

# 实验十 本生灯火焰密度场测量

## 一、实验内容与目的

1. 了解相机标定的基本原理；
2. 了解相位测量偏折术测量流场的基本原理；
3. 学会使用 Matlab 编程软件对图像进行分析；
3. 学会使用偏折术对流场密度进行定量分析。

## 二、实验仪器

CCD 相机、显示器、本生灯、计算机

## 三、实验原理

### 3.1 相机标定

基于针孔模型的相机标定是机器视觉测量系统中一种常用的相机及测量系统标定方法。如图 1 所示，针孔相机成像模型的本质是小孔成像。在针孔相机模型下，从物面发出的光线经针孔（投影中心）进入相机后，被传感器上的像素捕获。因此，相机传感器上像素所在坐标系与物面坐标系之间存在一种映射关系，而相机标定的目的就是求解这种关系。值得说明的是，因为在实际中利用相机得到的图像不是倒像，所以，在模型中通常在针孔（投影中心）前取一个等效像面来分析计算。对于该模型，通常将相机传感器像素坐标系定义为 $ouv$ ，所形成的图像物理坐标系定义为 $oxy$ ，相机坐标系定义为 $O_cx_cy_cz_c$ ，世界坐标系定义为 $O_wx_wy_wz_w$ 。从物面上点 $P_w$ 处发出的光线，经投影中心成像在像面上的点 $p_c$ 处。点 $p_c$ 的像素坐标 $(u, v)$ 可用图像物理坐标进行表示：

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{dx} & 0 & u_0 \\ 0 & \frac{1}{dy} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1.1)$$

其中， $dx$ 和 $dy$ 分别表示像素单元在  $x$  和  $y$  方向上的物理尺寸； $u_0$ 和 $v_0$ 为图像物理坐标系原点在像素坐标系中的坐标，它也是光轴与像素坐标系的交点。

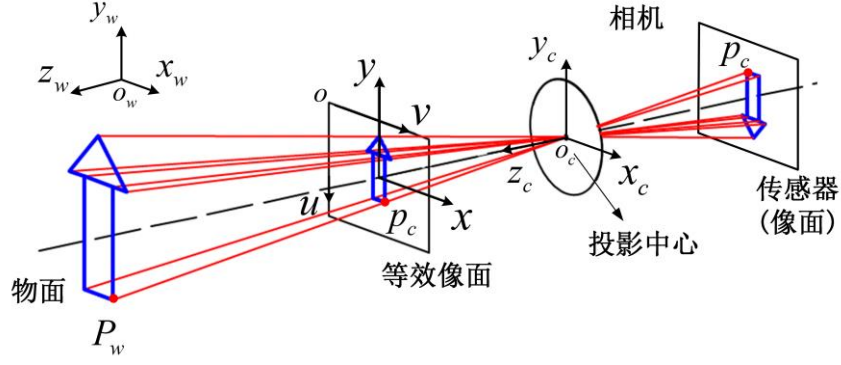


图 1 针孔相机模型

假设点 $P_w$ 在相机坐标系下的坐标为 $(x_{cp}, y_{cp}, z_{cp})$ ，根据理想成像系统下物像的线性关系可得：

$$z_{cp} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{cp} \\ y_{cp} \\ z_{cp} \end{bmatrix}. \quad (3.1.2)$$

其中， $f$ 为相机镜头的焦距。假设点 $P_w$ 在世界坐标下的坐标为 $(x_{wp}, y_{wp}, z_{wp})$ ，则有：

$$\begin{bmatrix} x_{cp} \\ y_{cp} \\ z_{cp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & T_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & T_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & T_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{wp} \\ y_{wp} \\ z_{wp} \\ 1 \end{bmatrix} = [R \quad T] \begin{bmatrix} x_{wp} \\ y_{wp} \\ z_{wp} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1.3)$$

其中，旋转矩阵 $R$ 和平移矩阵 $T$ 为世界坐标系与相机坐标系间的姿态关系。将公式(3.1.1)、(3.1.2)和(3.1.3)联立可得：

$$z_{cp} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & T_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & T_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & T_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{wp} \\ y_{wp} \\ z_{wp} \\ 1 \end{bmatrix} = A_{m1} A_{m2} \begin{bmatrix} x_{wp} \\ y_{wp} \\ z_{wp} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1.4)$$

其中 $\alpha = f/dx$ 、 $\beta = f/dy$ 分别为在水平和竖直方向上以像素为单位的焦距；矩阵 $A_{m1}$ 为内部参数矩阵，由 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $u_0$ 和 $v_0$ 组成，它取决于相机的内部结构；矩阵 $A_{m2}$ 为外部参数矩阵，由 $R$ 和 $T$ 所构成，用来表征相机在世界坐标系下的姿态。

简单的针孔模型为理想线性模型，然而，实际中由于相机镜头加工制造精度的影响，相机镜头不可避免地会存在畸变，所以需要引入镜头畸变模型。此时，像面中点 $p_c$ 的实际像素坐标可表示为：

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{y}_n \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1.5)$$

其中,

$$\begin{cases} \tilde{x}_n = (1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) x_n + (2 p_1 x_n y_n + p_2 (r^2 + 2 x_n^2)) + s_1 r^2 \\ \tilde{y}_n = (1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) y_n + (p_1 (r^2 + 2 y_n^2) + 2 p_2 x_n y_n) + s_2 r^2 \\ r^2 = x_n^2 + y_n^2 \end{cases} \quad (3.1.6)$$

其中 $(k_1, k_2, k_3)$ ,  $(p_1, p_2)$ ,  $(s_1, s_2)$ 分别为径向畸变、切向畸变和棱镜畸变系数; $x_n = x_c/z_c$ 、 $y_n = y_c/z_c$ 为理想无畸变的归一化图像坐标,  $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$ 为实际有畸变的归一化图像坐标。

目前最为流行的相机标定方法是在 2000 年由张正友提出的, 简称为张氏标定法, 该方法利用平面标定靶上的黑白棋盘格作为特征图案, 棋盘格角点作为控制点。在标定过程中利用相机采集不同姿态下平面标定靶上的特征图像 (至少 3 个不同的姿态); 在求解相机参数过程中, 以标定靶上控制点的预设坐标作为世界坐标, 并提取特征点在相机所采集图像上的像素坐标。相机参数求解分为两步, 第一步是利用控制点对应的世界坐标和像素坐标, 在针孔模型下, 即理想线性模型求解相机模型的内部参数和外部参数; 第二步, 以理想线性模型下求解得到的参数作为初始值, 如公式(3.1.7)所示的控制点真实像素坐标与重投影像素坐标的差作为目标函数, 利用最大似然估计法或非线性最小二次算法求解非线性模型参数, 即镜头畸变模型参数, 同时对相机的内外部参数进行优化:

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \|p_{ij} - \hat{p}(\alpha, \beta, u_0, v_0, k_1, k_2, k_3, p_1, p_2, s_1, s_2, R, T)\|^2. \quad (3.1.7)$$

其中 $i$ 和 $j$ 分别为控制点的行列数。

### 3.2 正交条纹图的相位提取

偏折术分为反射与透射两种。反射式相位测量偏折术 (Phase Measuring Deflectometry-PMD, 见图 2) 是通过检测入射光线经被测面反射后出射光线的偏折量来获得被测表面信息, 精度高, 该方法的测量系统仅需显示器或投影仪、成像镜头和计算机即可组成, 结构简单, 成本低, 且使用灵活方便, 测量速度快。局域灵敏度很高, 可以达到纳米量级。检测动态范围大, 可用于任何具有反射性质的元件面形检测。且可实现被测元件全视场、CCD 全像素的高分辨率检测, 能获得元件的中、高频面形信息。现已用于车体、车窗、硅片、液面、大口径非球面反射镜如抛物面、双曲面和椭球面、自由曲面光学元件、小口径平面元件、刀具等的表面面形、以及工件表面缺陷等的检测。透射式相位测量偏折术是通过分析显示器上条纹图经被测透射元件后产生的形变来获得被测对象的信息, 如多焦点眼镜片的透射波前畸变等 (见图 3)。本实验采用透射偏折术实现流场折射率测量, 如图 5 所示。

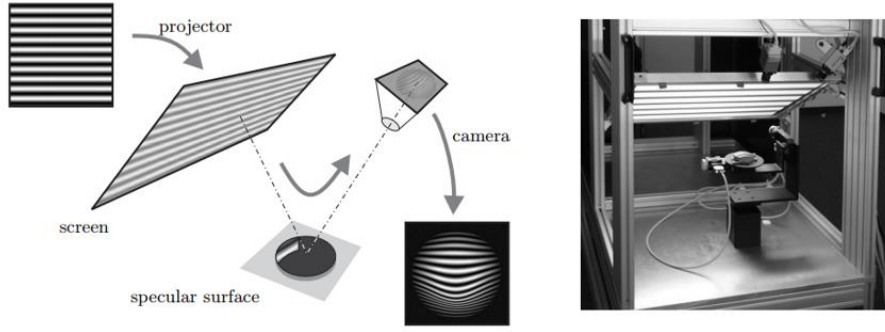


图 2 反射式位相测量偏折术

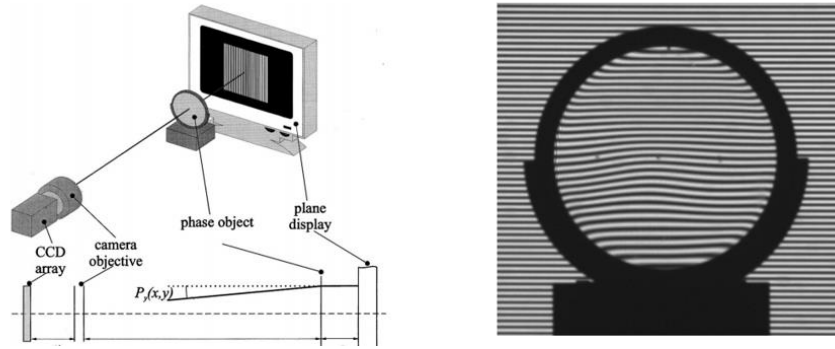


图 3 透射式位相测量偏折术

传统相位测量偏折术中，采用时间相移算法提取条纹图的相位信息，需要拍摄多幅两个正交方向上的正弦条纹图，从而导致消耗较多时间。而在流场检测过程中，由于流场时刻在发生变化，因此需要多张条纹图的时间相移算法不再适用，需要使用单张条纹图的空间载波相位提取算法来替代。

正弦条纹在  $x$  和  $y$  方向上的数学表示为：

$$\begin{cases} I_x(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(2\pi f_x x) \\ I_y(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(2\pi f_y y) \end{cases} \quad (3.2.1)$$

其中  $a(x, y)$  表示背景光强， $b(x, y)$  为振幅调制度， $f_x$  与  $f_y$  分别为  $x$  与  $y$  方向上的载波频率。当光线经过流场发生扰动后，相机采集到的形变条纹图可表示为：

$$\begin{cases} I_x(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[2\pi f_x x + \phi_x(x, y)] \\ I_y(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[2\pi f_y y + \phi_y(x, y)] \end{cases} \quad (3.2.2)$$

其中  $\phi(x, y)$  为待测元件引起的相位变化。将两个正交方向上的正弦条纹图叠加到一幅图上，即为二维正交条纹图，如图 4 所示。经调制过后的正交条纹图可以表示为如下形式：

$$I(x, y) = a(x, y) + b_1(x, y) \cos(\phi_1(x, y) + 2\pi f_x x) + b_2(x, y) \cos(\phi_2(x, y) + 2\pi f_y y) \quad (3.2.3)$$

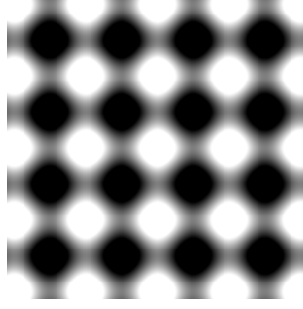


图 4 正交条纹图

在采样点 $(x, y)$ 的  $y$  方向邻域内, 如果 $f_x$ 与 $f_y$ 足够大, 则背景光强、振幅调制度、待测相位的变化率相对于载波频率很小, 可近视认为不变。所以在该邻域内的一点 $(x, y + m)$ 处的光强可表达成如下形式:

$$I(x, y + m) = C + b_2(x, y) \cos(\psi_2(x, y) + m\delta_y(x, y)) \quad (3.2.4)$$

其中 $\psi_2(x, y) = \phi_2(x, y) + 2\pi f_y y$ ;  $\delta_y(x, y)$ 表示点 $(x, y)$ 在  $y$  方向上的相位增量, 即 $\delta_y(x, y) = 2\pi f_y + \phi_2(x, y) - \phi_2(x, y - 1)$ , 这里第一项表示由载波频率引起的相位增量, 第二项与第三项之差表示由待测相位本身引起的相位增量。如果待测相位为零, 则 $\delta_y(x, y) = 2\pi f_y$ ;  $C = a(x, y + m) + b_1(x, y + m) \cos(\phi_1(x, y + m) + 2\pi f_x x)$ 可近似为常数;  $m \in [-N, N]$ , 则该邻域内包含 $2N + 1$ 个采样点。式(3.2.4)对于任意采样点 $(x, y)$ 有 4 个未知数, 为了求解相位增量, 必须满足  $2N+1 \geq 4$ 。因此, 通过上式可以得到结论, 在采样点 $(x, y)$ 的  $y$  方向邻域内, 用前三个像素点的光强值和 $\delta_y(x, y)$ 去表示后一个像素点的光强。

$$I'(x, y + m) = [2 \cos \delta_y(x, y) + 1][I(x, y + m - 1) - I(x, y + m - 2)] + I(x, y + m - 3) \quad (3.2.5)$$

其中, 上标  $t$  表示理论值。通过构建点 $(x, y)$ 处理论值和实际值的误差函数, 并进行优化即刻得到点 $(x, y)$ 在  $y$  方向上的相位增量为:

$$\delta_y(x, y) = a \cos\left(\frac{B_y - \sqrt{B_y^2 + 4A_y^2}}{4A_y} - 0.5\right) \quad (3.2.6)$$

其中 $A_y$ 与 $B_y$ 的表达式如下:

$$\begin{cases} A_y = \sum_{m=-N+3}^N \{[I(x, y + m - 2) - I(x, y + m - 1)] \times [I(x, y + m) - I(x, y + m - 3)]\} \\ B_y = \sum_{m=-N+3}^N \{[I(x, y + m - 2) - I(x, y + m - 1)]^2 - [I(x, y + m) - I(x, y + m - 3)]^2\} \end{cases} \quad (3.2.7)$$

在采样点 $(x, y)$ 的  $x$  方向邻域计算方法同上。

计算得到每个采样点在  $x$  和  $y$  方向的相位增量后, 可以通过下式来计算每一采样点在二维邻域内累积的相位增量以获取邻域内各点相对于该点的相位增量。

$$a_x(x+n, y+m) = \begin{cases} \sum_{h=1}^n \delta_x(x+h, y+m), & n > 0 \\ 0, & n = 0 \\ -\sum_{h=n+1}^0 \delta_x(x+h, y+m), & n < 0 \end{cases} \quad (3.2.8)$$

$$a_y(x+n, y+m) = \begin{cases} \sum_{h=1}^m \delta_y(x+n, y+h), & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -\sum_{h=m+1}^0 \delta_y(x+n, y+h), & m < 0 \end{cases} \quad (3.2.9)$$

其中  $m \in [-N1, N1]$ ,  $n \in [-N2, N2]$ , 且  $(2N1 + 1) \times (2N2 + 1) \geq 5$ 。即该二维邻域内至少包含五个采样点。

根据 (3.2.5) 式可以得到：

$$I'(x+n, y+m) = A + B_1 \cos(a_x(x+n, y+m)) + C_1 \sin(a_x(x+n, y+m)) + B_2 \cos(a_y(x+n, y+m)) + C_2 \sin(a_y(x+n, y+m)) \quad (3.2.10)$$

其中

$$\begin{cases} A = a(x, y), B_1 = b_1(x, y) \cos(\psi_1(x, y)), C_1 = -b_1(x, y) \sin(\psi_1(x, y)) \\ B_2 = b_2(x, y) \cos(\psi_2(x, y)), C_2 = -b_2(x, y) \sin(\psi_2(x, y)) \end{cases} \quad (3.2.11)$$

在点  $(x, y)$  处可以定义一个误差函数：

$$S(x, y) = \sum_{m=-N_1}^{N_1} \sum_{n=-N_2}^{N_2} [I'(x+n, y+m) - I(x+n, y+m)]^2 \quad (3.2.12)$$

采样点  $(x, y)$  的误差函数  $S$  包含 5 个未知数，分别是  $A$ 、 $B_1$ 、 $B_2$ 、 $C_1$ 、 $C_2$ 。当  $S$  取极小值时便可以得到这 5 个未知数的值。即分别对  $S$  求这五个未知数的偏导，并令其偏导数值为 0，以矩阵形式表示：

$$H[A \ B_1 \ B_2 \ C_1 \ C_2]^T = M \quad (3.2.13)$$

其中  $H$  为一个  $5 \times 5$  的矩阵， $M$  为一个  $5 \times 1$  的矩阵。将 (3.2.13) 式等号左右两边同时左乘  $H$  的逆矩阵，便可求出  $A$ 、 $B_1$ 、 $B_2$ 、 $C_1$ 、 $C_2$ 。

最后根据 (3.2.11) 式可以得到：

$$\begin{cases} \psi_1(x, y) = \arctan\left(\frac{-C_1}{B_1}\right) \\ \psi_2(x, y) = \arctan\left(\frac{-C_2}{B_2}\right) \end{cases} \quad (3.2.14)$$

式 (3.2.14) 由于用到了反三角函数，所以求出的相位值在  $-\pi$  到  $\pi$  之间，此时得到的相位称为截断相位或包裹相位。为了得到连续的相位分布需要用到相位展开

算法，这里用到的相位展开算法为菱形算法。

### 3.3 相位测量偏折术测量流场分布

如图 5 所示，描述了相位测量偏折术测量流场分布的基本原理。该检测系统由三部分组成：以正交条纹图案作为结构光源的高质量平面显示器、相机和被测流场。在测量之前，显示器被用作平面标定靶，通过拍摄显示器的多种姿态完成相机和测量系统的标定。在测量过程中，相机会分别拍摄有流场扰动和无流场扰动状态下显示器上显示的正交条纹图案。从逆光线追迹的角度来看，一条探测光线对应于相机的一个像素，从相机的投影中心  $C$  发出，在  $M$  处折射，在有流场扰动和无流场扰动时，分别在  $S_0$  和  $S$  处到达显示器屏幕。因此，一旦得到  $C$ 、 $M$ 、 $S_0$  和  $S$  的世界坐标，相应光线的偏折角  $\varepsilon_{(x,y)}$  就可以通过公式(3.3.1)确定：

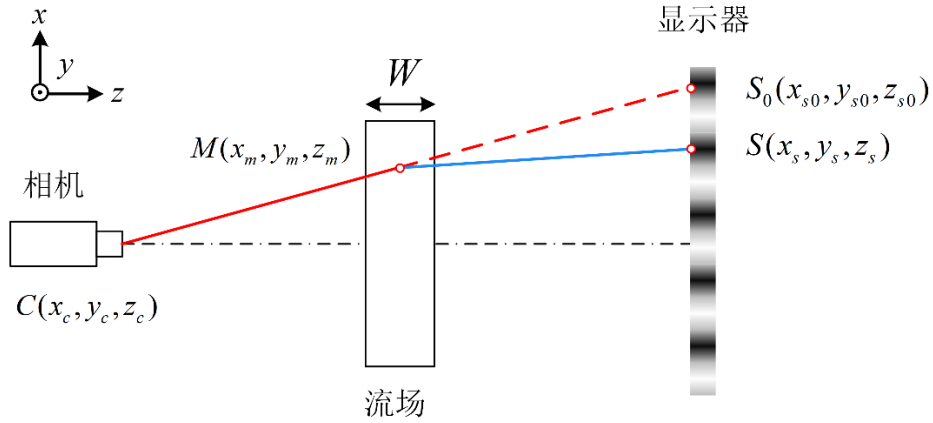


图 5 相位测量偏折术测量流场的原理图

$$\varepsilon_x = \arctan \frac{\frac{x_m - x_c}{z_m - z_c} - \frac{x_s - x_m}{z_s - z_m}}{1 + \frac{(x_m - x_c)(x_s - x_m)}{(z_m - z_c)(z_s - z_m)}} \quad (3.3.1)$$

$$\varepsilon_y = \arctan \frac{\frac{y_m - y_c}{z_m - z_c} - \frac{y_s - y_m}{z_s - z_m}}{1 + \frac{(y_m - y_c)(y_s - y_m)}{(z_m - z_c)(z_s - z_m)}}$$

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = -R^{-1}T \quad (3.3.2)$$

其中， $\varepsilon_x$ 和 $\varepsilon_y$ 分别是光线在  $x$  和  $y$  方向的偏折角， $C(x_c, y_c, z_c)$ 是相机投影中心在世界坐标系下的坐标，可以由公式(3.3.2)中涉及到的旋转矩阵 $R$ 和平移矩阵 $T$ 计算得到； $S(x_s, y_s, z_s)$ 是流场存在扰动时光源点的世界坐标，可以由相机拍摄到的畸变条纹和空间载波正交条纹相位提取算法得到； $M(x_m, y_m, z_m)$ 是折射点的

世界坐标，可以由公式(3.3.3)获得：

$$\begin{cases} x_m = \frac{(x_{s0} - x_c)(z_m - z_c)}{z_{s0} - z_c} + x_c \\ y_m = \frac{(y_{s0} - y_c)(z_m - z_c)}{z_{s0} - z_c} + y_c \\ z_m = z_{s0} - z_{m2s} \end{cases} \quad (3.3.3)$$

其中， $S_0(x_{s0}, y_{s0}, z_{s0})$ 是流场无扰动时光源点的世界坐标，可以通过空间载波正交条纹相位提取算法得到。

如公式(3.3.4)所示，光线的偏折角 $\varepsilon_{(x,y)}$ 与折射率梯度沿光线传播路径积分有关，因为光线的偏折角足够小，可以假设折射率梯度沿光线传播路径是恒定的，光线传播路径也是一个常数，即流场的宽度 $W$ 。密度梯度 $\nabla\rho$ 可以结合 Gladston-Dale 关系 ( $n = 1 + K\rho$ ) 计算，即：

$$\varepsilon_{(x,y)} = \int_s \nabla n ds \approx KW \nabla \rho \quad (3.3.4)$$

其中， $K$ 是 Gladston-Dale 常数。那么被测流场的密度就可以通过区域法积分获得。

## 四、实验步骤

### 4.1 实验准备

(1) 将本生灯放置在相机与显示器之间，保证本生灯和显示器中心位于相机光轴上；在显示器上显示正交条纹图图片。

(2) 调节相机镜头上的光圈环至光圈最大，此时再调节对焦环和本生灯到显示器的距离，使得相机聚焦在本生灯上的同时，作为背景的正交条纹图仍保持较好的正弦性。

### 4.2 相机标定

(1) 在显示器上显示棋盘格图片并将显示器固定。将相机连接到电脑，并安装好驱动程序和相关图像处理软件。

(2) 打开相机，用不同的角度拍摄多张棋盘格图像，确保棋盘格在图像中清晰可见，并且覆盖整个视场。通常需要至少 10-20 张不同角度和距离的图像，以保证标定的准确性。

(3) 使用 Matlab 相机标定工具箱对标定好的图片进行处理，记录结果。

### 4.3 温度场测量

(1) 测量本生灯到显示器的距离，记为 $z_{m2s}$ 。

(2) 在不点燃本生灯的情况下，拍摄无流场状态下的正弦条纹图。

(3) 打开 Mark 图片，拍摄标记点，保证点的位置不在流场扰动范围内。



(4) 点燃本生灯，拍摄有流场状态下的正弦条纹图。

#### 4.4 数据处理

(1) 计算距离：根据相机标定的结果，使用公式(3.3.2)计算相机投影中心的世界坐标 $C(x_c, y_c, z_c)$ ，此时世界坐标系的原点为显示器中心，因此相机到显示器的距离可记为 $z_{s2c}$ ，其数值与 $z_c$ 相当。同时可计算相机到本生灯的距离 $z_{m2c} = z_{s2c} - z_{m2s}$ 。

(2) 计算坐标：依次使用给定的程序计算空载时的显示器坐标 $S_0(x_{s0}, y_{s0}, z_{s0})$ ，有流场时的显示器坐标 $S(x_s, y_s, z_s)$ ，并依据公式(3.3.3)计算折射点坐标 $M(x_m, y_m, z_m)$ 。

(3) 计算密度分布：使用给定的程序计算流场的宽度 $W$ ，并根据上述计算得到的坐标，依据公式(3.3.4)计算光线的偏折角度与流场密度梯度。将得到的密度梯度进行积分，即可得到最终的密度分布。

#### 注意事项：

1.在相机标定完成后，需保持整个测量系统的稳定性，请勿触碰相机及显示器。

### 五、数据记录

#### 1. 相机标定结果

Calibration Results	
Focal Length	
Principal point	
Skew	
Distortion	
Translation vector	
Rotation matrix	
Pixel error	

#### 2. 测量距离

相机投影中心坐标	$z_{m2s}/\text{mm}$	$z_{m2c}/\text{mm}$

#### 3. 实验结果图

(1) 灰度做差结果；(2) 密度梯度分布；(3) 密度分布结果。

### 六、思考题

1. 相机标定所得到的投影中心位置坐标是镜头中的基点吗？哪种基点？如不是

基点，请指出并说明你的理由。

2. 根据本实验方法，请举例说明它还有哪些用途。