KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen med lösningsförslag
fredag, 19 oktober 2018

1. Låt Π vara det plan i $\mathbb{R}^3$ som går genom punkterna $A = (1,3,1), B = (2,0,0), C = (0,1,1)$.

(a) Bestäm en ekvation på formen $ax + by + cz = d$ till Π. **(4 p)**

(b) Bestäm om $(0,2,0)$ tillhör planet Π. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi kan få en normalvektor till planet genom att ta vektorprodukten av riktningsvektorerna $\vec{AB}$ och $\vec{AC}$:

$$\vec{n} = \left(\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}\right) \times \left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\-3\\-1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-1\\-2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\1\\-5\end{bmatrix}.$$

Ekvationen kommer då att vara på formen

$$-2x + y - 5z = d.$$

Genom insättning av en av punkterna, t. ex. B, får vi att

$$-2 \cdot 2 = d.$$

Ekvationen är alltså $-2x + y - 5z = -4$. Det är också smart att dubbelkolla resultatet genom att sätta in de andra två punkterna i ekvationen.

(b) Vi behöver bara verifiera om $(x, y, z) = (0, 2, 0)$ uppfyller ekvationen från del (a). Eftersom $2 \neq -4$ så gör den det inte, och punkten inte tillhör planet.

2. Betrakta matrisen

$$A = \frac{1}{13}\begin{bmatrix}-5 & 12\\12 & 5\end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm alla egenvärden och tillhörande egenvektorer till A. **(3 p)**

(b) Är avbildningen som matrisen beskriver en spegling, en projektion, en rotation, eller något annat? Motivera ditt svar. **(3 p)**

Lösningsförslag.

a) Egenvärden λ_1 och λ_2 är lösningar till ekvationen $det(A-\lambda I) = 0$, vilken har samma lösningar som $det(13A-13\lambda I) = 0$. Detta skrivs om som $(-5-13\lambda)(5-13\lambda)-12^2 = 0 \Leftrightarrow 13^2\lambda^2-13^2 = 0$. Vi får lösningar $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

Egenvektor till λ_1 är en lösning v till ekvationen $(13A - 13\lambda_1 I)v = 0$. Så har vi för $\lambda_1 = 1$:

$$13A - 13I = \begin{bmatrix}-18 & 12\\12 & -8\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}0 & 0\\3 & -2\end{bmatrix}$$

Det betyder att en egenvektor som motsvarar λ_1 är $(2, 3)$.

På samma satt, egenvektor till eigenvärdet $\lambda_2 = -1$ är $(-3, 2)$.

b) Spegling i linjen som går genom origo med vinkel θ har matrisen:

$$\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\\sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}$$

Låt $\theta = \frac{1}{2}\arcsin\frac{12}{13} + \frac{\pi}{2}$. Då representerar matrisen A speglingen i linjen som går genom origo med vinkel θ.

3. Betrakta ekvationen

$$\begin{bmatrix} 12t+6 & -7t-4 \\ -7t-3 & 4t+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm något värde på t för vilket ekvationen inte har några lösningar. **(3 p)**

(b) Bestäm något värde på t för vilket ekvationen har oändligt många lösningar, samt bestäm dessa lösningar. **(3 p)**

Lösningsförslag. Uppgiften kan lösas med Gausselimination eller med en determinantberäkning. Med determinantmetoden beräknar vi:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 12t+6 & -7t-4 \\ -7t-3 & 4t+2 \end{vmatrix} &= (12t+6)(4t+2) - (-7t-4)(-7t-3) \\ &= 48t^2 + 48t + 12 - 49t^2 - 49t - 12 = -t^2 - t. \end{aligned}$$

Determinanten blir alltså noll om och endast om $t = 0$ eller $t = -1$. I alla andra fall har systemet en unik lösning. Om vi sätter $t = 0$ så blir ekvationen

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

och första ekvationen är -2 gånger andra ekvationen. En särskild lösning ges t. ex. av $(x, y) = (1, 1)$ och den allmänna lösningen konstrueras som summan av den särskilda lösningen och den almänna lösningen till det tillhörande homogena systemet. Därmed besvaras uppgiftens del (b): Om $t = 0$ så har ekvationen lösningsmängd

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad t \text{ reellt tal.}$$

Om vi sätter $t = -1$ så blir ekvationen

$$\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Detta system är motsägelsefullt, vilket ses genom att genomföra ett steg i Gausseliminationen:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -6 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{r2 \leftarrow r2 + \frac{2}{3}r1} \left[\begin{array}{cc|c} -6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right].$$

Alltså har systemet ingen lösning för $t = -1$, vilket besvarar frågans del (a).

4. Låt L vara den linjära avbildning från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ som definieras genom

$$L(\vec{x}) = \vec{v} \times \vec{x}, \quad \text{där } \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm standardmatrisen för L. **(3 p)**

(b) Bestäm matrisen för L i basen $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$. **(3 p)**

Lösningsförslag. a) $L(\vec{e_1}) = \vec{v} \times \vec{e_1} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$L(\vec{e_2}) = \vec{v} \times \vec{e_2} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L(\vec{e_3}) = \vec{v} \times \vec{e_3} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Standard matricen till L är:

$$L_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Matrisen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

byter standardbasen $\mathcal{B}$ till basen $\mathcal{S}$.
Matrisen

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{45} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{45} \end{bmatrix}$$

byter basen $\mathcal{S}$ till basen $\mathcal{B}$.
Därför: $L_{\mathcal{B}} = P^{-1} L_{\mathcal{S}} P$

$$L_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{45} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{45} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Betrakta den kvadratiska formen $Q(x, y) = 5x^2 - 4xy + 8y^2$.

(a) Finn den symmetriska matris A som är associerad till Q. **(1 p)**
(b) Avgör karaktären av Q. **(2 p)**
(c) Finn en matris P som ortogonalt diagonaliserar matrisen A ovan. **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ satisfierar att $Q(x, y) = (x, y)A(x, y)^T$.

(b) Vi bestämmer matrisens egenvärden. Det karakteristiska polynomet ges av

$$p_A(t) = (5 - t)(8 - t) - 4 = t^2 - 13t + 36 = (t - 9)(t - 4).$$

Eftersom båda egenvärdena ($t = 9$ och $t = 4$) är positiva så är Q positivt definit.

(c) För diagonaliseringen måste egenvektorerna bestämmas. För $t = 4$ måste vi bestämma en nollskild vektor i nollrummet av

$$\begin{bmatrix} 5-4 & -2 \\ -2 & 8-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix},$$

t. ex. $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. För $t = 9$ beräknar vi på motsvarande sätt

$$\begin{bmatrix} 5-9 & -2 \\ -2 & 8-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},$$

och en egenvektor till $t = 9$ ges av $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Vektorerna $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är automatiskt ortogonala eftersom A var symmetrisk, men de är inte än ortonormala. För detta måste vi dela dem genom deras längd, $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Alltså är matrisen

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

ortogonal och uppfyller $A = P \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} P$ (observera att $P = P^T$, vilket är ovanligt.)

6. Bestäm de funktioner $f(n)$, $g(n)$ och $h(n)$, där n är ett naturligt tal, som satisfierar ekvationssystemet

$$\begin{aligned} f(n+1) &= 3f(n) + g(n) \\ g(n+1) &= -g(n) + h(n) \\ h(n+1) &= -6g(n) + 4h(n) \end{aligned}$$

och villkoren $f(0) = 0$, $g(0) = 1$ och $h(0) = 0$. **(6 p)**

Tips: Skriv systemet på matrisform.

Lösningsförslag. Vi kan skriva:

$$\begin{bmatrix} f(n+1) \\ g(n+1) \\ h(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(n) \\ g(n) \\ h(n) \end{bmatrix}$$

Därför har vi:

$$\begin{bmatrix} f(n) \\ g(n) \\ h(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 4 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} f(0) \\ g(0) \\ h(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f(n) \\ g(n) \\ h(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 4 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

För att hitta $A^n = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 4 \end{bmatrix}^n$, måste vi först diagonalisera matricen A.

$\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$

Egenvärden av A är $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ och $\lambda_3 = 2$.

Motsvarande egenvektorer är:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Diagonalisering av matrisen ger:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Nu har vi

$$A^n = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} P^{-1}$$

Därför:

$$A^n = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} P^{-1}$$

och

$$A^n = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Därför har vi:

$$A^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} - \frac{3^n}{2} + 2^{n+1} \\ 3 - 2^{n+1} \\ 6(1 - 2^n) \end{bmatrix}$$

Det betyder:

$f(n) = -\frac{3}{2} - \frac{3^n}{2} + 2^{n+1}$

$g(n) = 3 - 2^{n+1}$

$h(n) = 6(1 - 2^n)$