KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2018.01.08

DEL A

1. Rita funktionsgrafen till funktionen $f(x) = |x-3| + |x| - 4$. **(6 p)**

Lösning. Funktionen består av tre linjära funktioner, definierad enligt följande

$$f(x) = \begin{cases} (x-3) + x - 4 = 2x - 7 & \text{om} \quad x \geq 3, \\ (3-x) + x - 4 = -1 & \text{om} \quad 0 \leq x < 3 \\ (3-x) - x - 4 = -2x - 1 & \text{om} \quad x < 0 \end{cases}$$

$\square$

2. Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-5x+6}$. **(6 p)**

Lösning. Vi har att
$$\frac{x-1}{x^2-5x+6} = \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{(x-2)(x-3)}.$$
Vi partialbråksuppdelar andra termen:
$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$
Multiplikation med $(x-2)(x-3)$ ger
$$1 = A(x-3) + B(x-2).$$
Insättning av $x = 2$ och $x = 3$ ger $A = -1$ och $B = 1$. Samlar vi ihop termerna får vi då
$$\frac{x-1}{x^2-5x+6} = \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x-2}.$$
Därmed får vi att primitiva funktioner är på formen
$$\int \frac{x-1}{x^2-5x+6} dx = 2\ln|x-3| - \ln|x-2| + C = \ln\frac{(x-3)^2}{|x-2|} + C.$$
$\square$

DEL B

4. Vi har funktionen $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}\sqrt{1+\cos^{-2}(x)}$. Använd substitutionen $u = 1/\cos x$ för att bestämma $\displaystyle\int_0^{\pi/4} f(x)\,dx$. **(5 p)**

Lösning. Vi har med $u = 1/\cos x$ att $du = \sin x/\cos^2 x$ och $u : 1 \to \sqrt{2}$ och därmed att

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\sqrt{\cos^{-2} x + 1}dx = \int_1^{\sqrt{2}} u\sqrt{u^2+1}du.$$

Med substitutionen $y = 1 + u^2$, $dy = 2udu$ och $y : 2 \to 3$ får vi

$$\int_1^{\sqrt{2}} u\sqrt{u^2+1}du = \frac{1}{2}\int_2^3 \sqrt{y}dy = \frac{1}{3}\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_2^3 = \frac{1}{3}(3^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}).$$

$\square$

5. Polynomet $P(x) = \frac{2}{9} + \frac{8}{9}x - \frac{1}{9}x^2$ är Taylorpolynomet av grad 2, omkring $x = 1$, till funktionen $f(x) = x^{2/3}$.
   (a) Använd Taylors Sats för att beskriva funktionen $E(x) = f(x) - P(x)$ omkring punkten $x = 1$. **(2 p)**
   (b) Visa att $|4^{1/3} - \frac{14}{9}| \leq \frac{4}{81}$. **(5 p)**

Lösning. a). Funktionen $f(x) = x^{2/3}$ har fljande Taylorpolynom av grad 2 kring $x = 1$:

$$P(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2.$$

Skulle man sätta in värdena för derivatorna bör detta rimligen sammanfalla med det givna uttrycket för $P(x)$. Enligt Taylors Sats gäller att

$$f(x) = P(x) + E(x), \quad \text{dr} \quad E(x) = \frac{1}{3!}f'''(s)(x-1)^2,$$

för något tal s mellan 1 och x. Alltså,

$$E(x) = f(x) - P(x) = \frac{1}{6}f'''(s)(x-1)^3,$$

där $s = s(x) \in [1, x]$ är ett okänt tal.

b). Vi observerar att $4^{1/3} = 2^{2/3} = f(2)$ och att, med det givna uttrycket för $P(x)$,

$$P(2) = \frac{2}{9} + \frac{8}{9} \cdot 2 - \frac{1}{9} \cdot 2^2 = \frac{14}{9}.$$

Alltså är

$$\left|4^{1/3} - \frac{14}{9}\right| = |f(2) - P(2)| = |E(2)|.$$

Enligt uttrycket i (a)-uppgiften är

$$E(2) = \frac{1}{6}f'''(s)(2-1)^3$$

för något $s = s(2) \in (1, 2)$. Vi måste därför uppskatta detta uttryck oberoende av vad exakt s är. Upprepad derivering av orginalfunktionen $f(x)$ ger

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}, \qquad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-1/3}, \qquad f'''(x) = \frac{8}{27}x^{-7/3},$$

och allts är

$$E(2) = \frac{1}{6}f'''(s) = \frac{4}{81}\frac{1}{s^{7/3}} \leq \frac{4}{81}$$

oberoende av vad s är, så länge som $s \geq 1$, eftersom $\frac{1}{s^{7/3}}$ är en avtagande funktion av s. Observera även att $E(2) > 0$ oberoende av s, och därmed $|E(2)| = E(2)$.

□

DEL C

7. Avgör om integralen $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$ är konvergent eller divergent. **(6 p)**

Lösning. För $x \geq 2$ gäller olikheten $x^3 - 1 \geq (x-1)^3$. Således har vi

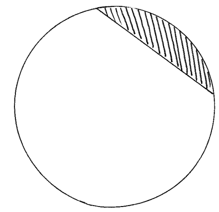
$$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}dx \leq \int_2^\infty (x-1)^{-\frac{3}{2}}dx = 2\Big[(x-1)^{-\frac{1}{2}}\Big]_\infty^2 = 2.$$

Eftersom den dominerande integralen är konvergent och integranden $\frac{1}{\sqrt{x^3-1}} \geq 0$ så är ̈ven

$$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}dx$$

konvergent.

$\square$



8. Ett cirkelsegment S är en del av en cirkelskiva som begränsas av en cirkelbåge och en rät linje (korda) som skär cirkeln i två punkter. (Se skuggade området i figuren.) Låt cirkeln ha radie r, och låt cirkelbågen uppta vinkeln t, sedd från cirkelns centrum ($t < \pi$). Detta ger ett cirkelsegment S_t. Låt $A(S_t)$ vara arean av cirkelsegmentet S_t. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{t\to 0} \frac{A(S_t)}{t^3}.$$

(6 p)

Lösning. Cirkelsegmentet S_t kan ses som sektorn av cirkelskivan med vinkel t, kallad K_t, minus den likbenta triangeln med sidor r och öppningsvinkel t, kallad T_t (tänk bildligt att glasstoppen S_t = strutglassen K_t minus struten T_t). Arean för sektorn K_t är $\frac{t}{2\pi}$ av arean för cirkelskivan,

$$A(K_t) = \frac{t}{2\pi}\pi r^2 = \frac{1}{2}r^2 t,$$

och arean för triangeln T_t är som vanligt basen gånger höjden genom två,

$$A(T_t) = \frac{1}{2} \cdot 2r \sin\frac{t}{2} \cdot r\cos\frac{t}{2} = \frac{1}{2}r^2 \sin t,$$

det senare enligt sinus för dubbla vinkeln. Arean $A(S_t)$ är därför

$$A(S_t) = A(K_t) - A(T_t) = \frac{1}{2}r^2(t - \sin t),$$

och vi ska alltså beräkna

$$\lim_{t\to 0} \frac{A(S_t)}{t^3} = \frac{1}{2}r^2 \lim_{t\to 0} \frac{t - \sin t}{t^3}.$$

M.h.a. repeterad använding av L'Hopitals regel (alternativt Taylorutveckling av $\sin t$) fås

$$\lim_{t\to 0} \frac{t-\sin t}{t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{3t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{6t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos t}{6} = \frac{1}{6},$$

och alltså

$$\lim_{t\to 0} \frac{A(S_t)}{t^3} = \frac{r^2}{12}.$$

□