KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2020.10.15

Del A

1. (a) Bestäm alla funktioner $y(t)$ som uppfyller $y'' + y' - 2y = 0$. **(2 p)**
   (b) Bestäm alla funktioner $y(t)$ som uppfyller **(4 p)**

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 4e^{-t} \\ \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0 \\ y(0) = 5. \end{cases}$$

Lösning. (a) Den givna ekvationen har den karakteristiska ekvationen $r^2 + r - 2 = 0$ som har rötterna $r = 1$ och $r = -2$. Således ges den allmänna lösningen till ekvationen av

$$y = Ae^t + Be^{-2t}$$

där A och B är konstanter. Vi vet från teorin att detta är samtliga lösningar till ekvationen, dvs varje lösning är på denna form.

(b) Vi söker först en partikulärlösning y_p till den inhomogena ekvationen $y'' + y' - 2y = 4e^{-t}$. Eftersom vi har $4e^{-t}$ i högerledet gör vi ansatsen $y_p = ae^{-t}$, där a är en konstant. Vi har då $y_p' = -ae^{-t}$ och $y_p' = ae^{-t}$. Insättning i ekvationen ger

$$ae^{-t} - ae^{-t} - 2ae^{-t} = 4e^{-t}.$$

Dividerar vi med e^{-t} (som aldrig är noll) fås ekvationen $-2a = 4$, vilket ger $a = -2$. Således är $y_p = -2e^{-t}$ en partikulärlösning.

I del (a) såg vi att $y_h = Ae^t + Be^{-2t}$ är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation. Således ges den allmänna lösningen till ekvationen $y'' + y' - 2y = 4e^{-t}$ av

$$y = y_h + y_p = Ae^t + Be^{-2t} - 2e^{-t},$$

där A och B är konstanter.

Nu söker vi A och B så att de givna villkoren är uppfyllda. Eftersom $\lim_{t\to\infty} e^t = \infty$ (och $\lim_{t\to\infty} e^{-t} = \lim_{t\to\infty} e^{-2t} = 0$) ser vi att vi måste ha $A = 0$ för att $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ ska kunna vara uppfyllt. Således måste vi ha

$$y = Be^{-2t} - 2e^{-t}.$$

För varje val av konstanten B har vi då $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Villkoret $y(0) = 5$ ger ekvationen $5 = y(0) = B - 2$, vilket ger $B = 7$. Således är

$$y = 7e^{-2t} - 2e^{-t}$$

den sökta lösningen.

Svar: a) $y = Ae^t + Be^{-2t}$ där A och B är konstanter, b) $y = 7e^{-2t} - 2e^{-t}$. $\square$

2. Beräkna följande integraler: **(3+3 p)**

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx \quad \text{och} \quad \int \frac{x+4}{x^2+2x}\,dx$$

Lösning. (a) Vi gör variabelsubstitutionen $u = 1 + e^x$, och får då $du = e^x dx$ och de nya integrationsgränserna $u(0) = 2$ och $u(\ln 2) = 3$, vilket ger

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx = \int_2^3 \frac{du}{\sqrt{u}} = \left[2\sqrt{u}\right]_2^3 = 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

(b) Vi börjar med att partialbråksuppdela. Eftersom $\frac{x+4}{x^2+2x} = \frac{x+4}{x(x+2)}$ söker vi konstanter A och B så att

$$\frac{x+4}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}.$$

Multiplicerar vi upp nämnaren $x(x+2)$ får vi $x+4 = A(x+2)+Bx$, vilket vi kan skriva

$$x + 4 = (A + B)x + 2A.$$

Identifierar vi respektive koefficienter på båda sidor fås ekvationssystemet

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 2A = 4, \end{cases}$$

vilket har den unika lösningen $A = 2, B = -1$. Således har vi

$$\frac{x+4}{x(x+2)} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+2}.$$

Integerar vi nu detta fås

$$\int \frac{x+4}{x^2+2x}\,dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+2}\right)dx = 2\ln|x| - \ln|x+2| + C$$

Svar: a) $2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$, b) $2\ln|x| - \ln|x+2| + C$. $\square$

DEL B

3. Låt $f(x) = x \ln x$.
   (a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till f kring punkten $x = 1$ och använd det för att bestämma ett närmevärde till $3 \ln 3$. **(2 p)**
   (b) Är det sant att närmevärdet i (a) avviker med högst $1/10$ från det faktiska värdet? **(3 p)**
   (c) Är närmevärdet större eller mindre än $3 \ln 3$? **(1 p)**

Lösning. Vi noterar först att

$$f'(x) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1,\ f''(x) = \frac{1}{x},\ f'''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

(a) Det sökta Taylorpolynomet ges av

$$P(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

Använder vi det för att ge ett närmevärde till $3 \ln 3$ fås

$$3 \ln 3 = f(3) \approx P(3) = 2 + 2 = 4.$$

(b) Enligt Taylors formel har vi

$$f(x) = P(x) + \frac{f'''(s)}{3!}(x-1)^3$$

där s är ett tal mellan 1 och x. Använder vi denna formel med $x = 3$ fås

$$|3 \ln 3 - 4| = |f(3) - P(3)| = \left| \frac{f'''(s)}{3!}(3-1)^3 \right| = \left| \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{3!} \cdot 2^3 \right| = \frac{4}{3s^2}.$$

där s är ett tal sådant att $1 < s < 3$. Frågan är nu om $|3 \ln 3 - 4|$ är större eller mindre än $1/10$. Eftersom funktionen $g(x) = \frac{1}{x^2}$ är avtagande på $(0, \infty)$, och vi vet att $1 < s < 3$, har vi att $1/s^2 > 1/3^2$, vilket ger

$$\frac{4}{3s^2} > \frac{4}{3 \cdot 3^2} = \frac{4}{27} > \frac{4}{40} = \frac{1}{10}.$$

Således aviker närmevärdet 4 med mer än $1/10$ från $3 \ln 3$.

(c) Som vi såg ovan har vi (enligt Taylors formel)

$$f(3) - P(3) = \frac{f'''(s)}{3!}(3-1)^3 = -\frac{8}{s^2 3!}$$

där $1 < s < 3$. Eftersom högerledet är negativt har vi alltså att $f(3) - P(3) < 0$, dvs $3 \ln 3 - 4 < 0$. Med andra ord är närmevärdet större än $3 \ln 3$.

Svar: a) $P(x) = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2$, och $3 \ln 3 \approx P(3) = 4$; b) Närmevärdet avviker med mer än $1/10$; c) närmevärdet är större än $3 \ln 3$. $\square$

4. Hur många lösningar har ekvationen

$$\frac{1}{x} + 2\arctan x = 3?$$

Lösning. Låt

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2\arctan x.$$

Vi noterar att f är definerad för alla $x \neq 0$. Vi noterar också att den givna ekvationen kan skrivas $f(x) = 3$.

Eftersom $1/x < 0$ och $\arctan x < 0$ för alla $x < 0$ så har vi att $f(x) < 0$ för alla $x < 0$. Således kan inte ekvationen $f(x) = 3$ ha några lösningar i intervallet $(-\infty, 0)$. Det räcker därför att analysera funktionen $f(x)$ på intervallet $(0, \infty)$.

Vi har

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty \tag{1}$$

och

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x} + 2\arctan x\right) = 0 + 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi > 3. \tag{2}$$

Vidare,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{2x^2 - (1+x^2)}{x^2(1+x^2)} = \frac{x^2-1}{x^2(1+x^2)}.$$

Således ges de kritiska punkterna av $x^2 - 1 = 0$, dvs f har de kritiska punkterna $x = \pm 1$. Som vi noterat ovan behöver vi endast undersöka f på intervallet $(0, \infty)$. Vi får följande teckentabell för derivatan: $f'(x) < 0$ för $0 < x < 1$, och $f'(x) > 0$ för $x > 1$. Så f är strängt avtagande på $(0, 1]$ och strängt växande på $[1, \infty)$.

Eftersom f är avtagande på intervallet $(0, 1]$ så kan ekvationen $f(x) = 3$ ha högst en lösning i $(0, 1]$; och eftersom f är växande på intervallet $[1, \infty)$ så kan ekvationen $f(x) = 3$ ha högst en lösning i $[1, \infty)$

Vi noterar nu att $f(1) = -1 + 2\arctan(1) = 2\frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 < 3$. Eftersom f är kontinuerlig på intervallet $(0, 1]$, och eftersom $f(1) < 3$ och (1) ovan gäller (t ex har vi $f(1/10) > 3$), så ger satsen om mellanliggande värden att det måste finnas ett x_1 i intervallet $(0, 1)$ så att $f(x_1) = 3$. Eftersom f är kontinuerlig på intervallet $[1, \infty)$, och eftersom $f(1) < 3$ och (2) ovan gäller, så ger satsen om mellanliggande värden att det måste finnas ett x_2 i intervallet $(1, \infty)$ så att $f(x_2) = 3$.

Slutsats: ekvationen $f(x) = 3$ har precis 2 lösningar.

Svar: Ekvationen har precis två lösningar. $\square$

DEL C

5. Visa att för alla positiva heltal m och n gäller att
$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq \ln 2 \leq \sum_{k=m}^{2m-1} \frac{1}{k}.$$

Lösning. Låt $f(x) = 1/x$ och låt l vara ett positivt heltal. Eftersom f är avtagande på intervallet $(0, \infty)$ så har vi att för varje heltal $k \geq 1$ gäller $1/(k+1) \leq 1/x \leq 1/k$ för alla x sådana att $k \leq x \leq (k+1)$. Detta ger
$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$$
(tänk på att längden av intervallet $[k, k+1]$ är 1; rita en figur). Använder vi den första olikheten fås
$$\sum_{k=l+1}^{2l} \frac{1}{k} = \frac{1}{l+1} + \frac{1}{l+2} + \ldots + \frac{1}{2l} \leq \int_l^{l+1} \frac{dx}{x} + \int_{l+1}^{l+2} \frac{dx}{x} + \ldots + \int_{2l-1}^{2l} \frac{dx}{x} =$$
$$= \int_l^{2l} \frac{dx}{x} = [\ln|x|]_l^{2l} = \ln(2l) - \ln(l) = \ln(2l/l) = \ln 2.$$
Och använder vi den andra olikheten fås
$$\sum_{k=l}^{2l-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{l} + \frac{1}{l+1} + \ldots + \frac{1}{2l-1} \geq \int_l^{l+1} \frac{dx}{x} + \int_{l+1}^{l+2} \frac{dx}{x} + \ldots + \int_{2l-1}^{2l} \frac{dx}{x} =$$
$$= \int_l^{2l} \frac{dx}{x} = [\ln|x|]_l^{2l} = \ln(2l) - \ln(l) = \ln(2l/l) = \ln 2.$$
(Tips: rita en figur.)

Använder vi nu detta med $l = n$ respektive $l = m$ fås
$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq \ln 2 \leq \sum_{k=m}^{2m-1} \frac{1}{k}.$$

$\square$

6. (a) Antag att $f(0) = 0$ och att $|f(x)| > \sqrt{|x|}$ för alla $x \neq 0$. Visa att funktionen f inte kan vara deriverbar i punkten $x = 0$. **(3 p)**

(b) Antag att funktionen g är definierad på hela reella axeln och uppfyller följande villkor: $g'(0) = k,\ g(0) \neq 0$ och $g(x + y) = g(x)g(y)$ för alla x och y. Visa att $g(0) = 1$ och att $g'(x) = kg(x)$ för alla x. **(3 p)**

Lösning. (a) Om funktionen f ska vara deriverbar i punkten $x = 0$ ska gränsvärdet

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

existera. Och om detta gränsvärde existerar måste också gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{f(h) - f(0)}{h} \right| = |f'(0)| \tag{3}$$

existera (eftersom funktionen $g(x) = |x|$ är kontinuerlig).

Från antagandena på f har vi

$$\left| \frac{f(h) - f(0)}{h} \right| = \frac{|f(h)|}{|h|} \geq \frac{\sqrt{|h|}}{|h|} = \frac{1}{\sqrt{|h|}}.$$

Eftersom $\lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{|h|}} = \infty$ (notera att detta är ett oegentligt gränsvärde; gränsvärdet existerar ej) följer det från olikheten ovan att

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{f(h) - f(0)}{h} \right| = \infty,$$

(dvs gränsvärdet existerar inte). Således existerar inte gränsvärdet (3) ovan, vilket betyder att f inte är deriverbar i punkten $x = 0$.

(b) Om vi använder antagandet $g(x + y) = g(x)g(y)$ med $x = y = 0$ får vi

$$g(0) = g(0)g(0).$$

Eftersom vi antagit att $g(0) \neq 0$ så kan vi dividera detta med $g(0)$, vilket ger $g(0) = 1$.

Från antagandet att $g'(0) = k$ vet vi alltså att

$$k = \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - 1}{h}.$$

Här utnyttjar vi att $g(0) = 1$.

Tag nu ett reellt tal x. Vi har då, om vi använder antagandena på g, att

$$\frac{g(x + h) - g(x)}{h} = \frac{g(x)g(h) - g(x)}{h} = \frac{g(x)(g(h) - 1)}{h}.$$

Detta ger, om vi använder gränsvärdet ovan, att

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(x)(g(h) - 1)}{h} = g(x) \left(\lim_{h\to 0} \frac{g(h) - 1}{h} \right) = g(x)k.$$

$\square$