SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2017.06.09

1. Halveringstiden för den radioaktiva isotopen kol-14 är cirka 5730 år. Levande organismer har en ungefärligen konstant halt kol-14, men i döda organismer minskar ämnet i en takt som är proportionell mot mängden av ämnet, dvs mängden $y(t)$ uppfyller en differentialekvation på formen $y' = ky$ för någon konstant k. Ett visst benfragment innehåller 80% av den ursprungliga mängden kol-14. Hur gammalt är benfragmentet? **(4 p)**

   Lösning. Mängden $y(t)$ kol 14 i benfragmentet vid tidpunkten t uppfyller differentialekvationen $y'(t) = ky(t)$ för någon konstant k, det vill säga $y(t) = Ce^{kt}$ dr C är den ursprungliga mngden. Eftersom halveringstiden är 5730 år, kan vi bestämma k genom

   $$e^{k5730} = \frac{1}{2} \iff k = -\frac{\ln 2}{5730}.$$

   Den tidpunkt T som är benfragmentets ålder uppfyller nu att

   $$Ce^{(-T\ln 2)/5730} = \frac{4}{5}C \iff T = 5730\frac{(\ln 5 - \ln 4)}{\ln 2} \ (\approx 1800) \text{ år.}$$

   $\square$

2. Låt R vara det begränsade område i första kvadranten som ligger över kurvan $y = x^2$ och under kurvan $y = 8 - x^2$. Bestäm volymen av den rotationskropp som genereras då R roteras ett varv runt y-axeln. **(4 p)**

   Lösning. Skärningen mellan de två kurvorna fås ur $x^2 = 8 - x^2$ som i första kvadranten ger oss punkterna $x = 0$ och $x = 2$. Den sökta volymen är

$$2\pi \int_0^2 x(8 - 2x^2)\, dx = 2\pi \left[4x^2 - \frac{1}{2}x^4 \right]_{x=0}^{x=2} = 16\pi.$$

$\square$

3. Ellipsen E ges som lösningar till ekvationen $3x^2+4y^2=5$. Bestäm en ekvation för linjen L som tangerar E i punkten $P=(1,\sqrt{2}/2)$. **(4 p)**

Lösning. Implicit derivering ger $6x+8y\frac{dy}{dx}=0$. I punkten $P=(1,\sqrt{2}/2)$ erhåller vi att

$$\frac{dy}{dx}_{|P}=-6x/8y_{|P}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}=-\frac{3\sqrt{2}}{4},$$

vilket är lutningen k till den sökta tangentlinjen. En ekvation är på formen $y=kx+m$, och punkten P ska uppfylla linjens ekvation. Detta ger

$$\sqrt{2}/2=-\frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot 1+m,$$

och att $m=5\sqrt{2}/4$.

□

4. Beräkna nedanstående integraler:

(a) $\displaystyle\int_1^e x^5 \ln x \, dx.$ **(2 p)**

(b) $\displaystyle\int_3^4 \frac{6}{x^2 - x - 2} \, dx.$ **(2 p)**

Lösning. (a) Vi använder partiell integration. Detta ger

$$\begin{aligned}\int_1^e x^5 \ln x \, dx &= \left[\frac{x^6}{6} \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^5}{6} \, dx \\ &= \frac{e^6}{6} - \left[\frac{x^6}{36}\right]_1^e = \frac{e^6}{6} - \frac{e^6}{36} + \frac{1}{36} \\ &= \frac{1}{36}(5e^6 + 1).\end{aligned}$$

(b) Vi har att $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$, och följdaktligen att

$$\frac{6}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1},$$

för några tal A och B. Dessa tal bestäms från ekvationen

$$6 = A(x+1) + B(x-2) = (A+B)x + (A-2B) \cdot 1.$$

Detta ger att $A = -B$, och att $6 = A - 2B = -3B$. Med andra ord har vi att

$$\int_3^4 \frac{6}{x^2 - x - 1} \, dx = \int_3^4 \frac{2}{x-2} \, dx + \int_3^4 \frac{-2}{x+1} \, dx.$$

Den sökta integralen är

$$2 \left[\ln(x-2)\right]_{x=3}^{x=4} - 2 \left[\ln(x+1)\right]_{x=3}^{x=4} = 2\ln(2) - 2\ln(5) + 2\ln(4).$$

$\square$

5. Låt $P(x)$ vara andra ordningens Taylorpolynom kring $x = 0$ till funktionen $f(x) = e^x$.
   (a) Använd $P(x)$ för att ge ett närmevärde till $\sqrt{e}$. **(2 p)**
   (b) Avgör om felet i närmevärdet är större eller mindre än 0.02. **(2 p)**

Lösning. a) Taylorutveckling kring origo av e^x ger att

$$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Eftersom $\sqrt{e} = e^{1/2}$ har vi att

$$\sqrt{e} = e^{1/2} \approx P(1/2) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{13}{8}.$$

b) Felet i detta närmevärde i punkten $x = 1/2$ ges av

$$E_3(x) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3 = \frac{e^c}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3,$$

för något $0 < c < 1/2$. Speciellt har vi att $e^c > 1$. Detta ger att

$$\frac{e^c}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \geq \frac{1}{48} > 0.02.$$

Felet i närmevärdet är större än 0.02 □

6. Betrakta funktionen f som ges av $f(x) = \dfrac{x^3}{2x^2-1}$. Skissa kurvan $y = f(x)$ med hjälp av en undersökning där det framgår var funktionen är växande respektive avtagande, vilka lokala extrempunkter funktionen har, vilka funktionens nollställen är och vilka asymptoter funktionskurvan har. **(4 p)**

Lösning. Vi ser att f är definierad (och kontinuerlig) för alla $x \neq \pm 1/\sqrt{2}$. Eftersom f är obegränsad när x närmar sig dessa punkter har vi hittat två lodräta asymptoter

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{och} \quad x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

För att hitta asymptoter när $x \to \pm\infty$ skriver vi om $f(x)$ med polynomdivision som $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x}{4x^2-2}$. Av detta ser vi att vi har sned asymptot $y = x/2$ när $x \to \pm\infty$.

Nu söker vi lokala extrempunkter. Vi deriverar och får efter förenkling att

$$f'(x) = \frac{2x^4 - 3x^2}{(2x^2-1)^2}.$$

Vi ser att

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \text{ eller } \ x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Ett teckenstudium av derivatan ger:

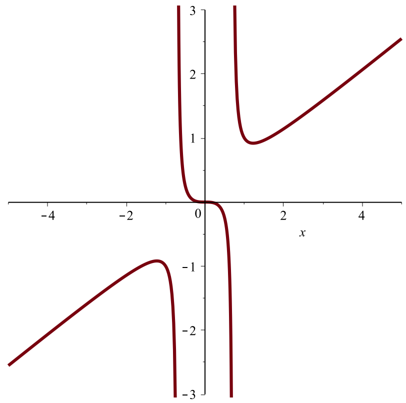
Om $x < -\sqrt{3/2}$ så är $f'(x) > 0$ och funktionen strängt växande. Om $-\sqrt{3/2} < x < -1/\sqrt{2}$ så är $f'(x) < 0$ och funktionen alltså strängt avtagande. Om $-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$ så är $f'(x) \leq 0$ med likhet bara för punkten $x = 0$ och funktionen är därför strängt växande på hela detta intervall. Om $1/\sqrt{2} < x < \sqrt{3/2}$ så är $f'(x) < 0$ och funktionen strängt avtagande. Om $x > \sqrt{3/2}$ så är $f'(x) > 0$ och funktionen strängt växande.

Det följer av ovanstående att f har ett lokalt maximum i $x = -\sqrt{3/2}$ och ett lokalt minimum i $x = \sqrt{3/2}$. Den tredje kritiska punkten $x = 0$ är en terasspunkt och alltså inte en lokal extrempunkt. Det är klart att $f(x) = 0$ bara då $x = 0$. Av asymptotutredning ovan framgår att $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ och $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Övriga relevanta gränsvärden:

$$\lim_{x\to -1/\sqrt{2}^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to -1/\sqrt{2}^+} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x\to 1/\sqrt{2}^-} f(x) = -\infty \quad \text{och} \quad \lim_{x\to 1/\sqrt{2}^+} f(x) = \infty$$

Nu kan vi rita grafen $y = f(x)$.


3
2
1
−4
−2
0
2
4
x
−1
−2
−3

□

7. (a) För vilka reella x gäller sambandet $\sin(\arcsin x) = x$? **(2 p)**
   (b) Härled derivatan av $\arcsin x$ genom implicit derivering av detta samband. **(2 p)**

Lösning. (a) Sambandet är definierat för alla x sådana att $-1 \leq x \leq 1$.
(b) Om vi deriverar sambandet får vi

$$(\cos(\arcsin x)) \cdot \frac{d}{dx}(\arcsin x) = 1.$$

Vi löser ut derivatan av $\arcsin x$, och får att

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

där sista identiteten följer av att $\cos(y)^2 + \sin(y)^2 = 1$.

□

8. Bevisa, genom beräkning av en integral, formeln $A = \pi ab$ för arean A av en ellips med halvaxlarna a och b. **(4 p)**

Lösning. Ellipsen kan beskrivas som lösningar till ekvationen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Lösningsmängden är symmetrisk med avseende på koordinat-axlarna. Övre halvan kan beskrivas som funktionskurvan

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \qquad -a \leq x \leq a.$$

Arean av ellipsen är två gånger arean av denna funktionskurva och x-axeln. Det vil säga den sökta arean

$$A = 2\int_{-a}^{b} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx.$$

Med hjälp av koordinatbytet $x = a\sin t$ har vi att

$$\begin{aligned} A = 2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx &= 2ab\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t\,dt \\ &= 2ab\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt \\ &= 2ab\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2}\,dx = \pi ab. \end{aligned}$$

$\square$

9. Bevisa att formeln

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx$$

gäller för alla heltal $n \geq 2$. **(4 p)**

Lösning. Sätt $I = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$. Vi använder partiell integration och får att

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = [-\cos x \sin^{n-1} x]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^{n-2} x\,dx.$$

Vi använder sedan att $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, vilket ger att

$$I = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)I.$$

Med andra ord att

$$I = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx$$

vilket var det vi skulle visa.

$\square$