Analysis I

1 Reelle Zahlen

Addition

(A1) Assoziativität: $x+(y+z) = (x+y)+z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
(A2) Neutrales Element: $x + 0 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
(A3) Inverses Element: $\forall x\, \exists y\, x + y = 0$
(A4) Kommutativität: $x + z = z + x \quad \forall x, z \in \mathbb{R}$

Multiplikation

(M1) Assoziativität: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
(M2) Neutrales Element: $x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
(M3) Inverses Element: $\forall x\, \exists y\, x \cdot y = 1$
(M4) Kommutativität: $x \cdot z = z \cdot x \quad \forall x, z \in \mathbb{R}$
(D) Distributiv: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

Ordnungsaxiome

(O1) Reflexiv: $x \leq x\ \forall x \in \mathbb{R}$
(O2) Transitiv: $x \leq y$ und $y \leq z \implies x \leq z$
(O3) Antisymmetrisch: $x \leq y$ und $y \leq x \implies x = y$
(O4) Total: $\forall x, y$ gilt entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$

Kompatibilität

(K1) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \implies x + z \leq y + z$
(K2) $\forall x \geq 0, \forall y \geq 0 : x \cdot y \geq 0$

Ordnungsvollständigkeit Seien A, B Teilmengen von $\mathbb{R}$, so dass

(i) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$
(ii) $\forall a \in A$ und $\forall b \in B$ gilt: $a \leq b$

Dann gibt es $c \in \mathbb{R}$, so dass $\forall a \in A$: $a \leq c$ und $\forall b \in B$: $c \leq b$.

Korollar 1.6

1. Eindeutigkeit der additiven und multiplikativen Inverse.
2. $0 \cdot x = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$
3. $(-1) \cdot x = -x\ \forall x \in \mathbb{R}$, insbesondere $(-1)^2 = 1$
4. $y \geq 0 \iff (-y) \leq 0$
5. $y^2 \geq 0\ \forall y \in \mathbb{R}$, insbesondere $1 = 1 \cdot 1 \geq 0$
6. $x \leq y$ und $u \leq v \implies x + u \leq y + v$
7. $0 \leq x \leq y$ und $0 \leq u \leq v \implies x \cdot u \leq y \cdot v$

Archimedisches Prinzip

(i) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $y \leq n \cdot x$.
(ii) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert genau ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x < n + 1$.

Satz 1.8 Für jedes $t \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $x^2 = t$ eine Lösung in $\mathbb{R}$.

Young'sche Ungleichung $\forall \epsilon > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$2|xy| \leq \epsilon x^2 + \frac{1}{\epsilon} y^2$$

Obere (untere) Schranke $c \in \mathbb{R}$ ist eine obere (untere) Schranke für $A \subseteq \mathbb{R}$ falls $a \leq c$ ($c \leq a$) $\forall a \in A$. D.h., es gibt keine grösseren (kleineren) Elemente in A, und A ist nach oben (unten) beschränkt durch c.

$m \in \mathbb{R}$ ist **Minimum** von A (Min$A$) falls

(i) $m \in A$
(ii) m ist obere Schranke von A

$M \in \mathbb{R}$ ist **Maximum** von A (Max$A$) falls

(i) $M \in A$
(ii) M ist untere Schranke von A

Supremum Sei A nach oben beschränkt. Dann gibt es eine kleinste obere Schranke von A:

$$c := \operatorname{Sup} A$$

Infimum Sei A nach unten beschränkt. Dann gibt es eine grösste untere Schranke von A:

$$d := \operatorname{Inf} A$$

Definition 1.18 (Kardinalität)

1. Zwei Mengen X,Y heissen gleichmächtig, falls es eine Bijektion $f : X \to Y$ gibt.
2. Eine Menge X ist endlich, falls entweder $X = \emptyset$ oder $\exists n \in \mathbb{N}$, so dass X und $1, 2, 3, ..., n$ gleichmächtig sind. Im ersten Fall ist die Kardinalität von X, $cardX = 0$, im zweiten Fall ist $cardX = n$.
3. Eine Menge X ist abzählbar, falls sie endlich oder gleichmächtig wie $\mathbb{N}$ ist

Kreuzprodukt Das Kreuzprodukt von zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ ist definiert durch:

$$\begin{array}{rccc} \times : & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (a, b) & \longmapsto & a \times b \end{array}$$

wobei $a \times b = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} e_1(a_2b_3 - a_3b_2) \\ +\ e_2(b_1a_3 - a_1b_3) \\ +\ e_3(a_1b_2 - a_2b_1) \end{array}$

2 Folgen und Reihen

2.1 Grenzwerte einer Folge

Definition einer Folge Eine Folge (reeller Zahlen) ist eine Abbildung a: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$

Lemma 2.4 Sei $(a_n)_{n\geq1}$ eine Folge. Dann gibt es höchstens eine reelle Zahl $l \in$ R mit der Eigenschaft: $\forall \epsilon > 0$ ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin (l - \epsilon, l + \epsilon\}$ endlich.

Definition 2.4 Eine Folge $(a_n)_{n\geq1}$ heisst konvergent, falls es $l \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall \epsilon > 0$ die Menge

$$\{n \in \mathbb{N}^* : a_n \notin (l - \epsilon, l + \epsilon)\}$$

endlich ist.

Alternativ Eine Folge $(a_n)_{n\geq1}$ heisst konvergent, falls $\exists l$ sodass $\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 1$ sodass für alle $n > N$ gilt

$$|a_n - l| < \epsilon$$

2.1.1 Grenzwerte berechnen

Trick 1: Def. 2.4 Vor allem für Beweise.

Trick 2: Summen- und Produktregel
Seien $(a_n)_{n\geq1}$ und $(b_n)_{n\geq1}$ konvergente Folgen mit $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

1. Dann ist $(a_n+b_n)_{n\geq1}$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n+b_n) = a+b$
2. Dann ist $(a_n \cdot b_n)_{n\geq1}$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
3. Nehmen wir zudem an, dass $b_n \neq 0\ \forall n \geq 1$ und $b \neq 0$. Dann ist $(\frac{a_n}{b_n})_{n\geq1}$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n})_{n\geq1} = \frac{a}{b}$

Beispiele: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+n+4}{2n^2-1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} (3 - \frac{n}{n^2+1})$

Trick 3: Dritte Binomische Formel
Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Wenn wir eine Formel der Form $a - b$ haben, können wir sie mit $\frac{a+b}{a+b}$ multiplizieren.

Beispiel: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$

Trick 4: Sandwich

Sandwich-Satz Seien $(a_n)_{n\geq1}$ und $(b_n)_{n\geq1}$ konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$. Sei c_n eine Folge mit der Eigenschaft $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n > k$, für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L$$

Beispiele: $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2^n}$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n+11^n+17^n}$

Trick 5: Rekursive Folgen mit Weierstrass

Satz 2.11 (Weierstrass) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ mit Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$$

Beispiel: $\lim_{n\to\infty} a_n$ wobei a_n definiert ist durch:
$a_1 = \sqrt{2}$, $\quad a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$. Beweise zuerst monoton wachsend und beschränkt. Dann: da a_n und a_{n+1} gegen a konvergieren, schreiben wir

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+a_n} \\ \iff a &= \sqrt{2+a} \\ \iff a^2 &= 2+a \\ \iff (a+1)(a-2) &= 0 \end{aligned}$$

Da $a=-1$ nicht möglich, ist $a=2$.

Trick 6: Fundamentallimes

Die Folge $(1+\frac{x}{n})^n$, $n\geq 1$ konvergiert $\forall x \in \mathbb{R}$. Der Limes ist

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{x}{n})^n = e^x$$

Ausserdem: **Satz (nicht im Skript)** Sei a_n eine konvergente Folge. Jede Teilfolge b_n von a_n konvergiert und hat denselben Grenzwert $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$

Beispiele: $\lim_{n\to\infty} (\frac{n+3}{n+1})^n$, $\lim_{n\to\infty} ((\frac{(n+3)^2-5}{n^2+6n+9})^{n+3})^{n+3}$

Trick 7: Potenzreihen

Bekannte Funktionen in Potenzreihen darstellen und den Grenzwert dann von der Potenzreihe ablesen.

Beispiele:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \ldots}{x} = \lim_{x\to 0} 1 - \frac{x^2}{3!} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \ldots}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \ldots = \frac{1}{2}$$

Trick 8: De L'Hospital

Seien $f,g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$. Falls

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to b^-} g(x) = 0$$

und

$$\lambda := \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert, folgt

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Der Satz gilt auch für

- $b = \infty$
- $\lambda = \infty$
- $x \to a^+$

Er ist besonders geeignet für Grenzwerte der Form $\frac{0}{0}$, $0\cdot\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$. Falls der Satz kein λ liefert, heisst es **nicht**, dass der Grenzwert nicht existiert.

Beispiele: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}, n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to 0^+} x \log x$

Trick 9: der $e^{\log}$ Trick

Wenn wir eine Funktion der Form $f(x)^{g(x)}$ haben und $\lim_{x\to x_0}$ berechnen möchten, das x aber in Basis und Exponent auftritt, können wir die Funktion schreiben zu

$$f(x)^{g(x)} = \exp(g(x)\log(f(x)))$$

Aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt dann

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x\to x_0} \exp(g(x)\log(f(x))) \\ &= \exp(\lim_{x\to x_0} g(x)\log(f(x))) \end{aligned}$$

Beispiele: $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log n}(n^{\frac{1}{n}} - 1)$

Logarithmus Potenzreihe Auch der Logarithmus hat eine Potenzreihe um den Punkt 1:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

Lemma 2.16 (Bernoulli Ungleichung)

$$(1+x)^n \geq 1 + n\cdot x \quad \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$$

Limes superior und Limes inferior Sei für jedes $n \geq 1$:

$$b_n = \mathrm{Inf}\{a_k : k \geq n\} \text{ und } c_n = \mathrm{Sup}\{a_k : k \geq n\}$$

Dann folgt aus Kor. 1.16:

$$b_n \leq b_{n+1}\ \forall n \geq 1 \text{ und } c_{n+1} \leq c_n\ \forall n \geq 1$$

und beide Folgen sind beschränkt. Nach Weierstrass (Satz 2.11) sind beide Folgen konvergent und wir definieren: $\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} b_n$ (Limes inferior) und $\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} c_n$ (Limes superior)

Lemma 2.19 $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert genau dann, falls $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt ist und

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

Definition 2.20 Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist eine Cauchy-Folge, falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ so dass } |a_n - a_m| < \epsilon\ \forall n,m \geq N$$

Satz 2.20 (Cauchy-Kriterium) In $\mathbb{R}$ gilt dann:

$$a_n \text{ ist eine Cauchy-Folge} \iff a_n \text{ konvergiert}$$

Satz 2.29 (Bolzano-Weierstrass) Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Eine Teilfolge ist eine Folge, bei der einige Folgenglieder der ursprünglichen Folge weggelassen wurden. Die Indizes sind nach wie vor in aufsteigender Reihenfolge.

Satz (nicht im Skript) Sei a_n eine konvergente Folge. Jede Teilfolge b_n von a_n konvergiert und hat denselben Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

2.30 Sei $a_n \in \mathbb{R}$ eine beschränkte Folge. Dann gibt es zwei Teilfolgen b_n und c_n, sodass $\lim_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\lim_{n\to\infty} c_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

Abgeschlossenes Intervall ist eine Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$ der Form

1. $[a,b], \quad a \leq b, a, b \in \mathbb{R}$
2. $[a,\infty[, \quad a \in \mathbb{R}$
3. $]-\infty, a], \quad a \in \mathbb{R}$
4. $]-\infty,\infty[= \mathbb{R}$

Die Länge $L(I)$ ($\neq$ Kardinalität) des Intervalls ist $b-a$ im ersten Fall und $+\infty$ in (2), (3) und (4).

2.2 Reihen

Satz 2.40 Seien $\sum_{k=1}^\infty a_k$ und $\sum_{j=1}^\infty b_j$ **konvergent**, sowie $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann ist

- $\sum_{k=1}^\infty (a_k + b_k)$ konvergent und
$$\sum_{k=1}^\infty (a_k+b_k) = \left(\sum_{k=1}^\infty a_k\right) + \left(\sum_{j=1}^\infty b_j\right)$$
- $\sum_{k=1}^\infty \alpha\cdot a_k$ konvergent und
$$\sum_{k=1}^\infty \alpha\cdot a_k = \alpha\cdot\sum_{k=1}^\infty a_k$$

Achtung: im Allgemeinen können zwei Reihen nicht wie oben addiert werden!

2.2.1 Konvergenz von Reihen

Kriterium 1+ Satz 2.40. Beispiele: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, $\sum_{n\in G}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, ...

Kriterium 2+ (Geometrische Reihen) Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Dann konvergiert die Partialsumme $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$, es gilt

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \text{ und } \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Beispiel: $\frac{i}{2} + \frac{1}{6} - \frac{i}{18} - \frac{1}{54} + ...$

Kriterium 3+ (Teleskopsumme) Idee: schreibe die Summe

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1}$$

und nimm den Limes von der rechten Seite.

Beispiele: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} log(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)})$.

Die Teleskopsumme kann beim ersten Beispiel durch addieren und subtrahieren von k im Zähler erreicht werden, beim zweiten Beispiel mit der dritten bin. Formel.

Kriterium 4 (Cauchy-Kriterium) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, falls: $\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 1$ sodass

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \epsilon \quad \forall m \geq n \geq N$$

Kriterium 5 (Abfalleigenschaft) Sei a_n eine Folge reeller Zahlen. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Kriterium 6 (Majoranten und Minoranten) Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen mit $0 \leq a_k \leq b_k \forall k \geq K$ für ein $K \geq 1$. Dann gelten:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}$$

Beispiele konvergent: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n+1}$

Beispiele divergent: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Mit diesem Kriterium kann nur bewiesen werden, dass eine Reihe konvergiert bzw. divergiert.

Satz $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert $\implies \lim_{k\to\infty} a_k = 0$

Definition 2.45 Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heisst absolut konvergent, falls die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

Satz 2.46 Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist auch konvergent und es gilt:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

Um zu zeigen, dass eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, zeigen wir dass $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Kriterium 7 (Leibniz) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend mit $a_n \geq 0\ \forall n \geq 1$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

und es gilt: $a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$

Haben wir also eine alternierende Reihe (d.h. mit $(-1)^n$), müssen wir folgendes prüfen:

- $a_n \geq 0$ (ohne das $(-1)^n$)
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- a_n monoton fallend

Beispiele: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^3+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ (alle konvergent)

Kriterium 8 (Quotientenkriterium) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n \neq 0\ \forall n \geq 1$. Falls

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut. Falls

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$$

divergiert die Reihe.

Beispiele: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n+1)}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+n}{10^n}$ (alle konvergieren)

Kriterium 9 (Wurzelkriterium) Falls

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut. Falls

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

dann divergieren $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Beispiele: $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n-5}$

Potenzreihen sind Reihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$$

Für $|x| < \rho$ konvergiert die Reihe, wobei ρ der Konvergenzradius ist. Dieser ist gegeben durch

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Konvergente Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ für alle } |q| < 1 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^d} \text{ für alle } d > 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ (Teleskop)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \log 2$
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp z$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \cos z$	$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot q^n = \frac{q}{(1-q)^2}$

Divergente Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^d} \text{ für alle } d \leq 1, \text{ wenn } d = 1\text{: harmonische Reihe}$$

Wichtige Beispiele

$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$	$\sum_{i=1}^{n} z^i = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$

Satz 2.62 Falls die Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ absolut konvergieren, so konvergiert ihr Cauchy Produkt und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j\right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right)$$

2.2.2 Reihen auf Konvergenz und Divergenz untersuchen

Gegeben: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Spezieller Typ?

- $\sum q^n$ $|q|<1$ (Geom. Reihe)
- $\sum (-1)^n a_n$
  - a_n monoton
  - $\lim a_n = 0$

  (Alternierende Reihe)
- $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$ $s>1$
- $\sum (b_n - b_{n+1})$ (Teleskopreihe)

nein

$\lim a_n = 0$ $\xrightarrow{\text{nein}}$ Divergent!

↓ ja

Quot. Kriterium anwendbar? $\xrightarrow{\text{ja}}$ fertig

↓ nein

Wurzelkriterium anwendbar? $\xrightarrow{\text{ja}}$ fertig

↓ nein

∃ konvergente Majorante? $\xrightarrow{\text{ja}}$ Konvergent!

↓ nein

∃ divergente Minorante? $\xrightarrow{\text{ja}}$ Divergent!

↓ nein

Kreativ werden...

3 Stetige Funktionen

3.1 Stetigkeit

Definition 3.4 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist in x_0 stetig, falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ die folgende Implikation gilt:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in x_0 unstetig, falls $\exists \epsilon > 0$, so dass $\forall \delta > 0$ ein $x \in D$ existiert, sodass

$$|x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| > \epsilon$$

Zeige damit, dass folgendes an einem Punkt nicht stetig ist:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

Allgemeiner Trick: $|x - x_0|$ irgendwie aus $|f(x) - f(x_0)|$ rausfiltern, und dann δ so geschickt wählen, dass sich der restliche Müll wegstreicht. Insbesondere kommt in δ das ϵ vor, und normalerweise auch $|x_0|$ (aber **kein** x).

Korollar 3.8 Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0. Dann ist

- $f + g$ stetig in x_0.
- $f \cdot g$ stetig in x_0.

Satz Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$ zwei Teilmengen und sei $x_0 \in D_1$. Angenommen $f : D_1 \to D_2$ ist eine bei x_0 stetige Funktion und $g : D_2 \to \mathbb{R}$ ist eine bei $f(x_0)$ stetige Funktion. Dann ist $g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$ bei x_0 stetig. Insbesondere ist die Verknüpfung von stetigen Funktionen wieder stetig.

Satz 3.7 (alternative Definition)
Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Die Funktion f ist genau dann in x_0 stetig, falls für jede Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in D folgende Implikation gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

Stetigkeit beweisen

1. Sei $\epsilon > 0$ beliebig
2. $|f(x) - f(x_0)| = ... = M|x - x_0|$ rausmelken
3. **Fall 1**: M ist von x abhängig: M so lange abschätzen, bis x nur noch in der Form $|x - x_0|$ vorkommt, und der Rest nur noch von x_0 abhängig ist. Dann eine geschickte Bedingung an δ stellen.
   Fall 2: M ist nicht von x abhängig: dann muss man nichts machen.
4. δ in der Form $\delta = \frac{\epsilon}{M}$ wählen. Falls Fall 1: $\delta = min(...)$

Eigenschaften von stetigen Funktionen Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gilt:

- **Lokal beschränkt** Wenn f bei $x_0 \in D$ stetig ist, dann gibt es eine δ-Umgebung U von x_0 und ein $M > 0$, so dass $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in D \cap U$.
  Beweis: $\epsilon > 0$ bel. dann $\exists \delta > 0$ s.d.
  $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
  Dann $|f(x)| = |f(x) - f(x_0) + f(x_0)$
  $\leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x)| < \epsilon + m := M$
- **Lokal das gleiche Vorzeichen** Wenn f bei $x_0 \in D$ stetig ist und $f(x_0) \neq 0$ ist, dann gibt es eine δ-Umgebung U von x_0, so dass $f(x)f(x_0) > 0$ für alle $x \in D \cap U$.
  Beweis: ähnlich wie oben, Gleichung mit $f(x)f(x_0)$ beginnen. Dann zwei ϵ wählen für $f(x_0) > 0 \implies \frac{1}{2}f(x_0)$ bzw. $< 0 \implies -\frac{1}{2}f(x_0)$. Dann zeigen, dass das was bei der oberen Gleichung rauskommt immer > 0 ist.

Lemma Sei $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, f,g stetig in x_0. Dann sind $|f|$, $max\{f, g\}$, $min\{f, g\}$ stetig in x_0.

Satz 3.12 (Zwischenwertsatz) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in I$. Für jedes c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein z zwischen a und b mit $f(z) = c$.

Bsp: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-5)(x-3)(x-1)(x+1)(x+3)+1$ hat genau 5 Nullstellen. Beweis:
$f(-4) < 0$, $f(-3) = 1$, $f(0) < 0$, $f(1) = 1$, $f(4) < 0$, $f(5) = 1$
Da f stetig gibt es laut Zwischenwertsatz zw. je zwei dieser Werte eine Nullstelle. Da ein Polynom von Grad 5 max. 5 Nullstellen hat folgt die Aussage.

Satz 3.19 (Min-Max Satz) Sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf einem kompakten Intervall I. Dann gibt es $u \in I$ und $v \in I$ mit

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in I$$

Insbesondere ist f beschränkt.

Satz 3.22 (Umkehrabbildung) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton. Dann ist $J := f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f^{-1} : J \to I$ ist stetig, streng monoton.

Wir definieren nun allgemeine Potenzen:

$$x^a := \exp(a \log(x)) = e^{a \log(x)}$$

Korollar 3.29

1. Für $a > 0$ ist
$$\begin{aligned}(0, \infty) &\longrightarrow (0, \infty)\\ x &\longmapsto x^a\end{aligned}$$
   eine stetige, streng monoton wachsende Bijektion.
2. Für $a < 0$ ist
$$\begin{aligned}(0, \infty) &\longrightarrow (0, \infty)\\ x &\longmapsto x^a\end{aligned}$$
   eine stetige, streng monoton fallende Bijektion.

3. $ln(a^x) = a \cdot ln(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall x > 0$
4. $x^a \cdot x^b = x^{a+b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$
5. $(x^a)^b = x^{a \cdot b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$

3.2 Funktionenfolgen

Eine Funktionenfolge ist eine Folge, deren Folgenglieder Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ sind:

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^D$$
$$n \longmapsto f_n$$

und $f_n : x \mapsto f_n(x)$.

Definition 3.30 (punktweise Konvergenz) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 0}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls

- für alle $x \in D$:
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$
- $\forall x \in D$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, sodass $\forall n \geq N$ gilt $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

Definition 3.32 (gleichmässige Konvergenz) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 0}$ konvergiert gleichmässig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ sodass } \forall n \geq N, \forall x \in D \text{ gilt } |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Definition 3.32 (gleichmässige Konvergenz negiert) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 0}$ konvergiert **nicht** gleichmässig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls

$$\exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, \exists x \in D \text{ sodass gilt } |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon$$

Tricks, um die Negation zu zeigen:

- Graph zeichnen und sehen, ob es irgendwo eine Stelle gibt, die trotz steigendem n immer von der Funktion f wegbleibt
- Man guckt die Funktion an und schaut, ob man irgendwie ein x konstruieren kann (das i.A. von N abhängig ist), sodass $|f_n(x) - f(x)|$ immer grösser als ein ϵ ist, und erst anschliessend das ϵ wählen

Definition 3.32 (gleichmässige Konvergenz, praktisch) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 0}$ konvergiert gleichmässig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Gleichmässige Konvergenz beweisen
Schätze $|f_n(x) - f(x)| \leq g(n)$ mit einer Funktion $g(n)$ (die also nicht von x abhängt) mit $g(n) \to 0$, für $n \to \infty$, ab. Dann gilt insbesondere auch die alternative Def. 3.32 und die gleichmässige Konvergenz folgt sofort.

Satz 3.33 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge bestehend aus (in D) stetigen Funktionen die (in D) gleichmässig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f (in D) stetig.

Definition 3.37 Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmässig (in D), falls die Partialsumme $S_n := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ gleichmässig konvergiert.

Satz 3.38 (Weierstrassches M-Kriterium) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen. Wir nehmen an, dass $|f_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in D$ und, dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ gleichmässig in D und deren Grenzwert $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ ist eine in D stetige Funktion.

Definition 3.39 Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ hat positiven Konvergenzradius, falls $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$ existiert. Der Konvergenzradius ist dann definiert als:

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \text{falls } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{falls } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$$

Satz 3.40 Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$ und sei $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad |x| < \rho$. Dann gilt: $\forall r : 0 \leq r < \rho$ konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ gleichmässig auf $[-r, r]$, insbesondere ist $f : (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}$ stetig.

D.h. wenn wir eine absolut konvergente Reihe haben, dann ist sie auch in einem abgeschlossenen Intervall innerhalb des Konvergenzradius stetig.

3.3 Trigonometrische Funktionen

Sinus

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Cosinus

$$\sin z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

Tangens

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

Cotangens

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

Hyperbel Funktionen

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Satz 3.42

- $\exp(iz) = \cos z + i \sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $\cos z = \cos(-z)$ und $\sin(-z) = -\sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
- $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$
  $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$
- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- (nicht im Satz): $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Korollar 3.43

- $\sin(2z) = 2 \sin z \cos z$
- $\cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z = 1 - 2\sin^2(x)$

Korollar 3.46

1. $e^{i\pi} = -1$, $e^{2i\pi} = 1$
2. $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$, $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
3. $\sin(x + \pi) = -\sin x$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
4. $\cos(x + \pi) = -\cos x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
5. Nullstellen Sinus $= \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$
   $\sin(x) > 0 \quad \forall x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$
   $\sin(x) < 0 \quad \forall x \in](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[, k \in \mathbb{Z}$
6. Nullstellen Cosinus $= \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$
   $\cos(x) > 0 \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$
   $\cos(x) < 0 \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+2)\pi[, k \in \mathbb{Z}$

3.4 Grenzwerte von Funktionen

Definition 3.47 $x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt der Menge D falls $\forall \delta > 0$:

$$((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}) \cap D \neq \emptyset$$

Definition 3.49 Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D. Dann ist $A \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to x_0$, bezeichnet mit

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

falls $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ so dass

$$\forall x \in D \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}) : |f(x) - A| < \epsilon$$

Bemerkung 3.50

- Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D. Dann gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ genau dann wenn für jede Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ folgt: $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = A$

- Sei $x_0 \in D$. Dann ist f stetig in x_0 genau dann, falls $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
- Falls $\lim_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0} g(x)$ existieren gilt: $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$ $\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$
- Wenn $f \leq g$ und beide Grenzwerte existieren: $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$
- Sandwichsatz: Falls $g_1 \leq f \leq g_2$ und $\lim_{x\to x_0} g_1(x) = \lim_{x\to x_0} g_2(x)$, dann existiert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g_1(x)$

Wichtig Für eine am Punkt x_0 stetige Funktion gilt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x) = f(x_0)$$

Definition rechtsseitiger Grenzwert Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ definieren wir $\lim_{x\searrow x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A$ als den rechtsseitigen Grenzwert von $f(x)$ bei x_0, falls

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D \cap (x_0, x_0+\delta) : |f(x) - A| < \epsilon$$

Satz Falls x_0 ein links- und rechtsseitiger Häufungspunkt ist, dann existiert der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ genau dann, wenn die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von $f(x)$ bei x_0 existiert und $\lim_{x\searrow x_0} f(x) = \lim_{x\nearrow x_0} f(x)$ erfüllt ist.

4 Differenzierbare Funktionen

Definition 4.1 f ist in x_0 differenzierbar, falls der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existiert.

Definition 4.1 (äquivalent) Falls $\exists c \in \mathbb{R}$ und $r : D \to \mathbb{R}$, sodass

$$f(x) = f(x_0) + c(x-x_0) + r(x)(x-x_0)$$

und r stetig in x_0 und $r(x_0) = 0$, so ist f bei x_0 differenzierbar und wir definieren $f'(x_0) = c$.

Wichtige Beispiele

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\arcsin y$	$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\operatorname{arcsinh} y$	$\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\arccos y$	$-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\operatorname{arccosh} y$	$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\arctan y$	$\cos^2 y = \frac{1}{1+y^2}$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$
$\operatorname{arctanh} y$	$\frac{1}{1-y^2}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\operatorname{arccot} y$	$-\frac{1}{1+y^2}$

Satz 4.9 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D und $f, g : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar. Dann gelten:

1. $f+g$ ist in x_0 differenzierbar und
$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$
2. $f \cdot g$ ist in x_0 differenzierbar und
$$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$
3. Falls $g(x_0) \neq 0$ ist $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Satz 4.11 (Kettenregel) Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ und sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt. Sei $f : D \to E$ eine in x_0 differenzierbare Funktion so dass $y_0 := f(x_0)$ ein Häufungspunkt con E ist, und sei $g : E \to \mathbb{R}$ eine in y_0 differenzierbare Funktion. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Korollar 4.12 (Umkehrabbildung) Sei $f : D \to E$ eine bijektive Funktion, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt. Wir nehmen an f ist in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$. Zudem nehmen wir an f^{-1} ist in $y_0 = f(x_0)$ stetig. Dann ist y_0 ein Häufungspunkt von E, f^{-1} ist in y_0 differenzierbar und

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Satz 4.17 (Mittelwertsatz) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit f in (a,b) differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in (a,b)$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

- Falls $f'(\xi) = 0 \ \forall \xi \in (a,b)$ ist f konstant.
- Falls $f'(\xi) = g'(\xi) \ \forall \xi \in (a,b)$ gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) + c \ \forall x \in [a,b]$.
- Falls $f'(\xi) \geq 0 \ \forall \xi \in (a,b)$ ist f auf $[a,b]$ monoton wachsend.
- Falls $f'(\xi) > 0 \ \forall \xi \in (a,b)$ ist f auf $[a,b]$ strikt monoton wachsend.
- Falls $f'(\xi) \leq 0 \ \forall \xi \in (a,b)$ ist f auf $[a,b]$ monoton fallend.
- Falls $f'(\xi) < 0 \ \forall \xi \in (a,b)$ ist f auf $[a,b]$ strikt monoton fallend.

Definition 4.32 (höhere Ableitungen)

- Für $n \geq 2$ ist f n-mal differenzierbar in D falls $f^{(n-1)}$ in D differenzierbar ist. Dann ist $f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)'$ und nennt sich die n-te Ableitung von f.
- Die Funktion f ist n-mal stetig differenzierbar in D, falls sie n-mal differenzierbar ist und falls $f^{(n)}$ in D stetig ist.
- Die Funktion f ist in D glatt, falls sie $\forall n \geq 1$ n-mal differenzierbar ist.

Extremwerte bestimmen Extremwerte einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bestimmen, die auf (a, b) glatt ist:

1. Funktion eingeschränkt auf das offene Intervall untersuchen, d.h. $f|_{(a,b)} : (a, b) \to \mathbb{R}$.
2. Kandidaten mit Satz 4.15 bestimmen: f hat Extremum in $x_0 \implies f'(x_0) = 0$. D.h. alle x_0 finden, sodass $f'(x_0) = 0$, denn nur diese kommen als Extremwerte in Frage.
3. Kandidaten unterscheiden zwischen Minima, Maxima und Sattelpunkte. Mit Korollar 4.46
$$f''(x_0) > 0 \implies x_0 \text{ Minimum},$$
$$f''(x_0) < 0 \implies x_0 \text{ Maximum}$$
Dieses Kriterium für alle Kandidaten testen. Für x_0 für welche gilt $f''(x_0) = 0$, heisst dies nicht, dass sie automatisch Sattelpunkte sind. Wir müssen diese weiter analysieren (diesen ganzen Schritt könnte man mit der Analyse der Vorzeichenwechsels der Ableitung ersetzen).
4. Diesen Schritt nur für x_0, welche $f''(x_0) = 0$ erfüllen, ausführen. Mit Korollar 4.45: f so lange ableiten, bis zum ersten Mal $f^{(n)} \neq= 0$. Nun gilt
$$n \text{ gerade und } f^{(n)}(x_0) < 0 \implies x_0 \text{ Maximum}$$
$$n \text{ gerade und } f^{(n)}(x_0) > 0 \implies x_0 \text{ Minimum}$$
$$n \text{ ungerade} \implies x_0 \text{ Wendestelle}$$
Nun haben wir alle x_0 klassifiziert.
5. Randpunkte a, b untersuchen. Diese sind grundsätzlich Extremwerte, in Spezialfällen muss man sie noch auf Monotonie/einseitige Differenziarbarkeit untersuchen.
6. Wir haben nun alle lokale Extrema gefunden und möchten jetzt die globalen genauer anschauen. Falls $x_1, x_2, ..., x_n$ die lokalen Extrema sind, so vergleichen wir einfach die Werte $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$ und erhalten das globale Maximum und Minimum.

- Bei Schritt 3 könnte man noch den Vorzeichenwechsel der Ableitung analysieren, falls bei x_0 ein Wechsel $- \to +$ geschieht, so ist x_0 ein Minimum, umgekehrt ein Maximum.
- Das Ganze lässt sich analog auch auf Funktionen auf einem Intervall übertragen, wo $a, b = \pm\infty$ sind. Bei Schritt 5 muss man jedoch noch zusätzlich $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ bestimmen.
- Falls f bei $x_0 \in (a, b)$ nicht differenzierbar. Laut dem Min-Max Satz (Satz 3.19) nimmt eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ihr Minimum und Maximum an. Nehmen wir also ein kompaktes Intervall $[a', b']$, sodass $x_0 \in [a', b']$ und $f'(x) \neq 0\ \forall x \in [a', b'] \setminus \{x_0\}$, und es gilt $f(a') \geq f(x_0)$ und $f(b') \geq f(x_0)$ folgt, dass x_0 ein lokales Minimum ist (analog für das Maximum).

Konvex $\cup$	**Konkav** $\cap$
Linkskrümmung	Rechtskrümmung
Steigung nimmt zu	Steigung nimmt ab
f' mon. wachsend	f' mon. fallend
$f'' > 0$	$f'' < 0$

Satz 4.39 Sei $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge wobei f_n einmal in (a, b) stetig differenzierbar ist $\forall n \geq 1$. Wir nehmen an, dass sowohl die Folge $(f_n)_{n\geq1}$ wie $(f_n'))_{n\geq1}$ gleichmässig in (a, b) konvergieren mit $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ und $p := \lim_{n\to\infty} f_n'$. Dann ist f stetig differenzierbar und $f' = p$.

Satz 4.40 Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist f auf $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ differenzierbar und

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - x_0)^k,\ f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k(x - x_0)^{k-1}$$

für alle $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$

Potenzreihen

$$f = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ...$$
$$f' = -\frac{1}{1+x^2} = -1 + 2x - 3x^2 + ...$$
$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + ...$$
$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...$$

Korollar 4.44 (Taylor Approximation) Sei $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig und in (c, d) $(n+1)$-mal differenzierbar. Sei. $c < a < d$. Für alle $x \in [c, d]$ gibt es ξ zwischen x und a so dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}$$

5 Riemann Integral

5.1 Fundamentalsatz

Definition Unter- und Obersumme Gegeben sei eine Partition P. Dann definieren wir:

$$\underline{S}(f, P) := \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in I_i} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$$
$$\overline{S}(f, P) := \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in I_i} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Bei der uniformen Partition gilt $(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n}$.
f heisst integrierbar, falls gilt:
$$\sup_{P_1} \underline{S}(f, P_1) = \inf_{P_1} \overline{S}(f, P_1)$$

Satz Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton und beschränkt. Dann ist f integrierbar.

Satz 5.16 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar.

Satz 5.10 Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $\mathbf{f} + \mathbf{g}$, $\lambda \cdot \mathbf{f}$, $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$, $|\mathbf{f}|$, $\max(\mathbf{f}, \mathbf{g})$, $\min(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ und $\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}$ (falls $|g(x)| > 0\ \forall x \in [a, b]$) integrierbar.

Korollar 5.21 (Dreieckssatz) Falls $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar, folgt
$$\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$$

Satz 5.22 (Cauchy-Schwarz Ungleichung) Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar. Dann gilt
$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\ dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\ dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x)\ dx}$$

Satz 5.23 (Mittelwertsatz) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **stetig**. Dann gibt es $\xi \in [a, b]$ mit:
$$\int_a^b f(x)\ dx = f(\xi)(b - a)$$

Satz 5.25 Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ wobei **f stetig**, g beschränkt integrierbar mit $g(x) \geq 0\ \forall x \in [a, b]$. Dann gibt es $\xi \in [a, b]$ mit:
$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\ dx$$

Satz 5.26 Seien $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion
$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt, \quad a \leq x \leq b$$
ist in $[a, b]$ stetig differenzierbar und
$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Satz 5.28 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann giibt es eine Stammfunktion F von f, die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

5.2 Ableitungen von Integralen

Beispiel: Sei $f(x) = \int_0^{x^2} te^{\cos t} dt$. Berechne $f'(x)$.
Sei $K(t)$ eine Stammfunktion von $k(t) = te^{\cos t}$. Dann ist $f(x) = K(x^2) - K(0)$ und damit $f'(x) = k(x^2) \cdot 2x = 2x^3 e^{\cos x^2}$

5.3 Berechnung von Integralen

Trick 1: Linearität
Stellt meist einen ersten Schritt dar, um das Problem auf kleinere Probleme zu reduzieren. Wir nutzen dabei aus, dass

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\ dx = \alpha \int_a^b f(x)\ dx + \beta \int_a^b g(x)\ dx$$

Beispiel:

$$\int_{-1}^1 \frac{(6x^2+3)\sin(x^3)}{2}\ dx = \int_{-1}^1 3x^2 \sin(x^3)\ dx + \frac{3}{2}\int_{-1}^1 \sin(x^3)\ dx$$

Trick 2: Substitution

$$f(g(x)) + c = \int g'(x) f'(g(x))\ dx$$

$$\int f(y)\ dy = \int g'(x) f(g(x))\ dx$$

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\ dy = \int_a^b g'(x) f(g(x))\ dx$$

Wichtig: Die Grenzen müssen ebenfalls substituiert werden!
Beispiel: berechne $\int_0^2 x \cdot e^{x^2} dx$. Wir substituieren $u = x^2$. es gilt $\frac{du}{dx} = 2x \iff dx = \frac{du}{2x}$.

$$\int_0^2 x \cdot e^{x^2} dx = \int_0^4 x \cdot e^u \frac{du}{2x} = \int_0^4 \frac{1}{2} e^u du$$
$$= \frac{1}{2} e^u \Big|_0^4 = \frac{1}{2}(e^4 - 1)$$

Beispiel: ($u = 1 + x^3$, $\frac{du}{dx} = 3x^2$, $dx = \frac{du}{3x^2}$)

$$\int_0^2 x^2 \log(1+x^3)\ dx = \int_1^9 x^2 \log u\ \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3}\int_1^9 \log u\ du$$
$$= \frac{1}{3}\left[x(\log x - 1)\right]_1^9 = \ldots = 3\log 9 - \frac{8}{3}$$

Beispiel: ($u = x^2$, $\frac{du}{dx} = 2x$, $dx = \frac{du}{2x}$)

$$\int_0^1 2x^3 x^{x^2}\ dx = \int_0^1 2xue^u\ \frac{du}{2x} = \int_0^1 ue^u\ du$$
$$\stackrel{\text{PI}}{=} [ue^u]_0^1 - \int_0^1 e^u\ du = [ue^u]_0^1 - [e^u]_0^1 = e - (e-1) = 1$$

Trick 3: Partielle Integration

$$\int f'(x) g(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f(x) g'(x)\ dx$$

$$\int_a^b f'(x) g(x)\ dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x) g'(x)\ dx$$

Beispiel:

$$\int \log x\ dx = \int 1 \cdot \log x\ dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\ dx$$
$$= x\log x - x + c$$

Trick 4: ungerade Funktionen
Sei $f(x) : [-a,a] \to \mathbb{R}$ stetig und ungerade, d.h. $f(-x) = -f(x)$.
Dann gilt:

$$\int_{-a}^a f(x)\ dx = 0$$

Trick 5: Partialbruchzerlegung

$$\frac{dx+f}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{Bx+C} + \frac{D}{Ex+F}$$

Bei doppelten Nullstellen (z.B. $(x+1)^2$) folgende Nenner wählen: $x+1$ und $(x+1)^2$.
Hat der Nenner Grad $n > 1$, für den Zähler ein Polynom mit Grad $n-1$ wählen: $(x^2+1) \implies \frac{ax+b}{x^2+1}$
Wenn der Zähler grösseren Grad hat als der Nenner: Polynomdivision (Zähler durch Nenner):

$$\frac{x^3+2x^2-4x+2}{(x-1)(x+3)} = \mathbf{x} + \frac{\textbf{(2-x)}}{(x-1)(x+3)}$$
weil $x^3 + 2x^2 - 4x + 2 = \mathbf{x} \cdot (x-1)(x+3) + \textbf{(2-x)}$

Komplexe Nullstelle: $x^2 + px + q \implies \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$
Beispiel:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$
$$= \frac{a(x+1) + b(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$\implies a(x+1) + b(x-1) = 1$$
$$\implies a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2} \text{ (Nullstellen einsetzen)}$$

Beispiel:

$$\frac{9x^3-3x+1}{x^3-x^2} = 9 + \frac{9x^2-3x+1}{x^2(x-1)} \text{ (Polynomdivision)}$$
$$\implies \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{9x^2-3x+1}{x^2(x-1)} \text{ (Nullstellen)}$$
$$\implies A(x)(x-1) + B(x-1) + C(x^2) = 9x^2 - 3x + 1$$
$$\implies B = -1, C = 7 \implies A = 2$$

5.4 Integration von Potenzreihen

Satz 5.34 Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von beschränkten, integrierbaren Funktionen die gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f beschränkt integrierbar und

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$$

Korollar 5.36 Sei $f(x) = \sum_{n=0}^\infty c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist für jedes $0 \le r < \rho$, f auf $[-r,r]$ integrierbar und es gilt $\forall x \in\ ]-\rho,\rho[$:

$$\int_0^x f(t)\ dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

Bemerkung

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$$

Wichtige Beispiele

$\int \tan x$	$-\ln(\cos c) + c$
$\int \log x$	$x(\log x - 1) + c$ (Part. Integration)
$\int \frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert + c$
$\int \frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$

5.5 Uneigentliche Integrale

Definition 5.49 Sei $f : [a, \infty] \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$ für alle $b > a$. Falls

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\ dx$$

existiert, bezeichnen wir den Grenzwert mit

$$\int_a^\infty f(x)\ dx$$

Wenn beide Grenzen unendlich sind, definiert man:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{0} f(x)\ dx + \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\ dx$$

Beispiel: berechne $\int_e^\infty \frac{(\log x)^n}{x}\ dx, n \in \mathbb{Z}$.

1. Falls $n = -1$: Substitution mit $u = \log x$, $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$, $dx = x \cdot du$. Dann gilt:

$$\int_e^\infty \frac{1}{x \log x}\ dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{\log b} \frac{1}{u}\ du$$
$$= \lim_{b\to\infty} [\log u]_1^{\log b} = \lim_{b\to\infty} \log(\log b) = \infty$$

2. Falls $n \neq -1$: Dieselbe Substitution wie oben:

$$\int_e^\infty \frac{(\log x)^n}{x}\ dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{\log b} u^n\ du$$
$$= \frac{(\log b)^{n+1} - 1}{n+1} = \begin{cases} \infty & \text{für } n > -1 \\ \frac{-1}{n+1} & \text{für } n < -1 \end{cases}$$

Lemma 5.51 Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$ $\forall b > a$.

1. Falls $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \geq a$ und $g(x)$ ist auf $[a, \infty)$ integrierbar, so ist f auf $[a, \infty)$ integrierbar.
2. Falls $0 \leq g(x) \leq f(x)$ und $\int_a^\infty g(x)\ dx$ divergiert, so divergiert auch $\int_a^\infty f(x)\ dx$.

Satz 5.53 Sei $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ monoton fallend. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert} \iff \int_1^\infty f(x)\ dx \text{ konvergiert}$$

5.6 Euler Gamma Funktion

Definition 5.59 Für $s > 0$ definieren wir

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\ dx$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

6 Allgemeines

6.1 Mathematische Grundlagen

p-q-Formel $x^2+p\cdot x+q=0$ $\left(p=\frac{b}{a},\ q=\frac{c}{a}\right)$

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

Mitternachtsformel: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Normalform Kreisgleichung: $r^2=(x-m_1)^2+(y-m_2)^2$

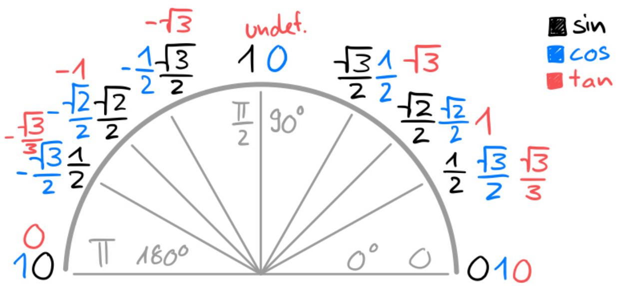
mit Mittelpunkt (m_1, m_2)

Wurzeln:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$$
$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$$
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$$

Logarithmus:

$$\log_a(u\cdot v)=\log_a(u)+\log_a(v)$$
$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right)=\log_a(u)-\log_a(v)$$
$$\log_a(u^v)=v\cdot\log_a(u)$$
$$\log_a\left(\sqrt[n]{u}\right)=\frac{1}{n}\cdot\log_a(u)$$
$$\log_b(u)=\frac{\log_a(u)}{\log_a(b)}$$



Binomialkoeffizient: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

Stirling's formula: $n!\approx\frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n}{e^n}$

Inverse $f^{-1}(y)$ berechnen:

$f(x)=y=\ln(x-17)+2 \iff f^{-1}(y)=x=e^{y-2}+17$

6.2 Weitere Beispiele

Kurvendiskussion

Betrachte die Funktion $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$.

- Definitionsbereich $\Omega=\mathbb{R}\setminus\{1\}$
- Verhalten gegen $\pm\infty$: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x-1}=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-1}=-\infty$
- Ableitungen:

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}$$
$$f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$$

- Kritische Stellen = Nullstellen von $f'(x)$: $x_0=0$, $x_1=2$. $f'(x)$ ist auf $(0,2)$ negativ, d.h. f ist auf $(0,2)$ streng monoton fallend. $f'(x)$ ist auf $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$ positiv, d.h. f ist auf $(-\infty,0)$ und $(2,\infty)$ streng monoton wachsend.
- $f''(x)$ hat keine Nullstellen (also auch keine Wendepunkte). Also gilt: $f''(x)$ ist auf $(-\infty,1)$ negativ, d.h. f ist auf $(-\infty,1)$ streng konkav. $f''(x)$ ist auf $(1,\infty)$ positiv, d.h. f ist auf $(1,\infty)$ streng konvex. Falls es Nullstellen gäbe: schauen ob das Vorzeichen in diesen Punkten wechselt. Falls ja sind es Wendepunkte. Falls ausserdem noch $f'(x)=0$, ist die jeweilige Nullstelle ein Sattelpunkt.
- Kritische Stellen: da $f''(x)$ auf $(-\infty,1)$ negativ ist, gilt auch dass $f''(x_0)<0$, d.h. x_0 ist ein strikt lokales Maximum von f. Da $f''(x)$ auf $(1,\infty)$ positiv ist, gilt auch dass $f''(x_1)>0$, d.h. x_1 ist ein strikt lokales Minimum von f.

Taylor Polynom

Beispiel: 3. Taylorpolynom von $f(x)=log(1+x), x>-1$ mit Entwicklungspunkt 0:

$$T_3f(x;0)=\sum_{n=0}^{3}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n$$
$$=\log(1+0)+\frac{1}{1+0}\cdot x-\frac{1}{(1+0)^2\cdot 2}\cdot x^2+\frac{2}{(1+0)^3\cdot 6}\cdot x^3$$
$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

Substitution

$$\int e^{\sqrt{x+1}},\begin{cases} y &= \sqrt{x+1}\\ dy &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}dx}\end{cases}$$
$$dy=\frac{1}{2\sqrt{x+1}dx}\iff 2\sqrt{x+1}dy=dx$$
$$\int e^{\sqrt{x+1}},\begin{cases} y &= \sqrt{x+1}\\ dx &= 2\sqrt{x+1}dy\end{cases}$$
$$\implies \int e^{\sqrt{x+1}}=\int 2\sqrt{x+1}e^y\,dy=\int 2ye^y\,dy$$
$$=2e^y(y-1)=2e^{\sqrt{x+1}}(\sqrt{x+1}-1)$$

Stetigkeitspunkte finden

x_0 finden, welche stetig sind. Dann mit Satz 3.7 argumentieren, dass keine weiteren Stetigkeitspunkte existieren können.