

7.1.b) Classifica com decidable, semidecidible però no decidable, o no semidecidible el conjunt $A = \{p \mid L_p \text{ és infinit}\}$

• **A no és decidable ($A \notin R$)**

Per demostrar-ho, podem reduir $HALT$ a A , ja que $HALT = \{\langle M, w \rangle \mid M(w) \downarrow\}$ és indecidible.

Definim una funció computable i total $f(\langle M, w \rangle) = \langle M' \rangle$, tal que:

$$M' = \left[\begin{array}{l} \text{input } t\{ \\ \quad \text{if } (M(w) \text{ stops in } t \text{ steps}) \\ \quad \quad \text{accept;} \\ \quad \text{else} \\ \quad \quad \text{reject;} \\ \} \end{array} \right.$$

Veiem que:

- $\langle M, w \rangle \in HALT \implies \exists t \text{ tq } M(w) \downarrow \text{ en } t \text{ passos} \implies L(M') = \{y \mid y \geq t\} \implies |L(M')| = \infty \implies \langle M' \rangle \in A$
- $\langle M, w \rangle \notin HALT \implies M(w) \uparrow \implies L(M') = \emptyset \implies |L(M')| = 0 \implies \langle M' \rangle \notin A$

Per tant:

$$\langle M, w \rangle \in HALT \iff f(\langle M, w \rangle) \in A,$$

$HALT \leq_m A$. Com que $HALT$ no és decidable, A tampoc n'és.

• **A no és semidecidible ($A \notin RE$)**

Per demostrar-ho, podem reduir \overline{HALT} a A , ja que sabem que \overline{HALT} no és semidecidible.

Definim una funció computable i total $g(\langle M, w \rangle) = \langle M'' \rangle$, tal que:

$$M'' = \left[\begin{array}{l} \text{input } t\{ \\ \quad \text{if } (M(w) \text{ stops in } t \text{ steps}) \\ \quad \quad \text{infinite loop;} \\ \quad \text{else} \\ \quad \quad \text{accept;} \\ \} \end{array} \right.$$

Veiem que:

- $\langle M, w \rangle \in \overline{HALT} \implies M(w) \uparrow \implies M'' \text{ accepta} \implies L(M'') = \Sigma^* \implies |L(M'')| = \infty \implies \langle M'' \rangle \in A$
- $\langle M, w \rangle \notin \overline{HALT} \implies \exists t \text{ tq } M(w) \downarrow \text{ en } t \text{ passos} \implies L(M'') = \{y \mid y < t\} \implies |L(M'')| < \infty \implies \langle M'' \rangle \notin A$

Per tant,

$$\langle M, w \rangle \in \overline{HALT} \iff g(\langle M, w \rangle) \in A,$$

$\overline{HALT} \leq_m A$. Com que \overline{HALT} no és semidecidible, A tampoc n'és.

Noteu que es podria haver demostrat directament la no-semidecidibilitat d' A .