13/11/2021

1η Εργαστηριακή Άσκηση

Ελαχιστοποίηση κυρτής συνάρτησης μιας μεταβλητής σε δοσμένο διάστημα

Τζομίδης Νικόλαος-Φώτιος(9461)
ΑΕΜ: 9461

ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Ονοματεπώνυμο : Τζομίδης Νικόλαος-Φώτιος

ΑΕΜ : 9461

Email : tzomidis@ece.auth.gr

Εξάμηνο : 7° Ηλεκτρονικής

__Άσκηση 1__: Ελαχιστοποίηση κυρτής συνάρτησης μια μεταβλητής σε δοσμένο διάστημα

Ο σκοπός αυτής της εργασίας είναι η ελαχιστοποίηση τριών συναρτήσεων με την χρήση διάφορων αλγορίθμων αναζήτησης οι οποίοι εφαρμόζονται σε αυστηρά σχεδόν κυρτές συναρτήσεις. Οι αλγόριθμοι που θα χρησιμοποιηθούν είναι οι εξής:

Μέθοδοι αναζήτησης ελαχίστου χωρίς την χρήση παραγώγων:

1) Μέθοδος της Διχοτόμου,

2) Μέθοδος του Χρυσού Τομέα,

3) Μέθοδος Fibonacci.

Μέθοδοι αναζήτησης με χρήση παραγώγων:

4) Μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση παραγώγου.

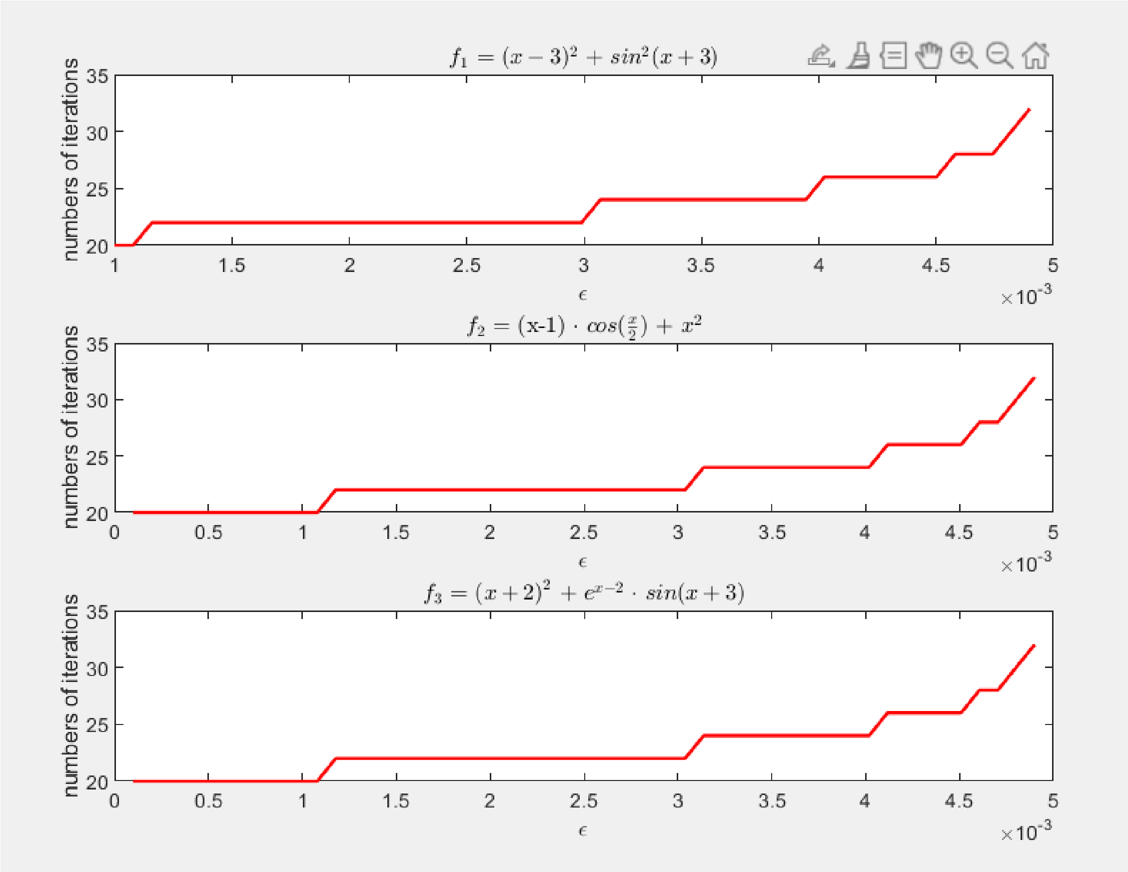
Ενώ το διάστημα ενδιαφέροντος είναι το [-4,4] και οι συναρτήσεις προς ελαχιστοποίηση οι εξής:

- $f_1(x) = (x-3)^2 + \sin^2(x+3)$
- $f_2(x) = (x-1)\cos(\frac{1}{2}x) + x^2$
- $f_3(x) = (x+2)^2 + e^{x-2}\sin(x+3)$

__Αλγόριθμος Διχοτόμου:__ Η μέθοδος αυτή εκμεταλλεύεται το γεγονός ότι οι f(x) είναι αυστηρά σχεδόν κυρτές στο [-4,4] που μας ενδιαφέρει. Αφού χωρίζει το διάστημα σε ίσα υποδιαστήματα με τα x_1, x_2 να επιλέγονται συμμετρικά σε απόσταση $\varepsilon > 0$ από την διχοτόμο του ((α+β)/2) στην συνέχεια αυτό περιορίζεται στο $[\alpha,x_2)$ ή στο $(x_1,\beta]$ ανάλογα με το αν έχουμε $f(x_1) < f(x_2)$ ή $f(x_1) > f(x_2)$ αντίστοιχα.

- Σταθερό l = 0.01

Διατηρώντας το l σταθερό και για διάφορες τιμές του ε παρατηρούμε την αύξηση των κλήσεων της εκάστοτε συνάρτησης. Για τιμές ε > $\frac{l}{2}$ ο αλγόριθμος δεν θα τερματίζει ενώ για τιμές κοντά στο $\frac{l}{2}$ οι κλήσεις αυξάνονται αισθητά. Επομένως επιλέγουμε 50 τιμές του ε στο διάστημα [0.001 , 0.0049] και παίρνουμε:

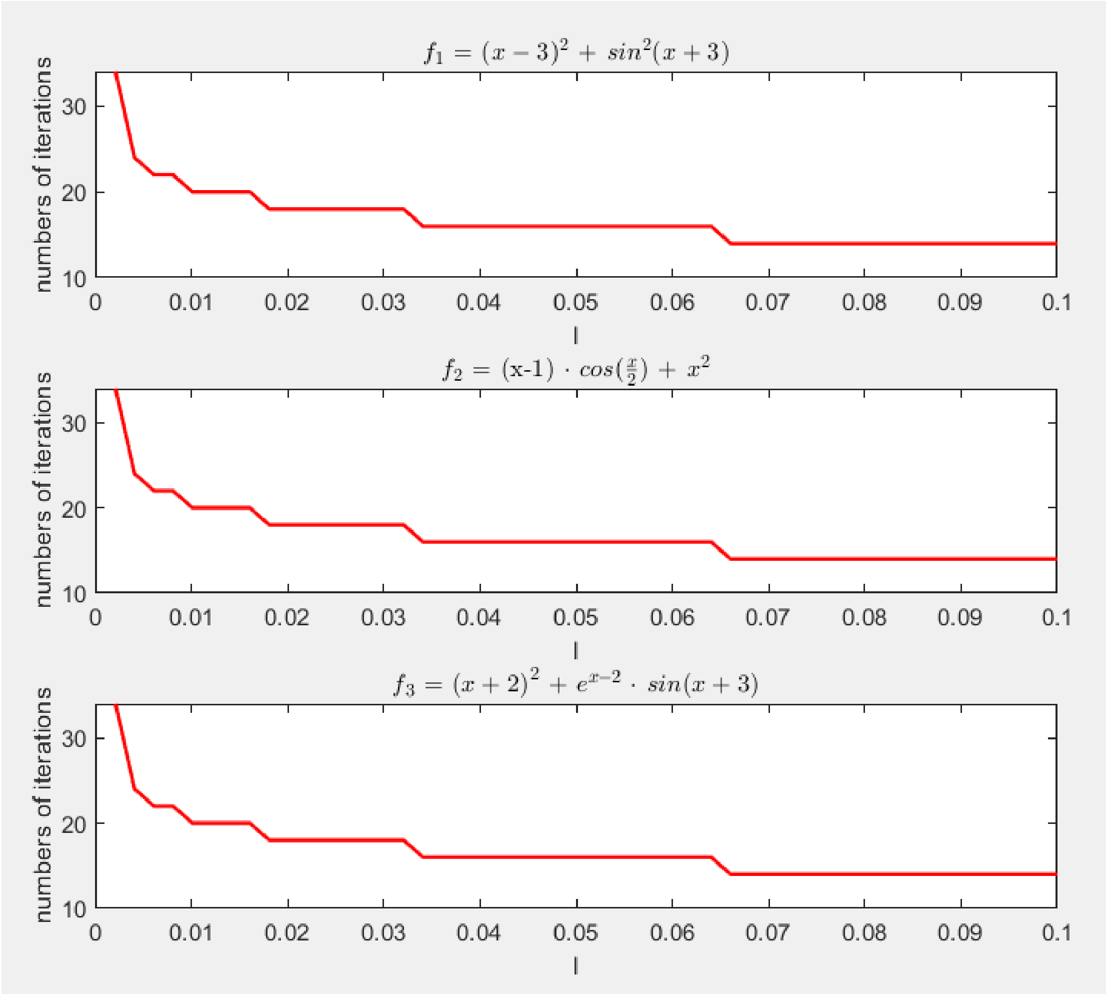


Εικόνα 1: Κλήσεις εκάστοτε συνάρτησης για διάφορα ε (Αλγόριθμος Διχοτόμου)

Καθώς το ε αυξάνεται παρατηρούμε ότι υπάρχει αύξηση και στα βήματα του αλγορίθμου και κατά συνέπεια και οι υπολογισμοί της εκάστοτε συνάρτησης.

- Σταθερό ε = 0.001

Αντίστοιχα με παραπάνω αυτή διατηρώντας σταθερό το ε δίνουμε διάφορες τιμές στο l. Εδώ βασιζόμενοι στην παραπάνω παραδοχή θεωρούμαι l > 2 ε οπότε θα πάρουμε πάλι 50 τιμές του l αντίστοιχα στο διάστημα [0.0021 , 0.01].

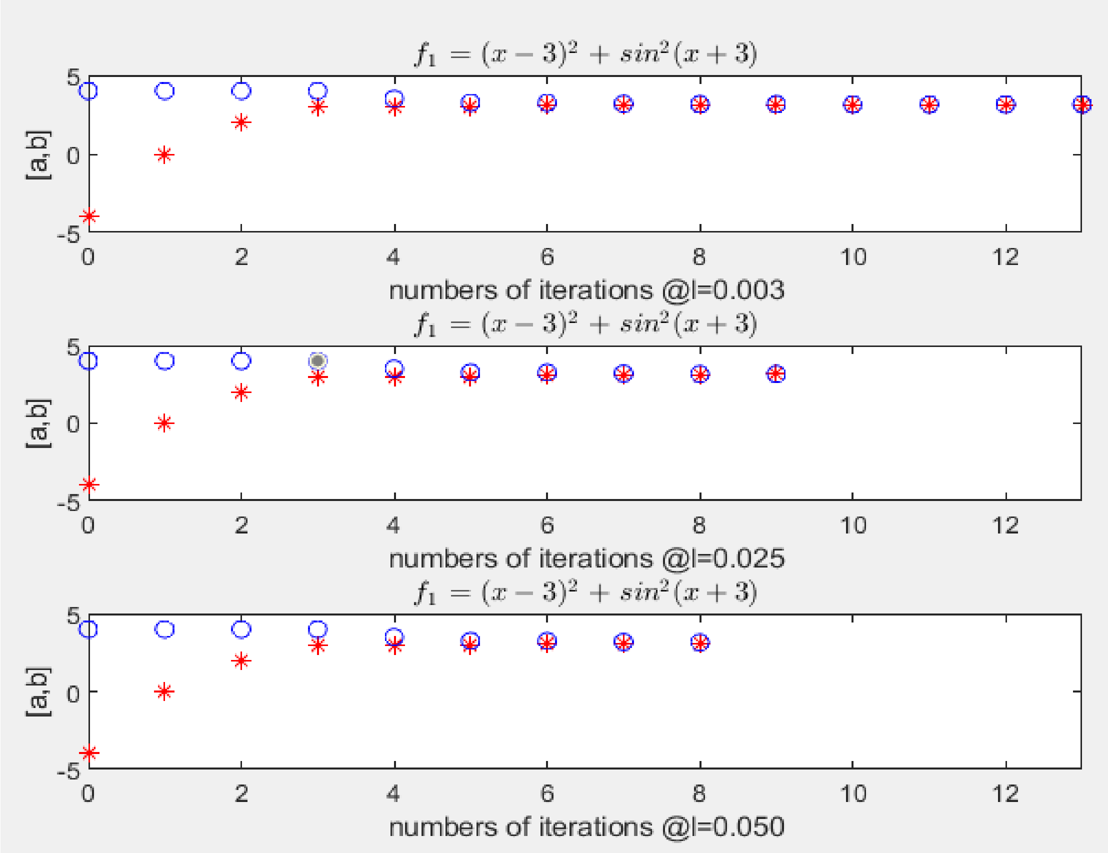


Εικόνα 2: Κλήσεις της εκάστοτε συνάρτησης για διάφορα l(Αλγόριθμος Διχοτόμου)

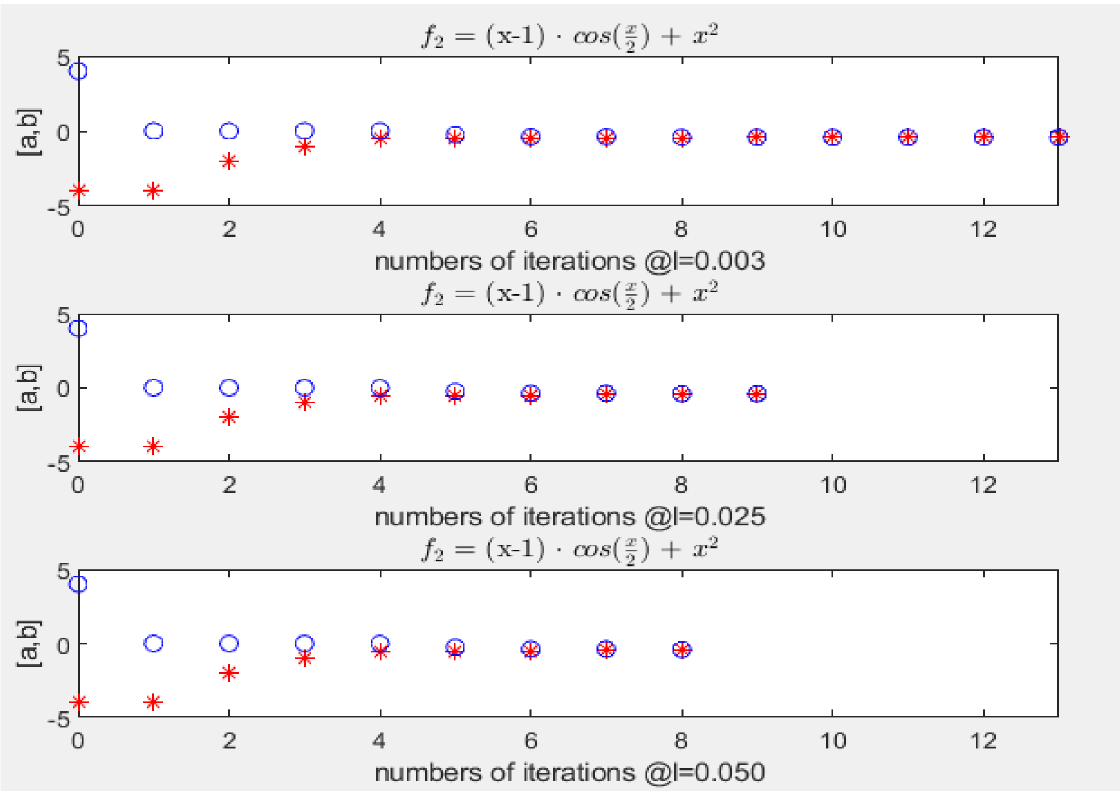
Αντίστοιχα στην περίπτωση όπου μεταβάλλουμε το l έχουμε την αντίθετη επίδραση μιας και η αύξηση του οδηγεί σε μείωση του αριθμού των υπολογισμών για την εκάστοτε συνάρτηση. Και στις 2 περιπτώσεις για κάθε κλήση του αλγορίθμου της διχοτόμου έχουμε 2 κλήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης. Έτσι ο αριθμός των κλήσεων n συνδέεται με τον αριθμό των επαναλήψεων κ από την σχέση n = 2(κ-1) μιας και αρχικά είχαμε κ = 1.

Στην συνέχεια δημιουργήθηκαν για κάθε μια από τις τρεις συναρτήσεις οι γραφικές παραστάσεις των άκρων των διαστημάτων αναζήτησης για 3 διακριτές τιμές l = [0.003 , 0.025 , 0.05] και πως αυτά περιορίζονται ανά επανάληψη κ. Παρατηρούμε πως με την κάθε επανάληψη το εύρος ελλατώνεται και ο αλγόριθμος συγκλίνει στην λύση.

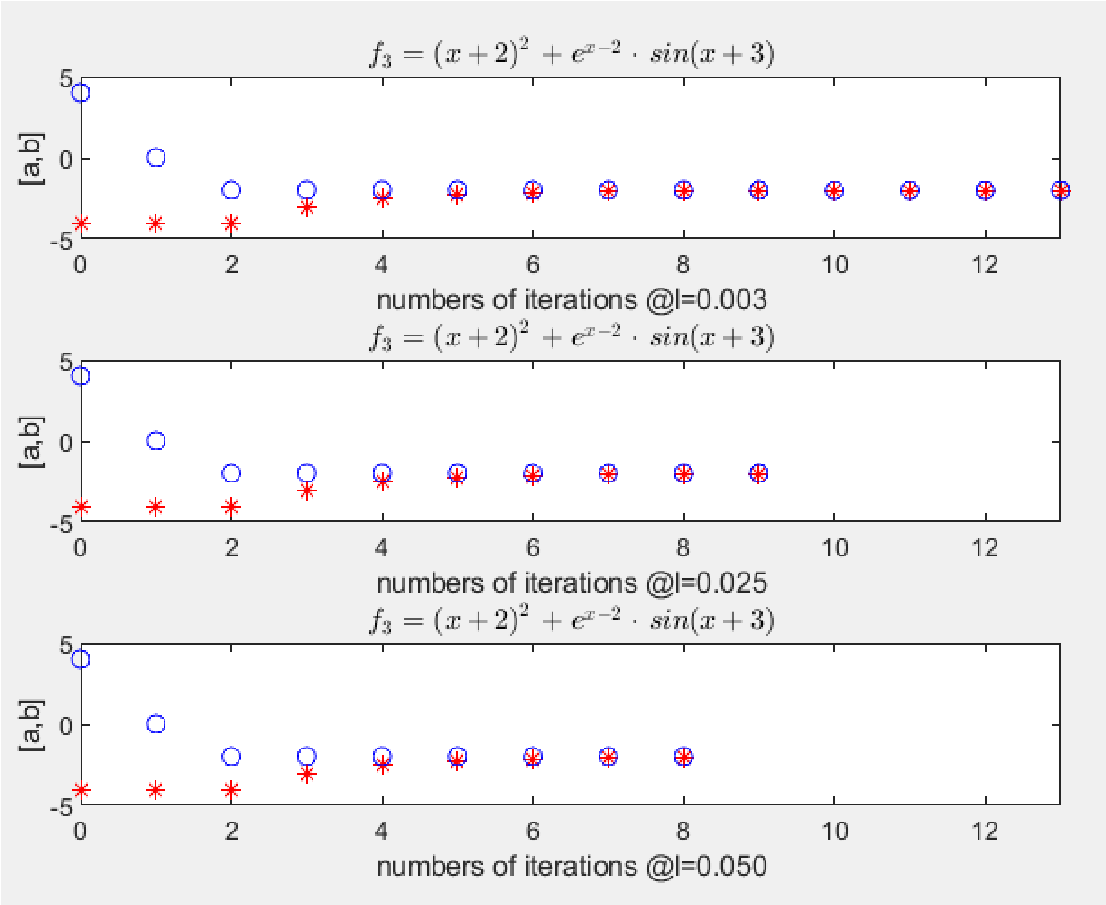
Με κόκκινο * παρουσιάζεται το $a_κ$ και με μπλε o το $b_κ$.



Εικόνα 3: Περιορισμός του [$α_κ$,b_k] για 3 διακριτές τιμές του l στην f1.



Εικόνα 4: Περιορισμός του [$α_κ$,$b_κ$] για 3 διακριτές τιμές του l στην f2.

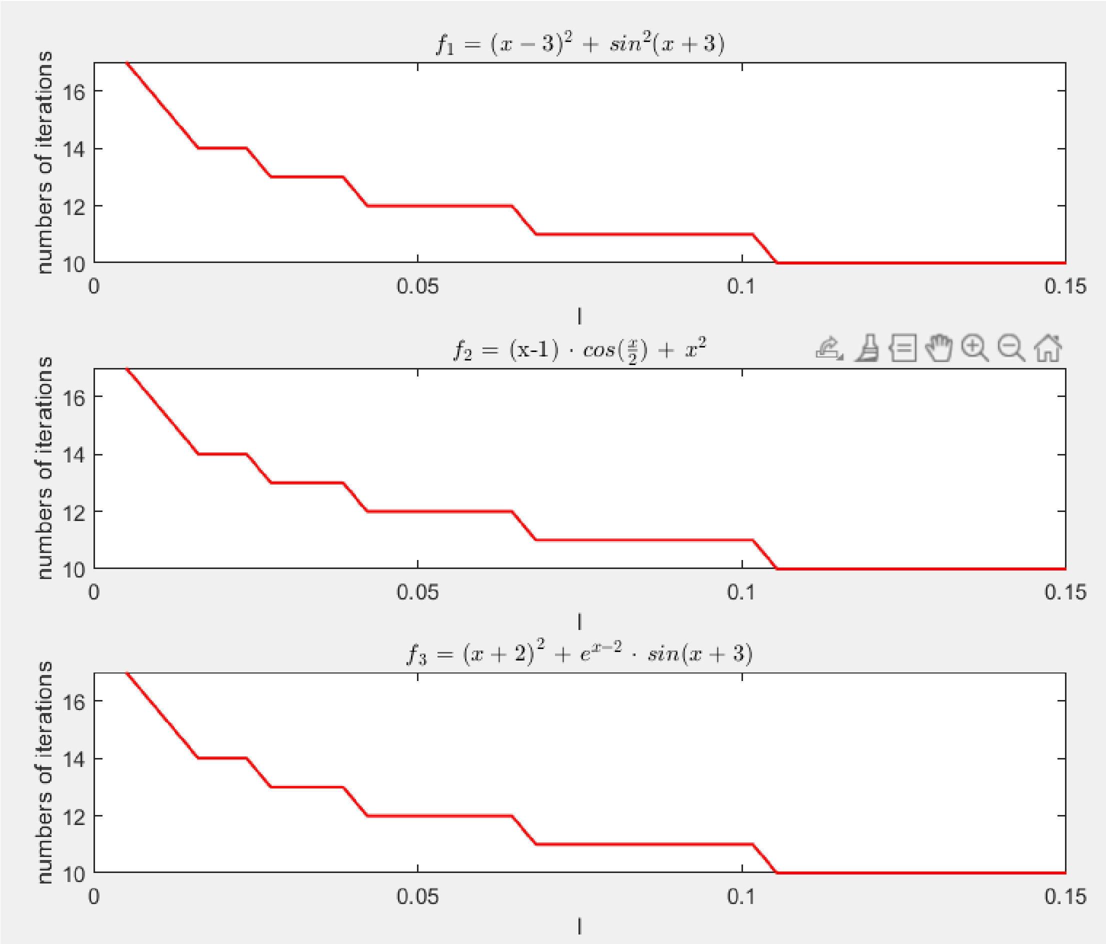


Εικόνα 5: Περιορισμός του [$α_κ$,$b_κ$] για 3 διακριτές τιμές του l στην f3.

<u>Μέθοδος Χρυσού Τομέα:</u> Ο αλγόριθμος αυτός εκμεταλλεύεται την ίδια ιδιότητα των αυστηρά σχεδόν-κυρτών συναρτήσεων σε δοσμένο διάστημα. Ωστόσο η διαφορά του με τον αλγόριθμο Διχοτόμησης είναι πως στην κ – οστή επανάληψη τα δύο διαστήματα ικανοποιούν την σχέση: $b_{k+1} - a_{k+1} = γ(b_k - a_k)$.

Προκύπτει ότι για τον αλγόριθμο του χρυσού τομέα $γ \approx 0.618$.

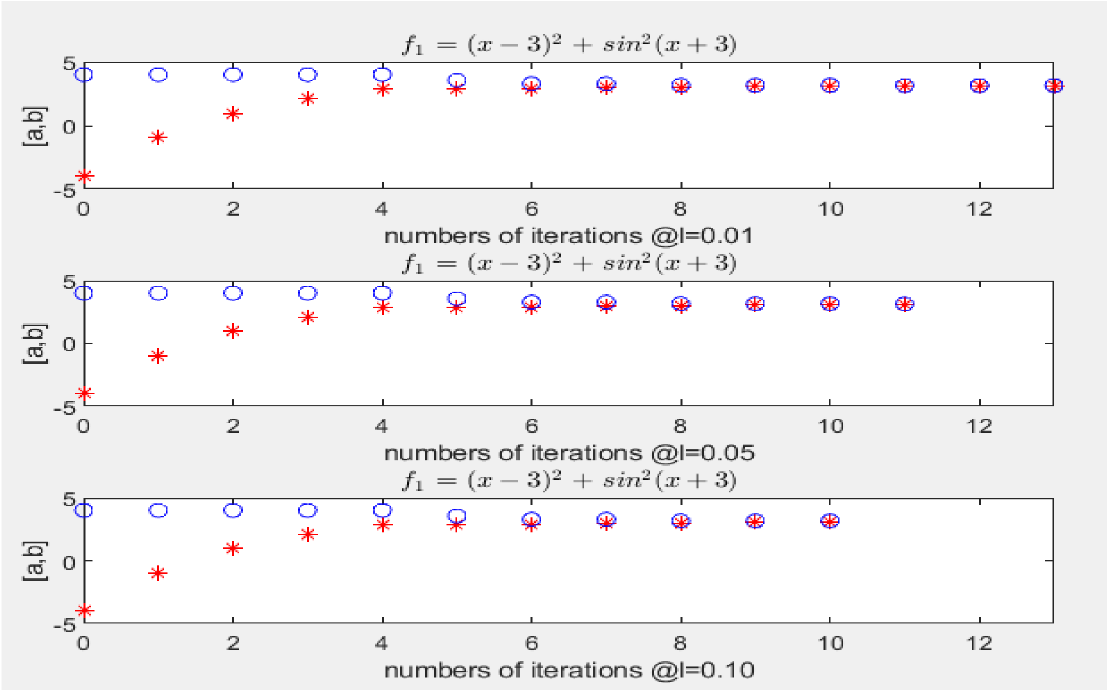
Για μεταβαλλόμενο l μελετούμε τον αριθμό των κλήσεων της συνάρτησης όπως και παραπάνω στον αλγόριθμο διχοτόμησης. και βλέπουμε την ίδια επίδραση στον αλγόριθμο μιας και με την αύξηση του l μειώνεται ο αριθμός των απαιτούμενων επαναλήψεων. Σε αυτή την περίπτωση στην πρώτη εκτέλεση έχουμε 2 κλήσεις της f, από την επόμενη όμως είτε το x_1 είτε το x_2 είναι γνωστά οπότε θα έχουμε μοναδική κλήση της συνάρτησης μας. Άρα n = κ καθώς αρχικά είχαμε κ =1.



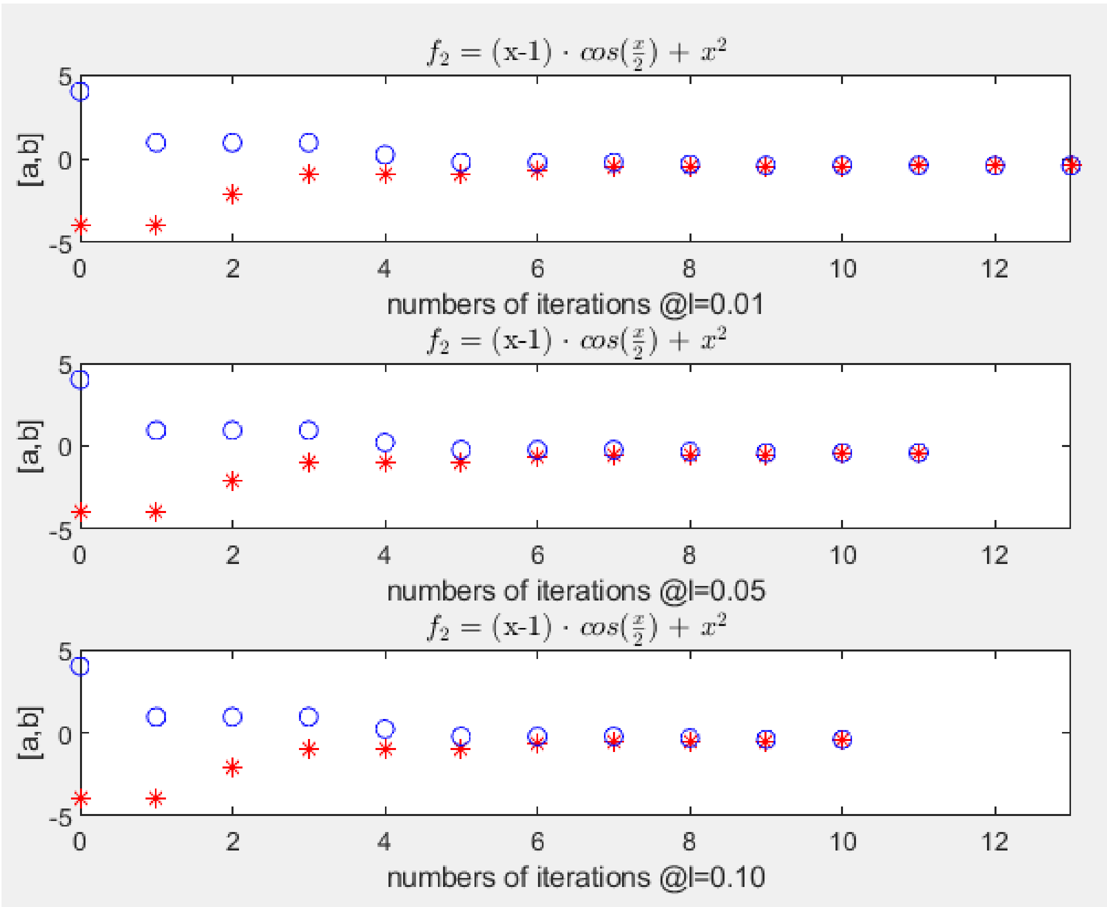
Εικόνα 6: Κλήσεις της εκάστοτε συνάρτησης για μεταβαλλόμενα l (Αλγόριθμος Χρυσού Τομέα)

Στην συνέχεια επαναλαμβάνουμε για κάθε μια από τις τρεις συναρτήσεις την γραφική παράσταση των άκρων των διαστημάτων αναζήτησης για 3 διακριτές τιμές l = [0.01 , 0.05 , 0.1] και πως αυτά περιορίζονται ανά επανάληψη κ. Παρατηρούμε πως με την κάθε επανάληψη το εύρος ελαττώνεται και ο αλγόριθμος συγκλίνει στην λύση όπως και με τον αλγόριθμο Διχοτόμου.

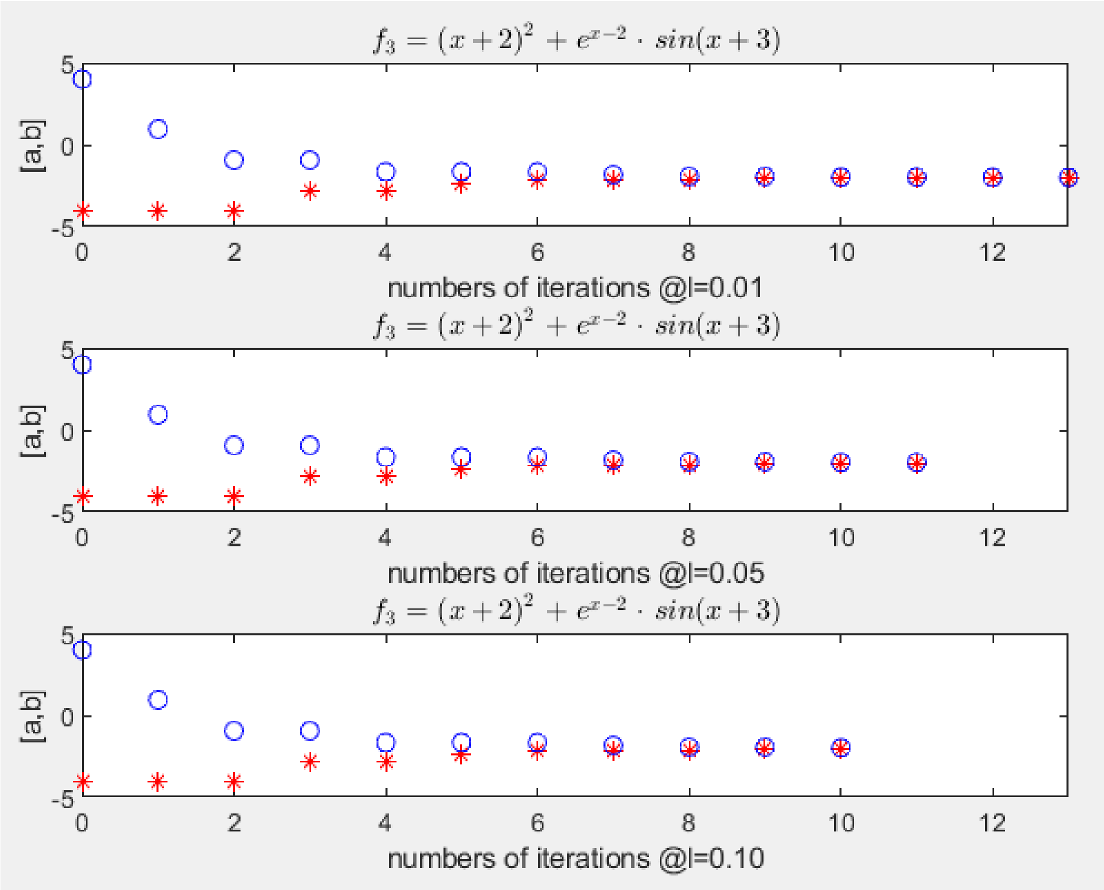
Με κόκκινο * παρουσιάζεται το $a_κ$ και με μπλε ο το $b_κ$.



Εικόνα 7: Περιορισμός του $[\alpha_\kappa,b_k]$ για 3 διακριτές τιμές του l στην f1.



Εικόνα 8: Περιορισμός του $[\alpha_\kappa,b_k]$ για 3 διακριτές τιμές του l στην f2.

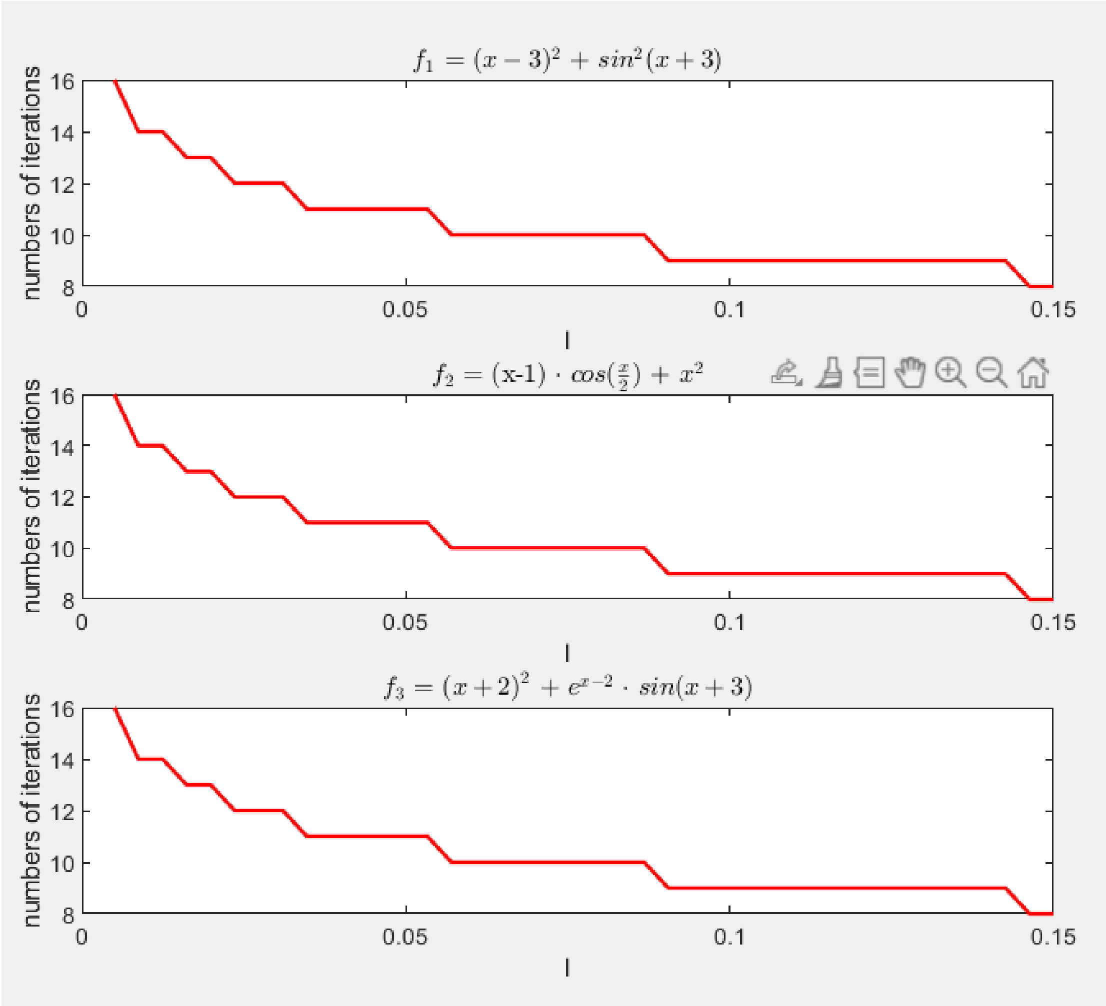


Εικόνα 9: Περιορισμός του [$α_κ$,b_k] για 3 διακριτές τιμές του l στην f3.

Μέθοδος Fibonacci: Τα βήματα που ακολουθεί ο αλγόριθμος εξαρτώνται από την σχέση $F_n = \frac{b-a}{l}$. Για την επιτάχυνση της μεθόδου πέρα από τις τιμές της συνάρτησης x_k κρατούνται και οι αριθμοί της σειράς Fibonacci έως το n. Επιπλέον ο αριθμός των κλήσεων της εκάστοτε συνάρτησης είναι n = κ + 1

***Παρατήρηση:** Στην υλοποίηση του αλγορίθμου Fibonacci χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση fibS.m η οποία εκμεταλλεύεται τις δυο προηγούμενες τιμές της ακολουθίας και ταυτόχρονα αποφεύγουμε την χρήση πινάκων για την αποθήκευση τους. Επίσης έχει γίνει μια παραδοχή ότι στην ακολουθία Fibonacci F(0)=0 σε σχέση με τους τύπους του βιβλίου.

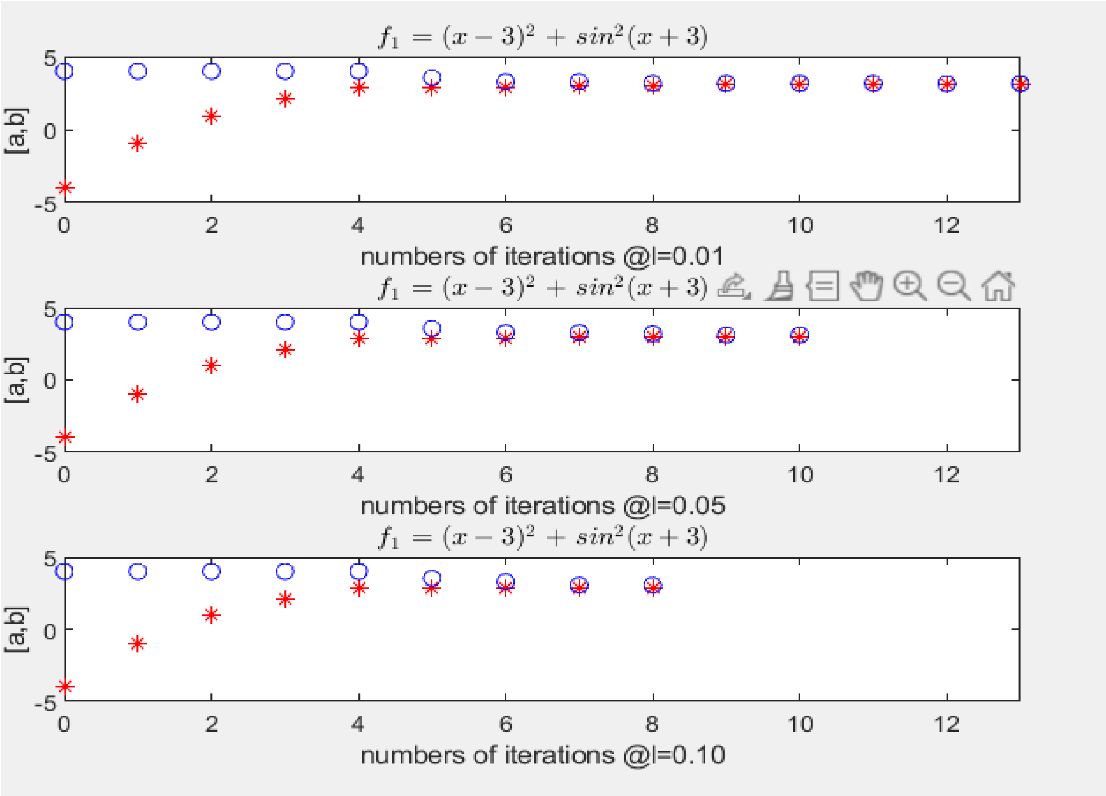
Μελετάμε τώρα τον αριθμό κλήσεων της συνάρτησης για τις διάφορες τιμές του l στο διάστημα [0.005 , 0.15] .



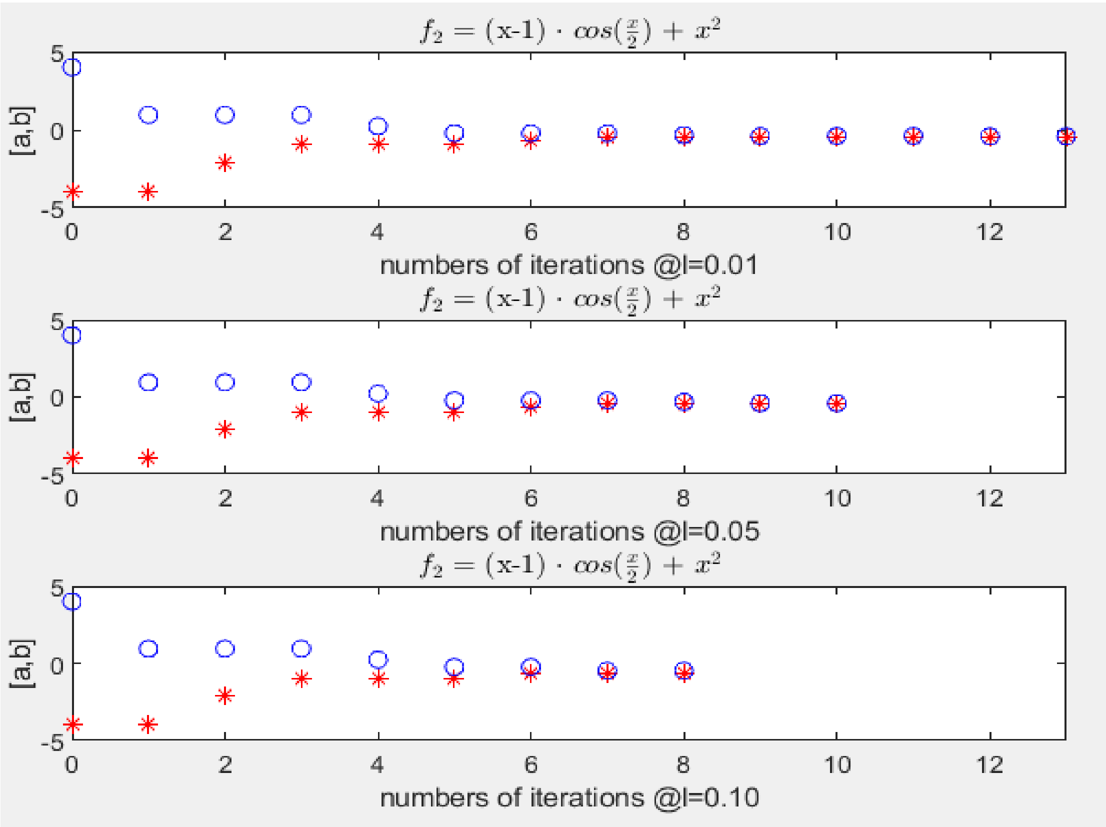
Εικόνα 10: Κλήσεις της εκάστοτε συνάρτησης για μεταβαλλόμενα l (Αλγόριθμος Fibonacci)

Στην συνέχεια επαναλαμβάνουμε για κάθε μια από τις τρεις συναρτήσεις την γραφική παράσταση των άκρων των διαστημάτων αναζήτησης για 3 διακριτές τιμές l = [0.01 , 0.05 , 0.1] και πως αυτά περιορίζονται ανά επανάληψη κ. Παρατηρούμε πως με την κάθε επανάληψη το εύρος ελαττώνεται και ο αλγόριθμος συγκλίνει στην τελική ελάχιστη λύση όπως και με τους 2 παραπάνω αλγόριθμους.

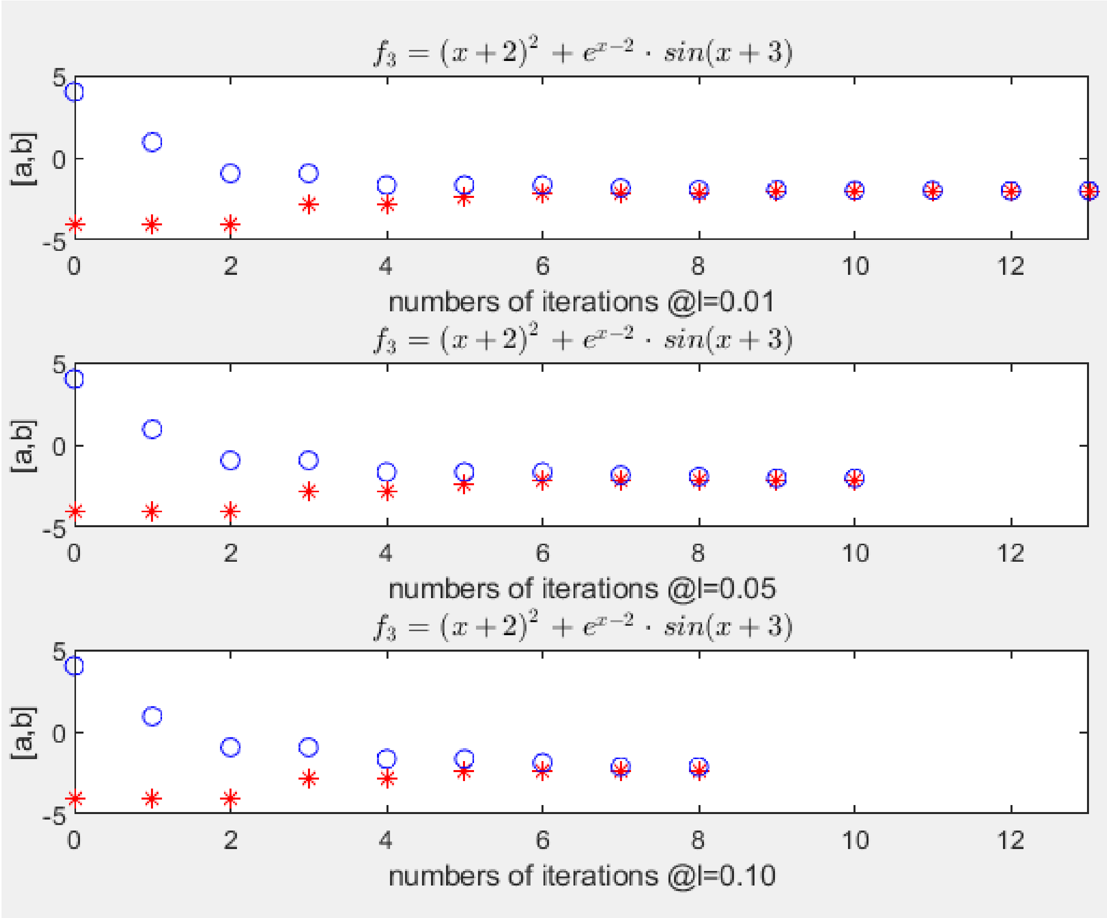
Με κόκκινο * παρουσιάζεται το $a_κ$ και με μπλε ο το $b_κ$.



Εικόνα 11: Περιορισμός του $[α_κ,b_k]$ για 3 διακριτές τιμές του l στην f1.



Εικόνα 12: Περιορισμός του $[α_κ,b_k]$ για 3 διακριτές τιμές του l στην f2.



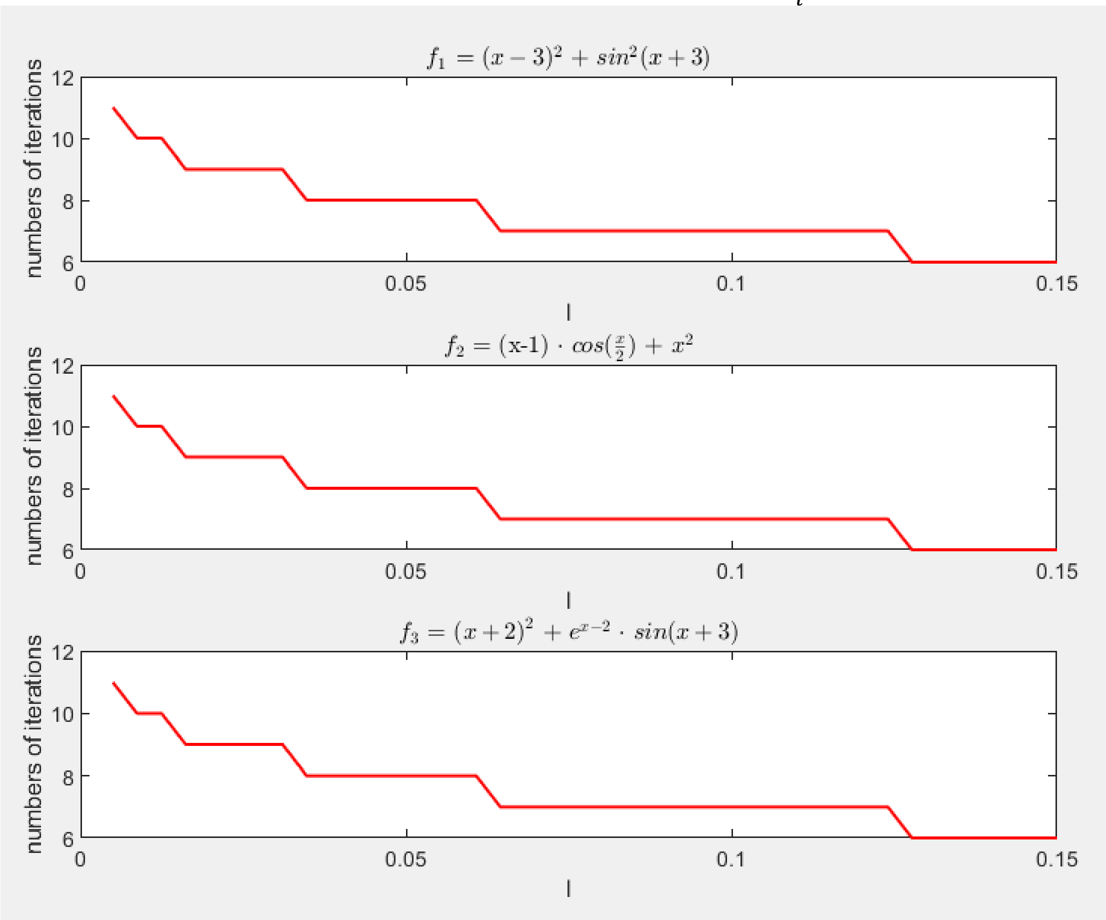
Εικόνα 13: Περιορισμός του [$α_κ$,$b_κ$] για 3 διακριτές τιμές του l στην f3.

<u>Μέθοδος Διχοτόμου με χρήση παραγώγων:</u> Σε αυτό τον αλγόριθμο θα χρησιμοποιήσουμε την κλίση της συνάρτησης και τις ιδιότητες των ψευδοκυρτών συναρτήσεων για να ελαχιστοποιήσουμε το διάστημα αναζήτησης. Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

- Αν $\frac{df}{dx}|_{x=x*}$= 0 τότε λόγω ψευδοκυρτότητας το x* είναι το σημείου ελαχίστου που αναζητούμε.
- Αν $\frac{df}{dx}|_{x=x*}$ > 0 τότε για x > x* θα έχουμε f(x) > f(x*), επομένως το ελάχιστο θα εμφανίζεται αριστερά του x* και θα έχουμε νέο διάστημα αναζήτησης το [α, x*).
- Αν $\frac{df}{dx}|_{x=x*}$ < 0 παρομοίως θα έχουμε f(x) < f(x*) για x < x* και συνεπώς το νέο διάστημα αναζήτησης θα είναι το (x*,β].

Η βέλτιστη τοποθέτηση του x* αρχικά θα είναι στο μέσο του [α,β].

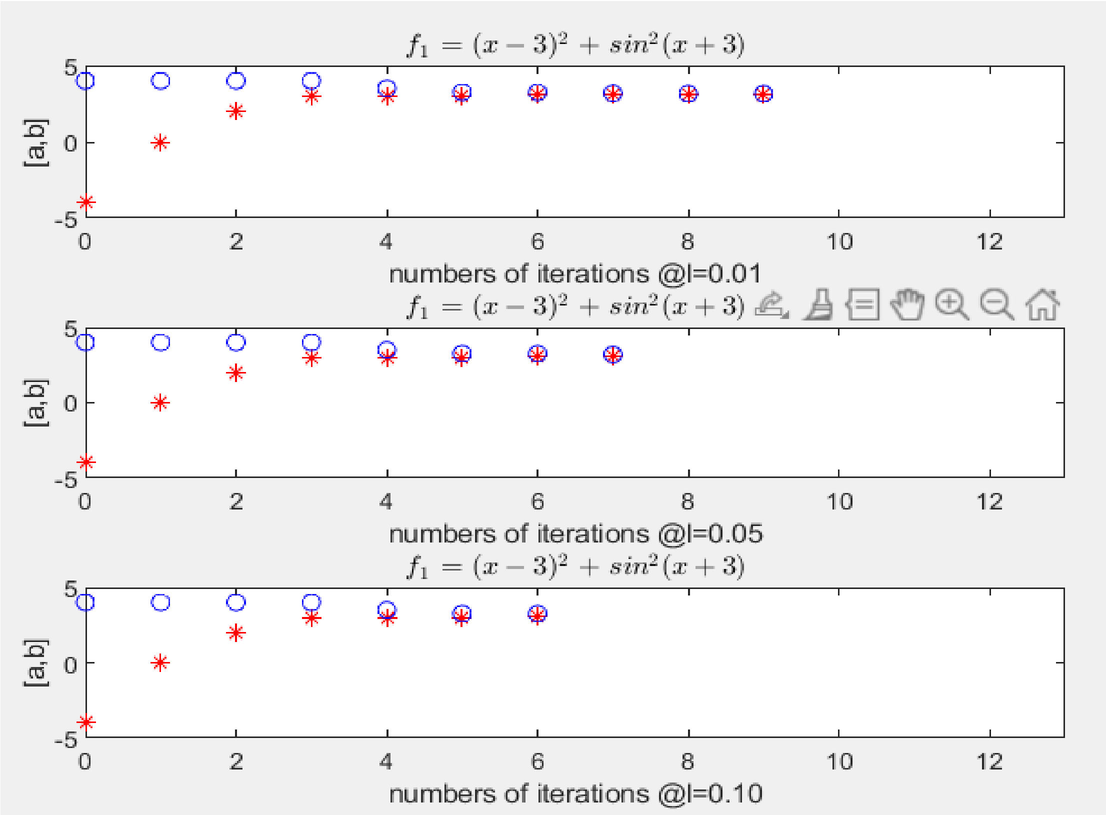
Αρχικά μελετάμε τον αριθμό κλήσεων της συνάρτησης για τα διαφορετικά l. Γνωρίζουμε ότι με κάθε επανάληψη το διάστημα αναζήτησης μειώνεται στο μισό. Αν το εύρος του τελικού διαστήματος επιθυμούμε να ισούται με l ο αριθμός n των επαναλήψεων θα πρέπει να ικανοποιεί την σχέση $n \geq \log_2 \frac{b-a}{l}$



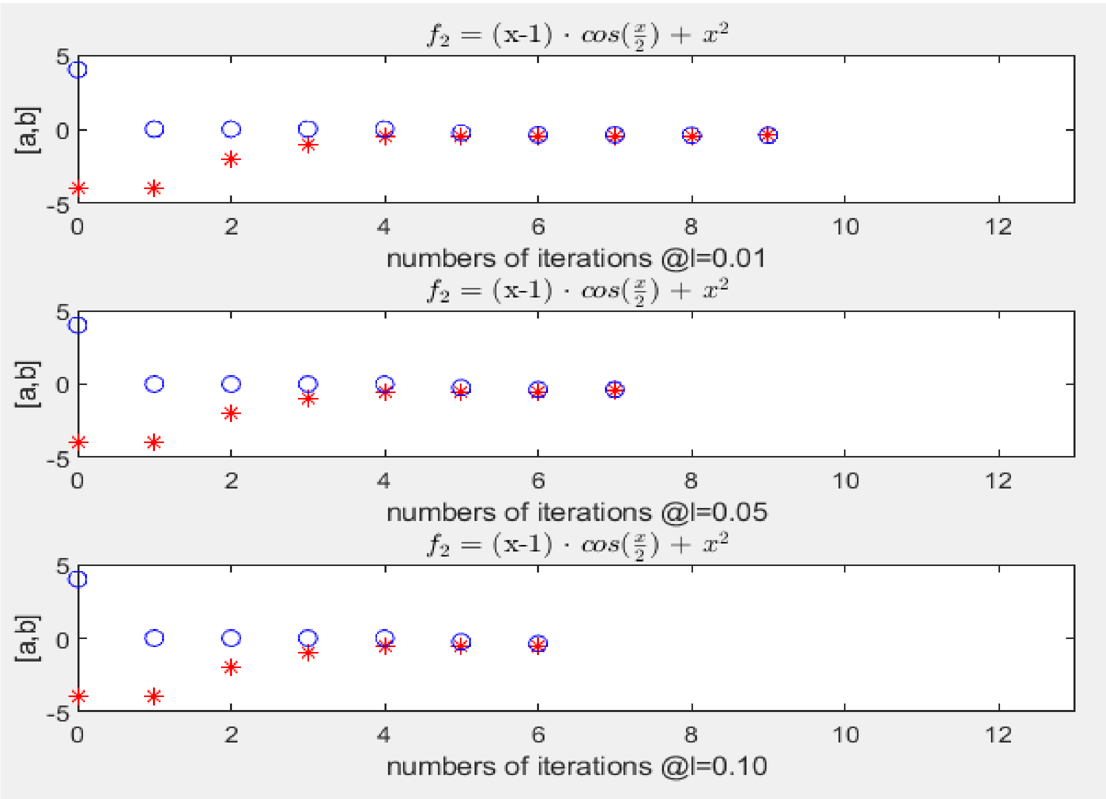
Εικόνα 14: Κλήσεις της εκάστοτε συνάρτησης για μεταβαλλόμενα l (Αλγόριθμος Διχοτόμου με χρήση παραγώγων)

Στην συνέχεια επαναλαμβάνουμε για κάθε μια από τις τρεις συναρτήσεις την γραφική παράσταση των άκρων των διαστημάτων αναζήτησης για 3 διακριτές τιμές l = [0.01 , 0.05 , 0.1] και πως αυτά περιορίζονται ανά επανάληψη κ. Παρατηρούμε πως με την κάθε επανάληψη το εύρος ελαττώνεται και ο αλγόριθμος συγκλίνει στην ελάχιστη λύση.

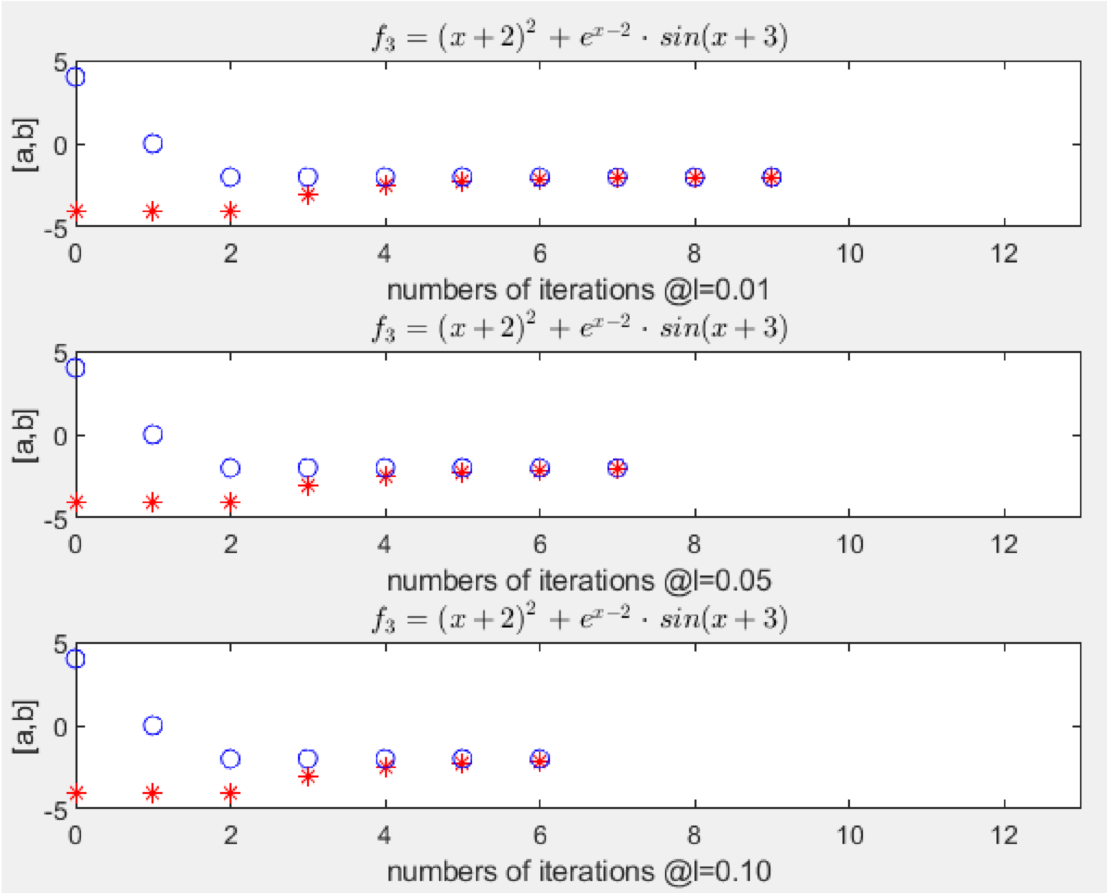
Με κόκκινο * παρουσιάζεται το $a_κ$ και με μπλε o το $b_κ$.



Εικόνα 15: Περιορισμός του $[\alpha_\kappa, b_k]$ για 3 διακριτές τιμές του l στην f1.



Εικόνα 16: Περιορισμός του $[\alpha_\kappa, b_k]$ για 3 διακριτές τιμές του l στην f2.

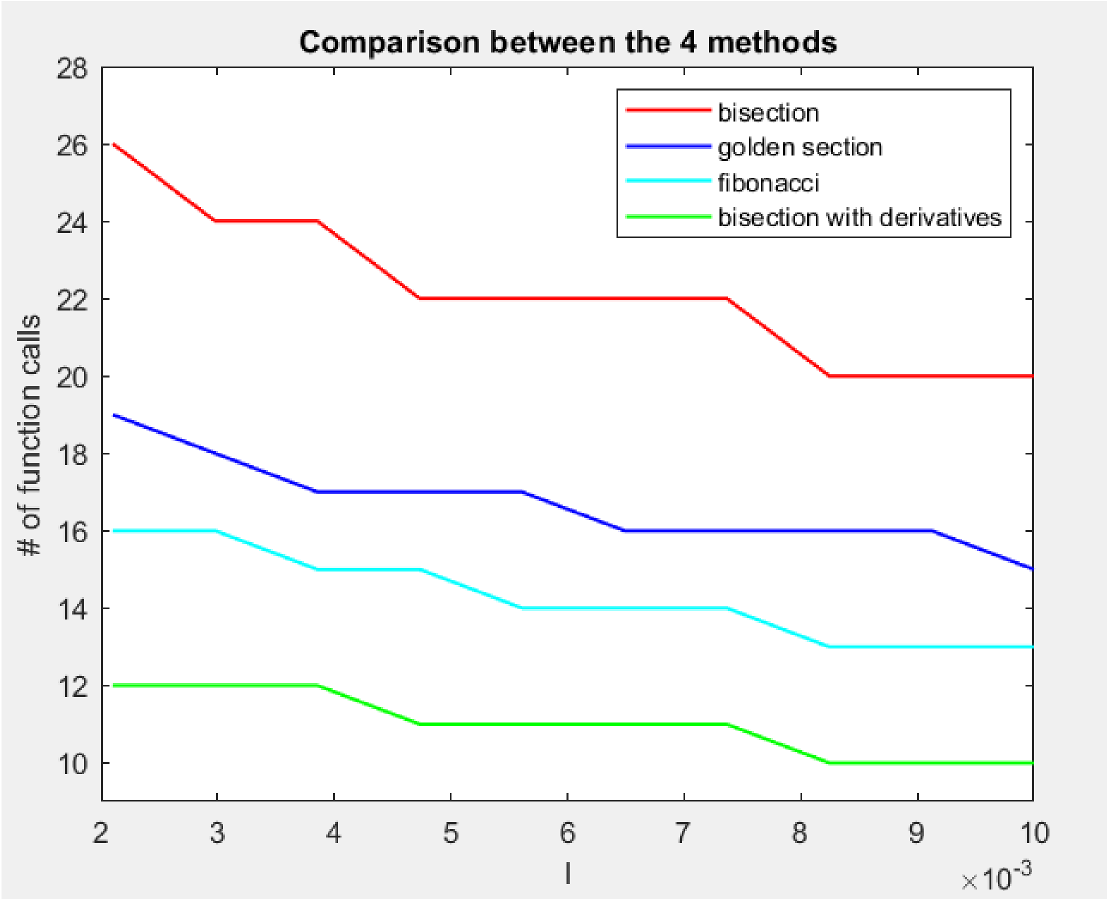


Εικόνα 17: Περιορισμός του [$α_κ$,b_k] για 3 διακριτές τιμές του l στην f3.

<u>Συμπεράσματα:</u> Τρέχουμε όλους τους αλγορίθμους μόνο για την f1 αυτή την φορά και στο παρακάτω διάγραμμα γίνεται πιο εύκολη η σύγκριση στην αποδοτικότητα των υπό μελέτη μεθόδων.
Όπως έχουμε αναφέρει και παραπάνω για τον κάθε αλγόριθμο, τους n αριθμούς επαναλήψεων του και τους κ αριθμούς κλήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης ισχύει:

- **Αλγόριθμος Διχοτόμησης:** κ = 2*(n-1)
- **Αλγόριθμος Χρυσού Τομέα:** κ = n
- **Αλγόριθμος Fibonacci:** κ = n -1
- **Αλγόριθμος Διχοτόμησης με παραγώγους:** κ = n

Οπότε στο παρακάτω διάγραμμα μελετούμε των αριθμό κλήσεων της αντικειμενικής συνάρτησης κ:



Εικόνα 18: Σύγκριση των 4 μεθόδων

Καταλήγουμε λοιπόν ότι ο πιο αποδοτικός αλγόριθμος για την εύρεση ελαχίστου σε μια κυρτή συνάρτηση μια μεταβλητής είναι ο αλγόριθμος της διχοτόμου με την χρήση παραγώγων. Σε περίπτωση που ο υπολογισμός της παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης κρίνεται απαγορευτικός τότε ο πιο αποδοτικός αλγόριθμος είναι ο Fibonacci και ακολουθούν οι αλγόριθμου του Χρυσού Τομέα και της Διχοτόμου. Να σημειωθεί πως στον αλγόριθμο της Διχοτόμου οι επαναλήψεις είναι λιγότερες από τις άλλες δυο μεθόδους που δεν χρησιμοποιούν παραγώγους όμως η περιπλοκότητα των άλλων δυο μεθόδων μας προσφέρει λιγότερες κλήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης.

** Στους κώδικες του συμπιεσμένου αρχείου περιλαμβάνονται οι 4 συναρτήσεις για την υλοποίηση των αλγορίθμων, τα scripts για την δημιουργία των διαγραμμάτων για την κάθε μέθοδο και τέλος ένα script για το τελικό συμπερασματικό διάγραμμα.