KTH VETENSKAP OCH KONST

KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
11 januari 2021

Skrivtid: 14:00-17:00
Tillåtna hjälpmedel: inga.
Allt plagiat som vi hittar i inlämnade lösningar kommer att rapporteras.

Examinator: Danijela Damjanović

Tentamen består av sex uppgifter som vardera ger maximalt sex poäng.

Del A på tentamen utgörs av de två första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från uppgift 1 adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på uppgift 1 kan dock som högst bli 6 poäng.

De två följande uppgifterna utgör del B och de två sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

Instruktioner

- **För poäng på en uppgift krävs att** lösningen är väl presenterad och lätt att följa.
- Det innebär att lösningarna ska vara prydligt skrivna med en handstil som är lätt att läsa.
- Det innebär också att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Alla steg i alla beräkningar ska finnas redovisade och vara lätta att följa.
- **Lösningar och svar utan korrekta, utförliga och tydliga motiveringar ger inga poäng.**

0. Hederskodex. Se uppgift 0 i Canvas. Hederskodex är obligatorisk och tentamen rättas inte (blir underkänd) om du inte har lämnat in hederskodex.

Del A

1. Följande linjära ekvationssystem är givet

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 2 \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\ -3x_1 + 10x_2 - 6x_3 - 7x_4 &= -4 \end{aligned}$$

(a) Hitta alla lösningar till systemet. **(3 p)**

(b) Låt V vara ett delrum i $\mathbb{R}^4$ där V =span$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ och där

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 10 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Bestäm en bas för $V^{\perp}$. **(3 p)**

2. Bestäm determinanten $\det A$, där **(6 p)**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

DEL B

3. Planet V i $\mathbb{R}^3$ ges av ekvationen $2x - y + 3z = 0$. Linjen L i $\mathbb{R}^3$ ges på parameterform av

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestäm skärningen mellan planet V och linjen L. **(3 p)**

(b) Bestäm ett ekvationssystem vars lösningsmängd är L. **(3 p)**

4. Följande två vektorer är givna

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Hitta en vektor $\vec{v}_3$ så att $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ och $\vec{v}_3$ bildar en ortonormal bas $\mathcal{B}$ för $\mathbb{R}^3$. **(2 p)**

(b) Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära transformationen som avbildar $\vec{v}_1$ på $\vec{v}_3$ och $\vec{v}_3$ på $\vec{v}_1$ och har $\vec{v}_2$ som en egenvektor med egenvärdet $\lambda = -5$. Bestäm matrisen för avbildningen med avseende på basen $\mathcal{B}$ dvs $[T]_{\mathcal{B}}$. **(4 p)**

DEL C

5. Två $n \times n$-matriser A och B sägs vara *samtidigt diagonaliserbara* om det finns en gemensam bas av egenvektorer dvs om det finns en inverterbar $n \times n$ matris S sådan att $S^{-1}AS$ och $S^{-1}BS$ är diagonalmatriser.

(a) Bevisa att $AB = BA$ om A och B är samtidigt diagonaliserbara. **(3 p)**

(b) Bevisa att A och B är samtidigt diagonaliserbara om vi antar att $AB = BA$ och A har n stycket distinkta egenvärden. **(3 p)**

6. Om A är en reel symmetrisk 3×3 matris låt $q_A(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ vara den associerade kvadratiska formen.

(a) Låt λ vara ett egenvärde till A och $\vec{v}$ en motsvarande egenvektor som är normaliserad så att $\|\vec{v}\| = 1$. Bestäm $q_A(\vec{v})$. **(1 p)**

(b) Antag att det minsta egenvärdet till A är 1. Bevisa att $q_A(\vec{x}) \geq 1$ för varje enhetsvektor $\vec{x}$ (dvs. $\|\vec{x}\| = 1$). (Tips: bevisa först att $q_A(\vec{x}) \geq 1$ för varje enhetsvektor $\vec{x}$, där A är diagonal). **(5 p)**