ગોઠવીને 5 km દૂર આવેલા લક્ષ્ય પર ગોળી મારવાનું શક્ય છે કે નહિ તે ગણતરી કરીને જણાવો. હવાનો અવરોધ અવગણો.

8. ઊગમબિંદુ આગળથી પ્રક્ષિપ્ત કરેલા પદાર્થનો પ્રક્ષિપ્ત કોણ $\theta_0 = tan^{-1}\left(\frac{4H}{R}\right)$ વડે અપાય છે, તેમ દર્શાવો. H = મહત્તમ ઉંચાઈ અને R = અવધિ.

9. ત્રણ અશૂન્ય સદિશો $\vec{A}$, $\vec{B}$ અને $\vec{C}$ સમીકરણ $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ ને અને તેમનાં મૂલ્યો સમીકરણ A + B = C ને સંતોષે છે, તો $\vec{A}$ એ $\vec{B}$ ની સાપેક્ષે કઈ રીતે ગોઠવાયેલો હશે ? તમારા જવાબનું કારણ આપો.