# TENTAMEN

| | |
|---|---|
| Kursnummer: | HF0024<br>Matematik för basår II |
| Moment: | TENB |
| Program: | Tekniskt basår |
| Rättande lärare: | Staffan Linnaeus |
| Examinator: | Niclas Hjelm |
| Datum:<br>Tid: | 2019-04-18<br>08:00-12:00 |
| Hjälpmedel: | Formelsamling: Björk m fl ”Formler och tabeller” **utan anteckningar**, passare, gradskiva, penna, radergummi och linjal<br><br>**Miniräknare är ej tillåten!** |
| Omfattning och betygsgränser: | see below |

| Poäng | Betyg |
|---|---|
| 11 | Fx |
| 12 – 14 | E |
| 15 – 17 | D |
| 18 – 20 | C |
| 21 – 23 | B |
| 24 – 26 | A |

**Till samtliga uppgifter krävs fullständiga lösningar. Lösningarna skall vara tydliga och lätta att följa.**
**Införda beteckningar skall definieras.**
**Uppställda samband skall motiveras.**
**Skriv helst med blyertspenna!**
Svaret ska framgå tydligt och vara förenklat så långt som möjligt. Svara med enhet och lämplig avrundning på tillämpade uppgifter. Svara exakt på övriga uppgifter, om inte annat anges.

1. Differentialekvationen $y'-2y=-8$ är given.
   a. Visa att $y=4$ är en lösning. 1p
   b. Visa att $y=4-3e^{2x}$ är en lösning. 1p

2. Lös differentialekvationen $y''=y$. 2p

3. Lös ekvationen $z^2+6iz=13$. 2p

4. Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y(x)=\sqrt{x^2-7}$ i den punkt där $x=4$. 2p

5. Ett område begränsas av $x$-axeln, linjen $x=4$ och kurvan $f(x)=\sqrt{x}$. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppkommer då området roteras kring $x$-axeln. 2p

6. Bestäm den primitiva funktion $F(x)$ till funktionen $f(x)=xe^x$ som uppfyller villkoret $F(0)=1$. 2p

7. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'+2y-4e^x=0$ som uppfyller villkoret $y(0)=0$. 3p

8. a. Bestäm $|w|$ och $\arg w$ om $w=2e^{i\pi}$. Rita även in $w$ i det komplexa talplanet. 1p

   b. Lös ekvationen $z^5=2e^{i\pi}$ 2p

9. Låt $z$ vara ett komplext tal och $f(z)=\dfrac{2z^4-12z^3+20z^2-12z+18}{2z^2+2}$. Förenkla funktionen $f(z)$ så långt som möjligt. Ange även funktionens definitionsmängd. 3p

10. En följd av 100 positiva tal bildar en geometrisk talföljd. $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n, ..., a_{100}$. Om vart och ett av dessa tal logaritmeras så bildas en ny talföljd $b_1, b_2, ..., b_{n-1}, b_n, ..., b_{100}$. Visa att den nya talföljden är aritmetisk om termerna logaritmeras med den naturliga logaritmen $\ln$. 2p

11. Denna uppgift handlar om en modell för istjockleken på en sjö, då lufttemperaturen är konstant. Isens tjocklek växer med en hastighet som kan antas vara *omvänt* proportionell mot isens tjocklek. Från det att isen börjar bildas tar det en timme innan den är en halv centimeter tjock och fyra timmar innan tjockleken är en centimeter. Bestäm en funktion för hur isens tjocklek beror på tiden.
    Ange svaret exakt. 3p

**Lösningsförslag**

| | |
|---|---|
| 1. | $\underbrace{y'-2y}_{VL}=\underbrace{-8}_{HL}$<br>a.<br>$y=4$<br>$y'=0$<br>$VL=y'-2y=0-2\cdot 4=-8=HL$<br>$VL=HL \quad V.S.V$<br>b.<br>$y=4-3e^{2x}$<br>$y'=-6e^{2x}$<br>$VL=y'-2y=-6e^{2x}-2(4-3e^{2x})=-6e^{2x}-8+6e^{2x}=-8=HL$<br>$VL=HL \quad V.S.V$ |
| 2. | $y''=y$<br>$y''-y=0$<br>Den karakteristiska ekvationen ger<br>$r^2-1=0$<br>$(r+1)(r-1)=0$<br>$r_1=-1 \quad r_2=1$<br>Allmän lösning blir<br>$\underline{\underline{y=Ae^{-x}+Be^{x}}}$ |
| 3. | $z^2+6iz=13$<br>$z^2+6iz-13=0$<br>$z=-3i\pm\sqrt{(3i)^2+13}$<br>$z=-3i\pm\sqrt{-9+13}$<br>$z=-3i\pm 2$<br>Svar: $z_1=2-3i \quad z_1=-2-3i$ |
| 4. | $y(x)=\sqrt{x^2-7}=\left(x^2-7\right)^{\frac{1}{2}}$<br>$y'(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-7\right)^{-\frac{1}{2}}2x=\frac{x}{\sqrt{x^2-7}}$ vilket ger $\begin{cases} x_1=4 \\ y_1=y(4)=\sqrt{4^2-7}=3 \\ k=y'(4)=\frac{4}{\sqrt{4^2-7}}=\frac{4}{3} \end{cases}$ |

Vi låter $y_t(x)$ beteckna tangenten som bestäms med hjälp av enpunktsformeln och med $x_1$, $y_1$ och $k$ enligt ovan.

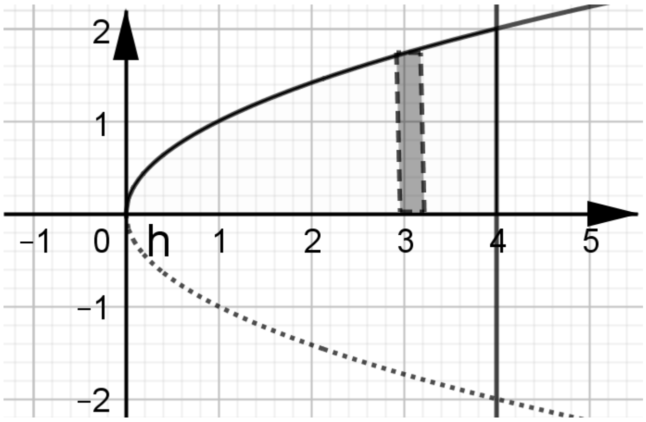
$$y_t - y_1 = k(x - x_1)$$

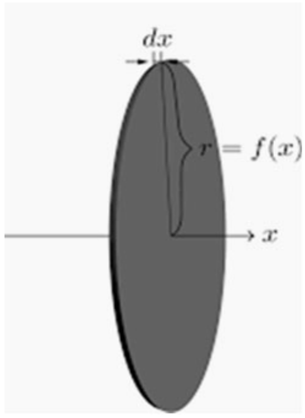
$$y_t - 3 = \frac{4}{3}(x-4)$$

$$y_t = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}.$$

Svar: $y_t(x) = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}$

5.




Nedre integrationsgräns: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Övre integrationsgräns: $x = 4$.

$$V = \int_0^4 \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi\int_0^4 x dx = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi - 0 = 8\pi \text{ v.e.}$$

Svar: Volymen blir $8\pi$ volymenheter.

6.

$$F(x) = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

$$F(0) = 1$$
$$0 - e^0 + C = 1$$
$$C = 2$$

Svar: $F(x) = xe^x - e^x + 2.$

7.

$$y' + 2y - 4e^x = 0$$

$$y' + 2y = 4e^x \qquad (1)$$

Den homogena lösningen söks:

$y'+2y=0$

$y_h = Ce^{-2x}$

En partikulär lösning söks genom att ansätta en funktion $y_p$.

$y_p = ae^x$

$y_p' = ae^x$

Detta sätts in i ekvation (1).

$ae^x + 2ae^x = 4e^x$

$3a = 4 \quad \left(e^x \neq 0\right)$

$a = \dfrac{4}{3} \quad \Rightarrow y_p = \dfrac{4}{3}e^x$

Lösningen är alltså $y = y_h + y_b = Ce^{-2x} + \dfrac{4}{3}e^x$ .

Villkoret $y(0)=0$ ger nu

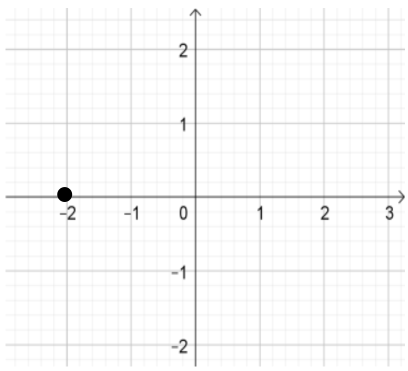
$Ce^0 + \dfrac{4}{3}e^0 = 0$

$C = -\dfrac{4}{3}$

Svar: $y = \dfrac{4}{3}e^x - \dfrac{4}{3}e^{-2x}$

8.

8a. $w = 2e^{i\pi}$, $\underline{\underline{\arg w = \pi}}$ och $\underline{\underline{|w| = 2}}$




8b.

$z^5 = 2e^{i\pi}$ ansätter att $z = r\left(\cos v + i\sin v\right)$

$\left(r\left(\cos v + i\sin v\right)\right)^5 = 2\left(\cos\pi - i\sin\pi\right)$

$r^5\left(\cos 5v + i\sin 5v\right) = 2\cdot\left(\cos\pi - i\sin\pi\right)$

Identifiering ger:

$r^5 = 2$

$r = 2^{\frac{1}{5}}$

samt

$5v = \pi + 2\pi n \quad$ där $n = 0,1,2,3,4$

$v = \dfrac{\pi + 2\pi n}{5}$

Då r och v sätts in i z fås att $z=2^{\frac{1}{5}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}n\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}n\right)\right)$

Svar: Det fem lösningarna är $z_n=2^{\frac{1}{5}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}n\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}n\right)\right)$ där $n=0,1,\ldots,4$

**8b. Alternativ lösning, potensregler används.**

$$z^5=e^{i\pi} \qquad \left(\text{notera att } e^{i\pi}=e^{i\pi+2\pi}=e^{i\pi+4\pi} \quad \text{o.s.v.}\right)$$

$$z^5=e^{i(\pi+n2\pi)} \qquad \text{där } n=0,\ 1,\ 2....4$$

$$\left(z^5\right)^{\frac{1}{5}}=\left(2e^{i(\pi+n2\pi)}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$z=2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{\pi+n2\pi}{5}}$$

Svar: Det fem lösningarna är $z_n=2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{\pi+n2\pi}{5}}$ där $n=0,1,....,4$

9.

$$f(z)=\frac{2z^4-12z^3+20z^2-12z+18}{2z^2+2}=\frac{z^4-6z^3+10z^2-6z+9}{z^2+1}$$

**Alt 1:** Division med hjälp av **liggande stolen** ger

$$\begin{array}{l|l}
\quad z^2-6z+9 & \\
\hline
z^4-6z^3+10z^2-6z+9 & \underline{z^2+1} \\
\underline{-\left(z^4-0z^3+z^2\right)} & \\
\quad -6z^3+9z^2-6z & \\
\quad \underline{-\left(-6z^3+0z^2-6z\right)} & \\
\qquad 9z^2+0z+9 & \\
\qquad \underline{-\left(9z^2+0z+9\right)} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

**Alt 2:** En **ansats** för den förenklade funktionen är förhoppningsvis

$$f(z)=az^2+bz+c. \qquad \left(\text{Prova gärna ansatsen } f(z)=A\left(z-B\right)\left(z-C\right)\right)$$

$$\frac{z^4-6z^3+10z^2-6z+9}{z^2+1}=az^2+bz+c$$

$$z^4-6z^3+10z^2-6z+9=\left(az^2+bz+c\right)\left(z^2+1\right)$$

$$z^4-6z^3+10z^2-6z+9=az^4+bz^3+cz^2+az^2+bz+c$$

Identifiering av polynomets samtliga koefficienter ger att

$$\begin{cases} 1 = a \\ -6 = b \\ 10 = c + a \\ 1 = a \\ -6 = b \\ 9 = c \end{cases} \quad \text{d.v.s.} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -6. \\ c = 9 \end{cases}$$

**Alt 1&2 forts:**

Således är $f(z) = z^2 - 6z + 9 = (z-3)^2$

Funktionen är inte definierad då nämnaren i det ursprungliga rationella utttrycket är noll.

$x^2 + 1 = 0$

$(x-i)(x+i) = 0$

vilket innebär att $f(x)$ är definierad för alla värden på *z* förutom $z = -i$ och $z = i$.

**Svar:** $f(z) = (z-3)^2$. Funktionen är inte definierad för $z \neq -i$ och $z \neq i$.

*Tips från framtida matematikkurser; utnyttja att* $10z^2 = 9z^2 + z^2$ *:*

$$f(z) = .... = \frac{\left(z^4 - 6z^3 + 9z^2\right) + \left(z^2 - 6z + 9\right)}{z^2+1} = \frac{z^2 \cdot \left(z^2 - 6z + 9\right) + 1 \cdot \left(z^2 - 6z + 9\right)}{z^2+1} = \frac{\left(z^2+1\right)\left(z^2 - 6z + 9\right)}{z^2+1} = (z-3)^2$$

10. Om man lyckas beräkna differensen $d = b_n - b_{n-1}$ samt förenkla så att $d$ inte beror på *n* så har man visat att den nya talföljden är aritmetisk.

I en godtycklig geometrisk talföljd ges varje tal av $a_n = a_1 k^{n-1}$. Om $2 \leq n \leq 100$ gäller att

$b_n = \ln a_n = \ln\left(a_1 k^{n-1}\right) = \ln a_1 + \ln k^{n-1} = \ln a_1 + (n-1)\ln k$

och på samma sätt blir

$b_{n-1} = \ln a_1 + (n-2)\ln k$.

Skillnaden mellan dessa tal blir

$d = b_n - b_{n-1} = \ln a_1 + (n-1)\ln k - \left(\ln a_1 + (n-2)\ln k\right) = \ln k$ .

Då differensen är en konstant är alltså den nya talföljden aritmetisk. V.S.V.

*(Även med alla andra logaritmer blir den nya talföljden aritmetisk.)*

11.

Differentialekvation:

$y'(t) = p \cdot \dfrac{1}{y(t)}$

$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{p}{y}$

Beteckningar:

$y(t)$: Isens tjocklek $[\text{cm}]$

$t$: Tid $[\text{h}]$

$y > 0, \quad t > 0$

Givet:

$y(1) = \dfrac{1}{2} \quad (1)$

$y(4) = 1 \quad (2)$

$\int y\,dy = \int p\,dt$

$\frac{y^2}{2} = pt + C$

$y^2 = 2pt + 2C$ (sätter $2C = D$)

$y = \pm\sqrt{2pt + D}$ negativ lösning förkastas då $y > 0$

Villkoren ger nu

$\begin{cases} \frac{1}{2} = \sqrt{2p \cdot 1 + D} \\ 1 = \sqrt{2p \cdot 4 + D} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} = 2p + D \\ 1 = 8p + D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -8p - 4D \\ 1 = 8p + D \end{cases} \quad (3)$

HL och VL positiva
blir därför ej falska lösningar
vid kvadrering

Additionsmetoden ger $0 = -3D$ d.v.s. $D = 0$ vilket sätts in i (3) vilket ger att $p = \frac{1}{8}$

$y(t) = \sqrt{\frac{2t}{8} + 0} = \frac{\sqrt{t}}{2}$

Svar: $y(t) = \frac{\sqrt{t}}{2}$ där $y(t)$ är isens tjocklek i centimeter och $t$ är antalet timmar efter isbildningens start.

**Preliminär Rättningsmall:**

**Generella riktlinjer för tentamensrättning**

| | |
|---|---|
| A. Varje beräkningsfel | -1 poäng |
| *(Därefter fortsatt rättning enligt nya förutsättningar)* | |
| B. Beräkningsfel; allvarliga och/eller leder till förenkling | -2 poäng eller mer |
| C. Prövning istället för generell metod | - samtliga poäng |
| D. Felaktiga antaganden/ansatser | - samtliga poäng |
| E. Antar numeriska värden | - samtliga poäng |
| F. Lösning svår att följa och/eller Svaret framgår inte tydligt | -1 poäng eller mer |
| *(Vid flera svar väljs det minst gynnsamma. Svara antingen avrundat eller exakt, se nedan.)* | |
| G. Matematiska symboler används felaktigt/saknas | -1poäng eller mer |
| Bl.a Om '=' saknas (t.ex. '=>' används istället) | -1 poäng/tenta |
| Om '=' används felaktigt (t.ex. istället för '=>') | -1 poäng/tenta |
| <u>Teoretiska uppgifter:</u> | |
| H. Avrundat svar | -1 poäng/tenta |
| <u>Tillämpade uppgifter:</u> | |
| I. Enhet saknas/fel | -1 poäng/tenta |
| J. Avrundningar i delberäkningar som ger fel svar | -1 poäng/tenta |
| K. Svar med felaktigt antal värdesiffror ( ±1 värdesiffra ok) | -1 poäng/tenta |
| L. Andra avrundningsfel | -1 poäng/tenta |
| M. Exakt svar | -1 poäng/tenta |

**Uppgiftsspecifika riktlinjer**

| | |
|---|---|
| **1.** Fel derivata | -1p/term |
| **2.** Fel karakteristisk ekvation | -2p |
| Hittar bara en lösning till karakteristisk ekvation | -1p |
| 3. Lösning med ansats $z = a + bi$ och förkastar $a = 0$ utan kommentar. | -1p |
| Hittar bara en lösning | -1p |
| 4. Felderiverat | -2p |
| Framgår tydligt att $k = \frac{4}{3}$ | +1p |
| 5. Fel område | -2p |
| Integrationsfel | -2p |
| Glömmer π en gång under beräkningen förutom i svaret | -0p |
| Motiverar inte undre integrationsgränsen $x = 0$. | -0p |
| 6. Felintegrerat | -2p |
| dx saknas mer än en gång | -1p |
| Integrations konstant saknas/felaktig | -1p |
| 7. Förkortat $e^x$ utan kommentar | -0p |
| Felaktig lösning av $y_h$ | -1p |
| Fel ansats till inhomogen ekvation | -2p |
| Korrekt ansats till inhomogen ekvation, felaktiga beräkningar av konstanterna | -1p |
| Felaktigt använt bivillkor | -1p |

8a. Rätt eller fel

b. Hittar enbart en lösning -2p

Fel period -1p

| | |
|---|---|
| 9. Ej angett/felaktig definitionsmängd | -1p |
| Ej faktoriserat $z^2 - 6z + 9$ | OK |
| 10. Antar en specifik geometrisk talföljd | -2p |
| Antar talföljd med specifikt *a* tex *a*=1 | -2p |
| Jämför differensen enbart mellan två specifika termer | -1p |
| Lösning med generella index $n$ utan att ange definitionsmängden | -0p |
| 11. Felaktig differentialekvation. | -3p |
| Ställt upp korrekt differentialekvation, inklusive två bivillkor | +1p |
| Beteckningarnas enheter framgår ej tydligt vare sig i svar eller beräkning | -1p. |
| Ej kommenterat falska lösningar. | Ej avdrag |
| Använder villkor y(0)=0 utan att kontrollera tredje villkoret. | -1p. |