SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
Tisdagen den 7 januari 2020

Skrivtid: 8.00-11.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Kristian Bjerklöv

Tentamen består av tre delar: A, B och C, som vardera ger maximalt 12 poäng. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng, upp till som mest 12 poäng. Poängsumman på del A kan alltså bli högst 12 poäng, bonuspoäng medräknade. Bonuspoängen beräknas automatiskt och antalet bonuspoäng framgår av din resultatsida.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

Var god vänd!

DEL A

1. (a) Låt $g(x) = \arcsin(\sqrt{x})$. Bestäm g:s definitionsmängd och bestäm $g'(x)$. **(2 p)**

   (b) Låt $f(x) = x + \arctan(x)$. Bestäm f:s definitionsmängd och värdemängd. Använd derivatan för att avgöra om funktionen f är inverterbar eller ej. **(4 p)**

2. (a) Beräkna $\displaystyle\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$. **(3 p)**

   (b) Funktionen $f(x)$ uppfyller $f'(x) = x\ln(x)$ och $f(1) = 1$. Bestäm funktionen $f(x)$. **(3 p)**

DEL B

3. Låt $f(x) = xe^{-x},\ x \geq 1$.

   (a) Bestäm den punkt (x_0, y_0) på funktionsgrafen $y = f(x)$ som gör arean av triangeln med hörn i $(0,0), (x_0, 0)$ och (x_0, y_0) maximal. **(4 p)**

   (b) Finns det någon punkt (x_1, y_1) på funktionsgrafen $y = f(x)$ som gör arean av triangeln med hörn i $(0,0), (x_1, 0)$ och (x_1, y_1) minimal? **(2 p)**

4. Låt $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$.

   (a) Bestäm Taylorpolynomet av ordning 1 till $F(x)$ omkring $x = 0$. **(2 p)**

   (b) Bestäm ett närmevärde till $F(1/2)$ som avviker högst $1/8$ från det exakta värdet. **(4 p)**

DEL C

5. (a) Visa att för alla heltal $n \geq 1$ gäller olikheten $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \ln(n)$. **(3 p)**

   (b) Beräkna gränsvärdet **(3 p)**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

6. Antag att funktionen $f(x)$ är definierad på hela reella linjen och att $(f(x))^2 \leq x^4 + x^6$ för alla x.

   (a) Avgör om f måste vara kontinuerlig i punkten $x = 0$. **(3 p)**

   (b) Avgör om f måste vara deriverbar i punkten $x = 0$. **(3 p)**

   Motivera dina svar med bevis eller motexempel.