3º Colóquio de Matemática da Região Sul

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

http://www.petmatematica.ufpr.br/

Condições de otimalidade para problemas de programação não linear com restrições de desigualdade

Nilmara de Jesus Biscaia Pinto[1]
Orientadora: Profa. Dra. Lucelina Batista dos Santos[2]
Setor de Ciências Exatas - Departamento de Matemática
[1]nilmarabiscaia@yahoo.com.br [2]lucelina@ufpr.br

1 Introdução

Neste trabalho consideraremos o problema de otimização não linear com restrições de desigualdade, cujas funções são diferenciáveis. As condições de otimalidade para este problema foram estabelecidas em termos das regras de multiplicadores de tipo Fritz-John e de tipo Karush-Kuhn-Tucker.

Para indicar as condições necessárias primeiramente expressamos a otimalidade como um sistema de desigualdades que não possui solução. Aplicando o Teorema de Alternativa de Gordan a este sistema, obtém-se as condições necessárias de Fritz-John. Além disto, se o problema satisfaz a uma certa qualificação de restrição, obtemos as condições necessárias de Karush-Kuhn-Tucker. Também verificamos que as condições de Karush-Kuhn-Tucker e de Fritz-John são suficientes para a otimalidade se as funções envolvidas no problema forem convexas.

2 Formulação do Problema

Sejam $f_0 : \Gamma \to \mathbb{R}$ e $f_i : \Gamma \to \mathbb{R}, i \in I = \{1, 2, ..., n\}$, continuamente diferenciáveis, em que Γ é um aberto de $\mathbb{R}^n$. O objetivo deste estudo é entender quais as condições necessárias e suficientes para que o seguinte problema (P) tenha solução:

Minimizar $f_0(x)$ sujeito a $f_i(x) \leq 0, i \in I$	(P)

Consideraremos $F = \{x \in \Gamma; f_i(x) \leq 0\}$ o conjunto das soluções factíveis, que suporemos ser não vazio.

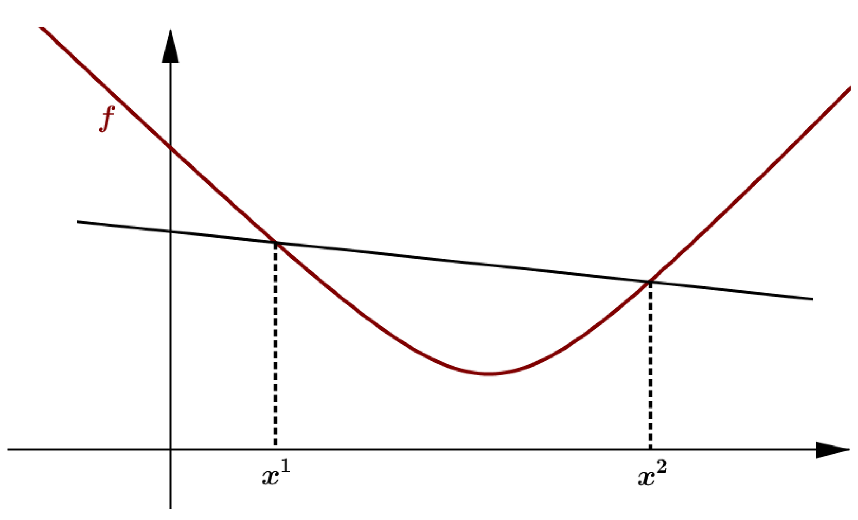
Um ponto $\overline{x}$ é dito **solução otimal local** se para cada ponto x de uma bola aberta centrada em $\overline{x}$, for válido que $f(\overline{x}) < f(x)$. A solução é **global** se a desigualdade valer para qualquer $x \in \Gamma$.

3 Convexidade

Conjuntos convexos: Um conjunto Γ é dito convexo se para cada par de pontos $x^1, x^2 \in \Gamma$ tem-se que o segmento que os une está em Γ, isto é, $(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2 \in \Gamma$.

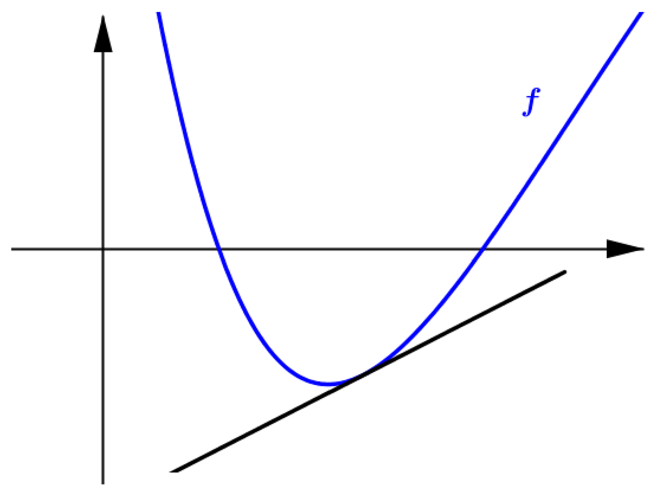
Funções convexas: Uma função $f : \Gamma \to \mathbb{R}$, em que $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ é um convexo, é dita convexa se, para todos $x^1, x^2 \in \Gamma$ e todo $\lambda \in [0, 1]$, vale que $f((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2) \leq (1-\lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2)$.

Graficamente,



Para o caso em que f é também diferenciável, prova-se que $f(x^2) \geq f(x^1) + \langle \nabla f(x^1), x^2 - x^1 \rangle, \forall x^1, x^2 \in \Gamma$.

Graficamente,



Funções convexas estritas: Uma função $f : \Gamma \to \mathbb{R}$, em que $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ é um convexo, é dita convexa estrita se, para todos $x^1, x^2 \in \Gamma$ e todo $\lambda \in (0, 1)$, vale que $f((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2) < (1-\lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2)$.

Analogamente, caso f seja também diferenciável, $f(x^2) > f(x^1) + \langle \nabla f(x^1), x^2 - x^1 \rangle, \forall x^1, x^2 \in \Gamma$

4 Teorema de Alternativa

Teorema de Gordan: Sejam $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ convexo não-vazio e $f_i : \Gamma \to \mathbb{R}$, $i \in I$, convexas. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) Não existe $x \in \Gamma$ tal que $f_i(x) < 0$ para todo $i \in I$.

(ii) Existem $\lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0$ para $i \in I$, não todos nulos, tais que $\sum_{i \in I} \lambda_i f_i(x) \geq 0$ para todo $x \in \Gamma$.

Prova: *Define-se* $V(x) = \{(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n; \beta_i > f_i(x); i \in I\}$ *e* $U = \bigcup_{x \in \Gamma} V(x)$. *Tendo provado que U é convexo, o Teorema de Separação de Hahn-Banach garante que existem $\lambda_i \in \mathbb{R}$ não todos nulos tais que o hiperplano* $\sum_{i \in I} \lambda_i \beta_i > 0$ *separa a origem do conjunto U.*

Toma-se então a sequência $\beta^k = (\beta_1^k, \beta_2^k, \ldots, \beta_n^k) \in V(x)$, *para dado $x \in \Gamma$ tal que para $i = 1, 2, \ldots, n$, tem-se* $\beta_i^k \to f_i(x)$, *obtendo assim o resultado pretendido. A volta segue por contradição.* □

5 Condições necessárias

Teorema de Fritz-John: Seja $\overline{x} \in F$. Se $\overline{x}$ é uma solução otimal local do problema (P), então existem $\overline{\lambda}_0, \overline{\lambda}_i \in \mathbb{R}, i \in I$, não todos nulos, tais que

$$\overline{\lambda}_0 \nabla f_0(\overline{x}) + \sum_{i \in I} \overline{\lambda}_i \nabla f_i(\overline{x}) = 0, \tag{1}$$

$$\overline{\lambda}_0, \overline{\lambda}_i \geq 0, i \in I, \tag{2}$$

$$\overline{\lambda}_i f_i(\overline{x}) = 0, i \in I. \tag{3}$$

Prova: *Se $\overline{x}$ é solução local otimal do problema, então não existe solução $v \in \mathbb{R}^n$ para o sistema:*

$$\begin{cases} \langle \nabla f_i(\overline{x}), v \rangle < 0, i \in I(\overline{x}) \\ \langle \nabla f_0(\overline{x}), v \rangle < 0. \end{cases}$$

em que $I(\overline{x}) = \{i \in I; f_i(\overline{x}) = 0\}$. *Usa-se, então, o Teorema de Gordan para este sistema.* □

Condição de Regularidade ou **Qualificação de Restrição** (QR): O conjunto $\{\nabla f_i(\overline{x}); i \in I(\overline{x})\}$ é linearmente independente.

Teorema de Karush-Kuhn-Tucker: Seja $\overline{x} \in F$ e o problema (P) satisfazendo a condição de regularidade (QR). Se $\overline{x}$ é solução ótima local de (P), então existem $\hat{\lambda}_i \in \mathbb{R}, \forall i \in I$, tais que

$$\nabla f_0(\overline{x}) + \sum_{i \in I} \hat{\lambda}_i \nabla f_i(\overline{x}) = 0, \tag{4}$$

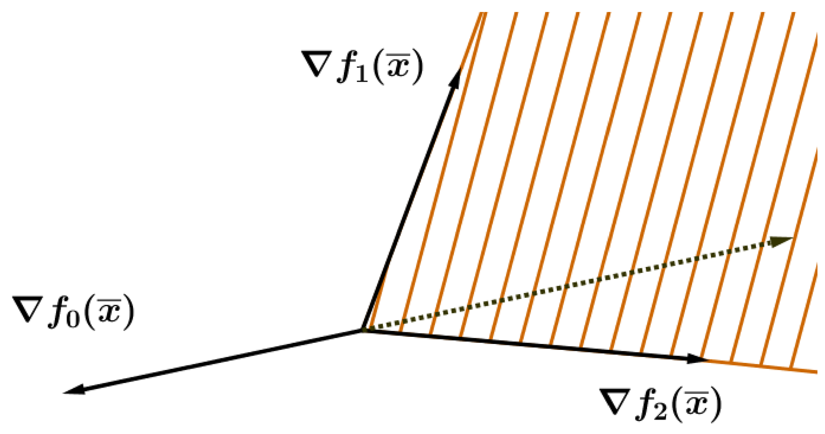
$$\hat{\lambda}_i \geq 0, i \in I, \tag{5}$$

$$\hat{\lambda}_i f_i(\overline{x}) = 0, i \in I. \tag{6}$$

Prova: *Como $\overline{x}$ satisfaz a condição (QR), então $\overline{\lambda}_0 \neq 0$ e é possível definir* $\hat{\lambda}_i = \frac{\overline{\lambda}_i}{\overline{\lambda}_0}$.

Logo, pelo teorema de Fritz-John, valem (4), (5) e (6). □

No caso de duas restrições a interpretação geométrica é a seguinte:



6 Condições suficientes

Teorema de Fritz-John: Seja Γ convexo, $\overline{x} \in F$ e f_0 e f_i continuamente diferenciáveis. Além disso, f_0 convexa em $\overline{x}$ e f_i para $i \in I(\overline{x})$, convexa restrita. Se existem $\overline{\lambda}_0, \overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_n \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo (1) – (3), então $\overline{x}$ é solução ótima global do problema (P).

Prova: *Por contradição se supõe que exista um $\hat{x} \in \Gamma, \hat{x} \neq \overline{x}$ tal que $f_0(\hat{x}) < f_0(\overline{x})$ e $f_i(\hat{x}) < f_i(\overline{x}) = 0, \forall i \in I(\overline{x})$. Dadas as condições (1) – (3) e como f_0 e f_i são convexas restritas, tem-se que $v = \hat{x} - \overline{x}$ satisfaz $\langle \nabla f_i(\overline{x})\hat{x} - \overline{x} \rangle < 0$, $i \in I(\overline{x})$ e $\langle \nabla f_0(\overline{x}), \hat{x} - \overline{x} \rangle < 0$ simultaneamente, o que contradiz o Teorema de Gordan. Logo $\overline{x}$ é solução global do problema (P).* □

Teorema de Karush-Kuhn-Tucker: Seja $\overline{x} \in F$ e f_0 e f_i continuamente diferenciáveis. E mais, f_0 é convexa e f_i, para $i \in I(\overline{x})$, é convexa. Se existem $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \ldots, \hat{\lambda}_n \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo (4) – (6), então $\overline{x}$ é solução ótima global de (P).

Prova: *Para qualquer $x \in F$, tem-se $f_i(x) \leq 0 = f_i(\overline{x})$, $i \in I(\overline{x})$. A convexidade de f_i garante que $\nabla f_i(\overline{x})(x - \overline{x}) \leq 0$, $i \in I(\overline{x})$. Como $\hat{\lambda}_i \geq 0$, conclui-se que*

$$0 \leq -\sum_{i \in I} \hat{\lambda}_i \nabla f_i(\overline{x})(x - \overline{x}) = \nabla f_0(\overline{x})(x - \overline{x}), \forall x \in F.$$

Portanto $\overline{x}$ é solução otimal de (P). □

7 Conclusões

Foi estudado o problema de programação não linear com restrições de desigualdades, quanto a condições necessárias e suficientes de otimalidade. Na obtenção das condições necessárias de otimalidade, o Teorema de Separação de Hahn-Banach e o Teorema de Alternativa de Gordan foram de importância fundamental. Sob hipóteses adequadas de convexidade, as condições de Fritz-John e de Kuhn-Tucker são suficientes para a otimalidade, mas para tanto foi preciso fazer uso das principais propriedades das funções convexas diferenciáveis.

O prosseguimento natural deste trabalho pode se dar em duas vias: por um lado, aplicar as condições de otimalidade em problemas concretos – oriundos da Economia, da Física, etc.–; por outro lado, do ponto vista teórico, investigar a existência de funções mais gerais que as convexas para as quais as condições de Karush-Kuhn-Tucker continuem sendo suficientes para a otimalidade.

8 Referências Bibliográficas

[1] BAZARAA, M. S., SHERALI, H. D. e SHETTY, C. M. *Nonlinear Programming: Theory and Applications.* Willey.

[2] BECKER, L. C. *Introducción a la Optimización con Restricciones.* Universidad de Chile.

[3] BREZIS, H. *Análisis Funcional: Teoría y Aplicaciones.* Alianza Editorial.

[4] MANGASARIAN, O. L. *Nonlinear Programming.* SIAM.

[5] PRIMO, P. G. *Condições de otimalidade para problemas finito e infinito dimensionais: abordagem via Teorema de Alternativa do Tipo Gordan.* Dissertação de Mestrado. IMECC-Unicamp (1997).

[6] SANTOS, L. B. *Algumas contribuições em otimização multiobjetivo.* Tese de Doutorado. IMECC-Unicamp (2004).