Αριθμητική Ανάλυση - 1η Εργασία

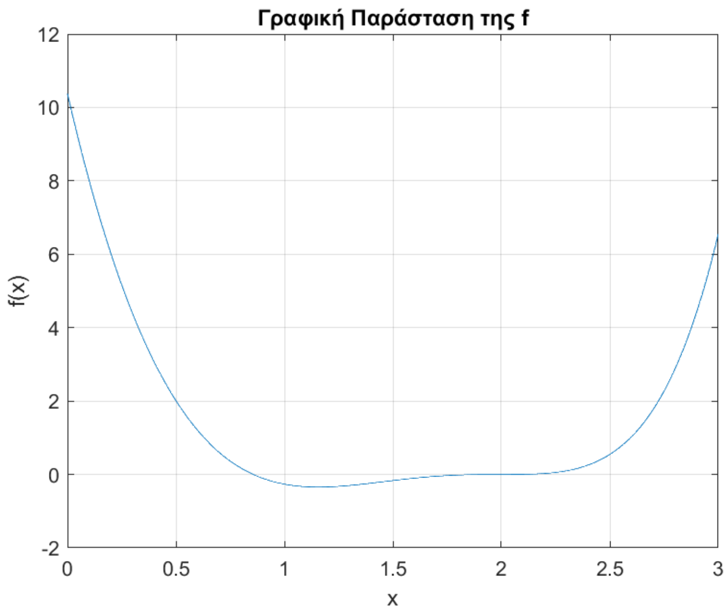
Ονοματεπώνυμο: Νικόλαος Ιλαρίδης
AEM: 4524

January 10, 2024

1 Εισαγωγή

Τα προγραμματα για την εργασια εχουν υλοποιηθει με **python** και **matlab**. Σε ορισμενα σημεια της εργασιας εχει γινει χρηση γλωσσικου μοντελου "**chatGpt**" στα οποια και αναγραφεται σε σχολια στο εκαστοτε προγραμμα καθως υπαρχει και ο αντιστοιχος σχολιασμος στην περιγραφη της υλοποιησης μου.

2 Πρώτη Ασκηση



(α) *Μέθοδος Διχοτόμησης*

Στο αρχειο '**bisectionMethod.py**' που βρισκεται στον φακελο 'Ex1' υλοποιω την μεθοδο της διχοτομησης για τον υπολογισμο ριζων της δοθεισας συναρτησης

Τα βηματα που ακολουθω ειναι τα εξης:

1. *Αρχικοποιω την συναρτηση που μας ενδιαφερει.*
2. *Οριζω μια μεταβλητη mid η οποια ειναι το μεσο του τρεχοντος διαστηματος.*
3. *Κανω χρηση μιας while η οποια τερματιζει οταν η αποσταση των 2 ακρων ειναι μικροτερη του lim δηλαδη το αποδεκτο σφαλμα των 5 δεκαδικων ψηφιων.*
4. *Μεσα στον βροχο υπολογιζω καθε φορα το νεο mid και αυξανω τον μετρητη times χωριζοντας ετσι το μεγαλο διαστημα σε υποδιαστηματα μεχρι να προσεγγισω την ριζα της συναρτησης.*
5. *Επειδη ομως η συναρτηση στο διαστημα [0,3] εχει ομοσημες τιμες στα ακρα πρεπει να σπασω το διαστημα μου καθως η μεθοδος της διχοτομησης βασιζεται στο θεορημα Bolzano. Για αυτον τον λογο εκτυπωνω το αντιστοιχο μηνυμα και εκτελω τον αλγοριθμο στα διαστηματα [0,1] και [1.5,3]*

(β) *Μεθοδος Newton-Raphson*

Στο αρχειο '**newtonRaphson.py**' που βρισκεται στον φακελο 'Ex1' υλοποιω την μεθοδο Newton Raphson για τον υπολογισμο ριζων της δοθεισας συναρτησης

Τα βηματα που ακολουθω ειναι τα εξης:

1. *Αρχικοποιω την συναρτηση f καθως και την πρωτη παραγωγο της **derivative1_f***
2. *Οριζω μια αρχικη εκτιμηση x0*
3. *Χρησιμοποιω ενα βροχο while ο οποιος τερματιζει αν βρεθει η ριζα ή φτασει στον μεγιστο αριθμο επαναληψεων*
4. *Εντος της while υπολογιζω μια εκτιμιση της ριζας και ελεγχω αν η απολυτη τιμη της διαφορας της προηγουμενης και της νεας προσεγγισης ειναι μικροτερη του αποδεκτου σφαλματος*

5. *Αν δεν συγκλινει τοτε η νεα εκτιμηση x1 γινεται x0 και το i αυξανεται κατα 1*

Επιπλεον αν καλεσουμε την συναρτηση '**newtonRaphson**' με ορισμα True στην δευτερη παραμετρο , παρατηρουμε οτι για την πρωτη ριζα το τετραγωνο της καθε προσεγγισης ειναι ισο με την προηγουμενη προσεγγιση αρα υπαρχει τετραγωνικη συγκλιση σε αντιθεση με την δευτερη . Αυτο ειναι αναμενομενο και απο την γραφικη παρασταση της f καθως στη δευτερη ριζα η καμπυλη εχει μικρη κλιση αρα και μικρη παραμετρο.

(γ) *Μεθοδος Τεμνουσας*

Στο αρχειο '**SecantMethod.py**' που βρισκεται στον φακελο 'Ex1' υλοποιω την μεθοδο Secant για τον υπολογισμο ριζων της δοθεισας συναρτησης

Η μεθοδος Τεμνουσας απαιτει δυο αρχικες υποθεσεις και εκτελειται εως οτου ικανοποιηθουν καποιο απο τα 2 κρητιρια :

1. *Η απολυτη τιμη της συναρτησης (**abs(f(x1))**) ειναι μικροτερη απο την επιθυμητη ακριβεια (**tolerance**)*
2. *Εχει φτασει τον μεγιστο αριθμο επαναληψεων (**MAX**)*

Ωστοσο στην αποδοση της μεθοδου παιζει σημαντικο ρολο η επιλογη των αρχικων υποθεσεων , καθως αν οι υποθεσεις ειναι μακρια μεταξυ τους η συναρτηση μπορει να εχει λανθασμενο αποτελεσμα

(δ) *Συγκριση Αποτελεσματων*

1. **Bisection Method**
   (a) Ριζα: 0.85715 Επαναληψεις: 18
   (b) Ριζα: 2.00000 Επαναληψεις: 17
2. **Newton Raphson**
   (a) Ριζα: 0.85714 Επαναληψεις: 6
   (b) Ριζα: 2.00000 Επαναληψεις: 33
3. **Secant Method**
   (a) Ριζα: 0.85714 Επαναληψεις: 7
   (b) Ριζα: 1.99368 Επαναληψεις: 14

Για την μεθοδο της διχοτομησης παρατηρουμε οτι στην πρωτη ριζα συγκλινει διακριτα πιο αργα απο τις αλλες 2 μεθοδους . Ομως στην δευτερη ριζα η μεθοδος διχοτομησης φαινεται να συγκλινει γρηγορα και με ακριβεια γεγονος που οφειλεται στις τιμες της f κοντα απο την ριζα οι οποιες ειναι αρκετα κοντα στο 0. Απο την αλλη πλευρα οι αλλες 2 μεθοδοι στην πρωτη ριζα συγκλινουν παρομοια ενω στην δευτερη ριζα η Secant φαινεται να ξεχωριζει , ωστοσο οφειλεται στις αρχικες υποθεσεις που δινουμε στην καθε μεθοδο

3 Δεύτερη Ασκηση

(α) *Τροποποιημενη Μέθοδος Διχοτόμησης*

Η διαφορα της τροποποιημενης μεθοδου ειναι η χρηση ενος τυχαιου αριθμου σε αντιθεση με την κλασικη που αρχικοποιουμε με το μεσο του διαστηματος.

(β) *Τροποποιημενη Newton Raphson*

Η μονη διαφορα της τροποποιημενης Newton Raphson με την γνησια ειναι η χρηση της δευτερης παραγωγου για την εκτιμηση της ριζας .

(γ) *Τροποποιημενη Μέθοδος Τέμνουσας*

Η διαφορα της τροποποιημενης μεθοδου ειναι η χρηση 3 αρχικων σημειων σε αντιθεση με την γνησια που χρειαζεται μονο 2 καθως και ο νεος τυπος βαση του οποιου γινεται η εκτιμηση

(δ) *Συγκριση Αποτελεσματων*

1. **mod Bisection Method**
   (a) Ριζα: -1.38212 Επαναληψεις: 20
   (b) Ριζα: notFound Επαναληψεις: -
   (c) Ριζα: 0.20518 Επαναληψεις: 20
   (d) Ριζα: 0.50008 Επαναληψεις: 20
   (e) Ριζα: 1.17611 Επαναληψεις: 20
2. **mod Newton Raphson**
   (a) Ριζα: -1.38130 Επαναληψεις: 5
   (b) Ριζα: -0.66667 Επαναληψεις: 14
   (c) Ριζα: 0.20518 Επαναληψεις: 4
   (d) Ριζα: 0.50000 Επαναληψεις: 5
   (e) Ριζα: 1.17612 Επαναληψεις: 5

3. **mod Secant Method**

    (a) Ριζα: -1.38132 Επαναληψεις: 8
    (b) Ριζα: -0.66667 Επαναληψεις: 23
    (c) Ριζα: 0.20518 Επαναληψεις: 4
    (d) Ριζα: 0.50000 Επαναληψεις: 6
    (e) Ριζα: 1.17609 Επαναληψεις: 5

Παρατηρουμε οτι με την μεθοδο Διχοτομησης δεν μπορουμε να βρουμε την δευτερη ριζα . Αυτο οφειλεται στο γεγονος οτι η συναρτηση γυρω απο αυτη την ριζα δεν αποκταει θετικες τιμες γεγονος που οδηγει σε αποτυχια λογω του Θ.Bolzano. Επισης ειναι διακριτο πως η Μεθοδος Διχοτομησης ειναι σημαντικα πιο αργη απο τις υπολοιπες , οι οποιες εμφανιζουν πολυ παρομοα αποτελεσματα τοσο στις ριζες οσο και στις επαναληψεις

(ε) *Διαφορα Αποτελεσματων*

Εκτελώντας τον αλγοριθμο modBisection 20 φορες διαπιστωνουμε οτι η τροποποιημενη μεθοδος διχοτομησης εμφανιζει διαφορετικο αποτελεσμα επαναληψεων γεγονος που οφειλεται στην χρηση τυχαιου αριθμου .

(στ) *Διαφορα Χρονου Εκτελεσης*

Υπολογιζοντας τον συνολικο χρονο εκτελεσης του καθε αλγοριθμου διαπιστωστα οτι οι τροποποιημενες μεθοδοι κατα μεσο ορο συγκλινουν πιο γρηγορα απο τις γνησιες.

(a) Bisection : 0.000459

(b) Newton Raphson : 0.000656

(c) Secant : 0.00011

(a) mod Bisection : 0.00037

(b) mod Newton Raphson : 0.00133

(c) mod Secant : 0.00003

4 Τρίτη Ασκηση

(α) *PA = LU*

Στο προγραμμα PA_LU.py βρισκω την λυση του συστηματος **Ax=b** με την μεθοδο **PA=LU**. Πιο συγκεκριμενα αρχικα πραγματοποιω διασπαση LU στον πινακα A με την μεθοδο gauss δημιουργοντας ετσι ενα ανω και ενα κατω τριγωνικο πινακα. Στην συνεχεια λυνω το συστημα **Ly = b** ή αλλιως κανω Forward Substitution και επειτα λυνω το συστημα **Ux=y** ή αλλιως Backward Substitution . Καταυτον τον τροπο εχω λυσει το αρχικο συστημα **Ax=b**

(β) *Cholesky*

Ο αλγοριθμος **Cholesky** λαμβανει ενα πινακα συμμετρικο και θετικα ορισμενο και επιστρεφει ενα κατω τριγωνικο πινακα L καθως και τον αναστροφο του. Ωστοσο η εκφωνηση ζηταει μονο τον πινακα L . Η μεθοδος Cholesky μοιζει με την αναλυση **PA=LU** ωστοσο ειναι αρκετα πιο αποδοτικος.

Στην υλοποιηση μου εχω κανει χρηση γλωσσικου μοντελου '**chatGpt**' . Στο αρχειο **cholesky.py** εχω γραφει σε σχολια τα σημεια που εχω χρησιμοποιησει το γλωσσικο μοντελο καθως και τον κωδικα μου πριν γινει η χρηση. Μαλιστα ο δικος μου κωδικας ειχε προβλημα στον υπολογισμο της μεταβλητης Sum η οποια χρησιμοποιοταν στον τυπο υπολογισμου του L

γ) *Gauss-Seidel*

Η μεθοδος **Gauss-Seidel** χρησιμοποιειται για την επιλυση γραμμικων συστηματων . Πιο συγκεκριμενα η συναρτηση που εχω υλοποιησει δεχεται εισοδο ενα πινακα A και ενα διανυσμα b και επιστρεφει το διανυσμα x το οποιο υπολογιζεται με βαση τον τυπο που δινεται στην εκφωνηση . Η διαδικασια σταματαει οταν η διαφορα των 2 διαδοχικων επαναληψεων ειναι μικροτερη του αποδεκτου σφαλματος ή αν εκτελεστει ο βροχος πανω απο τις μεγιστες επιθυμητες επαναληψεις

5 Τέταρτη Ασκηση

4.1) *Αποδειξη Στοχαστικου*

Για να ειναι ο πινακας **G** στοχαστικος θα πρεπει το αθροισμα καθε στηλης του πινακα να ισουται με 1. Ετσι στο προγραμμα **Ex4.py** υπολογιζω το αθροισμα καθε στηλης του πινακα το οποιο ειναι ισο με 1 , αρα οντως ειναι στοχαστικος .

4.2) *Ιδιοδιανυσμα Μεγιστης Ιδιοτιμης*

Ο πινακας Google υπολογιζεται απο την συναρτηση **calc_G(A,q)**, η οποια αρχικοποιει τον πινακα με 0 και στην συνεχεια με βαση τον τυπο που δινεται υπολογιζει τις τιμες του .

Η ευρεση του ιδιοδιανυσματος με την μεγαλυτερη ιδιοτιμη γινεται με την μεθοδο δυναμεως (**Power Method**) ακολουθοντας τα εξης βηματα :

(1) Δημιουργω ενα τυχαιο διανυσμα x

(2) Το αναλυω σε συνιστωσες x0 x1

(3) Ελεγχω αν πληρουνται τα κρητιρα συγκλισης

(4) Ενημερωνω καταλληλα το ιδιοδιανυσμα

(5) Κανονικοποιω

4.3) *Νεος Πινακας G*

Για το συγκεκριμενο ερωτημα επελεξα να βελτιωσω τον βαθμο σημαντικοτητας της Σελιδας 15.Ετσι δημιουργησα 4 νεες ακμες :

(1) 12-15

(2) 8-15

(3) 15-11

(4) 10-15

Ετσι υπολογιζοντας την σημαντικοτητα της Σελιδας 15 πριν και μετα την αλλαγη παρατηρουμε οτι αυξηθηκε απο 1.2125 σε 2.1333333333

4.4) *Αλλαγη q*

Αλλαζοντας την πιθανοτητα q σε 0.02 και 0.6 διακρινουμε οτι οσο μεγαλυτερη τιμη εχει η πιθανοτητα q τοσο πιο 'αχρηστο' γινεται το pagerank καθως ολες οι τιμες ειναι πιο κοντα μεταξυ τους .

Ο σκοπος της πιθανοτητας q ειναι να προσομοιωνει την συμπεριφορα του χρηστη που μεταπηδαει τυχαια απο μια σελιδα σε μια αλλη .

4.5) *Αλλαγη στον πινακα γειτνιασης*

Μετα την αλλαγη των κελιων [8,11] και [12,11] σε 3 παρατηρουμε μια αυξηση στην συμαντικοτητα της Σελιδας 11. Ετσι μπορουμε να πουμε πως η στρατηγικη αυτη δουλευει καθως υπηρξε σημαντικη αλλαγη στο pagerank

4.6) *Διαγραφη Σελιδας 10*

(1) Page 1: 0.0268236 - Page 1 after: 0.0470966

(2) Page 2: 0.0298616 - Page 2 after: 0.0409113

(3) Page 3: 0.0298613 - Page 3 after: 0.0359354

(4) Page 4: 0.0268228 - Page 4 after: 0.0320696

(5) Page 5: 0.0395888 - Page 5 after: 0.0428002

(6) Page 6: 0.0395886 - Page 6 after: 0.0413910

(7) Page 7: 0.0395877 - Page 7 after: 0.0516587

(8) Page 8: 0.0395876 - Page 8 after: 0.0502495

(9) Page 9: 0.0745681 - Page 9 after: 0.0482228

(10) Page 10: 0.1063182 - Page 10 after: -

(11) Page 11: 0.0745663 - Page 11 after: 0.1709634

(12) Page 12: 0.1063163 - Page 12 after: 0.1035985

(13) Page 13: 0.1250889 - Page 13 after: 0.0411622

(14) Page 14: 0.1163333 - Page 14 after: 0.1074622

(15) Page 15: 0.1250867 - Page 15 after: 0.1864787

Παρατηροντας τις αλλαγες διακρινουμε μια μεγαλη πτωση στην τιμη της Σελιδας 13 . Αυτο συμβαινει καθως ηταν η μοναδικη ακμη με αρχη την Σελιδα 10 και εφοσον η Σελιδα 10 ειχε υψηλη επισκεψιμοτητα , ειναι αναμενομενη η πτωση της.