

**7.1.b) Classifica com decidible, semidecidible però no decidible, o no semidecidible el conjunt  $A = \{p \mid L_p \text{ és infinit}\}$**

•  **$A$  no és decidible ( $A \notin R$ )**

Per demostrar-ho, podem reduir  $K$  a  $A$ , ja que  $K = \{\langle M, w \rangle \mid M(w) \downarrow\}$  és indecidible.

Definim una funció computable i total  $f(\langle M, w \rangle) = \langle M' \rangle$ , tal que:

$$M' = \left[ \begin{array}{l} \text{input } t\{ \\ \quad \text{if } (M(w) \text{ stops in } t \text{ steps}) \\ \quad \quad \text{accept;} \\ \quad \text{else} \\ \quad \quad \text{reject;} \\ \} \end{array} \right.$$

Veiem que:

- $\langle M, w \rangle \in K \implies \exists t \text{ tq } M(w) \downarrow \text{ en } t \text{ passos} \implies L(M') = \{y \mid y \geq t\} \implies |L(M')| = \infty \implies \langle M' \rangle \in A$
- $\langle M, w \rangle \notin K \implies M(w) \uparrow \implies L(M') = \emptyset \implies |L(M')| = 0 \implies \langle M' \rangle \notin A$

Per tant:

$$\langle M, w \rangle \in K \iff f(\langle M, w \rangle) \in A,$$

$K \leq_m A$ . Com que  $K$  no és decidible,  $A$  tampoc no ho és.

•  **$A$  no és semidecidible**

Per demostrar-ho, podem reduir  $\overline{K}$  a  $A$ , ja que sabem que  $\overline{K}$  no és semidecidible.

Definim una funció computable i total  $g(\langle M, w \rangle) = \langle M'' \rangle$ , tal que:

$$M'' = \left[ \begin{array}{l} \text{input } t\{ \\ \quad \text{if } (M(w) \text{ stops in } t \text{ steps}) \\ \quad \quad \text{infinite loop;} \\ \quad \text{else} \\ \quad \quad \text{accept;} \\ \} \end{array} \right.$$

Veiem que:

- $\langle M, w \rangle \in \overline{K} \implies M(w) \uparrow \implies M'' \text{ accepta} \implies L(M'') = \Sigma^* \implies |L(M'')| = \infty \implies \langle M'' \rangle \in A$
- $\langle M, w \rangle \notin \overline{K} \implies \exists t \text{ tq } M(w) \downarrow \text{ en } t \text{ passos} \implies L(M'') = \{y \mid y < t\} \implies |L(M'')| < \infty \implies \langle M'' \rangle \notin A$ .

Per tant,

$$\langle M, w \rangle \in \overline{K} \iff g(\langle M, w \rangle) \in A,$$

$\overline{K} \leq_m A$ . Com que  $\overline{K}$  no és semidecidible,  $A$  tampoc no ho és.