KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen 2014-05-20

DEL A

1. Planet P innehåller punkterna $(1,1,0)$, $(0,3,1)$ och $(2,2,2)$.
   (a) Bestäm en ekvation, på formen $ax+by+cz+d=0$, för planet P. **(2 p)**
   (b) Bestäm en ekvation för det plan som är ortogonalt mot P och som innehåller linjen $(x,y,z)=(t+1,2t,1-t)$. **(2 p)**

Lösning. (a) Vi beteknar $K=(1,1,0)$, $L=(0,3,1)$ och $M=(2,2,2)$. Allmänt plan som passerar punkten K har ekvation

$$A(x-1)+B(y-1)+Cz=0,$$

där vektoren av koefficienter (A,B,C) är en normalvektor till planet. Vi söker normalvektorn som kryssprodukt

$$\mathbf{n}=KL\times KM.$$

Vi har $KL=(-1,2,1)$ och $KM=(1,1,2)$. Detta ger oss

$$\mathbf{n}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\-1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}=(3,3,-3).$$

Planets ekvationen blir $3(x-1)+3(y-1)+3z=0$ eller enklare $x+y-z=2$.

(b) Sökta planet Q är parallelt med normalvektor $\mathbf{n}=(3,3,-3)$ till planet P. Dessutom är det parallelt också med linjens riktningsvektorn $\mathbf{r}=(1,2,-1)$. Vi får då normalvektorn $\mathbf{N}$ till planet Q som kryssprodukt

$$\mathbf{N}=\mathbf{n}\times\mathbf{r}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\3&3&-3\\1&2&-1\end{vmatrix}=(3,0,3).$$

Ekvation av planet Q blir då $3x+3z+D=0$. För att bestämma konstanten D stoppar vi linjens koordinater $x=t+1$, $y=2t$, $z=1-t$ till planets ekvation. Detta ger oss $D=-6$ och ekvationen blir $3x+3z-6=0$ eller enklare $x+z=2$.

$\square$

Svar:
(a) $x+y-z=2$

(b) $x + z = 2$

2. För varje givet tal a har vi följande ekvationssystem i tre okända x, y och z:

$$\begin{cases} 2x + 9y + 4z & = & 3 \\ -2x + 7y + 2z & = & 1 \\ 2x + y + (a^2 - 1)z & = & 1 \end{cases}$$

(a) Avgör om $(1, 1, 1)$ är med i lösningsmängden när $a = 0$. **(1 p)**
(b) Bestäm lösningsmängden när $a = 2$. **(1 p)**
(c) Bestäm för vilka värden på a som ekvationssystemet har en unik lösning, saknar lösning, respektive har oändligt många lösningar. **(2 p)**

Lösning. (a) För $a = 0$ har vi systemet

$$\begin{cases} 2x + 9y + 4z & = & 3 \\ -2x + 7y + 2z & = & 1 \\ 2x + y - z & = & 1 \end{cases}$$

Substitutionen av $x = 1, y = 1, z = 1$ i första ekvationen visar att $(1, 1, 1)$ inte ligger i lösningsmängden.

(b) Vi substituerar $a = 2$ och löser systemet

$$\begin{cases} 2x + 9y + 4z & = & 3 & \\ -2x + 7y + 2z & = & 1 & E2 + E1 \\ 2x + y + 3z & = & 1 & E3 - E1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 9y + 4z & = & 3 & \\ 16y + 6z & = & 4 & \\ -8y - z & = & -2 & E2/2 + E3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 9y + 4z & = & 3 \\ 16y + 6z & = & 4 \\ 2z & = & 0. \end{cases}$$

Härav $z = 0, y = 1/4, x = 3/8$.
Systemet har exakt en lösning $x = 3/8, y = 1/4, z = 0$, dvs lšsningsmängden består av exakt en punkt $(3/8, 1/4, 0)$. Alltså är lösningsmängden $\{(3/8, 1/4, 0)\}$.

(c) Låt A beteckna ekvationssystemets koefficientmatris. Ett kvadratisk ekvationssystem har exakt en lösning om och endast om $det(A) \neq 0$. Vi beräknar

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 4 \\ -2 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & (a^2 - 1) \end{vmatrix}$$

vid radutveckling langs med tredje raden. Detta ger

$$2 \det \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} - 1 \det \begin{bmatrix} 2 & 4\%2 & 2 \end{bmatrix} + (a^2 - 1) \det \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Detta ger att

$$\det(A) = 2 \cdot (-10) - 1 \cdot (12) + (a^2 - 1)(32) = 32(a^2 - 2).$$

Ekvationssystemet har exakt en unik lösning när $a \neq \pm\sqrt{2}$. När vi insätter $a = \pm\sqrt{2}$ då har vi att 2 gånger den tredje raden in total matrisen adderad till den andra raden, ger första raden. Det följer att totalmatrisen har rang 2, och att det finns oändligt många lösningar.

$\square$

Svar:

(a) Punkten $(1, 1, 1)$ ligger inte i lösningsmängden.
(b) Lösningsmängden är $\{(3/8, 1/4, 0)\}$, (innehåller endast en punkt).
(c) Ekvationssystemet har exakt en lösning när $a \neq \pm\sqrt{2}$. Oändligt många lösningar när $a = \pm\sqrt{2}$.

3. Diagonalisera matrisen
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},$$
och beräkna sedan A^{17}. **(4 p)**

Lösning. Egenvärden: Från den karakteristiska ekvationen
$$det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0$$
får vi två egenvärden $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 1$
Motsvarande *egenvektorer* bestämmer vi med hjälp av ekvationen
$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \qquad \text{dvs} \qquad \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -1 & -2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
För $\lambda_1 = -1$ har vi
$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
eller
$$\left\{\begin{matrix} 3x + 3y = 0 \\ -x - y = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow y = t, x = -t$$
Vi väljer en egenvektor $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
På liknande sätt får vi att $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor som svarar mot $\lambda_2 = 1$
Matrisen har två linjärt oberoende egenvektorer och därmed kan diagonaliseras.
Diagonalisering:
Vi bildar matriserna
$$P = [\vec{v}_1|\vec{v}_2] = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$
$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
och beräknar
$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$
Då gäller
$$P^{-1}AP = D \qquad \text{eller ekvivalent} \qquad A = PDP^{-1}.$$
Nu beräknar vi potensen A^{17}.
$$A^{17} = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \cdots (PDP^{-1}) = PD^{17}P^{-1}$$
$$= PD^{17}P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^{17} & 0 \\ 0 & 1^{17} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$\square$

Svar:

$$A^{17} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

DEL B

4. I $\mathbb{R}^4$ har vi följande vektorer

$$\vec{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{u_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{u_5} = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Delrummet $V = \operatorname{Span}\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}\}$ har dimension tre.

(a) Bestäm en bas för V. **(1 p)**

(b) Avgör om $V^\perp = \operatorname{Span}\{\vec{u_5}\}$. **(2 p)**

(c) Skriv V som lösningsmängden till ett linjärt ekvationssystem. **(1 p)**

Lösning. (a) Eftersom det är givet att $\dim V = 3$, söker vi en bas av V som tre vektorer valda av vektorerna $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_3}$, $\vec{u_4}$. Till exempel, försöker vi att ta tre första vektorer $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_3}$. Det räcker att visa att dem är linjärt oberoende eftersom om det vore så då har deras linjära höljet dimension 3 och måste således sammanfalla med V.

Vi undersöker samband $C_1\vec{u_1} + C_2\vec{u_2} + C_3\vec{u_3} = 0$. Det är ett homogent system av linjära ekvationer med matris

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -8 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Efter standard Gausselimination får vi trappstegmatris

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Systemet har icke-triviala lösningar vilket visar att vektorerna $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_3}$ inte utgör en bas, dem är linjärt beroende!

Nästa försök är att ta vektorer $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_4}$. Analog undersökning av sambandet $C_1\vec{u_1} + C_2\vec{u_2} + C_4\vec{u_4} = 0$ visar att det ända möjliga lösningar C_1, C_2, C_4 är $C_1 = C_2 = C_4 = 0$ vilket visar att vektorerna $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_4}$ är linjärt oberoende och dem utgör en bas av V.

(b) Man kollar först att alla vektorer i form $\vec{v} = (-7t, 2t, 4t, t)$ är vinkelräta mot alla vektorer $\vec{u_k}$, $k = 1, 2, 3, 4$ genom att räkna direkt skalärprodukt $\vec{v} \cdot \vec{u_k}$ (alla sådana skalärprodukter blir noll). Således alla sådana vektorer $\vec{v}$ är vinkelräta också till hela V och de ligger i ortogonala komplementet $V^\perp$. Detta visar att en-dimensionellt underrum $W = \{(-7t, 2t, 4t, t) \,:\, \text{godtyckliga } t\}$ är innehållet i ortogonala komplementet $V^\perp$.

Att underrummet W *sammanfaller* med $V^\perp$ ser man med hjälp av dimensioner. Alla vektorer $\vec{u_k}$ ligger i rum $\mathbb{R}^4$ av fyra dimensioner. Det är givet i uppgiften att $\dim V = 3$.

Detta ger oss $\dim V^\perp = 4 - 3 = 1$ d v s $V^\perp$ har dimension 1. Men underrummet W har också dimension 1 vilket visar att W och $V^\perp$ sammanfaller.

(c) Man kan t ex använda egenskap att $V = (V^\perp)^\perp = W^\perp$. Den visar att V består av dem vektorer som är vinkelräta mot alla vektorer i underrumet W d v s mot vektor $(-7, 2, 4, 1)$. Detta ger oss att V består av alla vektorer (x, y, z, t) som löser ekvationen $-7x + 2y + 4z + t = 0$.

$\square$

Svar:

(a) T ex $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_4}$.

(b) Ja.

(c) $-7x + 2y + 4z + t = 0$.

5. Vid en laboration får två studenter följande mätvärden

t (ms)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x (mm)	0	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3

Mätutrustningen är inte speciellt tillförlitlig och för att få ut det mest av mätningarna bestämmer sig studenterna för att använda minsta kvadratmetoden för att få reda på vilket linjärt samband $x = at + b$ som bäst passar de gjorda mätningarna. Den ena studenten hävdar att man skulle tjäna på att göra en substitution som leder till att man istället skriver sambandet som $x = a(t - 5\text{ ms}) + b$.

(a) Utför de räkningar som behövs för att bestämma det linjära sambandet, antingen med eller utan substitutionen. **(3 p)**

(b) Förklara varför det ena sättet leder till en lättare beräkning. **(1 p)**

Lösning. (a) Om vi använder substitutionen leder det till en förskjutning av t-värdena så att systemet kan skrivas som $Ax = b$ där

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -4 & 1 \\ -3 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

För att få en minsta kvadratllösning till det överbestämda systemet löser vi normalekvationen, dvs $A^T Ax = A^T b$. Vi får då

$$\begin{bmatrix} 110 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Eftersom koefficientmatrisen är en diagonalmatris får vi direkt lösningen som $a = 31/110 \approx 0{,}282$ och $b = 20/11 \approx 1{,}82$. Det linjära sambandet bör därmed vara

$$x = 31/110t + 20/11 - 5 \cdot 31/110 = 31/110t + 9/22.$$

Om man inte gör substitutionen får man istället

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 7 & 1 \\ 8 & 1 \\ 9 & 1 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Vi får då normalekvationen

$$\begin{bmatrix} 385 & 55 \\ 55 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 131 \\ 20 \end{bmatrix}$$

och vi kan lösa systemet med exempelvis Cramers regel eller med Gausselimination. Vi får då $a = 31/110 \approx 0{,}282$ och $b = 9/22 \approx 0{,}409$. Det linjära sambandet bör därmed vara

(b) I och med att koefficientmatrisen blir en diagonalmatris efter substitutionen är det lättare att lösa problemet på det viset. Man måste dock komma ihåg att återföra sambandet på den ursprungliga formen.

□

Svar:

(a) Vi får sambandet $x = 31/110t + 9/22$.

(b) Det blir lättare att lösa normalekvationen efter substitutionen.

6. Låt L vara en linje genom origo i planet. Låt $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som speglar planet i linjen L. Vi låter N vara linjen som är ortogonal mot L och som går genom origo. Låt $\vec{u}$ vara en riktningsvektor för L, och $\vec{n}$ en riktningsvektor för N.
   (a) Vad är $T(\vec{u})$, och vad är $T(\vec{n})$? **(1 p)**
   (b) Bestäm egenvektorer och egenvärden till avbildningen T. **(1 p)**
   (c) Skriv $T(3\vec{u} + 4\vec{n})$ som en linjärkombination av $\vec{u}$ och $\vec{n}$. **(2 p)**

Lösning. (a) Eftersom $\vec{u}$, som en riktniningsvektor, är parallell med linjen L blir spegelbilden av $\vec{u}$ lika med $\vec{u}$. Alltså $T(\vec{u}) = \vec{u}$.
Vektorn $\vec{n}$ som är vinkelrät mot linjen har spegelbilden $-\vec{n}$. Därför $T(\vec{n}) = -\vec{n}$.

(b) En vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ är en egenvektor till avbildningen T om det finns ett tal λ så att

$$T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$$

Talet λ är i detta fall avbildningens egenvärde. Från första delen har vi

$$T(\vec{u}) = 1 \cdot \vec{u} \qquad \text{och} \qquad T(\vec{n}) = -1 \cdot \vec{n}$$

Alltså är $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = -1$ avbildningens egenvärden med motsvarade egenvektorer $\vec{u}$ och $\vec{n}$. Vektorerna $t\vec{u}, t \in R$ och $s\vec{n}, s \in R$ är också egenvektorer till T som svarar mot $\lambda_1 = 1$, respektive $\lambda_2 = -1$. (Deta ser vi enkelt: T ex. $T(t\vec{u}) = tT(\vec{u}) = 1 \cdot t\vec{u}$ visar att $t\vec{u}$, för varje *t*, är en egenvektor med egenvärden 1).
En avbildning $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ kan ha maximalt 2 egenvärden (den karakteristiska ekvationen har grad 2 och, i vårt fall, har två rella enkla rötter 1 och -1) Med andra ord har vi funnit alla egenvärden. Både λ_1 och λ_2 har algebraiska multipliciteten =1.
Förutom $t\vec{u}, t \in \mathbb{R}$ finns det inte andra egenvektorer tillhörande $\lambda_1 = 1$ eftersom (dimensionen för egenrummet $E_{\lambda 1}$) $\leq$ (egenvärdes algebraiska multipliciteten)=1.
Samma resonemang gäller för egenvektorer motsvarande $\lambda_2 = -1$.
Alltså har T följande egenvärden:
$\lambda_1 = 1$, med motsvarande egenvektorer $t\vec{u}, t \in R$
$\lambda_2 = -1$ med motsvarande egenvektorer $s\vec{n}, s \in R$

(c) $T(\vec{w}) = T(3\vec{u} + 4\vec{n}) =$ (enligt definitionen av en linjär avbildning)
$= 3T(\vec{u}) + 4T(\vec{n}) =$ (enligt första delen)
$= 3\vec{u} - 4\vec{n}$

$\square$

Svar:
(a) $T(\vec{u}) = \vec{u}, T(\vec{n}) = -\vec{n}$.
(b) $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = -1$ är avbildningens egenvärden med motsvarade egenvektorer $t\vec{u}$ och $s\vec{n}$.
(c) $T(\vec{w}) = 3\vec{u} - 4\vec{n}$

DEL C

7. Bestäm alla linjära avbildningar $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som uppfyller följande två krav: **(4 p)**
   (a) Vektorerna
   $$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
   utgör en bas för nollrummet för T.
   (b) Bildrummet för T är linjen med riktningsvektor $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Lösning. Varje linjär avbildning bestäms med hur avbildar den vissa basvektorer. Vi väljer följande basvektorer i rummet $\mathbf{R}^3$: $\vec{v_1} = (1, -1, 0)$, $\vec{v_2} = (0, 1, 1)$ och

$$\vec{v_3} = \vec{v_1} \times \vec{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 1).$$

Vi kollar att vektorer $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ och $\vec{v_3}$ utgör en bas i $\mathbf{R}^3$ genom t ex att räkna determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Varje vektor $\vec{v}$ i rummet $\mathbf{R}^3$ kan skrivas då som linjär kombination

$$\vec{v} = c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + c_3\vec{v_3}.$$

Vektoren $\vec{v_3}$ är vinkelrät mot $\vec{v_1}$ och $\vec{v_2}$ vilket ger oss att $c_3\vec{v_3}$ är projektion av $\vec{v}$ på linjen parallel med $\vec{v_3}$ och således

$$c_3 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v_3}}{\|\vec{v_3}\|^2} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v_3}}{3}.$$

Vi får då

$$T\vec{v} = c_1T\vec{v_1} + c_2T\vec{v_2} + c_3T\vec{v_3}.$$

Men $T\vec{v_1} = T\vec{v_2} = \vec{0}$ enligt (a) i uppgiften och $T\vec{v_3} = C(0, 0, 1)$ enligt (b) i uppgiften (här C är någon konstant). Tillsammans får vi

$$T\vec{v} = C\frac{\vec{v} \cdot \vec{v_3}}{3} \cdot (0, 0, 1) = D(\vec{v} \cdot \vec{v_3})\,(0, 0, 1)$$

(där $D = C/3$ är en godtycklig konstant). Om $\vec{v} = (x, y, z)$, då får vi

$$T\vec{v} = (0, 0, D(-x - y + z)).$$

□

Svar:

(a) $T\vec{v} = (0, 0, D(-x - y + z))$, där $\vec{v} = (x, y, z)$ och D är godtycklig konstant.

8. På Algebramuseet finns en projektionsmaskin. Om man stoppar in en vektor $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^3$ och trycker på en knapp så matar maskinen ut den ortogonala projektionen av $\vec{v}$ på ett (fixerat) tvådimensionellt delrum W till $\mathbb{R}^3$.

   Maskinen börjar bli gammal och håller bara för två knapptryckningar till. Tyvärr går den inte att reparera så museets chefsingenjör vill i stället bygga en ny maskin med exakt samma funktion. Problemet är att hon inte vet vilket delrum W maskinen är byggd för.

   Chefsingenjören är visserligen väldigt bra på linjär algebra, men räcker två knapptryckningar för att hon säkert ska kunna lista ut vad W är innan maskinen går sönder?

(4 p)

Lösning. Chefsingenjören tar två linjärt oberoende vektorer $\bar{u}$ och $\bar{v}$ i $\mathbb{R}^3$ och använder de två knapptryckningarna till att ta reda på $\bar{u}' = \mathrm{proj}_W \bar{u}$ och $\bar{v}' = \mathrm{proj}_W \bar{v}$. Om $\bar{u}' = \bar{u}$ och $\bar{v}' = \bar{v}$ ligger båda dessa vektorer i planet W och eftersom $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är linjärt oberoende utgör de en bas för W; därmed är W entydigt bestämd. Om $\bar{u}' \neq \bar{u}$ så är differensen $\bar{u} - \bar{u}' = \bar{u} - \mathrm{proj}_W \bar{u}$ en normalvektor till W och om $\bar{v}' \neq \bar{v}$ är $\bar{v} - \bar{v}'$ en normalvektor. I båda fallen är W alltså entydigt bestämd. $\square$

Svar: Ja, det räcker med två knapptryckningar.

9. Låt A vara en symmetrisk 4×4-matris som har följande två egenskaper:
   (a) Rangen till matrisen A är 2.
   (b) Vektorerna
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
   är egenvektorer med egenvärdet 2.

   Bestäm alla egenvektorer till A. **(4 p)**

Lösning. Vi betecknar egenvektorer givna i (b) med $\vec{w_1} = (1, 2, 0, 1)$ och $\vec{w_2} = (0, 1, 1, 0)$. Man ser lätt att dem två vektorerna är linjärt oberoende och således deras linjära höljet W har dimension 2. Alla vektorer i W har formen
$$\vec{w} = c\vec{w_1} + d\vec{w_2} = (c, 2c + d, d, c)$$
och alla dem är egenvektorer med egenvärdet 2. Detta visar att egenvärdet $\lambda = 2$ har multiplicitet minst 2.

Enligt spektralsats så finns det någon ON bas av egenvektorer till matris A: $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$, $\vec{v_4}$. I denna bas blir matrisen A en diagonalmatris med diagonala elementer λ_1, λ_2, λ_3, λ_4. Två första egenvärdena är $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Men eftersom rangen till A är 2 enligt (a) i uppgiften, så får vi $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Detta visar att underrum av egenvektorer som hör till egenvärdet 2 har dimension 2 och det sammanfaller med underrummet W erhållet tidigare. Annat underrum består av egenvektorer som hör till egenvärdet 0 och det är ortogonala komplementet till W.

För att bestämma ortogonala komplementet löser vi linjära systemet
$$\begin{cases} x + 2y + t = 0 \\ y + z = 0. \end{cases}$$
Standard Gausselimination ger oss lösningar
$$(x, y, z, t) = (2a - b, -a, a, b)$$
där a, b är godtyckliga konstanter. Det är allmän form av egenvektorer som hör till egenvärdet 0.

□

Svar:
(a) Egenvektorer som hör till egenvärdet $\lambda = 2$ är $(c, 2c + d, d, c)$. Egenvektorer som hör till egenvärdet $\lambda = 0$ är $(2a - b, -a, a, b)$. Här a, b, c, d är godtyckliga konstanter.