KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och Geometri
Tentamen
2012-10-16

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Roy Skjelnes

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examinationen under period 1, 2012. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. De tre planen med ekvationerna $x-2y+z=4$, $x+y+z=2$ och $x+z=6$ skär varandra parvis i tre olika linjer i rummet.
   (a) Bestäm parameterformen för minst två av dessa linjer. **(2 p)**
   (b) Avgör om de tre linjerna skär varandra i en punkt. **(2 p)**

2. Låt de tre vektorerna $\vec{u}$, $\vec{v}$ och $\vec{w}$ i $\mathbb{R}^3$ vara givna av
$$\vec{u}=\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix},\quad \vec{v}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\quad \text{och}\quad \vec{w}=\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\end{bmatrix}.$$
   (a) Visa att $\mathfrak{B}=(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ är en bas för $\mathbb{R}^3$. **(2 p)**
   (b) Bestäm koordinaterna för vektorn
$$\vec{e}_x=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$
   med avseende på basen $\mathfrak{B}$.
   (2 p)

3. Betrakta följande matris:
$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\-1 & -2\end{bmatrix}$$
   (a) Bestäm en 2×2-matris S så att $S^{-1}AS$ är en diagonalmatris. **(2 p)**
   (b) Bestäm A^{999}. **(2 p)**

DEL B

4. Betrakta de linjära avbildningarna $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ och $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ som ges av

$$S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y \\ y+z \\ w \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+3y \\ y-4z-x \end{bmatrix}.$$

   (a) Vilken av de båda sammansättningarna $S \circ T$ och $T \circ S$ är definierad? **(1 p)**

   (b) Bestäm standardmatrisen för den sammansättning F som är defininerad enligt del (a). **(2 p)**

   (c) Bestäm dimensionen av bildrummet $\mathrm{im}(F)$. **(1 p)**

5. Betrakta följande delrum i $\mathbb{R}^3$.

$$U_1 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}, U_2 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

   (a) Bestäm en nollskild vektor som ligger i både U_1 och U_2. **(1 p)**

   (b) Bestäm en vektor i U_1 som inte ligger i U_2. **(2 p)**

   (c) Visa att skärningen av de båda delrummen är en linje genom origo. **(1 p)**

6. En ljusstråle som går genom punkten $P(3, 3, 5)$, parallellt med vektorn $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$ reflekteras i planet $x + y + z = 5$. Den reflekterade strålen skär planet $x + y = 50$ i punkten Q. Bestäm koordinaterna till punkten Q. **(4 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Låt A vara en symmetrisk 3×3-matris som har följande vektorer som egenvektorer:
$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Visa att A bara har ett egenvärde. **(4 p)**

8. Ett delrum av $\mathbb{R}^4$ som ges av en enda nollskild ekvation
$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0,$$
kallas ett **hyperplan**. Vektorn $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}^T$ och dess nollskilda multipler utgör hyperplanets **normalvektorer**. Vi säger att två hyperplan är **vinkelräta** mot varandra om deras normalvektorer är ortogonala.

   Bestäm två hyperplan i $\mathbb{R}^4$ som är vinkelräta mot varandra och mot hyperplanen som ges av ekvationerna $x + w = 0$ och $2x + y + z + 2w = 0$.

9. Låt $\vec{u}$, $\vec{v}$ och $\vec{w}$ vara tre linjärt oberoende vektorer i rummet och låt A vara matrisen som har dessa vektorer som kolonner. Bilda matrisen B genom att låta dess rader bestå av vektorerna $\vec{v} \times \vec{w}$, $\vec{w} \times \vec{u}$ och $\vec{u} \times \vec{v}$.
   (a) Visa att BA är en multipel av identitetsmatrisen I_3. **(2 p)**
   (b) Använd detta till att beräkna inversmatrisen till
$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$
(2 p)