KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
måndag, 19 oktober 2020

Skrivtid: 08:00-11:00
Tillåtna hjälpmedel: inga.

Examinator: Danijela Damjanović

Tentamen består av sex uppgifter som vardera ger maximalt sex poäng.

Del A på tentamen utgörs av de två första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från **uppgift 1** adderas dina **bonuspoäng**. Poängsumman på **uppgift 1** kan dock som högst bli 6 poäng.

Uppgifterna 3 och 4 utgör del B och uppgifterna 5 och 6 del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

Instruktioner

- **För poäng på en uppgift krävs att** lösningen är väl presenterad och lätt att följa.
- Det innebär att lösningarna ska vara prydligt skrivna med en handstil som är lätt att läsa.
- Det innebär också att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Alla steg i alla beräkningar ska finnas redovisade och vara lätta att följa.
- Lösningar och svar utan korrekta, utförliga och tydliga motiveringar ger inga poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Låt A vara en inverterbar (3×3)-matris och låt $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm den reducerade trappstegformen till A. **(2 p)**

(b) Beräkna $\det(AB^3A^{-1}B^{-1})$. **(4 p)**

2. Linjerna L_1 och L_2 i $\mathbf{R}^3$ ges av

$$L_1 : \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{reella tal} \quad t,$$

$$L_2 : \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{reella tal} \quad s.$$

(a) Bestäm skärningen av L_1 och L_2. **(2 p)**

(b) Bestäm vinkeln mellan L_1 och L_2. **(2 p)**

(c) Ett plan går genom origo och är ortogonalt mot linjen L_1. Bestäm skalär ekvation för detta plan. **(2 p)**

DEL B

3. Låt S i $\mathbb{R}^5$ vara det linjära höljet

$$S = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

och låt vidare

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm dimensionen av det ortogonala komplementet $S^{\perp}$. **(2 p)**
(b) Avgör om $\vec{x}$ är med i $S^{\perp}$. **(2 p)**
(c) Avgör om $\vec{x}$ är med i S. **(2 p)**

4. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Visa att matrisen A inte är diagonaliserbar. **(3 p)**
(b) Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$. Beräkna (och förenkla) $A^{83}\vec{v}$. (*Tips: skriv $\vec{v}$ som linjär kombination av egenvektorer till A*).
(3 p)

DEL C

5. Låt A vara en symmetrisk (2×2)-matris. Utan att använda Spektralsatsen, visa

(a) att det karakteristiska polynomet till A enbart har reella nollställen. **(3 p)**
(b) att det finns en bas för $\mathbf{R}^2$ bestående av egenvektorer till A. **(3 p)**

6. Låt $P\colon V \to V$ vara en linjär avbildning sådan att $P \circ P = P$. En sådan avbildning kallas en projektion.

(a) Visa att för varje vektor $\vec{v}$ i V så ligger $\vec{v} - P(\vec{v})$ i nollrummet $\ker(P)$. **(2 p)**
(b) Visa att varje vektor $\vec{v}$ i V kan skrivas som $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, där $\vec{u}$ ligger i $\ker(P)$ och $\vec{w}$ ligger i bildrummet $\mathrm{Im(P)}$. **(2 p)**
(c) Visa att uppdelningen i b) är unik, det vill säga visa att om $\vec{v} = \vec{u_1} + \vec{w_1} = \vec{u_2} + \vec{w_2}$ där $\vec{u_1},\ \vec{u_2}$ ligger i $\ker(P)$ och $\vec{w_1},\ \vec{w_2}$ ligger i $\mathrm{Im(P)}$, så är $\vec{u_1} = \vec{u_2}$ och $\vec{w_1} = \vec{w_2}$. **(2 p)**