KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2019.06.07

DEL A

1. Bestäm Taylorpolynomet av grad 3 till $f(x) = \arctan(2x)$ kring $x = 0$. **(4 p)**

Lösning. Taylorpolynomet av grad 3 till en funktion $f(x)$ kring $x = 0$ har formen

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

För funktionen $f(x) = \arctan(2x)$ har vi enligt kedjeregeln att:

$$f'(x) = \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot 2 = 2(1+(2x)^2)^{-1}.$$

Detta ger att

$$f''(x) = -2(1+(2x)^2)^{-2} \cdot 2(2x) \cdot 2 = -16x(1+(2x)^2)^{-2},$$

och att

$$f'''(x) = -16(1+(2x)^2)^{-2} + 32x(1+(2x)^2)^{-3}8x = \frac{-16}{(1+(2x)^2)^2} + \frac{256x}{(1+(2x)^2)^3}.$$

Vi har att

$$f(0) = f''(0) = 0, \quad f'(0) = 2, \quad f'''(0) = -16.$$

Det sökta Taylorpolynomet är alltså $P_3(x) = 2x - 8x^3/3$.

$\square$

2. Bestäm en primitiv funktion till $g(x) = x\cos^3(2x^2)$. **(3 p)**

Lösning. Man kan använda substitutionen: $t = 2x^2$, $dt = 4x\,dx$.

$$\int x\cos^3(2x^2)\,dx = \frac{1}{4}\int \cos^3 t\,dt = \frac{1}{4}\int (1-\sin^2 t)\cos t\,dt.$$

Substitutionen $s = \sin t$, $ds = \cos t\,dt$ ger

$$\frac{1}{4}\int (1-\sin^2 t)\cos t\,dt = \frac{1}{4}\int (1-s^2)\,ds = \frac{1}{4}(s - \frac{s^3}{3}) + C =$$
$$\frac{1}{4}\sin t - \frac{1}{12}\sin^3 t + C = \frac{1}{4}\sin(2x^2) - \frac{1}{12}\sin^3(2x^2) + C.$$

□

3. Kurvan $y = \sin x$, med $0 \leq x \leq \pi/2$ roteras omkring y-axeln, och bildar en vas V. Bestäm volymen som ryms i vasen V. **(5 p)**

Lösning. Vasen V ges av en cylinder med radien $\pi/2$ och höjden 1 minus volymen som fås då ytan under grafen $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi/2$, roteras omkring y-axeln.

Volymen då arean under grafen $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi/2$, roteras omkring y-axeln ges av:

$$W = 2\pi \int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx.$$

Vi använder partiell integration för att beräkna integralen:

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x.$$

Detta ger $W = 2\pi[\sin x - x \cos x]_0^{\pi/2} = 2\pi$.

En cylinder med radie $R = \pi/2$ och höjd 1 har volym $C = \pi R^2 \cdot 1 = \pi^3/4$.

Volymen V som ryms i vasen ges av

$$V = C - W = \pi^3/4 - 2\pi.$$

□

DEL B

3. Vi har funktionen $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & \text{när} \quad x \neq 0 \\ 2 & \text{när} \quad x = 0. \end{cases}$

(a) Vad menas med att en funktion är kontinuerlig i en given punkt? **(2 p)**

(b) Visa att $\lim_{x \to 0}(x^2 \cos(1/x)) = 0$. **(3 p)**

(c) Existerar det en kontinuerlig funktion F definierad på hela tallinjen, som sammanfaller med f när $x \neq 0$? **(2 p)**

Lösning. En funktion f är kontinuerlig i en inre punkt x_0 av dess definitionsmängd om

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

b). Vi vet att $-1 \leq \cos(1/x) \leq 1$ för alla reella x. Därför gäller, för alla reella x, att

$$-x^2 \leq x^2 \cos(1/x) \leq x^2.$$

Observera att $\lim_{x \to 0} x^2 = \lim_{x \to 0}(-x^2) = 0$. Enligt instängningssatsen gäller då även

$$\lim_{x \to 0}(x^2 \cos(1/x)) = 0.$$

c). Om en funktion $F(x)$ sammanfaller med $f(x)$ för alla $x \neq 0$, så är den kontinuerlig i alla punkter $x \neq 0$, eftersom nära varje punkt $x \neq 0$ sammanfaller f (och F) med en elementär funktion $x^2 \cos(1/x)$. Dessutom gäller $\lim_{x \to 0} F(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Om vi definierar $F(0) = 0$, så är $F(x)$ kontinuerlig även i punkten $x = 0$.

□

4. Vi har funktionen $g(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1-t}{1+t^{7/2}}\,dt$, definierad för alla positiva $x \geq 0$.
   (a) Bestäm talet x där funktionen g uppnår sitt största värde. **(2 p)**
   (b) Avgör om gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x)$ existerar. **(3 p)**

Lösning. a) Funktionen $f(t) = 1 - t$ är strängt avtagande och negativ för $t > 1$. Funktionen $1 + t^{7/2}$ är positiv. Detta betyder att arean under funktionsgrafen till $f(t)/(1 + t^{7/2})$ mellan 0 och 1 är positiv, och att arean under funktionesgrafen mellan 1 och x är negativ. Det följer nu av integralens definition att funktionen $g(x)$ har sitt maxvärdet i $x = 1$.

b) Av diskussionen ovan har vi att $-f(t) = t - 1$ är positiv för $t > 1$. Följdaktligen är $-f(t)/(1+t^{7/2})$ positiv, kontinuerlig och ej avtagande för $t \geq 1$. Gränsvärdet $\lim_{x\to\infty} g(x)$ exister om och endast om integralen $-\int_1^\infty f(t)/(1 + t^{7/2})dt$ är

$$0 \leq \int_1^N \frac{t-1}{1+t^{7/2}}dt \leq \int_1^N \frac{t}{1+t^{7/2}}dt \leq \int_1^N \frac{t}{t^{7/2}}dt.$$

Integralen till höger konvergerar, och därmed konvergerar också dom andra integralerna. Vi har visat att det sökta gränsvärdet existerar.

□

Del C

5. Det existerar ett heltal n sådan att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 90000$.

   (a) Visa att $n > 23$. **(4 p)**

   (b) Bestäm talet n. **(4 p)**

Lösning. Vi betraktar arean under funktionen $f(x) = x^3$, och approximerar med över och undersummor. Vi har att

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^3 \leq \int_0^n x^3\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Av olikheten ovan räcker det att visa att $\int_0^{24} x^3 dx < 90000$, då detta medför att summan $\sum_{k=1}^{23} < 90000$, och därför måste $n > 23$. Med andra ord vill vi visa att $\frac{1}{4} \cdot 24^4 < 90000$. Vi visar att $24^4 = 8^4 \cdot 3^4 < 4 \cdot 9 \cdot 10^4$. Vi har att $8^4 = 2^{12}$, och efter att dividera bort potenser av två och potenser av 3 kvarstår att visa är att $2^6 \cdot 3^2 < 5^4$. Olikenheten av dessa kvadrater är ekvivalent med att

$$2^3 \cdot 3 = 24 < 5^2 = 25,$$

vilket stämmer. Vi har visat att $n > 23$.

Om vi visar att $\int_0^{25} x^3 dx > 90000 = 9 \cdot 10^4$ då följer det av olikheten ovan att $n < 25$. Därmed är den enda möjligheten att $n = 24$. Vi måste alltså visa att $25^4 > 4 \cdot 9 \cdot 10^4$, vilket är ekvivalent med att visa

$$5^4 < 4 \cdot 9 \cdot 2^4.$$

Eller att $5^2 = 25 > 2 \cdot 3 \cdot 2^2 = 24$. Vi har då visat att $n < 25$.

$\square$

6. En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kallas *likformigt kontinuerlig* om det till varje $\epsilon > 0$ finns $\delta > 0$ sådant att för alla x och y gäller att
$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$
Visa att funktionen $f(x) = x^2$ inte är likformigt kontinuerlig. **(4 p)**

Lösning. Vi måste visa att det existerar ett $\epsilon > 0$ så att det för varje $\delta > 0$ existerar $x, y \in \mathbb{R}$ så att $|x - y| < \delta$, men där
$$|x^2 - y^2| \geq \epsilon.$$
Vi väljer $\epsilon = 1$, $\delta > 0$ godtyckligt, $x = \frac{1}{\delta}$ samt $y = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$. Då kommer $|x - y| = \delta/2 < \delta$ men
$$|x^2 - y^2| = \left|1 + \delta^2\right| > 1 = \epsilon.$$
Vi har därför visat att $f(x) = x^2$ inte är likformigt kontinuerlig.

$\square$