ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

3η Εργασία

Τζομίδης Νικόλαος-Φώτιος
ΑΕΜ: (9461)
tzomidis@ece.auth.gr

Τεχνικές Βελτιστοποίησης(7ο εξάμηνο)

19 Δεκεμβρίου 2021

Περιεχόμενα

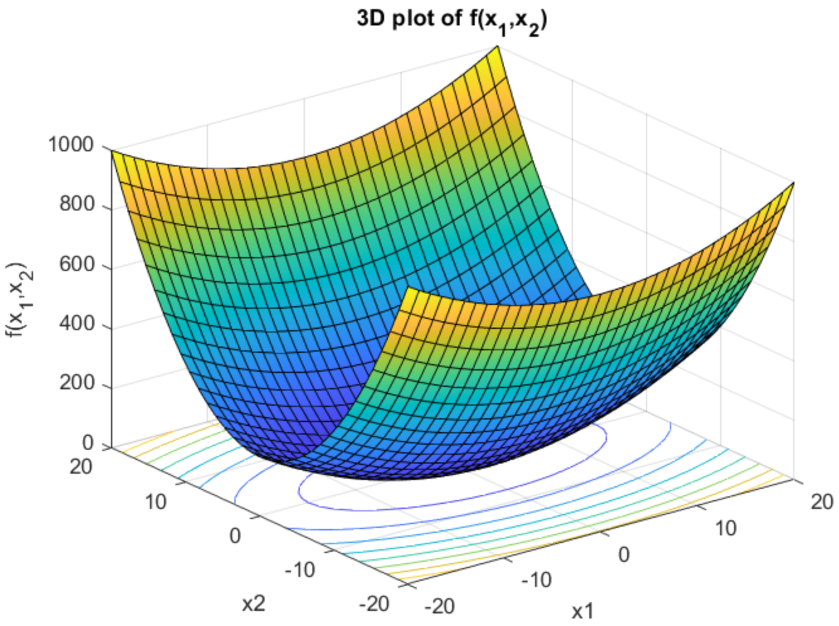
Λίστα Σχημάτων

Κεφάλαιο 1

3η Εργαστηριακή Άσκηση

Στη 3η εργαστηριακή άσκηση θα ασχοληθούμε με την μέθοδο της Μέγιστης Καθόδου με προβολή και πιο συγκεκριμένα για την συνάρτηση:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2} \cdot x_1^2 + 2 \cdot x_2^2$$



Σχήμα 1.1: Τρισδιάστατη αναπαράσταση της f

Με το αρχείο 'plotf.m' αναπαριστούμε τρισδιάστατα την f για να έχουμε μια οπτικοποίηση της μορφής της.

Από την τρισδιάστατη αναπαράσταση της συνάρτησης παρατηρούμε πώς το γεωμετρικό της σχήμα είναι ένα ελλειπτικό παραβολοειδές ενώ μπορούμε να δούμε και πως εμφανίζει ελάχιστο στο (0,0).

1.1 Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου

1.1.1 Θέμα 1

Στο 1ο θέμα της εργασίας καλούμαστε να χρησιμοποιήσουμε στην συνάρτηση την μέθοδο της Μέγιστης Καθόδου που υλοποιήσαμε στην 2η εργασία. Προσπαθούμε λοιπόν να ελαχιστοποιήσουμε την f με ακρίβεια $\epsilon = 0.01$ και διαφορετικά βήματα:

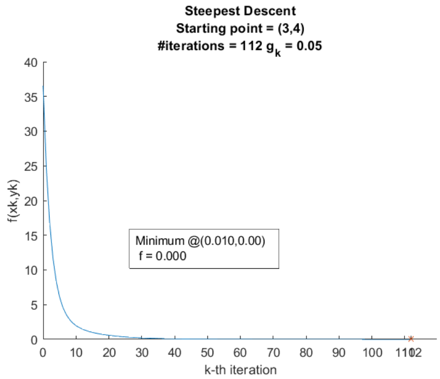
(i) $\gamma_k = 0.05$

(ii) $\gamma_k = 0.5$

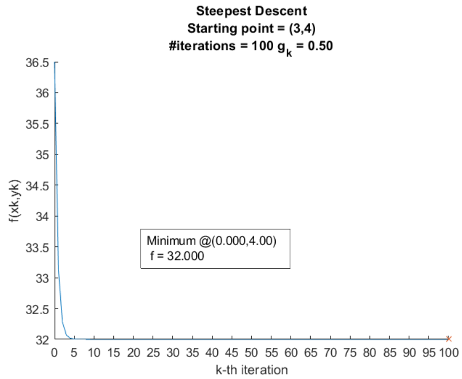
(iii) $\gamma_k = 2$

(iv) $\gamma_k = 10$

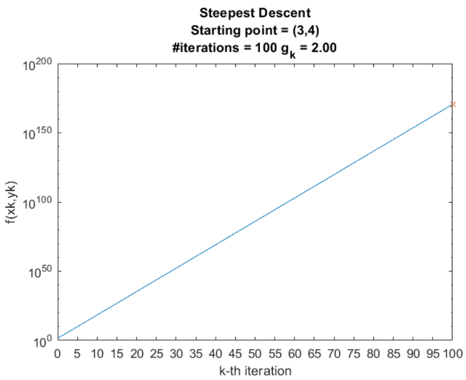
Σαν σημείο εκκίνησης για την μέθοδο επιλέξαμε αυθαίρετα το (3,4) και παίρνουμε τα παρακάτω 4 διαγράμματα για τις διαφορετικές τιμές του γ_k. Για να μπορέσει η μέθοδος να τερματίσει τέθηκαν σαν μέγιστο όριο οι 100 επαναλήψεις αλλιώς έτρεχε επ' άπειρον ο αλγόριθμος. Στην περίπτωση (i) η μέθοδος βρίσκει το ελάχιστο με σχετικά καλή ακρίβεια. Στην περίπτωση (ii) όπου $\gamma_k = 0.5$ η μέθοδος ξεκινάει να ελαχιστοποιεί την συνάρτηση μας αλλά δεν πλησιάζει ποτέ στο πραγματικό ελάχιστο σημείο της ενώ όσο και να αυξηθούν οι επαναλήψεις φαίνεται να φτάνει μέχρι την τιμή f=32 της συνάρτησης μας. Αντίθετα στις περιπτώσεις (iii) και (iv) για τα πιο μεγάλα γ_k η μέθοδος αποκλίνει κατά πολύ από το ελάχιστο ενώ οι τιμές της συνάρτησης παρουσιάζουν εκθετική αύξηση, για αυτό τον λόγο στα 2 τελευταία διαγράμματα οι τιμές της f παρουσιάζονται σε λογαριθμική κλίμακα για να γίνεται εύκολα κατανοητό το διάγραμμα.



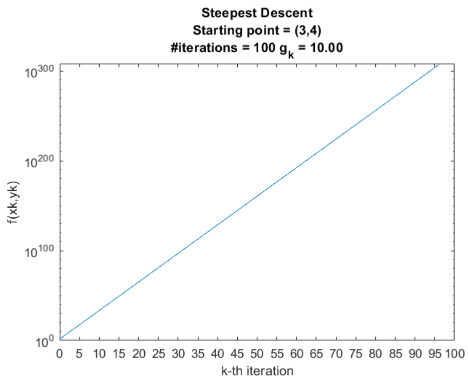
(a) Τιμές της f για $\gamma_k = 0.05$



(b) Τιμές της f για $\gamma_k = 0.5$



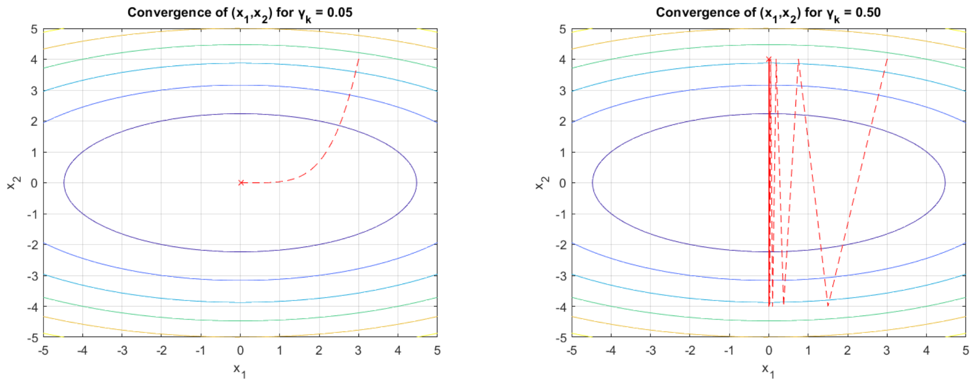
(c) Τιμές της f για $\gamma_k = 2$



(d) Τιμές της f για $\gamma_k = 10$

Σχήμα 1.2: Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου στην f για τις διάφορες τιμές γ_k

Για την τιμή (ii) $\gamma_k = 0.5$ πιο συγκεκριμένα από τα παρακάτω διαγράμματα μπορούμε να δούμε ότι η μέθοδος ταλαντεύεται ανάμεσα σε τιμές [-4,4] για την μεταβλητή x_2 του σε αντίθεση με την (i) $\gamma_k = 0.05$ η οποία συγκλίνει στο 0 χωρίς ταλαντώσεις.



(a) Σύγκλιση του ζεύγους (x_1, x_2) για $\gamma_k = 0.05$

(b) Σύγκλιση του ζεύγους (x_1, x_2) για $\gamma_k = 0.5$

Σχήμα 1.3: Σύγκλιση του ζεύγους (x_1, x_2) για τις (i),(ii) τιμές γ_k

Θα προσπαθήσουμε τώρα να εξηγήσουμε αυτή την συμπεριφορά της μεθόδου με μαθηματική αυστηρότητα. Αρχικά υπολογίζουμε το gradient της συνάρτησης μας:

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 4 \cdot x_2 \end{bmatrix} \text{ άρα } , \nabla f(x_{1_k}, x_{2_k}) = \begin{bmatrix} x_{1_k} \\ 4 \cdot x_{2_k} \end{bmatrix}$$

Οπότε για την μέθοδο θα είναι $\begin{bmatrix} x_{1_{k+1}} \\ x_{2_{k+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1_k} \\ x_{2_k} \end{bmatrix} - \gamma_k \cdot \begin{bmatrix} x_{1_k} \\ 4 \cdot x_{2_k} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_{1_{k+1}} = x_{1_k} - \gamma_k \cdot x_{1_k} \\ x_{2_{k+1}} = x_{2_k} - 4\gamma_k \cdot x_{2_k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1_{k+1}} = (1 - \gamma_k) \cdot x_{1_k} \\ x_{2_{k+1}} = (1 - 4\gamma_k) \cdot x_{2_k} \end{cases} \quad (1)$$

Από την τρισδιάστατη αναπαράσταση της f παραπάνω μπορούμε να δούμε πως η συνάρτηση εμφανίζει ελάχιστο στο σημείο $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$. Οπότε αυτό που θέλουμε να επιτύχουμε είναι για $k \to \infty : x_{1_k} = 0$ και $x_{2_k} = 0$

Για να γίνει αυτό πρέπει να συγκλίνουν οι 2 σχέσεις της (1) θα έχουμε δηλαδή:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} |1 - \gamma_k| < 1 \\ |1 - 4\gamma_k| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < 1 - 4\gamma_k < 1 \Leftrightarrow -2 < -4\gamma_k < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < \gamma_k < 0.5,$$

Βλέπουμε λοιπόν πως η τιμή του γ_k πρέπει να κυμαίνεται μεταξύ του 0 και του 0.5 για να συγκλίνει η μέθοδος μας κάτι που επαληθεύει και τα αποτελέσματα απο τα διαγράμματα μας παραπάνω.

Για την τιμή (ii) $\gamma_k = 0.5$ πιο συγκεκριμένα η ταλάντωση που παρατηρήσαμε παραπάνω εξηγείται στο ότι η τιμή βρίσκεται στο όριο του διαστήματος σύγκλισης της μεθόδου για αυτό και έχουμε αυτή την συμπεριφορά "ταλάντωσης". Ενώ για τις περιπτώσεις (iii) και (iv) η πολύ μεγάλη απόκλιση εξηγείται από το ότι τα συγκεκριμένα γ_k απέχουν πολύ από το διάστημα που καταλήξαμε παραπάνω.

1.2 Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με προβολή

Η μέθοδος Μέγιστης Καθόδου παρότι είναι ένας χρήσιμος αλγόριθμος στον τομέα της ελαχιστοποίησης αντιμετωπίζει προβλήματα όταν το πρόβλημα που προσπαθούμε να επιλύσουμε θέτει περιορισμούς, παραδείγματος χάριν όταν το διάνυσμα μας x_k πρέπει να βρίσκεται συνεχώς εντός ενός κυρτού συνόλου $X \subset \mathbb{R}^2$. Αυτό το πρόβλημα έρχεται να λύσει η μέθοδος μέγιστης καθόδου με προβολή η οποία ξεκινά με ένα εφικτό σημείο και συνεχίζει με τον αλγόριθμο της μέγιστης καθόδου εως ότου βρεί μη εφικτό σημείο x_k οπότε και βρίσκει την προβολή αυτού στο κυρτό σύνολο X και επαναλαμβάνει την ίδια διαδικασία. Τα εφικτά σημεία δηλαδή του αλγορίθμου είναι της μορφής:

$$x_{k+1} = x_k + \gamma_k(\bar{x} - x_k) \text{ ,όπου } \bar{x} = Pr_x\{x_k - s_k \nabla f(x_k)\}$$

Για εφικτό σημείο x_k όμως θα είναι $\bar{x} = x_k - s_k \nabla f(x_k)$ ακολουθούμε δηλαδή την μέθοδο της μέγιστης καθόδου με βήμα $\gamma_k' = \gamma_k \cdot s_k$ και για το γ_k' θα ισχύουν οι περιορισμοί του θέματος 1 $(0 < \gamma_k' < 0.5)$.

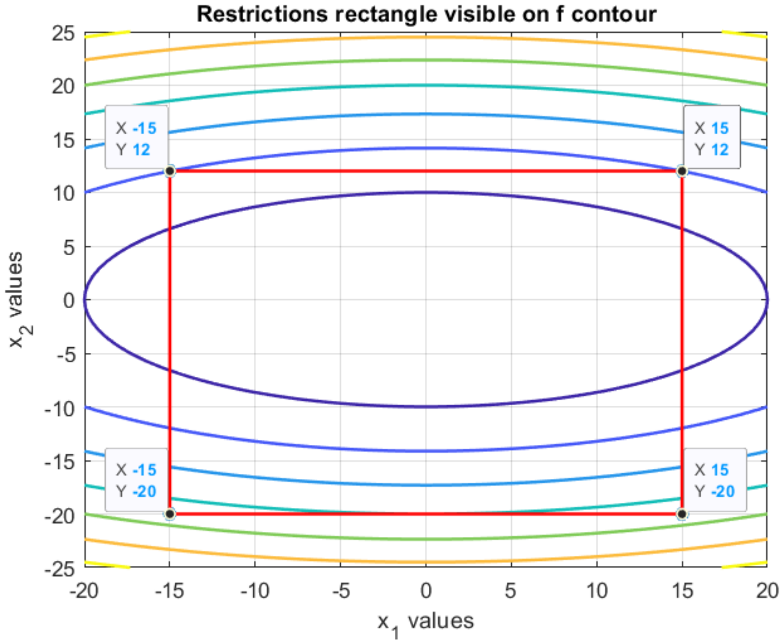
Για την συνέχεια της εργασίας ισχύουν οι παρακάτω περιορισμοι για τα $x_1, x_2 : -15 \leq x_1 \leq 15$ και $-20 \leq x_2 \leq 12$ και έχουμε το εξής κυρτό σύνολο

$$X \subset \mathbb{R}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : -15 \leq x_1 \leq 15 \text{ και } -20 \leq x_2 \leq 12\}$$

Βασιζόμενοι στην σελ.202 του βιβλίου[1] ορίζουμε τις προβολές των x_1, x_2 στο X ως εξής:

$$[Pr_X\{x\}]_1 = \begin{cases} -15, & x_1 \leq -15 \\ x_1, & -15 < x_1 < 15 \\ 15, & x_1 \geq 15 \end{cases} \text{ και } [Pr_X\{x\}]_2 = \begin{cases} -20, & x_2 \leq -20 \\ x_2, & -20 < x_2 < 12 \\ 12, & x_2 \geq 12 \end{cases}$$

Τέτοιοι περιορισμοί δημιουργούν παραλληλόγραμμα που φράζουν εσωτερικά τους τις τιμές της συνάρτησης. Μπορούμε να το δούμε καλύτερα παρακάτω στο διάγραμμα με τις ισοβαρείς καμπύλες της f.



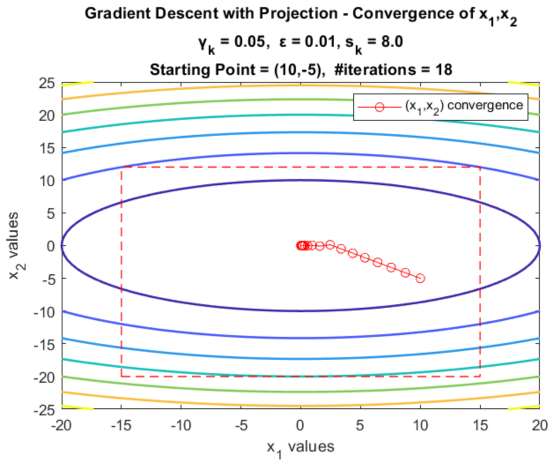
Σχήμα 1.4: Το παραλληλόγραμμο περιορισμών της συνάρτησης

1.2.1 Θέμα 2

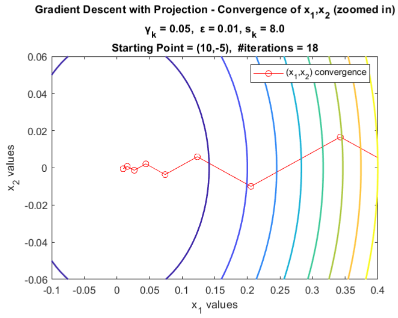
Στο Θέμα 2 χρησιμοποιούμε την μέθοδο μέγιστης καθόδου με προβολή με $s_k = 8, \gamma_k = 0.05, \epsilon = 0.01$ και αρχικό σημείο εκκίνησης του αλγορίθμου το (10,-5). Λαμβάνοντας υπόψιν και τα παραπάνω θα είναι

$$\gamma_k' = \gamma_k \cdot s_k = 0.05 \cdot 8 = 0.4 \text{ δηλαδή } \gamma_k' < 0.5$$

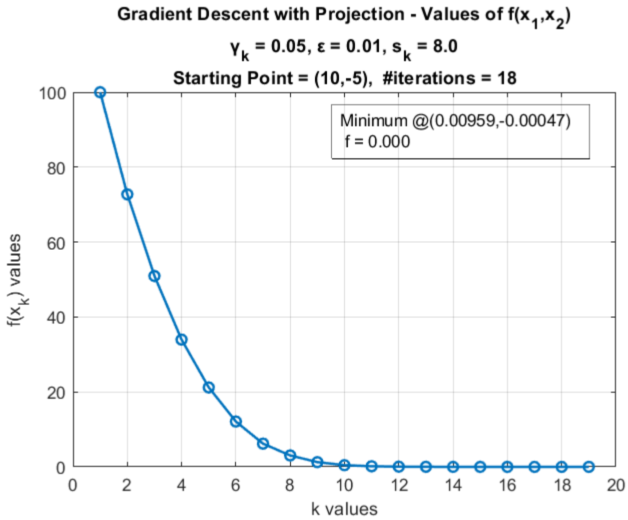
και θα αναμένουμε να συγκλίνει η μέθοδος μας με αυτές τις αρχικές συνθήκες.



(a) Σύγκλιση x_1, x_2



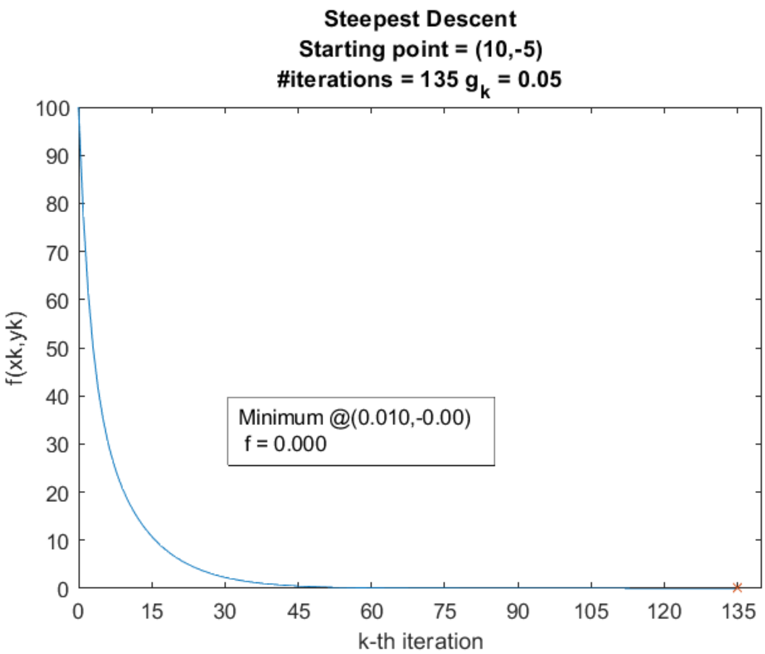
(b) Σύγκλιση x_1, x_2 (zoomed)



(c) Τιμές της f

Σχήμα 1.5: Σύγκλιση από σημείο (10,-5) για $s_k = 8, \gamma_k = 0.05$

Όπως αναμέναμε η μέθοδος συγκλίνει και σε ικανοποιητικό αριθμό επαναλήψεων μάλιστα, σε σχέση με την απλή μέθοδο μέγιστης καθόδου για ίδιο αρχικό σημείο και γ_k παρατηρούμε μεγάλη διαφορά στον απαιτούμενο αριθμό των επαναλήψεων μέχρι να τερματίσει ο αλγόριθμος της απλής μεθόδου. Αυτό οφείλεται στην υπάρξη του s_k το οποίο μάλιστα έχει και μεγάλη τιμή επιταχύνοντας έτσι την σύγκλιση του αλγορίθμου. Αντίθετα παρά το ότι $s_k = 8$ δεν παρατηρούμε παρόμοια συμπεριφορά με το Θέμα 1(iv) καθώς όπως έχουμε σημειώσει στην μέθοδο μέγιστης καθόδου με προβολή είναι $\gamma_k' = \gamma_k \cdot s_k$ και η προβολή ουσιαστικά διατηρεί τις τιμές εντός των περιορισμών που έχουμε θέσει.



Σχήμα 1.6: Σύγκριση Μεθόδου Μέγιστης Καθόδου με ίδιο αρχικό σημείο γ_k

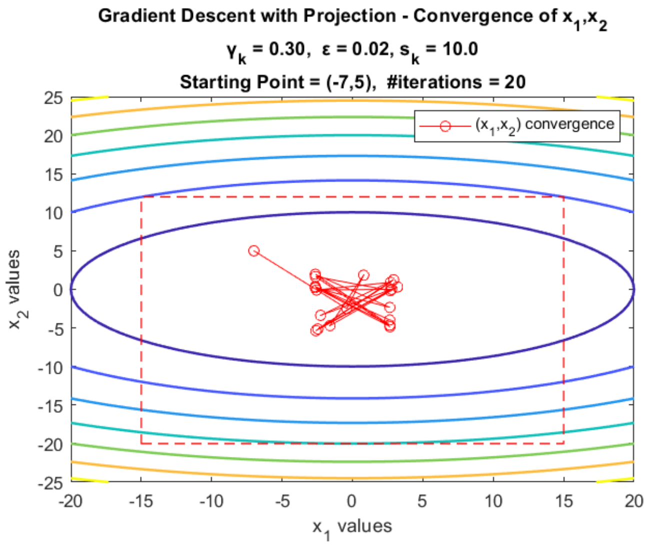
1.2.2 Θέμα 3

Στο Θέμα 3 χρησιμοποιούμε την μέθοδο μέγιστης καθόδου με προβολή με $s_k = 10, \gamma_k = 0.3, \epsilon = 0.02$ και αρχικό σημείο εκκίνησης του αλγορίθμου το (-7,5). Λαμβάνοντας υπόψιν ξανά τα παραπάνω θα είναι

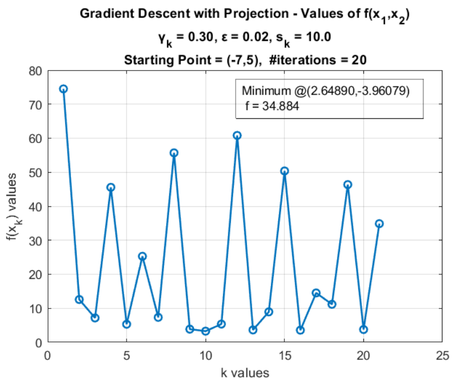
$$\gamma_k' = \gamma_k \cdot s_k = 0.3 \cdot 10 = 3 \text{ δηλαδή } \gamma_k' > 0.5$$

οπότε αναμένουμε η μέθοδος να μην συγκλίνει στο ελάχιστο για τις συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες.

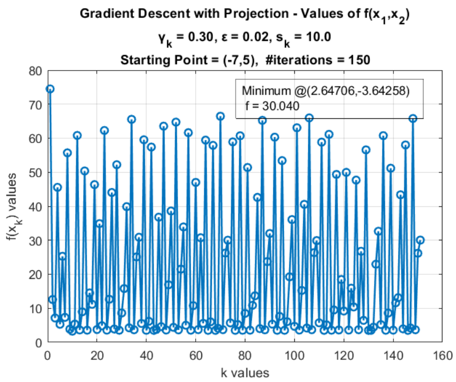
Ο αλγόριθμος αδυνατεί να τερματίσει για αυτό και τέθηκε αρχικά όριο στις 20 επαναλήψεις για να δούμε την συμπεριφορά του, ενώ παρουσιάζεται και ένα διάγραμμα με τις τιμές της συνάρτησης σε 150 επαναλήψεις.



(a) Σύγκλιση x_1, x_2



(b) Τιμές της f :20



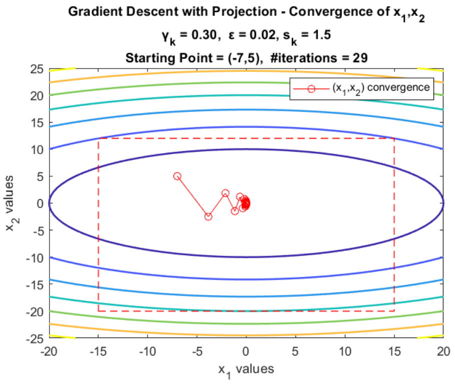
(c) Τιμές της f για για μέγιστο αριθμό επαναλήψεων :150

Σχήμα 1.7: Σύγκλιση από σημείο (-7,5) για $s_k = 10, \gamma_k = 0.3$

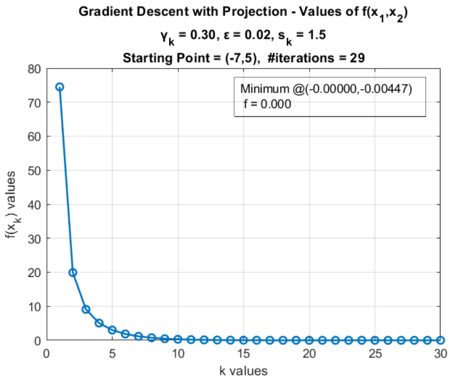
Σε αυτή όμως την περίπτωση παρότι $\gamma_k' > 0.5$ και θα περιμέναμε οι τιμές της συνάρτησης να αυξάνονται εκθετικά, βλέπουμε ότι η μέθοδος ταλαντεύεται μιας και η η χρήση της προβολής της μεθόδου και το μεγάλο s_k εγκλωβίζει το x_k εντός των περιορισμών.

Επομένως σε σύγκριση με το Θέμα 1(i) εδώ δεν καταλήγουμε σε ελάχιστο με μια ομαλή πορεία και σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων αλλά υπάρχει συνεχής αλλαγή κατεύθυνσης και μή σύγκλιση στο σημείο ελαχίστου. Συγκριτικά με το Θέμα 1(iv) τώρα και οι 2 περιπτώσεις έχουν μεγαλύτερο γ_k από το επιθυμητό για την σύγκλιση και ενώ στην μια περίπτωση οι τιμές αυξάνονται εκθετικά απομακρυνόμενες κατα πολύ από το (0,0) στην περίπτωση της μέγιστης καθόδου με προβολή οι τιμές διατηρούνται εντός του παραλληλογράμμου που περιγράψαμε παραπάνω και μπορεί σε κάποιο πολύ μεγάλο αριθμό επαναλήψεων να βρεθούν έστω και "τυχαία" στο επιθυμητό σημείο τερματίζοντας έτσι τον αλγόριθμο.

Όπως είδαμε το μεγάλο s_k σε συνδυασμό με το $\gamma_k = 0.3$ αποτρέπουν την μέθοδο απο το να συγκλίνει. Οπότε ενας πρακτικός τρόπος να το αλλάξουμε αυτό θα ήταν εάν θέταμε π.χ $s_k = 1.5$ και τότε θα επιτυγχάναμε την σύγκλιση όπως μπορούμε να δούμε και παρακάτω αφού θα είναι $\gamma'_k = 0.3 \cdot 1.5 = 0.45$



(a) Σύγκλιση του ζεύγους (x_1, x_2)

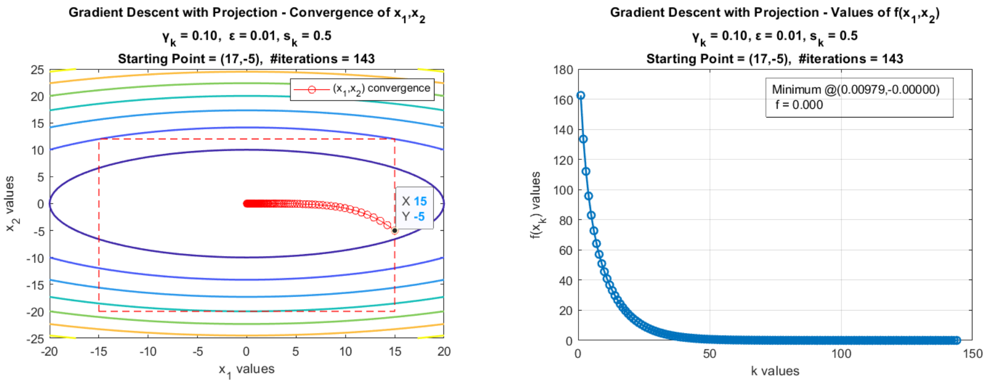


(b) Τιμές της f

Σχήμα 1.8: Αλλαγή σε $s_k = 1.5$ ώστε να συγκλίνει η μέθοδος

1.2.3 Θέμα 4

Στο Θέμα 4 χρησιμοποιούμε την μέθοδο μέγιστης καθόδου με προβολή με $s_k = 0.5, \gamma_k = 0.1, \epsilon = 0.01$ και αρχικό σημείο εκκίνησης του αλγορίθμου το (17,-5). Λαμβάνοντας υπόψιν και τα παραπάνω θα είναι $\gamma'_k = \gamma_k \cdot s_k = 0.1 \cdot 0.5 = 0.05$. Πριν δοκιμάσουμε να τρέξουμε τον αλγόριθμο για τις παραπάνω αρχικές συνθήκες παρατηρούμε πως η τιμή $x_1 = 17$ δεν ανήκει στο κυρτό σύνολο των περιορισμών που ορίσαμε παραπάνω. Η πρώτη κλήση του αλγορίθμου θα χρησιμοποιήσει την προβολή στο X οπότε το αρχικό σημείο θα γίνει το (15,-5) οδηγώντας δηλαδή τον αλγόριθμο μέσα στο διάστημα των περιορισμών έστω και αν αυτό είναι στο όριο του. Από εκεί και έπειτα μπορούμε να δούμε την μέθοδο σαν της απλής μέγιστης καθόδου με $\gamma'_k = 0.05$ όπως είδαμε παραπάνω και βασιζόμενο στο θέμα 1(i) (όπου είχαμε $\gamma'_k = 0.05, \epsilon = 0.01$ μπορούμε να πούμε ότι και ο αλγόριθμος υπό τις συνθήκες του θέματος 4 θα συγκλίνει αργά λόγω του μικρού αρχικού βήματος.



(a) Σύγκλιση του ζεύγους (x_1, x_2) (b) Τιμές της f

Σχήμα 1.9: Σύγκλιση από σημείο (17,-5) για $s_k = 0.5, \gamma_k = 0.1$

Με τα παραπάνω διάγραμματα φαίνεται η συμπεριφορά της μεθόδου και όπως αναμέναμε λοιπόν αυτή θα συγκλίνει στο (0,0) αλλά πολύ αργά αφού χαρακτηριστικά χρειάζεται 143 επαναλήψεις. Ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης ότι και το πρώτο σημείο στην μέθοδο είναι το (15,-5) μιας και όπως περιμέναμε με την κλήση της μεθόδου γίνεται χρήση της προβολής στο σύνολο X.

Βιβλιογραφία

[1] Γεώργιος Α. Ροβιθάκης. *Τεχνικές Βελτιστοποιήσης*. ΕΚΔΟΣΕΙΣ Α. ΤΖΙΟΛΑ & ΥΙΟΙ Α.Ε, 2007.