גלים ואופטיקה תרגיל נומרי

ניל דותן 209398916

22 בפברואר 2023

1 חלק 1

1.1 1

מקדם השבירה מוגדר על ידי

$$n(r) = 1 + \frac{2Gm}{c^2 r} = 1 + \frac{1}{r}$$

כאשר הגדרנו $\frac{2Gm}{c^2} = 1$
נמצא את המשוואות הדרושות לאינטגרציה נומרית על משוואת הקרניים
נבחר להשתמש בפרמטר אורך המסילה. ונקבל 3 משוואות על $r, \dot{r}, ds$ כאשר r הוא המסלול, $\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ ו s היא מסילה כך ש ds הוא פרמטר אורך המסילה. המשוואות המתקבלות

$$\frac{d}{ds}\left[n\left(\vec{r}\left(s\right)\right)\dot{\vec{r}}\right] = \vec{\nabla} n\left(\vec{r}\left(s\right)\right) \tag{1}$$

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{ds} \tag{2}$$

$$\left|\dot{\vec{r}}\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1 \tag{3}$$

נכתוב את המשוואות בצורה דיסקרטית - לנוחות נכתוב כעת את $n\left(\vec{r}\left(s\right)\right)$ כ n
ממשוואה 1 נקבל

$$\frac{\left[n\dot{\vec{r}}\right]_{i+1} - \left[n\dot{\vec{r}}\right]_i}{s_i} = \vec{\nabla} n_i \Rightarrow \frac{n_{i+1}\dot{\vec{r}}_{i+1} - n_i\dot{\vec{r}}_i}{s_i} = \vec{\nabla} n_i \Rightarrow \dot{\vec{r}}_{i+1} = \frac{\vec{\nabla} n_i s_i + n_i \dot{\vec{r}}_i}{n_{i+1}}$$

ובנוסף מתקיים ש

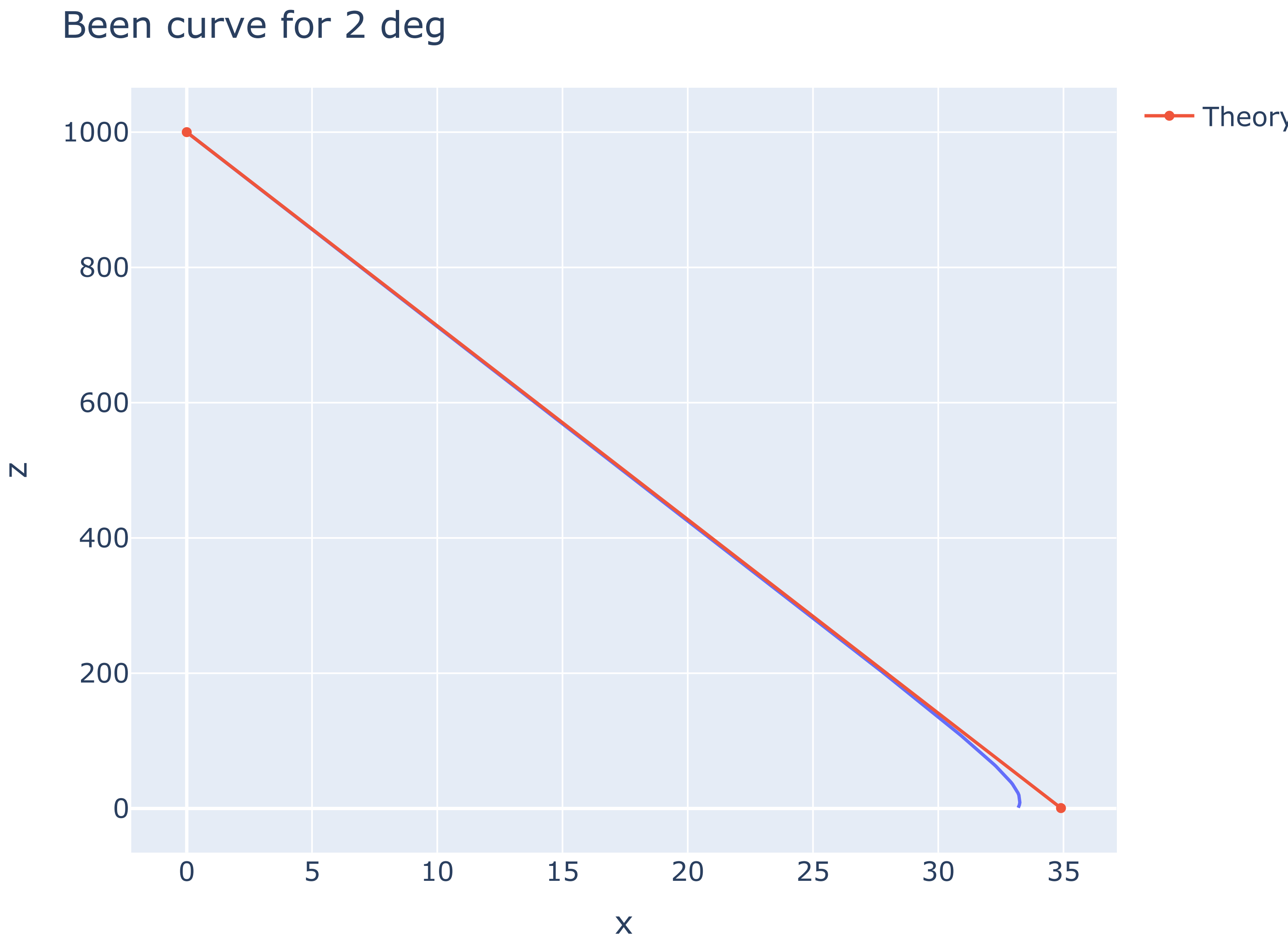
$$\vec{\nabla} n_i = \vec{\nabla}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}}\right) = \begin{bmatrix} \frac{-2x}{(x^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{-2z}{(x^2+z^2)^{3/2}} \end{bmatrix} = \frac{-\vec{r}}{|r|^{3/2}}$$

ממשוואה 2

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i}{s_i} \Rightarrow \vec{r}_{i+1} = \vec{r}_i + \dot{\vec{r}}_i s_i$$

וממשוואה 3

$$\left| \frac{\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i}{s_i} \right| = 1 \Rightarrow s_i = |\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i|$$



1.2 חישוב הסטייה מהפתרון האנליטי

הסטייה לפי הפתרון האנליטי (תרגול 10) היא

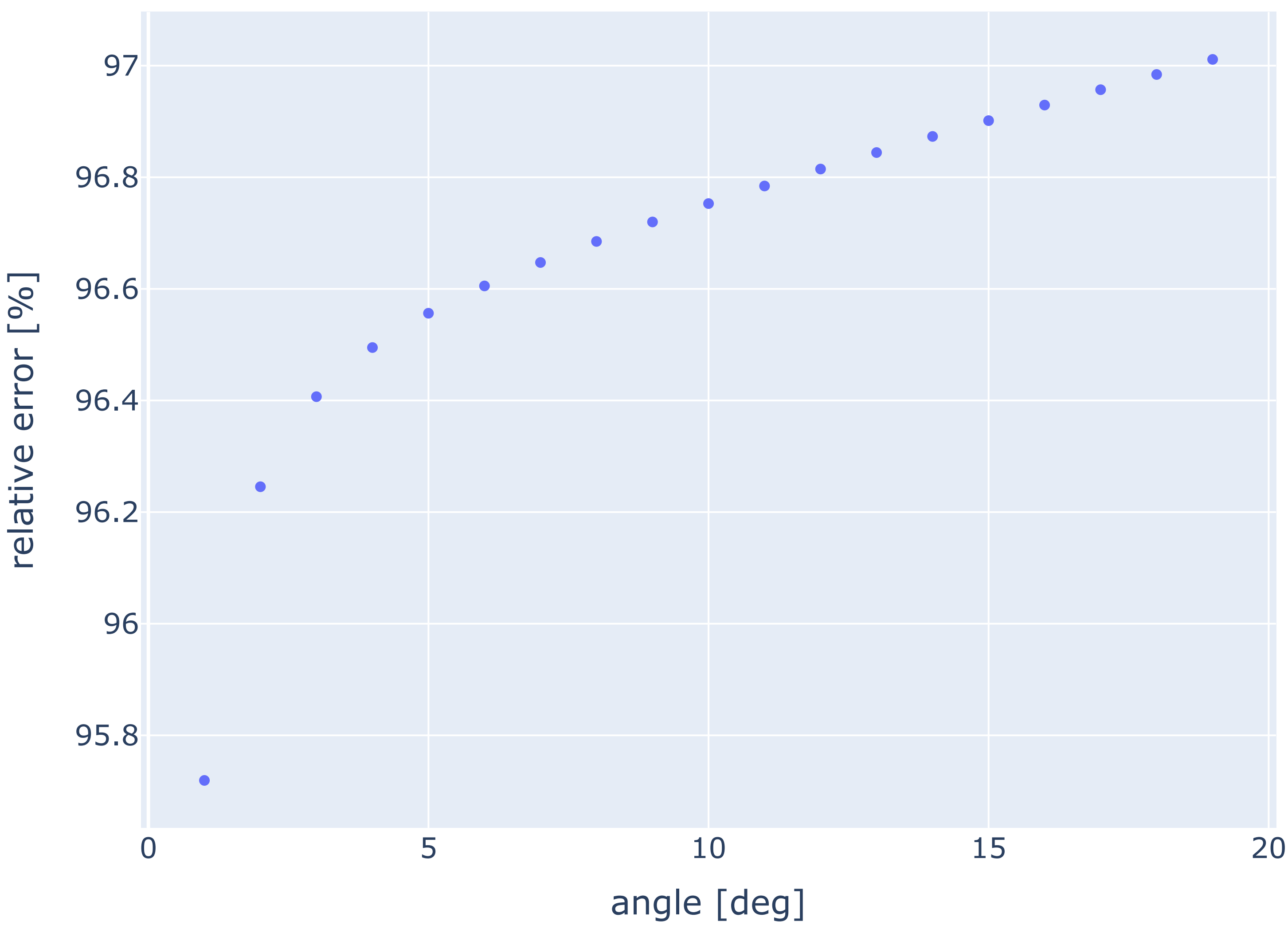
$$\alpha = \frac{4Gm}{c^2 b} = \frac{2}{b}$$

כאשר b הוא פרמטר הפיגעה ונתון על ידי ערך ה x שאליו האור היה מגיע אילו היה נע בקו ישר

משוואת הישר שהקרן מקיימת ללא השפעת המסה היא

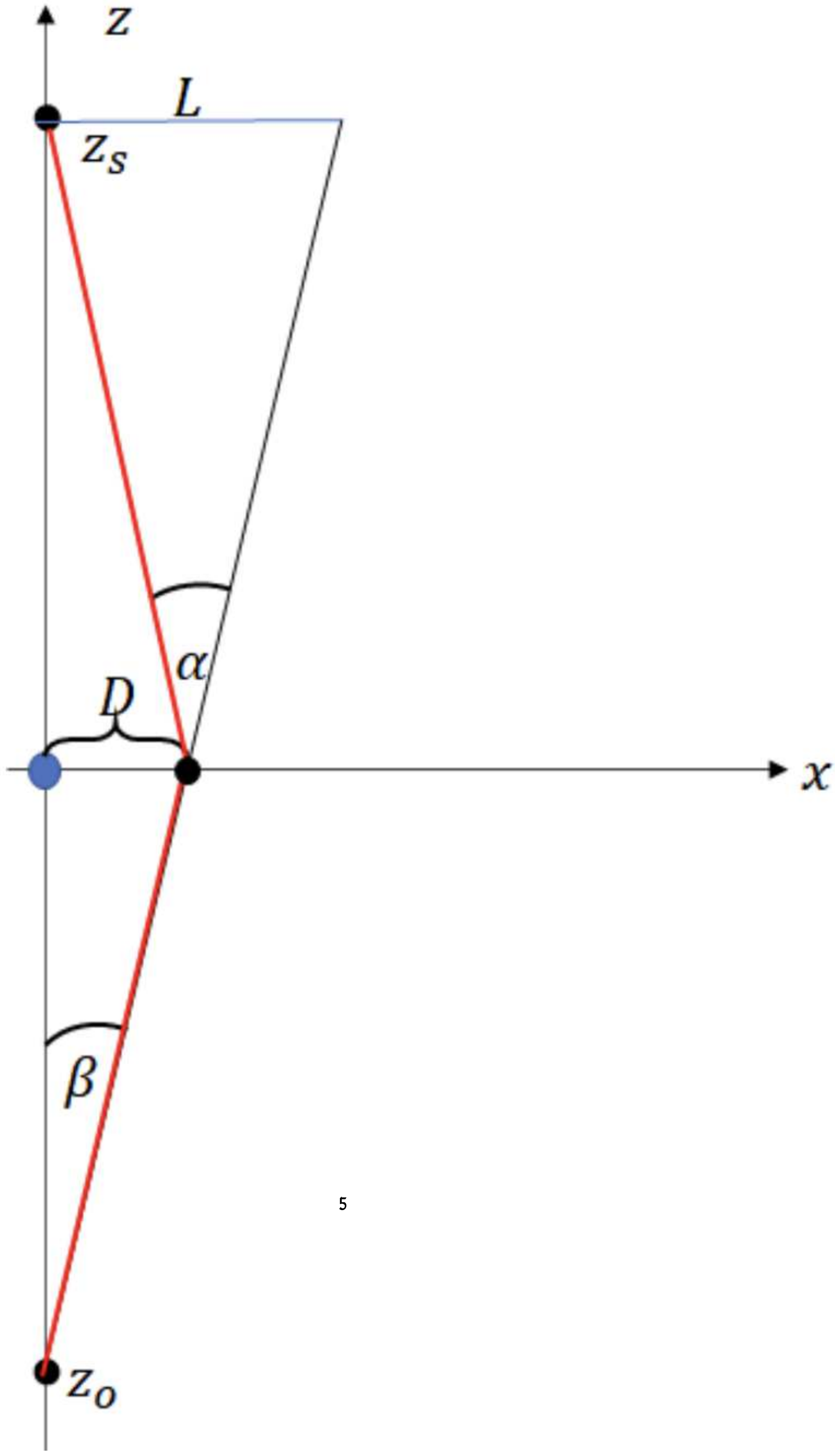
$$z - z_s = \frac{v_z}{v_x}(x - x_s) \Rightarrow 0 - z_S = \frac{v_z}{v_x}(b - 0) \Rightarrow b = -\frac{v_x z_0}{v_z}$$

הגרף על השגיאות:



נשים לב שגרף זה מאוד שונה ממה שהיינו מצפים לקבל אבל זה מה שיצא

2 טבעת אינשטיין



2.1 א

נמצא את L נסמן את את ראשית הצירים ב O ואת הנקודה לפי ההנחה שלנו של זוית קטנות ושהקרן נעה שתנועה הקרן היא משלוש, מתקבל שהמשולש Oz_oD דומה למושלש z_sz_oL ולכן נוכל למצוא את L לפי

$$\frac{z_o}{z_o+z_s}=\frac{D}{L}\Rightarrow L=\frac{D\left(z_o+z_s\right)}{z_o}$$

כשאר D הוא הודל שכיננו בסעיף הקודם ב b ומחושב על ידי

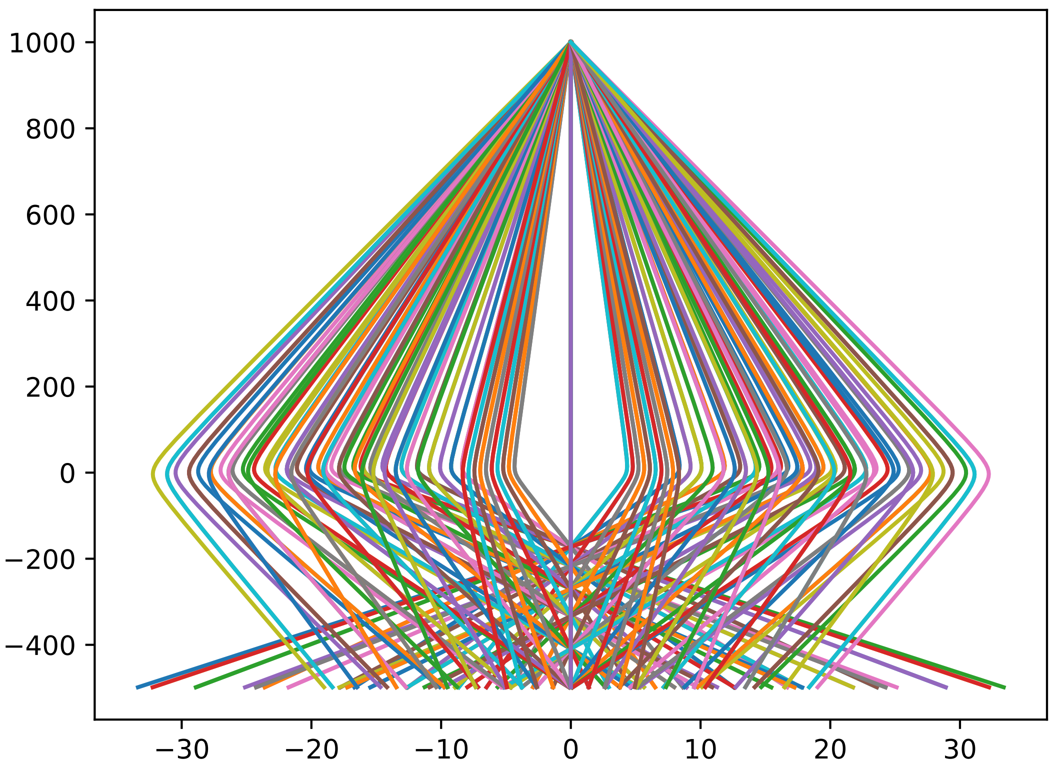
$$D=-\frac{v_xz_0}{v_z}$$

כעת נחשב את β באמצעות

$$\beta=\tan^{-1}\left(\frac{L}{z_o+z_s}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{L}{z_o+z_s}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{D\left(z_o+z_s\right)}{z_o\left(z_o+z_s\right)}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{D}{z_0}\right)$$

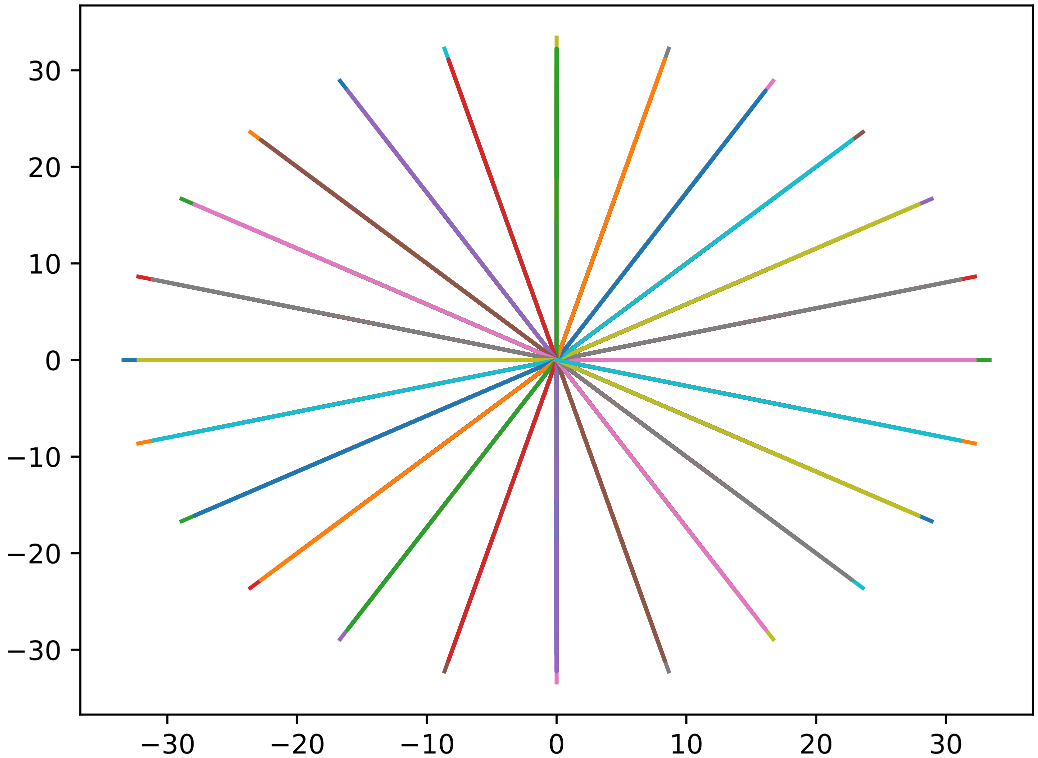
2.2 ג

השרטוט במישור xz



2.3 ד

השרטוט במישור xy



הרדיוס המתקבל הוא 14.22
לפי הקירוב משסעיף א הרדיוס יהיה

$$L = \frac{D\left(z_o + z_s\right)}{z_o} = 3D$$

כאשר D תלוי הוא נקודות החיתוך של הקרן עם ציר ה x ותלוי בקרן