SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2022.06.09

DEL A

1. Låt $f(x) = \tan x$ och $g(x) = \sin(\ln x)$.
   (a) Är linjen $y = x$ tangent till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(0, f(0))$? **(3 p)**
   (b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till g kring $x = 1$. **(3 p)**

Lösning. (a) En ekvation för tangenten till $y = f(x)$ i punkten $(0, f(0))$ ges av

$$y = f(0) + f'(0)x.$$

Vi har $f(0) = \tan(0) = 0$. Vidare, eftersom $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ så har vi

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Detta ger att $f'(0) = 1$. Således är

$$y = x$$

tangent till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(0, f(0))$.

(b) Det sökta taylorpolynomet ges av $P(x) = g(1) + g'(1)(x-1) + \frac{g''(1)}{2}(x-1)^2$. Vi har

$$g'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x} \text{ och } g''(x) = \frac{(-\sin(\ln x)/x)\cdot x - \cos(\ln x)\cdot 1}{x^2}.$$

Eftersom $\ln 1 = 0, \cos(0) = 1$ och $\sin(0) = 0$ får vi nu att

$$\begin{aligned} P(x) =& g(1) + g'(1)(x-1) + \frac{g''(1)}{2}(x-1)^2 = 0 + 1(x-1) + \frac{(-1)}{2}(x-1)^2 \\ =&(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2}. \end{aligned}$$

Svar: (a) Ja, (b) $P(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2}$.

$\square$

2. Bestäm arean av det begränsade område som innesluts av kurvan $y = \dfrac{1}{1+4x^2}$ och linjen $y = 1/2$. Förenkla ditt svar så långt som möjligt. **(6 p)**

Lösning. Vi undersöker först var linjen $y = 1/2$ skär kurvan $y = \dfrac{1}{1+4x^2}$. Vi löser därför ekvationen

$$\frac{1}{1+4x^2} = \frac{1}{2}.$$

Detta ger att $1 + 4x^2 = 2$ vilket i sin tur ger att $x^2 = 1/4$, dvs $x = \pm 1/2$. Eftersom $1/(1+4x^2) > 1/2$ för $x \in (-1/2, 1/2)$ så ges den sökta arean av

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{1}{1+4x^2} - \frac{1}{2} \right) dx.$$

Integranden är jämn så

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{1}{1+4x^2} - \frac{1}{2} \right) dx = 2\int_{0}^{1/2} \left(\frac{1}{1+4x^2} - \frac{1}{2} \right) dx =$$

$$= 2\left[\frac{\arctan(2x)}{2} - \frac{x}{2} \right]_0^{1/2} = \arctan 1 - 1/2 = \pi/4 - 1/2 = \frac{\pi - 2}{4}.$$

Svar: Arean är $\dfrac{\pi - 2}{4}$ (a.e.) $\square$

DEL B

3. Bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = 2xe^{x-x^2}$. **(6 p)**

Lösning. Vi börjar med att notera att $f(x)$ är definierad för alla reella tal x. Vi ser också att

$$\lim_{x\to\infty} 2xe^{x-x^2} = 0 \text{ och } \lim_{x\to-\infty} 2xe^{x-x^2} = 0.$$

För att hitta eventuella största och minsta värden analyserar vi derivatan. Vi har

$$f'(x) = 2e^{x-x^2} + 2xe^{x-x^2}(1-2x) = 2e^{x-x^2}(1+x-2x^2).$$

Eftersom $e^{x-x^2} > 0$ för alla x så ges de kritiska punkterna av $1 + x - 2x^2 = 0$. Denna ekvation har rötterna $x = 1$ och $x = -1/2$. Vi får följande teckentabell för derivatan: $f'(x) < 0$ för $x < -1/2$ och för $x > 1$; $f'(x) > 0$ för $-1/2 < x < 1$.

Eftersom $f'(x) < 0$ för $x < -1/2$ och $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ har vi $-e^{-3/4} = f(-1/2) < f(x) < 0$ för alla $x \leq -1/2$; eftersom $f'(x) > 0$ för $-1/2 < x < 1$ har vi $f(-1/2) < f(x) \leq f(1) = 2$ för alla $-1/2 < x \leq 1$; eftersom $f'(x) < 0$ för $x > 1$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ har vi $2 = f(1) \geq f(x) > 0$ för alla $x \geq 1$.

Från analysen ovan ser vi att $2 = f(2) \geq f(x) \geq f(-1/2) = -e^{-3/4}$ för alla x. Eftersom f är kontinuerlig så följer det från satsen om mellanliggande värden att f antar alla värden mellan $-e^{-3/4} = f(-1/2)$ och $2 = f(2)$, dvs f:s värdemängd är $[-e^{-3/4}, 2]$.

Svar: Värdemängden är $[-e^{-3/4}, 2]$.

$\square$

4. Vilka av följande olikheter är sanna? (Glöm inte att motivera ordentligt.)

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+\arctan x} \leq 1.$ **(2 p)**

(b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{2x^2-\sin^2 x}\,dx \leq 1.$ **(2 p)**

(c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{x^3+\ln x}\,dx \leq 1.$ **(2 p)**

Lösning. (a) Eftersom $\arctan x \geq 0$ för alla $x \geq 0$ har vi $1/(1+\arctan x) \leq 1$ för alla $x \geq 0$. Således har vi

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+\arctan x} \leq \int_0^1 dx = 1.$$

Den första olikheten är alltså sann.

(b) Om oliketen skulle vara sann så skulle den generaliserade integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{2x^2-\sin^2 x}\,dx$ vara konvergent. Men, notera att (eftersom $\sin^2 x \geq 0$ för alla x)

$$\frac{x}{2x^2-\sin^2 x} \geq \frac{x}{2x^2} = \frac{1}{2x} > 0 \text{ för alla } x \geq 1,$$

och

$$\int_1^\infty \frac{dx}{2x} = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{dx}{2x} = \lim_{R\to\infty}\left[(\ln x)/2\right]_1^R = \lim_{R\to\infty}\frac{\ln R}{2} = \infty.$$

Eftersom den generaliserade integralen ovan är divergent så följer det från jämförelsesatsen att $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{2x^2-\sin^2 x}\,dx$ också är divergen. Alltså, olikheten (b) är falsk.

(c) Vi har att $\ln x \geq 0$ för alla $x \geq 1$ så $0 \leq x/(x^3+\ln x) \leq \frac{1}{x^2}$ för alla $x \geq 1$. Eftersom

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^R = \lim_{R\to\infty}(-1/R+1) = 1,$$

så följer det från jämförelsesatsen för generaliserade integraler med positiva integrander att integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{x^3+\ln x}\,dx$ också är konvergent och att

$$\int_1^\infty \frac{x}{x^3+\ln x}\,dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1.$$

Olikheten (c) är således sann.

Svar: Olikheterna (a) och (c) är sanna; olikheten (b) är falsk. □

DEL C

5. Finns det ett kortaste linjesegment sådant att ena ändpunkten är på x-axeln och den andra ändpunkten är på y-axeln och som går genom punkten $(9, \sqrt{3})$? Bestäm längden på ett sådant kortaste linjesegment om ett sådant finns, annars förklara varför det inte finns något. **(6 p)**

Lösning. Ett linjesegment som går genom en punkt $(t, 0)$, $t \leq 9$, och punkten $(9, \sqrt{3})$ kan inte ha en ändpunkt på x-axeln och en ändpunkt på y-axeln. Vi behöver därför inte betrakta sådana fall.

Givet en punkt $(t, 0)$, $t > 9$, så är $y = \sqrt{3} + \frac{0-\sqrt{3}}{t-9}(x-9)$ en ekvation för linjen som går genom punkten $(t, 0)$ och $(9, \sqrt{3})$. Sätter vi in $x = 0$ får vi att linjen skär y-axeln i punkten $\left(0, \sqrt{3} + \frac{9\sqrt{3}}{t-9}\right)$. Längden av linjesegmentet mellan punkterna $\left(0, \sqrt{3} + \frac{9\sqrt{3}}{t-9}\right)$ och $(t, 0)$ ges av

$$\sqrt{t^2 + \left(\sqrt{3} + \frac{9\sqrt{3}}{t-9}\right)^2}.$$

Vi vill se om detta uttryck har ett minimum på intervallet $(9, \infty)$, och bestämma detta värde om det existerar. Eftersom vi ska minmera ett avstånd kan vi lika gärna minimera kvadraten på avståndet (eftersom ett avstånd aldrig är negativt). Vi låter därför

$$f(t) = t^2 + \left(\sqrt{3} + \frac{9\sqrt{3}}{t-9}\right)^2 = t^2 + 3\left(1 + \frac{9}{t-9}\right)^2 = t^2 + 3\left(\frac{t}{t-9}\right)^2, t > 9.$$

För att undersöka om f har ett globalt minumum börjar vi med att titta på derivatan. Vi har

$$\begin{aligned} f'(t) =& 2t + 6\left(\frac{t}{t-9}\right) \cdot \frac{(t-9)-t}{(t-9)^2} = 2t - \frac{6t \cdot 9}{(t-9)^3} = 2t\left(1 - \frac{3 \cdot 9}{(t-9)^3}\right) = \\ =& 2t\left(1 - \frac{3^3}{(t-9)^3}\right). \end{aligned}$$

Eftersom vi endast är intresserade av kritiska punkter i intervallet $(9, \infty)$ måste sådana uppfylla $(3/(t-9))^3 = 1$. Detta är endast uppfyllt om $t - 9 = 3$, dvs för $t = 12$. Vi ser också att $f'(t) < 0$ för $9 < t < 12$ och $f'(t) > 0$ för $t > 12$. Således måste funktionen f ha ett globalt minimum i punkten $t = 12$. Detta betyder att ett kortaste linjesegment existerar, och att längden på detta är

$$\sqrt{f(12)} = \sqrt{12^2 + 3\left(\frac{12}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{12^2 \cdot 4}{3}} = \frac{12 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}.$$

Svar: Ett kortaste linjesegment finns; längden är $8\sqrt{3}$ (l.e.) □

6. Visa att för varje heltal $n \geq 1$ gäller: **(6 p)**

$$2\ln(2) - 1 \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq 2\ln(2) - 1 + \frac{\ln 2}{n}.$$

Lösning. Låt $f(x) = \ln(1+x)$. Vi har $f'(x) = 1/(1+x) > 0$ för alla $x > -1$, så f är växande på intervallet $(-1, \infty)$.

Fixera ett heltal $n \geq 1$. Eftersom f är växande så har vi för varje heltal $1 \leq k \leq n$ (notera att intervallet $[(k-1)/n, k/n]$ har längd $1/n$)

$$\frac{f((k-1)/n)}{n} \leq \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\,dx \leq \frac{f(k/n)}{n}.$$

Således har vi

(1) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{f((k-1)/n)}{n} \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{f(k/n)}{n}.$$

Vi har (via variabelbytet $t = x+1$)

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \int_1^2 \ln t\,dt.$$

Partiell integration ger nu

$$\int_1^2 1 \cdot \ln t\,dt = [t\ln t]_1^2 - \int_1^2 t \cdot \frac{1}{t}\,dt = 2\ln 2 - 1.$$

Från den andra olikheten i (1) har vi alltså

$$2\ln 2 - 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right),$$

vilket är den första delen av det vi vill visa.

Adderar vi $(\ln 2)/n$ på bägge sidor i den första delen av olikheten i (1) får vi

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{f((k-1)/n)}{n}\right) + \frac{\ln 2}{n} \leq \int_0^1 f(x)\,dx + \frac{\ln 2}{n} = 2\ln 2 - 1 + \frac{\ln 2}{n}.$$

Eftersom $f(0) = \ln(1) = 0$ och $f(n/n) = f(1) = \ln 2$ ser vi att vänsterledet i olikheten ovan kan skrivas

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{f((k-1)/n)}{n}\right) + \frac{\ln 2}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(k/n)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right).$$

Detta ger den andra delen som vi ville visa. $\square$