

Projektseminar

Nils Generlich, Tillmann Krebs

18.11.2024

1 Benchmark-Konzept

1.1 Annahmen/Vorraussetzungen

Folgendes wird für die Anwendung des Benchmarks vorausgesetzt/angenommen:

- quantitatives Risiko wird berechnet mit: $R_{quant} = Haeufigkeit \cdot Ausmass$
- zu bewertende Risikomatrix muss folgende Axiome erfüllen
 - **schwache Konsistenz**¹: Risikomatrix kann zuverlässig zwischen sehr hohen und sehr niedrigen Risiken unterscheiden
 - * Lemma 1: keine angrenzenden roten und grünen Zellen in Matrix
 - * Lemma 2: keine roten Zellen in linker Spalte oder unterer Reihe der Matrix
 - **Axiom der Zwischenstufen**²: Abbildung von kontinuierlichen Risiko-Erhöhungen in Matrix, d.h. bei einem kontinuierlichen Anstieg des quantitativen Risikos von 0 (kein Risiko) bis 1 (höchstes Risiko) sollte die qualitative Kategorisierung stufenweise ansteigen (Existenz einer mittleren Risikostufe notwendig)
 - **Axiom der konsistenten Färbung**³:
 - * Zelle ist rot, wenn sie Punkte mit quantitativen Risiken enthält, die mindestens so hoch sind, wie anderen roten Zellen und keine Punkte mit so niedrigen Risiken wie in grünen Zellen
 - * Zelle ist grün, wenn sie Punkte enthält, deren Risiken mindestens so niedrig sind, wie andere grüne Zellen und keine Punkte darin so hohe Risiken wie in roten Zellen vorweisen
 - * Zelle ist in Zwischenfarbe(n), wenn sie zwischen roter und grüner Zelle liegt oder sie sowohl Punkte mit höheren Risiken als einige rote Zellen, als auch Punkte mit niedrigeren Risiken als einige grüne Zelle enthält

1.2 Kriterien

1.2.1 Range Compression-Prüfung

Wie groß ist das abgedeckte quantitative Risiko je Klasse?

Vorgehensweise

- für jede qualitative Klasse C_j (mit $j \in 1, \dots, k$, wobei k =Anzahl qualitativer Risikostufen/-klassen) werden minimale und maximale quantitative Risikowerte, die in dieser Klasse liegen, bestimmt $Range_j = \max(R_{quant} | C_{qual} = j) - \min(R_{quant} | C_{qual} = j)$
- Durchschnittliche Range der qualitativen Klassen einer Risikomatrix berechnen: $AvgRange = \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=1}^k Range_j$
- Zusätzlich sollten die $Range_j$ -Werte möglichst gleichgroß sein, um übermäßige Informationsverluste in spezifischen Klassen zu vermeiden. Daher wird der Durchschnitt der Differenzen der $Range'_j$ s für jede Klasse C_j mit $j \in 1, \dots, k$ errechnet:

für $i=1$ bis $i=k-1$

für $j=i+1$ bis $j=k$

-> Berechne $diff_{i,j} = |Range_i - Range_j|$

Berechne nun den Durchschnitt mit Hilfe der Summe aller Differenzen $diff_{i,j}$:

$$AvgDiff = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k diff_{i,j}}{\frac{k \cdot (k-1)}{2}}$$

¹Jr., Louis A. Cox (2008). What's wrong with risk matrices? [Siehe Abschnitt: "Discussion of Weak Consistency" auf Seite 502]. Risk Analysis, 28 (2), 497–512

²Jr., Louis A. Cox (2008). What's wrong with risk matrices? [Siehe Abschnitt: "The Betweenness Axiom: Motivation and Implications" auf Seite 503]. Risk Analysis, 28 (2), 497–512

³Jr., Louis A. Cox (2008). What's wrong with risk matrices? [Siehe Abschnitt: "Consistent Coloring" auf Seite 503 f.]. Risk Analysis, 28 (2), 497–512

- **Score für Range Compression:** $Score_{Range} = 1 - \frac{AvgRange + AvgDiff}{max(R_{quant}) - min(R_{quant})}$, d.h. bei Normierung der Häufigkeits- und Ausmassklassen auf 0..1: $Score_{Range} = 1 - AvgRange$
 - $Score_{Range} = 0...$ maximaler Informationsverlust (d.h. nur eine Klasse)
 - $Score_{Range} = 1...$ kein Informationsverlust (Klassenbreite jeder Klasse $\rightarrow 0$)

1.2.2 Risikowertüberschneidungen zwischen Klassen

Wie groß sind die Überschneidungen der Klassen bezüglich quantitativen Risikowerten, in welchen Rangreihenfolgefehler passieren können?

Vorgehensweise

- Klassen nach ihrer Risikohöhe aufsteigend ordnen
- für jede qualitative Klasse C_j das Intervall $I_j = [\min(R_{quant}|C = j), \max(R_{quant}, C = j)]$ bestimmen
- für $j=1$ bis $j=k-1$, wobei k =Anzahl qualitativer Risikostufen/-klassen
für $x=1$ bis $x=k-j$
-> Berechne $Overlap_{j,j+x} = \max(0, |\min(R_{quant}|C = j+x) - \max(R_{quant}|C = j)|)$
- Gesamtüberschneidung:

$$TotalOverlap = \sum_{j=1}^{k-1} (\sum_{x=1}^{k-j} x \cdot Overlap_{j,j+x})$$

$$MaxOverlap = (1+\dots+k-1) + (1+\dots+k-2) + \dots + (1) = (k-1) \cdot (1) + (k-2) \cdot (2) + \dots + (1) \cdot (k-1) = \sum_{x=1}^{k-1} (k-x) \cdot x$$

Auf die Formel für MaxOverlap kommt man, indem man ein maximales Überlappen vom gesamten quantitativen Risiko-Wertebereich für jedes Overlap einsetzt.
- **Score für Risikowerte-Überschneidung:** $Score_{Overlap} = 1 - \frac{TotalOverlap}{MaxOverlap}$
 - $Score_{Overlap} = 0 \dots$ Es existieren maximale Überschneidungen, d.h. alle Klassen überlappen sich vollständig → schlechtester Fall
 - $Score_{Overlap} = 1 \dots$ Es existieren keine Überschneidungen der quantitativen Risikowerte zwischen qualitativen Klassen → idealer Fall

1.2.3 Weitere bewertbare Probleme von Risikomatrizen

Nachfolgend sind weitere Ideen für Kriterien aufgelistet, die mehr oder weniger ausgereift sind.

- **Neglecting Uncertainty** (Vernachlässigung der Unsicherheit): Wie sehr erhöht sich Unsicherheit/Varianz des Häufigkeit-Schwere-Punktes bei Zuordnung zu einer Risikoklasse (durch den Informationsverlust)?
 - Simulieren einiger Punkte und für jeden dieser Punkte die Erhöhung/Veränderung der Unsicherheit nach qualitativer Einordnung errechnen
 - z.B. Veränderung der statistisch festgelegten Unsicherheit (Varianz) von z.B. 1% (was bei einem Intervall $[0,1]$ 0.01 entspricht) zur Unsicherheit über die Intervalle der Klassen z.B. "vernachlässigbar" und "tolerabel" (wenn Simulation des Punktes ähnlich viele Werte beiden Klassen zuordnete)
 - **Problem:** Wie kann die zahlentechnische Bewertung der qualitativen, wörtlich formulierten Klassen erfolgen?
- **Quantifying Errors** (Quantitative Fehler):
 - an jedem "Kreuz" der Matrix" (wo 4 Zellen der Risikomatrix aufeinander treffen) wird ein Punkt simuliert/betrachtet
 - *Simulationsgestützter Ansatz:* Je "Kreuz"punkt wird eine Simulation von ≥ 10.000 normalverteilt generierten Zufallspunkten mit Erwartungswert $\hat{=}$ Punkt und Varianz $\hat{=}$ 1% Fehlertoleranz
Pro Punkt i ist $QuantError_i = \text{Anz. Klassen mit zugewiesenen Punkten} > 0.01\%$
→ Verbesserung: mehrere Durchläufe mit variabler Fehlertoleranz von z.B.: 1%, 5%, 10% und Mittelwert aus diesen
 - *theoretischer Ansatz:* pro Eckpunkt i ist $QuantError_i =$ unterschiedliche Anzahl der Klassen, die dieser Eckpunkt direkt "erreicht"
 - $Score_{quantError} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^k QuantError_i}{\sum_{i=1}^k \max(QuantError_i)} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^k QuantError_i}{k \cdot 4}$ mit k =Anzahl Kreuze der Matrix

- Translationsinvarianz:
 - (1) zufällige Punkte als Erwartungswert für eine Simulation nehmen und ein Wert des Punktes zufällig verringern
 - (2) anschließend für jeden Punkt schauen, ob eine qualitative Verringerung eintrat
 - wiederholen von (1) und (2) für jeweils anderen Wert des Punktes
- Ordnungsmaß (Rangreihenfolge)
 - Simulation von ≥ 10.000 gleichverteilten Punkten (im Bereich von $[0,1]$ für Ausmass und Haeufigkeit) und Hinzufügen dieser zu einem Array
 - jeweils die quantitativen Risiken pro Punkt errechnen und anhand dieser quantitativen Risiken die jeweiligen Punkte im Array aufsteigend sortieren
 - jedem Punkt eine qualitative Risikoklasse in der Matrix zuordnen
 - Betrachtung der Reihenfolge der Risikoklassen
 - Bewertung der Reihenfolge mit Hilfe des Spearman'schen Rangkorrelationskoeffizienten:
 - * **Spearman'scher Rangkorrelationskoeffizient ρ oder r_s** misst die Stärke und Richtung einer monotonen Beziehung zwischen zwei Variablen. Diese beiden Variablen sind hier die qualitativen und die quantitativen Risikowertefolgen. Er ist vor Allem dann nützlich, wenn die Beziehung nicht linear, sondern nur monoton ist. Also beispielsweise, wenn die quantitative Zahlenfolge monoton steigt und die andere ebenfalls, jedoch nicht dauerhaft und nicht in einem konstanten Verhältnis, wie es hier der Fall ist.
 - * Prüfung, ob Anstieg in der einen Variablen/Zahlenfolge mit einem Anstieg oder Abfall der anderen Variable/Zahlenfolge einhergeht. Dabei basiert die Berechnung auf den Rängen der Daten und nicht auf den absoluten Werten, wodurch dieser Koeffizient robust gegenüber Ausreißern und nicht-linearen Zusammenhängen ist.
 - * Wertebereich:
 - $r_s = +1$: Perfekte positive Rangkorrelation (höhere Werte in der einen Variable entsprechen immer höheren Werten in der anderen)
 - $r_s = -1$: Perfekte negative Rangkorrelation (höhere Werte in der einen Variable entsprechen immer niedrigeren Werten in der anderen) \rightarrow bei diesem Anwendungszweck nahezu nicht erreichbar
 - $r_s = 0$: keine Rangkorrelation
 - * Formel: $r_s = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2-1)}$, wobei:
 - d_i ... Differenz der Ränge zwischen beiden Variablen für das i-te Paar (ein Paar sind die beiden Werte (qualitativ, quantitativ) an der gleichen Array-/Listenposition)
 - n ... Anzahl der Datenpaare (Länge der Liste, hier ≥ 10.000)
 - * Bei mehreren gleichen Werten, wird der mittlere Rang für diese Werte verwendet, was meist zu einer Verringerung der Stärke der Korrelation führt. Da dies bei den qualitativen Werten sehr oft der Fall ist, wird die maximal mögliche Korrelation errechnet, indem die qualitative Zahlenfolge im idealen Fall auch sortiert wird.
 - * Daher wird der Score für dieses Kriterium wie folgt gebildet:

$$Score_{Ordnung} = \frac{r_s(X,Y)}{r_{s,opt}(X,Y)} \text{ für } r_s(X,Y) > 0, \text{ sonst } = 0$$
 - Ergebnis:
 - * Idealfall $Score_{Ordnung} = 1$: durchgehend monoton steigende qualitative Risikoklassen im Array (mit zunehmenden Array-Index)
 - * Worst-Case $Score_{Ordnung} = 0$: zufälliger Mix an qualitativen Risikoklassen mit aufsteigendem Array-Index

1.3 Gesamt-Benchmark-Score

- Dabei sind 2 Optionen möglich:
 - $BenchmarkScore = \frac{Score_{Range} + Score_{Overlap} + \dots}{n}$ mit n...Gesamtzahl Scores
 - bei Bedarf mit einfügen einer Gewichtung (gewichteter Mittelwert):

$$BenchmarkScore = \alpha \cdot Score_{Range} + \beta \cdot Score_{Overlap} + \dots \text{ mit } \alpha + \beta + \dots = 1$$

- **Aktuelle Berechnung des Gesamt-Benchmark-Scores:** Aufgrund unterschiedlich zu erwartender Größe der einzelnen Scores, welche allerdings alle einen gleichen/ähnlichen Einfluss auf den Gesamtscore haben sollten, werden diese mittels Gewichtungsfaktoren $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$ angepasst.

- Bestimmte Werte der idealen Matrix (1) werden als Referenzwerte genutzt: $Score_{Range} = 0.48, Score_{Overlap} = 0.92, Score_{quantError} = 0.625, \mu_{ScoreOrdnung} = 0.98$
- Gewichtungsfaktoren sollen umgekehrt proportional zu den Referenzwerten sein:
Es gilt daher mit $S = \frac{1}{Score_{Range}} + \frac{1}{Score_{Overlap}} + \frac{1}{Score_{quantError}} + \frac{1}{\mu_{ScoreOrdnung}}$:

$$\alpha = \frac{\frac{1}{Score_{Range}}}{S} = 0.3598, \beta = \frac{\frac{1}{Score_{Overlap}}}{S} = 0.1877, \gamma = \frac{\frac{1}{Score_{quantError}}}{S} = 0.2763,$$

$$\delta = \frac{\frac{1}{\mu_{ScoreOrdnung}}}{S} = 0.1762$$
- **BenchmarkScore** = $\alpha \cdot Score_{Range} + \beta \cdot Score_{Overlap} + \gamma \cdot Score_{quantError} + \delta \cdot Score_{Ordnung} = 0.3598 \cdot Score_{Range} + 0.1877 \cdot Score_{Overlap} + 0.2763 \cdot Score_{quantError} + 0.1762 \cdot Score_{Ordnung}$

1.4 Beispiel: optimale 5x5-Matrizen (mit alten Scores)

muss noch übernommen werden, siehe händische Notizen in *Benchmark_Beispielrechnungen.pdf*

1.5 Beispiel 2: DIN EN 50126 (mit alten Scores)

muss noch übernommen werden, siehe händische Notizen in *Benchmark_Beispielrechnungen.pdf*