SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
Torsdagen den 7 januari 2021

Skrivtid: 8.00-11.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Kristian Bjerklöv

Tentamen består av sex uppgifter, som vardera ger maximalt 6 poäng. Till antalet erhållna poäng från Uppgift 1 adderas dina bonuspoäng, upp till som mest 6 poäng. Poängsumman på Uppgift 1 kan alltså bli högst 6 poäng, bonuspoäng medräknade. Bonuspoängen beräknas automatiskt och antalet bonuspoäng framgår av din resultatsida.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

Var god vänd!

DEL A

1. (a) Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$. **(3 p)**
   (b) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \arctan x$. **(3 p)**

2. Låt $f(x) = \ln(1 + x^2)$.
   (a) Bestäm definitionsmängden till f och beräkna $f'(x)$. **(2 p)**
   (b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till f kring $x = 0$. **(2 p)**
   (c) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2}$. **(2 p)**

DEL B

3. (a) Parametrisera kurvan $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Skissera också kurvan. **(2 p)**
   (b) Hur stor area kan en rektangel ha om dess hörn ska ligga på kurvan i (a) och ha sidor parallella med koordinataxlarna? **(4 p)**

4. Låt $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$.
   (a) Gör ett teckenschema för derivatan och bestäm alla lokala extrempunkter. Skissera kurvan $y = f(x)$ med hjälp av teckenschemat och med hjälp av relevanta gränsvärden. **(3 p)**
   (b) Avgör vilken eller vilka av följande generaliserade integraler som är konvergenta: $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$. Beräkna dem om de är konvergenta. **(3 p)**

DEL C

5. Låt funktionen f vara definierad för alla reella tal x genom
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{om } x \neq 0 \\ 0, & \text{om } x = 0 \end{cases}$$
   (a) I vilka punkter är f kontinuerlig? **(2 p)**
   (b) I vilka punkter är f deriverbar? **(2 p)**
   (c) Bestäm värdemängden till f. **(2 p)**

6. Visa att det för varje konstant $c > 0$ gäller att **(6 p)**
$$\frac{\pi}{2\sqrt{c}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + c} \leq \frac{\pi}{2\sqrt{c}} + \frac{1}{c}$$