KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Fredag, 22 april 2022

Skrivtid: 08:00–11:00
Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Maria Saprykina

Tentamen består av sex uppgifter som vardera ger maximalt sex poäng. Del A på tentamen utgörs av de två första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från uppgift 1 på del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på uppgift 1 på del A kan dock som högst bli 6 poäng. De två följande uppgifterna utgör del B och de två sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst tre poäng.

DEL A

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm en 2×2-matris P sådan att $P^{-1}AP$ är en diagonalmatris. **(4 p)**

(b) Bestäm $A^{10} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. **(2 p)**

2. Låt

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm vinkeln mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$. **(3 p)**

(b) Bestäm skärningspunkten mellan linjen $(x, y, z) = (-1 + t, 2 + 2t, 2t)$ och planet genom origo som spänns upp av vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$. **(3 p)**

Var god vänd!

DEL B

3. Låt Π vara planet som ges av ekvationen $2x + 3y - 6z = 0$.

(a) Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ på planet Π. **(3 p)**

(b) Bestäm standardmatrisen A för den linjära avbildning $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ som svarar mot den ortogonala projektionen på planet Π. **(2 p)**

(c) Avgör om matrisen A är inverterbar. **(1 p)**

4. Låt $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ vara basbytesmatrisen från basen $\mathcal{B}$ till basen $\mathcal{C}$ där $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$ båda är baser för samma delrum V i $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestäm dimensionen av delrummet V. **(1 p)**

(b) Bestäm basbytesmatrisen från basen $\mathcal{C}$ till basen $\mathcal{B}$. **(2 p)**

(c) Ge ett exempel på ett delrum V och baser $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$ sådana att P är basbytesmatrisen från basen $\mathcal{B}$ till basen $\mathcal{C}$. **(3 p)**

DEL C

5. Låt V vara ett k-dimensionellt delrum av $\mathbb{R}^n$, låt M_{nm} beteckna mängden av $n \times m$-matriser och låt W vara mängden av $n \times m$-matriser A som uppfyller att $\mathrm{Range}(A)$ är ett delrum av V.

(a) Visa att W är ett delrum av M_{nm}. **(3 p)**

(b) Bestäm dimensionen av W. **(3 p)**

6. En $n \times n$-matris A sägs vara *expansiv* om $\|A\vec{x}\| > \|\vec{x}\|$ för alla nollskilda $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^n$. Vi säger att $\vec{x_0}$ i $\mathbb{R}^n$ är en *fixpunkt* till en avbildning $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ om $f(\vec{x_0}) = \vec{x_0}$.

(a) Visa att om A är en $n \times n$-matris vars egenvärden alla har absolutbelopp som är större än 1 så är matrisen $A - I_n$ inverterbar. **(2 p)**

(b) Visa att om A är en expansiv $n \times n$-matris så är matrisen $A - I_n$ är inverterbar. **(2 p)**

(c) Om $\vec{b}$ är en vektor i $\mathbb{R}^n$ och A är en $n \times n$-matris definierar vi en avbildning $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ genom

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}, \qquad \text{för alla } \vec{x} \text{ i } \mathbb{R}^n.$$

Visa att om A är expansiv så måste f ha en unik fixpunkt. **(2 p)**