KOMPLEXE ZAHLEN

Komplexe Zahl: $c = a + i\cdot b$

Realteil Imaginärteil

Betrag ("Länge") $|c| = \sqrt{a^2+b^2}$

Konjugiert: $\bar{c} = a - i\cdot b$ $(|c| = |\bar{c}|)$

Addition: $c_1+c_2 = a_1+a_2 + i\cdot(b_1+b_2)$

Multiplikation:

$c_1\cdot c_2 = (a_1\cdot a_2 - b_1\cdot b_2) + i\cdot(a_1\cdot b_2 + b_1\cdot a_2)$

Polarform: $c = |c|\cdot e^{i\varphi}$ $(\varphi = \arctan(\frac{b}{a}))$

Mult. in Polarform: $c_1\cdot c_2 = |c_1|\cdot|c_2|\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

Dividieren in Pol. form: $\frac{c_1}{c_2} = \frac{|c_1|}{|c_2|}\cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

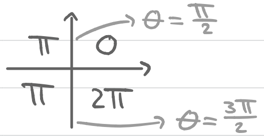
Polarkoordinaten: $z = r\cdot e^{i\theta}$, $z^n = r^n\cdot e^{i\theta n}$

Abstand zu Ursprung Winkel zu Pol-Achse

Umrechnung Normalform – Polarform:

- $z = r\cdot e^{i\theta} \longrightarrow z = r\cos\theta + i\cdot r\sin\theta$
- Argument θ berechnen: (Winkel $[0, 2\pi]$

$\arctan(\frac{y}{x})$ +



Spezialfälle:

$e^{i\pi} + 1 = 0$ $\quad |e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$

$e^{2i\pi} = 1$ $\quad = \sqrt{1}$

$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

Wurzel von komp. Zahlen:

$z = re^{i\theta}$ und $a = se^{i\alpha}$

$z^2 = a = se^{i\alpha}$

$\Rightarrow r = \sqrt{s}$

$\Rightarrow 2\theta = \alpha + 2\pi k$ $\quad k = 0, 1, 2, \dots$

$z_1 = \sqrt{s}\, e^{i\frac{\alpha}{2}}$ $\quad z_2 = \sqrt{s}\, e^{i(\frac{\alpha}{2}+\pi)}$

$z\cdot\bar{z} = x^2+y^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2$

Bruchrechnen: $\frac{z}{w} = \frac{z}{w}\cdot\frac{\bar{w}}{\bar{w}} = \frac{z\cdot\bar{w}}{|w|^2}$

Eigenschaften:
1) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
2) $\overline{z\cdot w} = \bar{z}\cdot\bar{w}$
3) $\overline{(\frac{z}{w})} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$
4) $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$
5) $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$, $w \neq 0$
6) $|z| = \overline{|z|}$
7) $|z+w| \leq |z|+|w|$ (Dreiecksungleichung)

Fundamentales Satz der Algebra:

Jedes Polynom $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ hat in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

Satz 1.1: $Ax=b$ hat genau dann eine Lösung, wenn $r=m$, oder $r<m$ und VTB erfüllt sind

r = Rang der Koeffizientenmatrix

- $n=r$: Lösung eindeutig
- $n<r$: $(n-r)$-parametrige Lösung

Kor 1.3: Es gelten folgende Äquivalenzen:

1) $Ax=b$ hat genau 1 Lösung
   $\iff r=n=m$ oder $r=n<m$ und VTB
2) $Ax=b$ hat für jedes b mind 1 Lsg
   $\iff p=m$ (p = Anz. Pivotelemente)
3) $Ax=b$ hat für jedes b genau 1 Lsg
   $\iff r=n=m$

Homogenes LGS hat nichttriviale Lsg

$\iff$ • $r<n$ $\quad (n-r)$-parametrige Schar

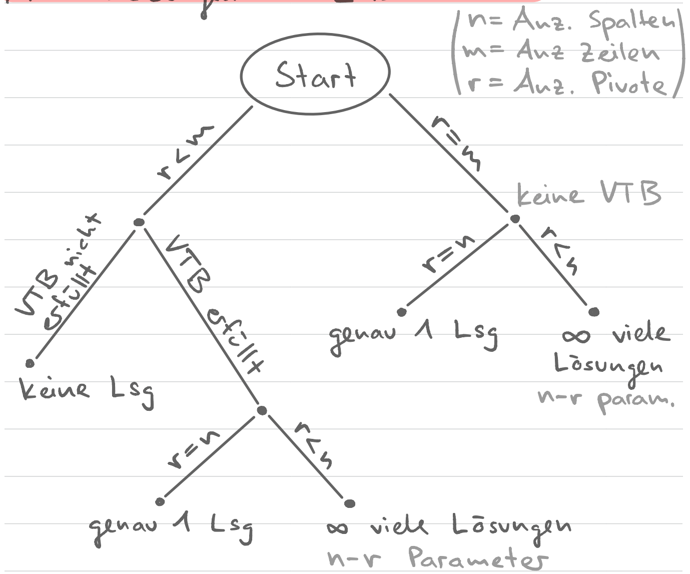
• $m<n$ $\quad (n-m)$-parametrige Schar

Quadratisches LGS ist für beliebige rechte Seiten lösbar $\iff$ das homogene LGS hat nur die triviale Lösung

Kor 1.7: Für quadratisches LGS gilt

- Entweder
  1) $r := \text{Rang} A = n$ (A regulär)
  2) jedes b hat genau 1 Lsg
  3) jedes b hat mind. 1 Lsg
  4) das homog. LGS hat nur triviale Lsg. ($\dim\ker A = 0$)
- Oder
  5) $r := \text{Rang} A < n$ (A singulär)
  6) gewisse b haben keine Lsg
  7) kein b hat eindeutige Lsg
  8) gewisse b haben ∞ viele Lsg
  9) das homog. LGS hat nichttriviale Lsg. ($\dim\ker A \neq 0$)

Anz. Lösungen für LGS finden:



MATRIZEN

Merksatz "Zeilenindex zuerst, Spaltenindex später" a_{ij} → i-te Zeile, j-te Spalte

Obere / Rechtsdreiecksmatrix: $\begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & * \end{pmatrix}$

Untere / Linksdreiecksmatrix: $\begin{pmatrix} * & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * \end{pmatrix}$

Nullteiler: A, B mit $A \neq 0$ und $B \neq 0$ für die gilt $AB = 0$ heissen Nullteiler

$Ae_j = a_j$ (e_j ist j-tes Spaltenvektor von I, a_j ist j-ter Spaltenvektor von A)

Satz 2.5 $Ax = b$ hat Lösung $\Leftrightarrow$ b ist linearkombination der Spalten von A $\Leftrightarrow b \in R(A)$

Multiplikation: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ $(n = n)$

$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} (B)_{kj}$ (i-te Zeile A, j-te Spalte B)

Satz 2.1 Rechenregeln:

- $A \cdot I_n = A = I_m A \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- $(\alpha\beta) A = \alpha(\beta A) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $(\alpha A) B = \alpha (AB) = A(\alpha B)$
- $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$
- $A + B = B + A$ (+ ist kommutativ)
- $(A+B)+C = A+(B+C)$
- $(AB)C = A(BC)$ } Assoziativität
- $A(B+C) = AB + AC$
- $(A+B)C = AC + BC$ } Distributivgesetz

Transponiert: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $(A^T)_{ij} := (A)_{ji}$

Konjugiert: $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\bar{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $(\bar{A})_{ij} = (\overline{A_{ij}})$

Hermitesch: $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $A^H \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $A^H = (\bar{A})^T = \overline{A^T} = (\bar{A})^T$

Schiefsymmetrisch: $A^T = -A$ (Diagonalelemente 0)

Satz 2.6 Rechenregeln:

- $(A^T)^T = A$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(A^H)^H = A$
- $(\alpha A)^H = \bar{\alpha} A^H$
- $(A+B)^H = A^H + B^H$
- $(AB)^H = B^H A^H$

Inverse finden:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

"Gaussen": $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{\text{II}-2\text{I}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$\xRightarrow{\text{I}-\text{II}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Linearität von Matrizen:

$\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \forall u, v \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}:$

$A(\alpha u + v) = \alpha A u + A v$

ALGEBRAS

Gruppe: $(G, *)$ ist Gruppe, wenn: (Menge G, Operation $*$)

G1) Es gibt Neutralelement e (z.B. Nullmatrix) s.d. $A * e = e * A = A$ für alle $A \in G$

G2) Es gibt für jedes $A \in G$ ein inverses Element $-A$ s.d. $A * (-A) = e$

G3) Für alle $A, B, C \in G$ gilt (Assoz.) $(A * B) * C = A * (B * C)$

Abelsche Gruppe: eine Gruppe, für die zusätzlich gilt $A * B = B * A$ (Kommutativ)

Ring: $(G, *, \circ)$ ist Ring, wenn (Menge G, Operationen $*$, $\circ$)

R1) $(G, *)$ ist eine abelsche Gruppe

R2) $\forall A, B, C \in G: (A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$

R3) Für alle $A, B, C \in G$ gilt:
- $A \circ (B * C) = (A \circ B) * (A \circ C)$
- $(A * B) \circ C = (A \circ C) * (B \circ C)$

Körper: $(G, +, \cdot)$ ist Körper, wenn: (Menge G, Addition $+$, Multiplikation $\cdot$)

K1) $(G, +)$ ist abelsche Gruppe (mit NE 0)

K2) $(G \setminus \{0\}, \cdot)$ ist abelsche Gruppe (mit Neutralelement 1)

K3) $\forall A, B, C \in G: A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
$(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

INVERSE MATRIZEN

Satz 2.17

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist invertierbar

$\iff$ Es gibt genau ein $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $AX = I_n$

$\iff$ A ist regulär (Zeilen lin. unabhängig)

$\iff$ $\text{Rang}\, A = n$

$\iff$ Für jedes b existiert mind. 1 Lösung

$\iff$ Für jedes b gibt es genau 1 Lösung

$\iff$ Das homog. System hat nur triviale Lsg.

$\iff$ A hat n Pivots

$\iff$ A^{-1} ist regulär

$\iff$ A^T, A^H sind regulär

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist nicht invertierbar

$\iff$ A ist singulär (Zeilen lin. abhängig)

$\iff$ Für gewisse b gibt es keine Lösung

$\iff$ Für kein b gibt es eine eindeutige Lsg

$\iff$ Für gewisse b gibt es ∞ Lösungen

$\iff$ Das homog. System hat nicht-triviale Lsg.

$\iff$ $\text{Rang}\, A < n$

Satz 2.18: $A, B \in \mathbb{E}^n$ sind regulär

$\implies$ A^{-1} ist regulär, $(A^{-1})^{-1} = A$

$\implies$ AB ist regulär, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$\implies$ A^T, A^H sind regulär, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, $(A^H)^{-1} = (A^{-1})^H$

ORTHOGONAL / UNITÄR ($A^H A = I$)

Satz 2.20: $A, B \in \mathbb{E}^{n\times n}$ sind unitär

(i) A ist regulär, $A^{-1} = A^H$

(ii) $AA^H = I$ (iii) A^{-1} unitär (iv) AB unitär

(Lin. Abb. sind Längen- und Winkeltreu)

$\|Ax\| = x$ $\quad \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x,y \in \mathbb{E}^n$

LR - ZERLEGUNG

1) Schreibe $(I \mid A \mid I)$

Permutationsmatrix P $\quad R \quad L$

2) Zeilen von P und R vertauschen, sodass grösstes Element von R oben steht

$\implies$ Zeilen von L nicht vertauschen!

3) Gaussen, bis R in Zeilenstufenform (nicht P)

4) Zusätzlich Einträge in L:

l_{jk} = Faktor, mit dem die j-te Pivotzeile multipliziert wurde, um das Ergebnis von der k-ten Zeile zu subtrahieren

5) Wir erhalten:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}}_{P} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}}_{R}$$

LGS $Ax = b$ lösen:

$\implies P \cdot A \cdot x = P \cdot b$ $\quad$ ($P\cdot A = L \cdot R$, $\tilde{b} := P\cdot b$)

$L \cdot R \cdot x = \tilde{b}$ $\quad$ ($c := R \cdot x$)

$L \cdot c = \tilde{b}$ $\quad$ (Vorwärtseinsetzen)

$R \cdot x = c$ $\quad$ (Rückwärtseinsetzen)

VEKTORRÄUME

Ein VR über $\mathbb{K}$ ist eine Menge, auf der Addition und skalare Multiplikation def. ist

Satz 4.1 (V ist VR über $\mathbb{R}$)

1) $y + x = x \implies y = 0$

2) $0 \in \mathbb{R}, x \in V \implies 0x = 0 \in V$

3) $\alpha \in \mathbb{R}, 0 \in V \implies \alpha 0 = 0$

4) $x \in V, \alpha \in \mathbb{R} \implies (-\alpha)x = \alpha(-x) = -(\alpha x)$

Satz 4.3 Jeder UR ist ein VR

Vektorraum Axiome:

V1) $x + y = y + x \quad \forall x,y \in V$

V2) $(x+y)+z = x+(y+z) \quad \forall x,y,z \in V$

V3) $\exists 0$ mit $x + 0 = x \quad \forall x \in V$

V4) Für alle $x \in V$ $\exists (-x) \in V$ mit $x + (-x) = 0$

V5) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \quad \forall \alpha \in \mathbb{E}, \forall x,y \in V$

V6) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{E}, \forall x \in V$

V7) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{E}, \forall x \in V$

V8) $1x = x \quad \forall x \in V$

Unterraum U von einem VR. V

- Nicht-leere Menge
- Abgeschl. bzgl. Addition / Skalarmult.

$x, y \in U, \alpha \in \mathbb{E} \implies x + y \in U, \alpha x \in U$

Linear abhängig $\iff$ ein Vektor lässt sich als LK der anderen schreiben (↳ Lemma 4.5)

Linear unabhängig $\iff$ Aus $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$ folgt, dass $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$

Lemma 4.6 Hat ein VR ein endliches Erzeugendensystem, gibt es eine Basis $\subseteq$ Erz.system

Satz 4.7 Ein VR hat endliches Erzeugendensys. $\iff$ Jede Basis besteht aus derselben Anzahl Vektoren

Dimension: Anz. Basisvektoren eines VR

Koordinatenvektor eines Vektors v bzgl. Basis B: $v = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n$

Also ist $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

Die Koordinatenabbildung $K: V \to \mathbb{R}^n$ ist linear, bijektiv $\quad v \to [v]_B$

$\text{span}(\{v_1, \ldots, v_n\}) := \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{E}\}$

Satz 4.12 $\{b_1,\dots,b_n\}$ ist eine Basis von V

$\iff$ jedes $x\in V$ lässt sich eindeutig als LK von $b_1,\dots,b_n$ darstellen

Basis beweisen:
- Linear unabhängig
- Erzeugt beliebigen Vektor

BASISWECHSEL

$\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_n)^T$ Koord.vektor von v bzgl. B

$\varphi' = (\varphi'_1,\dots,\varphi'_n)^T$ Koord. vektor von v bzgl. B'

$\Rightarrow [v]_B = \varphi = T\cdot\varphi' \qquad [v]_{B'} = \varphi' = T^{-1}\cdot\varphi$

Transformationsmatrix des Basiswechsels:

$$T = (\tau_{ik}) = \begin{pmatrix} [b'_1]_B & \cdots & [b'_n]_B \end{pmatrix}$$

Koeffizienten, um neue Basisvektoren in der alten Basis darzustellen

Neue Basis in der alten Basis dargestellt:

$$B' = B\cdot T$$

$$\begin{tikzcd} & v\in V \arrow[dl, shift right, "K_{v,B}"'] \arrow[dr, shift left, "K_{v,B'}"] & \\ \varphi\in K^n \arrow[ur, shift right, "K^{-1}_{v,B}"'] \arrow[rr, shift left, "T^{-1}"] & & \varphi'\in K^n \arrow[ul, shift left, "K^{-1}_{v,B'}"] \arrow[ll, shift left, "T"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} x\in X \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right, "K_{x,B}"'] & y\in Y \arrow[d, shift right, "K_{y,B'}"'] \\ \varphi\in K^n \arrow[r, "A"] \arrow[u, shift right, "K^{-1}_{x,B}"'] & \eta\in K^m \arrow[u, shift right, "K^{-1}_{y,B'}"'] \end{tikzcd}$$

Abbildungsmatrix für F

NORM

Funktion $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$

N1) positiv definit $\forall x\in V: \|x\|\geq 0$

$\|x\| = 0 \iff x = 0$

N2) homogen $\|\alpha x\| = |\alpha|\cdot\|x\|,\ \forall x\in V\ \forall\alpha\in\mathbb{E}$

N3) Dreiecksungleichung

$\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\| \quad \forall x,y\in V$

Eukl. Norm / 2-Norm: $\|x\|_2 := \sqrt{x^T x} = (x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)^{1/2}$

($V=\mathbb{R}^n$)

Maximalnorm: $V = \mathbb{P}_n^{[0,1]}$ ($p:[0,1]\to\mathbb{R}$, Grad$\leq n$)

SKALARPRODUKT

Funktion $\langle\cdot,\cdot\rangle: V\times V\to\mathbb{E}$

S1) linear im zweiten Faktor

$\forall x,y,z\in V,\ \alpha\in\mathbb{E} \quad \langle x, y+z\rangle = \langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle$

$\langle x,\alpha y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$

S2) Symmetrisch ($\mathbb{E}=\mathbb{R}$) / Hermitesch ($\mathbb{E}=\mathbb{C}$)

↳ $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ ↳ $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$

S3) Positiv definit $\forall x\in V\ \langle x,x\rangle\geq 0$

$\langle x,x\rangle = 0 \iff x=0$

Induzierte Norm: $\|\cdot\|: V\to\mathbb{R}$, $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

Winkel zw. Vektoren: $\sphericalangle(x,y) = \arccos\frac{\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle)}{\|x\|\cdot\|y\|}$

$\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle) = \|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos(\sphericalangle(x,y))$

Zwei Vektoren orthogonal $x\perp y \iff \langle x,y\rangle = 0$

Teilmengen $M,N\in V$ sind orthogonal, falls $\forall x\in M\ \forall y\in N$ gilt: $\langle x,y\rangle = 0$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\forall x,y\in V \quad |\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle$$

Pythagoras: $\|x\pm y\|^2 = \|x\|^2+\|y^2\|$ mit $x\perp y$

Beweis: $\|x\pm y\|^2 = \langle x\pm y, x\pm y\rangle$ (Def. $\|\cdot\|$)

$\overset{S1}{\underset{S4}{=}} \langle x,x\rangle \pm\langle x,y\rangle\pm\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle$

$\overset{S2}{=} \langle x,x\rangle\pm\langle x,y\rangle\pm\overline{\langle x,y\rangle}+\langle y,y\rangle$

$\overset{\langle x,y\rangle=0}{=} \langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle = \|x\|^2+\|y\|^2$

Orthonormale Basis: Alle Basisvektoren sind paarweise orthogonal und haben Länge 1

Basisvektor $\tilde b_j$ normieren: $b_j := \frac{1}{\|\tilde b_j\|}\cdot\tilde b_j$

Sei $\{b_1,\dots,b_n\}$ eine Orthonormal basis für V.

Satz 6.4 $\forall x\in V$ gilt für Koordinatenvektor φ:

$\varphi_k = \langle b_k, x\rangle \quad\Rightarrow\quad x = \sum_{k=1}^n \langle b_k,x\rangle\, b_k$

↳ x auf b_k projezieren

Parsevalsche Formel (nur Orthonormalbasen)

Es gilt: $\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^n \overline{\varphi_k}\,\eta_k = \varphi^H\eta = \langle\varphi,\eta\rangle$

$[x]_B = \varphi$, $[y]_B = \eta$

$\Rightarrow \|x\| = \|\varphi\|$ und $\sphericalangle(x,y) = \sphericalangle(\varphi,\eta)$

Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren

$\{a_1,\dots,a_n\} \longrightarrow \boxed{\text{Gram-Schmidt}} \longrightarrow \{b_1,\dots,b_n\}$

lin. unabhängige Vektoren

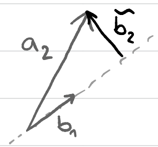
normiert & paarweise orthogonal

- $b_1 := \frac{1}{\|a_1\|}a_1$
- für $k=2,\dots,n$:

$\tilde b_k := a_k - \sum_{j=1}^{k-1}\langle b_j,a_k\rangle\, b_j$

Projektion auf B_k

$b_k := \frac{1}{\|\tilde b_k\|}\tilde b_k$



Orthogonale Komplemente: Sei V ein V.R.

$U\subseteq V$ ein U.R. von V. Dann ist

$U^\perp = \{y\in V \mid y\perp U\}$ ($\forall x\in U, \forall y\in U^\perp: \langle x,y\rangle = 0$)

Orthogonales Komplement

Orth. Komplement finden: Sei $U\subseteq V$ ein U.R.

1) Orthonormale Basis von U finden (Gram-Schmidt)
2) Basis $\{b_1,\dots,b_\ell\}$ von U zu Basis von V ergänzen: $\{\underbrace{b_1,\dots,b_\ell}_{\text{Basis von }U},\underbrace{b_{\ell+1},\dots,b_n}_{\text{linear unabhängig}}\}$
3) Gram-Schmidt auf $b_{\ell+1},\dots,b_n$ anwenden

$\Rightarrow$ Orthonormalbasis für $U^\perp$

$\Rightarrow U^\perp = \mathrm{span}\{b_{\ell+1},\dots,b_n\}$

$U\oplus U^\perp = \mathrm{span}\{b_1,\dots,b_\ell\}\oplus\mathrm{span}\{b_{\ell+1},\dots,b_n\} = V$

Fundamentale Räume einer Matrix

↳ $N(A)$, $R(A^H)$, $N(A^H)$, $R(A)$

$x \in N(A) \Leftrightarrow A \cdot x = 0 \Leftrightarrow x \perp R(A^H)$

$\Leftrightarrow x \in (R(A^H))^\perp$

Satz 6.9

$\Rightarrow N(A) = (R(A^H))^\perp \subseteq E^n$	$N(A^H) = (R(A))^\perp \subseteq E^m$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$N(A) \oplus R(A^H) = E^n$	$N(A^H) \oplus R(A) = E^m$
und $\dim R(A) = r$	und $\dim N(A) = n-r$
$\dim R(A^H) = r$	$\dim N(A^H) = n-r$

Unitäre Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$: $A^{-1} = A^H$

Orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $A^{-1} = A^T$

Basiswechsel bei Orthonormalbasen

Satz 6.10 Transformationsmatrix zw. Orthonormalbasen ist unitär / orthogonal

↳ Spalten einer unitären / orthogonalen Matrix bilden Orthonormalbasis von E^n

Satz 6.11 B, B' orthonormal $\Rightarrow T^{-1} = T^H$

η (alte Koord.) $\Rightarrow$ $\eta = T\eta'$

η' (neue Koord.) $\quad \eta' = T^H \eta$

Kor 6.12 Seien B, B' orthonormalbasen. Dann gilt $\varphi^H \eta = \langle \varphi, \eta \rangle = \langle \varphi', \eta' \rangle = \varphi'^H \eta'$

↳ Beweis: Parsevalsche Formel

Orthogonale / unitäre Abbildungen

Lineare Abbildung $F: X \to Y$ heisst orth./unitär, wenn $\forall v, w \in X$: $\langle F(v), F(w) \rangle_Y = \langle v, w \rangle_X$

Satz 6.13 Für orth./unitäre Abb. F gilt:

(i) F ist längentreu $\|Fx\|_Y = \|x\|_X \quad \forall x \in X$

(ii) F ist winkeltreu $x \perp y \Rightarrow Fx \perp Fy$

(iii) F ist injektiv $\ker F = \{0\}$

...Satz 6.13...

Ist $\dim X = \dim Y < \infty$, so gilt zusätzlich:

(iv) F ist Isomorphismus → Surjektiv

(v) Wenn $\{b_1, \dots, b_n\}$ Orthonormalbasis von X $\Rightarrow \{Fb_1, \dots, Fb_n\}$ Orthonormalbasis von Y

(vi) F^{-1} ist unitär (bzw. Orthogonal)

(vii) Abbildungsmatrix A bzgl. orthonormalen Basen von X, Y ist unitär / orthogonal

(LINEARE) ABBILDUNGEN

Seien X, Y V.R. über $\mathbb{K}$ und $f: X \to Y$ (Def.Raum, Bildraum) eine Abbildung. f ist

- injektiv: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- surjektiv: $\forall y \in Y \; \exists x \in X: f(x) = y$
- bijektiv: f ist injektiv & surjektiv
- gerade: $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in X$
- ungerade: $f(-x) = -f(x)$
- linear: $f(\alpha u + v) = \alpha \cdot f(u) + f(v) \quad \forall u, v \in X, \forall \alpha \in \mathbb{K}$
- Isomorphismus: linear und bijektiv
- Automorphismus: Isomorphismus mit $X = Y$

L5.1 F ist Isomorphismus $\Leftrightarrow F^{-1}$ Isomorph.

L5.3 Komposition von lin. Abb. ist linear:

$$\begin{tikzcd}
x \in X \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left, "F \circ G"] \arrow[d, shift right, "K_X"'] & y \in Y \arrow[r, "G"] \arrow[d, shift right, "K_Y"'] & z \in Z \arrow[d, shift right, "K_Z"'] \\
\xi \in E^n \arrow[r, "A"] \arrow[rr, bend right, "BA"'] \arrow[u, shift right, "K_X^{-1}"'] & \eta \in E^m \arrow[r, "B"] \arrow[u, shift right, "K_Y^{-1}"'] & \varphi \in E^p \arrow[u, shift right, "K_Z^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

L5.4 $\operatorname{Ker} F$ ist U.R. von X → auf 0 abgebildet

L5.5 $\operatorname{Im} F$ ist U.R. von Y

Satz 5.6 F ist injektiv $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} F = \{0\}$

Satz 5.7 **Dimensionsformel:** $(F: X \to Y)$

$n = \boxed{\dim X = \dim \operatorname{Ker} F + \dim \operatorname{Im} F}$

Rang einer Abbildung F: $\operatorname{Rang} F = \dim \operatorname{Im} F$

K5.8 (i) $F: X \to Y$ injektiv $\Leftrightarrow \operatorname{Rang} F = \dim X$

(ii) $F: X \to Y$ bijektiv / Isomorphismus $\Leftrightarrow \operatorname{Rang} F = \dim X = \dim Y$

(iii) $F: X \to X$ bijektiv / Automorphismus $\Leftrightarrow \operatorname{Rang} F = \dim X \Leftrightarrow \ker F = 0$

Satz 5.9 X, Y isomorph $\Leftrightarrow$ gleiche Dimension

K5.10 $F: X \to Y$, $G: Y \to Z$ lin. Abb. Es gilt:

(i) $\operatorname{Rang} FG \leq \min(\operatorname{Rang} F, \operatorname{Rang} G)$

(ii) G injektiv $\Rightarrow \operatorname{Rang} GF = \operatorname{Rang} F$

(iii) F surjektiv $\Rightarrow \operatorname{Rang} GF = \operatorname{Rang} G$

Nullraum von A: $N(A) := \ker A$

Spaltenraum von A: $R(A) := \operatorname{Im} A$

Satz 5.11 $Ax = b$ lösbar $\Leftrightarrow b$ liegt in Spaltenraum

Lsg. eindeutig $\Leftrightarrow N(A) = \{0\}$

Satz 5.13 Rang von $m \times n$ Matrix A ist

(i) Anz. Pivotelemente in Zeilenstufenform

(ii) Rang der lin Abb. $A: E^n \to E^m$ $(\dim \operatorname{Im} A)$

(iii) Dimension des Spaltenraums (Anz. lin. unabh. Spalten in A)

(iv) Dim. des Zeilenraums (Anz. lin. unabh. Zeilen)

Kor 5.14 $\operatorname{Rang} A^T = \operatorname{Rang} A^H = \operatorname{Rang} A$

Satz 5.16 Seien $A \in E^{m \times n}$, $B \in E^{p \times m}$. Dann gilt:

(i) $\operatorname{Rang} BA \leq \min(\operatorname{Rang} B, \operatorname{Rang} A)$

(ii) $\operatorname{Rang} B = m \; (\leq p) \Rightarrow \operatorname{Rang} BA = \operatorname{Rang} A$

(iii) $\operatorname{Rang} A = m \; (\leq n) \Rightarrow \operatorname{Rang} BA = \operatorname{Rang} B$

Satz 5.18 Äquivalent für $n \times n$ Matrix A:

(i) A ist invertierbar
(ii) A ist regulär
(iii) $\text{Rang}\, A = n$
(iv) Spaltenvektoren sind linear unabhängig
(v) Zeilenvektoren sind linear unabhängig
(vi) $\text{Im}\, A \equiv R(A) = E^n$
(vii) $\ker A \equiv N(A) = \{0\}$
(viii) lin. Abb. $A: E^n \to E^n$ ist Automorphismus
(ix) A ist Transformationsmatrix einer Koordinatentransformation in E^n

Abbildungsmatrix bestimmen: A sei die Abb.Matrix bzgl. der Basen B und C:

$$A = \Big([F(b_1)]_C \;\; \cdots\cdots \;\; [F(b_n)]_C \Big)$$

Es gilt $\underbrace{[F(x)]_C}_{\text{Bild von } x \text{ für } F \text{ bzgl. Basis } C} = \underbrace{A}_{\text{Abbildungsmatrix}} \cdot \underbrace{[x]_B}_{\text{Koord. Vektor von } x \text{ bzgl. Basis } B}$

K.V. von x bzgl. B — K.V. von x bzgl. B'

$$\begin{tikzcd}
x \in X \arrow[r, shift left, "K_{X,B}"] \arrow[d, "F"] & \varphi_x \in K^n \arrow[l, shift left, "K_{X,B}^{-1}"] \arrow[r, shift left, "T_1^{-1}"] \arrow[d, "A"] & \varphi'_x \in K^n \arrow[l, shift left, "T_1"] \arrow[d, "A'"] \\
y \in Y \arrow[r, shift left, "K_{Y,C}"] & \varphi_y \in K^m \arrow[l, shift left, "K_{Y,C}^{-1}"] \arrow[r, shift left, "T_2^{-1}"] & \varphi'_y \in K^m \arrow[l, shift left, "T_2"]
\end{tikzcd}$$

K.V. von y bzgl. C — K.V. von y bzgl. C'

$\Rightarrow A' = T_2^{-1} A T_1$, $\quad A = T_2 A' T_1^{-1}$

$\Rightarrow \text{Rang}\, F = \text{Rang}\, A = \text{Rang}\, A'$

Basen für Bild / Kern einer lin Abbildung

1) Gaussen, bis A in Zeilenstufenform
2) Basisvektoren von $\text{Im}\, A$: die entsprechenden Spalten in A der Pivotspalten
3) $\ker A$ bestimmen, indem ein freier Parameter der restlichen Spalten auf 1 und der Rest auf 0 gesetzt wird

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & -4 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pivot Spalten

$$\text{Im}\, A = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\ker A = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11/2 \\ 0 \\ -3/2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Nach dem Gaussen gilt:
$\ker A = \ker R$, $\quad \text{Im}\, A^H = \text{Im}\, R^H$, $\quad \text{Im}\, A \neq \text{Im}\, R$

Affine Räume

Sei U ein U.R. von V und $v_0 \in V$

$v_0 + U := \{ v_0 + u \mid u \in U \}$ (Affiner Teilraum)

Affine Abbildung $H: X \to y_0 + Y$, $\quad y_0 \in Y$
$\qquad x \mapsto y_0 + Fx$

Satz 5.19 Sei x_0 eine Lösung für $Ax = b$ und L_0 der Lösungsraum für $Ax = 0$.
Lösungsmenge $L_b = x_0 + L_0$

KLEINSTE QUADRATE

Sei $Ax = b$ ein LGS mit $m > n$

Gesucht: möglichst gute Lsg $x^* = \underset{x \in E^n}{\text{argmin}} \|Ax - b\|_2^2$

$\Rightarrow$ wir suchen $x \in E^n$, s.d. $(Ax - b) \perp R(A)$

$\Rightarrow (Ax - b) \in R(A)^\perp = N(A^H)$ (Satz 6.9)

$\Rightarrow A^H(Ax - b) = 0 \Rightarrow A^H A x - A^H b = 0$

$\Rightarrow A^H A x = A^H b$

Normalengleichung: $A^H A x^* = A^H b$ $\quad (\text{Rang}\, A \overset{!}{=} n)$

1) Gleichung aufstellen
2) LGS in Matrixmult. $(Ax = b)$ umschreiben
3) Mit Normalengleichung lösen
   - Gaussen ($A^H A$ Koeff. Matrix, $A^H b$ rechte Seite)
   - Mit Gauss Inverse von $A^H A$ berechnen

$\Rightarrow x = \underbrace{(A^H A)^{-1} A^H}_{\text{Moore-Penrose-Pseudoinverse}} b$

QR-Faktorisierung: $R x^* = Q^H b$

$(A \cdot x^* = b \Rightarrow QR \cdot x^* = b \Rightarrow Q^H Q R \cdot x^* = Q^H \cdot b)$

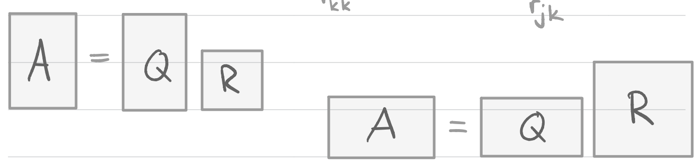
1) $\text{span}\{a_1, \dots, a_n\} \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}} \text{span}\{q_1, \dots, q_n\}$
Orthonormale Basis von $R(A)$

2) Wegen Gram-Schmidt gilt:

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}$$

wobei $a_1 = q_1 \cdot \|a_1\|$ $\quad$ (und $\|a_1\| = r_{11}$)

$a_k = q_k \cdot \underbrace{\|\tilde{q}_k\|}_{r_{kk}} + \sum_{j=1}^{k-1} q_j \underbrace{\langle q_j, a_k \rangle}_{r_{jk}}$



QR-ZERLEGUNG

A wird aufgeteilt in $\tilde{Q}$ (Unitäre Matrix)
und $\tilde{R}$ (Rechteckige Rechtsdreiecksmatrix)

$\boxed{A} = \boxed{\tilde{Q}}\ \boxed{\tilde{R}}$ $\qquad$ $\boxed{A} = \boxed{\tilde{Q}}\ \boxed{\tilde{R}}$

1) Q, R berechnen (QR-Faktorisierung)
2) $\tilde{Q} = (Q \mid Q_\perp)$ und $\tilde{R} = \left(\frac{R}{0}\right)$, da
$\tilde{Q} \cdot \tilde{R} = (Q \mid Q_\perp) \cdot \left(\frac{R}{0}\right) = Q \cdot R + Q^\perp \cdot 0 = Q \cdot R = A$
↖ Basis für $R(A)^\perp = N(A^H)$

DETERMINANTE

Satz 8.1 Es gibt $n!$ Permutationen in S_n:
$A \mapsto \det(A)$ bzw. $|A| := \sum_{p \in S_n} \operatorname{sign} p \cdot a_{1,p(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,p(n)}$

wobei $\operatorname{sign} p = \begin{cases} +1 & \text{falls gerade Anz. Vertauschungen} \\ -1 & \text{falls ungerade Anz. Vertauschungen} \end{cases}$

und $p: (1, 2, \ldots, n) \longmapsto (p(1), p(2), \ldots, p(n))$
↳ Permutation kann durch q Transpositionen dargestellt werden $\rightarrow \operatorname{sign} p = 1 \Leftrightarrow q$ gerade

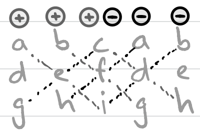
Geometrisch: $|\det(A)|$ ist das Volumen des n-dimensionalen Vierek, das von den Spalten von A aufgespannt wird

Berechnung $\det(A)$ allgemein:
1) Gaussen, bis A in Zeilenstufenform $\Rightarrow \tilde{A}$
2) k = Anzahl Zeilenvertauschungen
3) $\det(A) = (-1)^k \cdot \det(\tilde{A}) = (-1)^k \cdot \prod_{i=1} (\tilde{A}_{ii})$
↗ Produkt der Diagonalelemente

$\det(a_{11}) = a_{11}$ $\qquad$ $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

Determinante einer 3×3 Matrix A:

$\det(A) = \det\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$



Determinante von $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ mit $n > 3$
- Entwicklung nach k-ter Zeile:
$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \cdot \det(A_{[k,j]})$
A ohne k-te Zeile, j-te Spalte
- Entwicklung nach ℓ-ter Spalte:
$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+\ell} a_{j\ell} \cdot \det(A_{[j,\ell]})$
- LR Zerlegung: $A = L \cdot R \Rightarrow \det(A) = \det(L) \cdot \det(R)$
- Gaussen, $(-1)^k \cdot$ Produkt der Diagonalelemente

Satz 8.3 Für $\det: \mathbb{E}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{E}$ gilt:

(i) det ist linear in jeder Zeile von A:
$\begin{vmatrix} - a_1 - \\ \vdots \\ -\alpha \cdot u_\ell + \beta \cdot w_\ell - \\ \vdots \\ - a_n - \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} - a_1 - \\ \vdots \\ - u_\ell - \\ \vdots \\ - a_n - \end{vmatrix} + \beta \cdot \begin{vmatrix} - a_1 - \\ \vdots \\ - w_\ell - \\ \vdots \\ - a_n - \end{vmatrix}$

(ii) Bei Zeilenvertauschungen wechselt det Vorzeichen:
$\begin{vmatrix} - a_1 - \\ - a_k - \\ \vdots \\ - a_\ell - \\ - a_n - \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} - a_1 - \\ - a_\ell - \\ \vdots \\ - a_k - \\ - a_n - \end{vmatrix}$

(iii) $\det(I) = 1$

Satz 8.4 Ausserdem gilt:
(iv) Hat A eine Nullzeile, ist $\det(A) = 0$
(v) $\det(\gamma A) = \gamma^n \det(A)$
(vi) Hat A zwei gleiche Zeilen, ist $\det(A) = 0$
(vii) Zeilenaddition ändert $\det(A)$ nicht
(viii) Diagonalmatrix: $\det(A)$ = Produkt der Diagonale
(ix) Dreiecksmatrix: $\det(A)$ = Produkt der Diagonale

Obacht: $\det(\alpha A + \beta B) \neq \alpha \det(A) + \beta \det(B)$

A orthogonal $\Rightarrow |\det(A)| = 1$

$|\det(A)| = 1 \not\Rightarrow A$ orthogonal $\left(\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right)$

$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Rang} A = n \Leftrightarrow A$ regulär

Satz 8.7 $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

K 8.8 A regulär: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Satz 8.9 $\det(A^H) = \overline{\det(A)}$ / $\det(A^T) = \det(A)$

Satz 8.13 Für 2×2 Blockmatrix gilt:
$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = \det(A) \cdot \det(D)$

$\det(A)$ = Produkt der Eigenwerte von A

EIGENWERTE / EIGENVEKTOREN

→ Die lin. Abb. verändert den U.R. $\operatorname{span}\{x\}$ nicht, x ist E.V.

Sei V ein V.R., $F: V \longrightarrow V$ eine lin. Abb.

Sei $x \in V$ $(x \neq 0)$ und $\lambda \in \mathbb{E}$ mit $F(x) = \lambda x$
$\Rightarrow \lambda$ ist Eigenwert von F
x ist Eigenvektor von F

$E_\lambda := \{v \in V \mid F(v) = \lambda v\} = \ker(F - \lambda I)$
↳ Menge aller E.V. zu λ und Nullvektor → U.R. von V

Menge aller E.W.: Spektrum $\sigma(F)$ von F

Geometrische Vielfachheit von λ: $\dim(E_\lambda)$
$= \dim \ker(A - \lambda I)$

$\wedge$

Algebraische Vielfachheit von λ: Vielfachheit von λ als Nullstelle im Char. Polynom

Spur einer Matrix: $\operatorname{Spur} A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$

L 9.4 Charakteristisches Polynom:
$\chi_A(\lambda) :\equiv \det(A - \lambda I)$
$= (-\lambda)^n + \operatorname{Spur} A (-\lambda)^{n-1} + \ldots + \det(A)$

Satz 9.5 $\lambda \in \mathbb{E}$ ist E.W. von $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$
$\Leftrightarrow \lambda$ ist Nullstelle von χ_A
$\Leftrightarrow \lambda$ ist Lsg der Char. Gleichung $\chi_A(\lambda) = 0$

Diagonalmatrix: E.W. auf Diagonale, Spur = Summe Eigenwerte

Eigenwerte finden: Eigenwert λ von A erfüllt die Gleichung $\det(A-\lambda I)=0$.

Bsp. $A=\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}$. Wann ist $(A-\lambda I)$ singulär?

$(A-\lambda I)=\begin{pmatrix}2-\lambda&2\\1&1-\lambda\end{pmatrix}$

$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda&2\\1&1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)-2\cdot 1$

$=\lambda^2-3\lambda=\lambda(\lambda-3)$

$\Rightarrow \det(A-\lambda I)=0$ für $\lambda_1=0$ und $\lambda_2=3$

Eigenvektoren finden: LGS $(A-\lambda I)x=0$

Bsp. $\lambda=0$: $Ax=0x$	$\lambda=3$: $Ax=3x$
	$\Leftrightarrow (A-3I)x=0$
$\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&2\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$
} Gauss Alg.	} Gauss Alg.
$x_1+x_2=0$	$2x_2-x_1=0$
$x_2\leftarrow 1$	$x_2\leftarrow 1$
$x_1=-1$	$x_1=2$
$E_0=\ker(A-0I)=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$	$E_3=\ker(A-3I)=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$

Satz 9.7 Ähnliche Matrizen A und C $(C=T^{-1}AT)$ haben dasselbe char. Polynom, gleiche det, Spur und Eigenwerte

$\Rightarrow$ Eigenvektoren bleiben nicht erhalten!

Beweis: $\chi_C(\lambda)=\det(C-\lambda I)$

$=\det(T^{-1}AT-\lambda I)=\det(T^{-1}(A-\lambda I)T)$

$=\det(T^{-1})\det(A-\lambda I)\det(T)$

$=\det(A-\lambda I)=\chi_A(\lambda)$

L 9.8 Abbildungsmatrix von $F: V\to V$ ist diagonal $\Leftrightarrow$ Basis von V besteht aus Eigenvektoren von F

Eigenbasis von $A\in\mathbb{E}^{n\times n}$ ist Basis von $\mathbb{E}^n$ aus den Eigenvektoren von A

SPEKTRAL-/EIGENWERTZERLEGUNG

existiert, wenn es Eigenbasis von A gibt

↳ geom. Vielfachh. = alg. Vfh für alle E.W.

$V=\begin{pmatrix}|&&|\\v_1&\cdots&v_n\\|&&|\end{pmatrix}$ mit Eigenbasis als Spalten

$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$ mit jeweiligen Eigenwerten

$\Rightarrow AV=V\Lambda \quad\Rightarrow \boxed{A=V\Lambda V^{-1}}$

↳ Wenn A symmetrisch: $V^T=V^{-1}$

Sei $A=V\cdot\Lambda\cdot V^{-1}$. Dann $A^n=V\cdot\Lambda^n\cdot V^{-1}$

Satz 9.15 $A=A^H$: (i) alle E.W. sind reell

(ii) E.V. zu versch. E.W. paarweise orthogonal

(iii) Es gibt eine orthonormale Basis von $\mathbb{E}^n$ aus Eigenvektoren $u_1,\dots,u_n$ von A

(iv) Für unitäre Matrix $U:=(u_1\cdots u_n)$ gilt: $U^HAU=\Lambda:=\text{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$

$A\in\mathbb{E}^{n\times n}$ heisst **normal** wenn $A^HA=AA^H$

Satz: A ist normal $\Leftrightarrow$ A ist diagonalisierbar durch unitäre Matrix $(D=SAS^{-1})$

↑ Diagonalmatrix

Positiv definit: $\forall x\in\mathbb{E}^n, x\neq 0$: $x^HAx>0$

Positiv semidefinit: $\forall x\in\mathbb{E}^n$: $x^HAx\geq 0$

Für $A\in\mathbb{E}^{n\times n}$ hermitesch $(A^H=A)$ gilt:

A pos. definit $\Leftrightarrow$ alle E.W. von A sind >0

A pos semidefinit $\Leftrightarrow$ alle E.W. von A ≥ 0

A^HA und AA^H sind hermitesch & pos. semidef. und haben dieselben Eigenwerte

↳ alle E.V. sind positiv & reell

Beweis: $x^HA^HAx=(Ax)^HAx=\|Ax\|^2\geq 0$

existiert für jede Matrix

SINGULÄRWERTZERLEGUNG

$A=U\cdot\Sigma\cdot V^H$

$A=U\cdot\Sigma\cdot V^H$

$A=U\cdot\Sigma\cdot V^H$

Σ ist semidiagonal

U und V sind orthogonal/unitär

$A=U\Sigma V^H$ heisst Singulärwertzerlegung

mit $\Sigma=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&&0\\&\ddots&&\\&&\sqrt{\lambda_r}&\\0&&&0\ddots 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_1&&&0\\&\ddots&&\\&&\sigma_r&\\0&&&0\ddots 0\end{pmatrix}$

Eigenschaften: $\begin{pmatrix}A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R(A)\,\big|\,N(A^H)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sigma_1&&0\\&\ddots&\\0&\sigma_r&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}R(A^H)\\N(A)\end{pmatrix}^r$

$A_{m\times n}=U_{m\times m}\cdot\Sigma_{m\times n}\cdot V^H_{n\times n}$

$b\in R(A)\Rightarrow\exists x\in\mathbb{E}^n\ Ax=b\Rightarrow b\in\text{span}\{u_1,\dots,u_r\}$

$x\in N(A)\Rightarrow Ax=0\Rightarrow x\in\text{span}\{v_{r+1},\dots,v_n\}$

Gesucht: SVD von $A\in\mathbb{E}^{m\times n}$

1) Berechne $B=A^HA\in\mathbb{E}^{n\times n}$

2) Berechne E.W. von B & nach Grösse sortieren: $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\dots\geq\lambda_r>0$

3) Berechne E.V. $\{v_1,\dots,v_n\}$ von B & bilde Orthonormalbasis $\{w_1,\dots,w_n\}$ (ev. Gram-Schmidt)

$V=\{w_1\ \cdots\ w_n\}$

4) Bilde $\Sigma_{ij}=\begin{cases}\sigma_{ij}=\sqrt{\lambda_i} & \text{falls } i=j\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$ (Falls $\lambda<0$: entspr. Spalte in U negieren)

5) $\forall i\in\{1,\dots,r\}$ $u_i=\frac{1}{\sigma_i}Aw_i$ (Ergänze zu ONB mit Gram-S.)

$U=(u_1\ \cdots\ u_m)$

6) Check $A=U\Sigma V^H$

REZEPTE

Basis

- Basis beweisen: 1) lin. unabhängig
  2) erzeugend
- Orthonormierte Basis von $\operatorname{Im}(A) = R(A)$
  $\rightarrow$ Gram-Schmidt auf Spalten von A
- Kern finden: $Ax = 0$ lösen
- Inverse finden: Nur möglich, wenn alle Spalten lin. unabh.! Löse $[A|I] \rightarrow [I|A^{-1}]$

Lin. Abbildungen

- Abbildungsmatrix finden:
  1) Jeden Basisvektor abbilden $F(b_k)$
  2) Koord. Vektor von $F(b_k)$ finden $[F(b_k)]_{B'}$
  3) $A = ([F(b_1)]_{B'} \cdots [F(b_n)]_{B'})$
- Abb. bijektiv: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
  Zeige $\operatorname{Rang} A = n$
  surjektiv: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
  Zeige $\operatorname{Rang} A = m$
  injektiv: 1) Zeige $\ker A = \{0\}$
  2) Zeige $\operatorname{Rang} A = n$

Unterräume

- Unterraum beweisen:
  1) Nicht leer $(0 \in U)$
  2) Für $x, y \in U$ gilt $x + y \in U$
  3) Für $x \in U, \alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\alpha x \in U$

Eigenwerte / Eigenvektoren

- Sei $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$
  Berechne $A^2\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$:
  $\rightarrow A = V \cdot \Lambda \cdot V^{-1}$, $V = \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}$, $V^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 2\\1 & -1\end{pmatrix}$
  $\rightarrow A^2 = V \cdot \Lambda^2 \cdot V^{-1}$
  $\rightarrow (V \cdot \Lambda^2 \cdot V^{-1})\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}26\\22\end{pmatrix}$

Kleinste Quadrate

- Mit einem exakten Wert:
  1) Eine Variable durch die andere darstellen
  2) Für die anderen Werte die entspr. Variable ersetzen
  3) Gleichungen aufstellen (nur addieren/subtrahieren)
  3) Mit least squares lösen und weggelassene Variable berechnen
- Minimaler Abstand zweier Geraden
  $g(t) = a + t \cdot b$, $h(s) = c + s \cdot d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$
  $\rightarrow \operatorname{argmin}_{s,t \in \mathbb{R}} \|g(t) - h(s)\|^2 = \operatorname{argmin}_{s,t \in \mathbb{R}} \|a + tb - c - sd\|^2$
  $\rightarrow (b \;\; -d)^T (b \;\; -d) \begin{pmatrix}t\\s\end{pmatrix} = (b \;\; -d)^T (c - a)$
  $\rightarrow \begin{pmatrix}b^T b & -bd\\-bd & d^T d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b^T(c-a)\\-d^T(c-a)\end{pmatrix}$
- Menge aller Punkte einer Gerade durch $p = \begin{pmatrix}p_x\\p_y\end{pmatrix}$ und mit Normalvektor $n = \begin{pmatrix}n_x\\n_y\end{pmatrix}$:
  $\rightarrow \langle z - p, n \rangle = 0 \Rightarrow (z - p)^T n = 0$
- Abstand von q zur Gerade:
  $\rightarrow$ Projektion auf Normale, $D_{p,n}(q) = |\langle q - p, n \rangle|$
  $= |(q - p)^T n|$
- Min Distanz zu Geraden $1, \dots, k$:
  $(x - p_i)^T n_i = 0 \Rightarrow x^T n_i - p_i^T n_i = 0$
  $\Rightarrow x^T n_i = p_i^T n_i \Rightarrow n_i^T x = n_i^T p_i$
  $\Rightarrow Ax = \begin{pmatrix}n_1^T\\\vdots\\n_k^T\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}n_1^T p_1\\\vdots\\n_k^T p_k\end{pmatrix} = b$

Determinante / E.W. / E.V.

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit n versch. E.W. hat 2^n versch. Eigenzerlegungen
- $\det(A) + \det(B) \neq \det(A + B)$
- $\det A$ rational wenn alle a_{ij} rational

MULTIPLE CHOICE

Matrizen

- $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal.
  $\rightarrow A^T$ orthogonal weil $A^T A = I_n$
  $\rightarrow A + B$ nicht orthogonal weil $(A+B)(A+B)^T = (A+B)(A^T + B^T) \neq I_n$
  $\rightarrow AB^{-1}$ orthogonal weil $(AB^{-1})(AB^{-1})^T = (AB^{-1})((B^{-1})^T A^T) = I_n$
- Ist $AB = B$, kann $A \neq I$
- Sind zwei Spalten von B gleich, sind auch die entspr. Spalten von AB gleich
- Sind zwei Zeilen von A gleich, sind auch die entspr. Zeilen von AB gleich
- Sei $A = \begin{pmatrix}I & aI\\0 & I\end{pmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix}I & naI\\0 & I\end{pmatrix}$
  $(a \in \mathbb{K})$

Vektorräume

- $U = \left\{A \in \mathbb{R}^{2\times2} \mid A\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} A\right\}$
  $U \subseteq \mathbb{R}^{2\times2}$ gilt auch für A^T
  $\Rightarrow (\alpha A + A')\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$ mit $A, A' \in U$
  $= \alpha A\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} + A'\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$
  $= \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\alpha A + \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} A^T = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}(\alpha A + A')$
- $U_1, U_2 \leq V$. $\Rightarrow U_1 \cap U_2 \leq V$
  $\Rightarrow U_1 \cup U_2 \not\leq V$
  $\Rightarrow U_1 \setminus U_2 \not\leq V$
  $\Rightarrow U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2\} \leq V$
- $\emptyset$ ist kein V.R., da kein 0
- $\{0\}, V \leq V$ (triviale U.R.)

Lin. Abbildungen

- $f(x) = \begin{pmatrix}\cdot & \cdot & \cdot\\\cdot & \cdot & \cdot\end{pmatrix} x$ surjektiv
- $f(x) = \begin{pmatrix}\cdot & \cdot\\\cdot & \cdot\end{pmatrix} x$ bijektiv
- $f(x) = \begin{pmatrix}\cdot & \cdot\\\cdot & \cdot\\\cdot & \cdot\end{pmatrix} x$ injektiv

Norm / S.P.

- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \langle x, Ay \rangle_E = \langle Ax, y \rangle_E \Rightarrow A = A^T$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n: \langle x, A^T y \rangle = \langle Ax, y \rangle$
- $A^T = A^{-1} \Rightarrow \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$, $\|Ax\| = \|x\|$

MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN

p-q-Formel $x^2 + p \cdot x + q = 0$ $\left(p = \frac{b}{a},\ q = \frac{c}{a}\right)$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Mitternachtsformel: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Normalform Kreisgleichung: $r^2 = (x - m_1)^2 + (y - m_2)^2$
mit Mittelpunkt (m_1, m_2)

Wurzeln:

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Logarithmus:

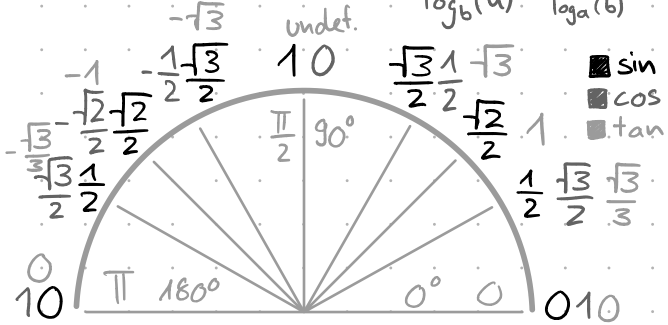
$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$

$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$

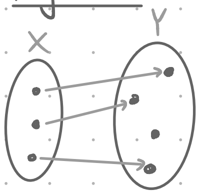
$\log_a(u^v) = v \cdot \log_a(u)$

$\log_a(\sqrt[n]{u}) = \frac{1}{n} \cdot \log_a(u)$

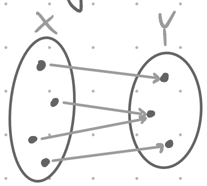
$\log_b(u) = \frac{\log_a(u)}{\log_a(b)}$



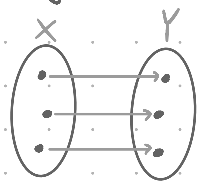
Injektiv



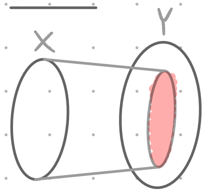
Surjektiv



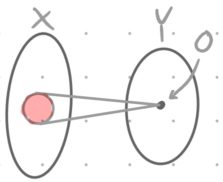
Bijektiv



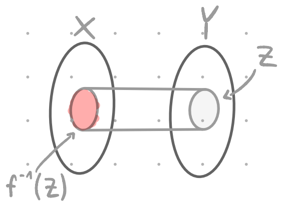
Bild



Kern



Urbild von $Z \subseteq Y$



MATRIZEN

Orthogonal

- $\Leftrightarrow$ Spalten paarweise senkrecht
- $\Leftrightarrow$ Spalten Länge 1
- $\Leftrightarrow A^{-1} = A^T$, orthogonal
- $\Rightarrow$ Alle Eigenwerte $|\lambda| = 1$
- $\Rightarrow |\det A| = 1$
- $\Rightarrow$ Längentreu ($\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$)
- $\Rightarrow$ Winkeltreu
- $\Rightarrow$ A,B orthogonal $\Rightarrow$ AB orthogonal
- $\Rightarrow$ Unitär diagonalisierbar

Unitär

- $\Leftrightarrow A^{-1} = A^H$
- Gleich wie Orthogonal

Normal

- $\Leftrightarrow A^H A = A A^H$
- $\Leftrightarrow$ Diagonalisierbar durch unitäre Matrix

Positiv Definit

- $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{E}^n \setminus \{0\}: \ x^H A x > 0$
- $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte > 0

Positiv Semidefinit

- $\forall x \in \mathbb{E}^n: \ x^H A x \geq 0$
- Alle Eigenwerte ≥ 0

Symmetrisch

- $\Leftrightarrow A = A^T$
- $\Rightarrow$ Immer diagonalisierbar
- $\Rightarrow A^T A,\ A + A^T,\ A + B$ immer symmetrisch
- $\Rightarrow$ A invertierbar $\Rightarrow A^{-1}$ symmetrisch
- Gleich wie hermitesch
- Wenn reell: normal

Hermitesch

- $\Leftrightarrow A = A^H$
- $\Rightarrow$ Alle E.W. reell
- $\Rightarrow$ E.V. paarweise orthogonal

Dreiecksmatrix

- $\Rightarrow \det A$ = Produkt Diagonale
- $\Rightarrow$ E.W. = Diagonalelemente
- $\Rightarrow$ AB auch Dreiecksmatrix
- $\Rightarrow$ Inverse ist Dreiecksmatrix

Diagonalmatrix

- gleich wie Dreiecksmatrix
- Inverse: $\mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)^{-1} = \mathrm{diag}(d_1^{-1}, \ldots, d_n^{-1})$

BEWEISE

- Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch, positiv semidefinit. Zeige, dass $A^{1/2}$ existiert s.d. $A^{1/2}A^{1/2} = A$
  → Da A hermitesch ist A diagonalisierbar mit einer unitären Matrix U, $A = U\Lambda U^H$
  → Da A pos. semidefinit definieren wir $\Sigma = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ und $\Sigma\Sigma = \Lambda$
  → Es gilt also $A = U\Lambda U^H = U\Sigma\Sigma U^H$
  $= U\Sigma I \Sigma U^H = U\Sigma U^H U \Sigma U^H$
  → Wir definieren $A^{1/2} = U\Sigma U^H$

- Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, σ_{max} der grösste Singulärwert von A. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\|Ax\|_2 \leq \sigma_{max}\|x\|_2$
  → $\|Ax\|_2 = \|U\Sigma V^H x\|_2 = \|\Sigma V^H x\| \leq \|\Sigma_{max} V^H x\|_2$
  Singulärwert-zerlegung; U orthogonal ↳ längentreu; $\Sigma_{max} = \mathrm{diag}(\sigma_{max}, \dots, \sigma_{max})$
  → $\|\Sigma_{max} V^H x\|_2 = |\sigma_{max}| \, \|I V^H x\|_2 = \sigma_{max}\|I V^H x\|_2 = \sigma_{max}\|V^H x\|_2$
  Alle Singulärwerte ≥ 0
  → $\sigma_{max}\|V^H x\|_2 = \sigma_{max}\|x\|_2$ (V^H orthog. → Längentreu)

- A, B orthogonal $\Rightarrow$ AB, BA orthogonal
  → $A^T = A^{-1}$, $B^T = B^{-1}$, $(AB)^T = B^T A^T = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$

- Das S.P. zweier Einheitsvektoren kann nicht bel. gross sein
  → Seien u, v Einheitsvektoren. Cauchy-Schwarz Ungleichung:
  $\langle u, v\rangle^2 \leq \langle v, v\rangle \cdot \langle w, w\rangle = 1 \cdot 1 = 1$

- Sei A positiv definit. Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt: Es gibt $\alpha \in \mathbb{R} > 0$, s.d. $v^T A v \geq \alpha v^T v$
  → Da Eigenvektoren orthg. Basis bilden gilt: $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$
  → $v^T A v = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_j a_i v_j^T A v_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \lambda_i a_j a_i \underbrace{v_j^T v_i}_{=0 \text{ falls } i \neq j}$
  $$= \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j^2 v_j^T v_j \geq \underbrace{\min_j(\lambda_j)}_{=:\alpha > 0} \sum_j (a_j v_j)^T (a_j v_j) = \alpha v^T v$$

- Sei $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal. Zeige: $\|Qx\|_2^2 = \|x\|_2^2$: $\|Qx\|_2^2 = \langle Qx, Qx\rangle$
  $= (Qx)^T(Qx) = x^T Q^T Q x$
  $= x^T I x = x^T x = \|x\|_2^2$