TENTAMEN

<table>
<tr><td>Kursnummer:</td><td>HF0024
Matematik för basår II</td></tr>
<tr><td>Moment:</td><td>TENB</td></tr>
<tr><td>Program:</td><td>Tekniskt basår</td></tr>
<tr><td>Rättande lärare:</td><td>Niclas Hjelm & Jonas Stenholm</td></tr>
<tr><td>Examinator:</td><td>Niclas Hjelm</td></tr>
<tr><td>Datum:
Tid:</td><td>2019-06-08
09:00-13:00</td></tr>
<tr><td>Hjälpmedel:</td><td>Formelsamling: Björk m fl ”Formler och tabeller” utan anteckningar, passare, gradskiva, penna, radergummi och linjal

Miniräknare är ej tillåten!</td></tr>
<tr><td>Omfattning och betygsgränser:</td><td>
<table>
<tr><th>Poäng</th><th>Betyg</th></tr>
<tr><td>11</td><td>Fx</td></tr>
<tr><td>12 – 14</td><td>E</td></tr>
<tr><td>15 – 17</td><td>D</td></tr>
<tr><td>18 – 20</td><td>C</td></tr>
<tr><td>21 – 23</td><td>B</td></tr>
<tr><td>24 – 26</td><td>A</td></tr>
</table>

Till samtliga uppgifter krävs fullständiga lösningar. Lösningarna skall vara tydliga och lätta att följa. Införda beteckningar skall definieras. Uppställda samband skall motiveras. Skriv helst med blyertspenna!
Svaret ska framgå tydligt och vara förenklat så långt som möjligt. Svara med enhet och lämplig avrundning på tillämpade uppgifter. Svara exakt på övriga uppgifter, om inte annat anges.</td></tr>
</table>

1. En talföljd definieras rekursivt med följande formel: $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$. De två första elementen är: $a_1 = 3$ och $a_2 = 4$. Bestäm summan av de fyra första elementen i talföljden. **(2p)**

2. Beräkna värdet av följande komplexa uttryck och svara på formen a+bi:

$$\frac{10}{i-3} - \frac{10}{i+3}$$

(2p)

3. Grafen till $f(x) = x - x^2$ innesluter tillsammans med x-axeln ett område i första kvadranten. Detta område får rotera runt x-axeln. Bestäm volymen av den rotationskropp som då bildas. **(2p)**

4. Lös differentialekvationen $e^x yy' = 1$ med villkoret *y*(0) = -2. **(2p)**

5. Lös ekvationen: $z^2 = 1 + \sqrt{3} \cdot i$. **(2p)**

6. Lös följande differentialekvation: $3y' + 12y = \sin x$ **(2p)**

7. Antalet bakterier y i en näringslösning tillväxer med en momentan hastighet som är 7,6 % av den aktuella bakteriemängden, per timme. Från början var antalet bakterier 20 000 st. Ställ upp och lös den differentialekvation som beskriver detta förlopp. **(2p)**

8. Bestäm samtliga primitiva funktioner, $F(x)$, till $f(x) = (\sin x + \cos x) \cdot x$. **(2p)**

9. Bestäm samtliga lösningar till följande polynomekvation: $3z^3 - z^2 + 27z - 9 = 0$, där z är ett komplext tal. En av ekvationens lösningar är $z = 3i$. **(3p)**

10. Lös följande differentialekvation: $y'' + 9y = 0$, med villkoren $y\left(\frac{\pi}{9}\right) = 2$ och $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. **(2p)**

11. De tal $z = x + yi$ som uppfyller villkoret $|z - 6i| = \operatorname{Im} z + 2$, bildar en kurva i det komplexa talplanet. Bestäm funktionen $y(x)$ som motsvarar den kurvan (d.v.s. bestäm sambandet mellan real- och imaginärdelarna hos z). **(3p)**

12. En viss typ av kurvor $y(x)$ har den egenskapen att de i varje punkt (x, y) där de existerar har en tangent som bildar rät vinkel mot den linje som går genom origo och punkten (x, y). Ställ upp och lös en differentialekvation för denna typ av kurva. **(2p)**

Lösningsförslag

1. De fyra första elementen bestäms: ($a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$)

$$a_3 = a_2 - a_1 = 4 - 3 = 1$$
$$a_4 = a_3 - a_2 = 1 - 4 = -3$$

Summan av de fyra första elementen är $s = 3 + 4 + 1 + (-3) = 5$

Svar: Summan är 5.

2. $$\frac{10}{i-3} - \frac{10}{i+3} = \frac{10\cdot(i+3)}{(i-3)\cdot(i+3)} - \frac{10\cdot(i-3)}{(i+3)\cdot(i-3)} = \frac{60}{-10} = -6$$

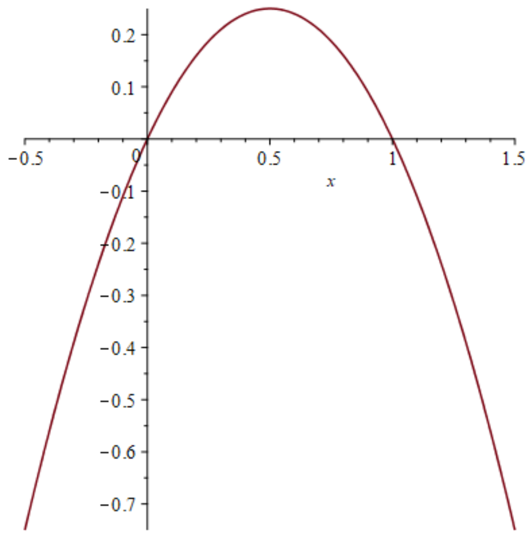
Svar: $-6 + 0 \cdot i = -6$

3. Skivmetoden är lämplig här. Formel för skivmetoden vid rotation kring x-axeln:

$V = \int_a^b \pi y^2 dx$ där $y = f(x) = x - x^2$. Integrationsgränserna a och b måste bestämmas.

Integrationsgränserna är de punkter där grafen skär x-axeln:

$$x - x^2 = x \cdot (1 - x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$



Volymsintegralen blir alltså: $V=\int_0^1 \pi(x-x^2)^2\,dx$

$$V=\int_0^1 \pi(x-x^2)^2\,dx=\pi\cdot\int_0^1 (x^2-2x^3+x^4)\cdot dx=\pi\cdot\left[\frac{x^3}{3}-\frac{2x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right]_0^1=$$
$$=\pi\cdot\left((\frac{1^3}{3}-\frac{2\cdot 1^4}{4}+\frac{1^5}{5})-(\frac{0^3}{3}-\frac{2\cdot 0^4}{4}+\frac{0^5}{5})\right)=\pi\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)=\pi\cdot\left(\frac{10}{30}-\frac{15}{30}+\frac{6}{30}\right)=\frac{\pi}{30}\ v.e.$$

Svar: Rotationskroppens volym är $\frac{\pi}{30}$ $v.e$

4. Differentialekvationen är separabel. Variabelseparation ger

$$e^x y\frac{dy}{dx}=1$$

$$y\frac{dy}{dx}=e^{-x}$$

$$\int y\,dy=\int e^{-x}dx\,.$$

Integration ger $\frac{y^2}{2}=-e^{-x}+C$. Lös ut $y=\pm\sqrt{2\left(C-e^{-x}\right)}$.

För att kunna uppfylla villkoret, måste vi välja den negativa roten.

Insättning av villkoret ger $-2=-\sqrt{2\left(C-1\right)}\Rightarrow 4=2\left(C-1\right)\Leftrightarrow$ C= 3.

Svar: $y=-\sqrt{2\left(3-e^{-x}\right)}=-\sqrt{6-2e^{-x}}$.

5. $$z^2=1+\sqrt{3}\cdot i$$

Skriv ekvationen på polär form:

$$(r\cdot(\cos v+i\sin v))^2=r^2\cdot(\cos 2v+i\sin 2v)=2\cdot(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$$

Detta ger $\begin{cases} r^2=2 \\ 2v=\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=\sqrt{2} \\ v=\frac{\pi}{6}+n\cdot\pi \end{cases}$

Det finns två olika lösningar: $z_1=\sqrt{2}\cdot(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6})$ och $z_2=\sqrt{2}\cdot(\cos\frac{7\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{7\pi}{6})$

Svar: Två lösningar, $z_1 = \sqrt{2}\cdot(\cos\frac{\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{\pi}{6})$ och $z_2 = \sqrt{2}\cdot(\cos\frac{7\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{7\pi}{6})$, eller på rektangulär form $z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ och $z_1 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. $3y' + 12y = \sin x$

Ekvationen är inhomogen. Vi bestämmer alltså först en lösning y_h till motsvarande homogena ekvation, därefter en partikulärlösning y_p till den givna ekvationen, och får den allmänna lösningen som summan $y = y_h + y_p$ av dessa.

Homogen lösning: $3y' + 12y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' + 4y = 0$ har lösning $y_h = Ce^{-4x}$

Partikulärlösning: Ansats: $y_p = a\sin x + b\cos x$ och $y_p' = a\cos x - b\sin x$ insättes...

$3\cdot(a\cos x - b\sin x) + 12\cdot(a\sin x + b\cos x) = \sin x$

$(3a + 12b)\cdot\cos x + (12a - 3b)\cdot\sin x = \sin x$

För att vänster och höger led ska kunna vara lika för alla x, så måste koefficienterna i vänster led vara lika med motsvarande koefficienter i höger led:

$$\begin{cases} 3a + 12b = 0 \\ 12a - 3b = 1 \end{cases} \quad \text{som ger} \quad \begin{cases} a = \dfrac{4}{51} \\ b = -\dfrac{1}{51} \end{cases} \quad \text{d.v.s.}$$

$$y_p = \frac{4}{51}\cdot\sin x - \frac{1}{51}\cdot\cos x$$

Allmän lösning: $y = Ce^{-4x} + \frac{4}{51}\cdot\sin x - \frac{1}{51}\cdot\cos x$

Svar: Den allmänna lösningen är $y = Ce^{-4x} + \frac{4}{51}\cdot\sin x - \frac{1}{51}\cdot\cos x$

7. Differentialekvationen blir: $y' = 0{,}076y$ med villkoret $y(0) = 20000$,
där y är antalet bakterier och y' är tillväxttakten i antal bakterier per timme.

Lösning: $y' - 0{,}076y = 0$ med lösning $y(t) = Ce^{0{,}076\cdot t}$

Villkoret ger att $y(t) = 20000\cdot e^{0{,}076\cdot t}$

Svar: Lösningen är $y(t) = 20000\cdot e^{0{,}076\cdot t}$

8. Använd partiell integration , formel $\int f \cdot g \cdot dx = F \cdot g - \int F \cdot g' \cdot dx$

$$\int (\sin x + \cos x) \cdot x \cdot dx = (-\cos x + \sin x) \cdot x - \int (-\cos x + \sin x) \cdot 1 \cdot dx =$$
$$= (-\cos x + \sin x) \cdot x - (-\sin x - \cos x) + C = (-\cos x + \sin x) \cdot x + \sin x + \cos x + C$$

Svar: Samtliga primitiva funktioner till $f(x)$ ges av $F(x) = (-\cos x + \sin x) \cdot x + \sin x + \cos x + C$, där C är en godtycklig konstant.

9. $3z^3 - z^2 + 27z - 9 = 0$

Givet att en lösning är $z_1 = 3i$. Eftersom ekvationen enbart har reella koefficienter så måste också konjugatet $\overline{z}_1 = -3i$ vara en lösning. Då är

$(z - 3i) \cdot (z - (-3i)) = (z - 3i) \cdot (z + 3i) = z^2 - (3i)^2 = z^2 + 9$ en faktor i polynomet.

Polynomdivision:

$$\begin{array}{r|l} & 3z - 1 \\ \hline z^2 + 9 & 3z^3 - z^2 + 27z - 9 \\ & -(3z^3 \quad + 27z) \\ \hline & \quad -z^2 - 9 \\ & -(-z^2 - 9) \\ \hline & \quad 0 \end{array}$$

Det betyder att VL i ekvationen kan skrivas $3z^3 - z^2 + 27z - 9 = (z^2 + 9) \cdot (3z - 1)$

Ekvationens tredje och sista lösning ges därför av : $3z - 1 = 0$ så $z = \dfrac{1}{3}$

Svar: Lösningarna är $z_1 = 3i$, $z_2 = -3i$ och $z_3 = \dfrac{1}{3}$

10. $y'' + 9y = 0$ har karakteristisk ekvation $r^2 + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm 3i$

och därmed lösningarna $y(x) = C\cos 3x + D\sin 3x$ (formelsamling sid 39).

För att bestämma konstanterna används villkoren: $y\left(\dfrac{\pi}{9}\right) = 2$ och $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = C\cos 3 \cdot \frac{\pi}{4} + D\sin 3 \cdot \frac{\pi}{4} = C \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + D \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = D$$

$$y\left(\frac{\pi}{9}\right) = C\cos 3 \cdot \frac{\pi}{9} + D\sin 3 \cdot \frac{\pi}{9} = C\cos\frac{\pi}{3} + C\sin\frac{\pi}{3} = C \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$C = \frac{4}{1 + \sqrt{3}} = D$$

$$y(x)=\frac{4}{1+\sqrt{3}}\cdot\cos 3x+\frac{4}{1+\sqrt{3}}\cdot\sin 3x=$$
$$\left\{\frac{4}{1+\sqrt{3}}=\frac{4(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=2(1-\sqrt{3})\right\}=$$
$$2(1-\sqrt{3})(\cos 3x+\sin 3x)$$

<u>Svar:</u> $y(x)=2(1-\sqrt{3})(\cos 3x+\sin 3x)$

11. $|z-6i|=\operatorname{Im} z+2$,

Sätt in $z=x+yi$ i ekvationen och lös ut sambandet $y=y(x)$.

$$|x+yi-6i|=\operatorname{Im}(x+yi)+2$$
$$|x+(y-6)\cdot i|=y+2$$
$$\sqrt{x^2+(y-6)^2}=y+2$$
$$x^2+(y-6)^2=(y+2)^2$$
$$x^2+y^2-12y+36=y^2+4y+4$$
$$x^2+32=16y$$
$$y=\frac{x^2}{16}+2$$

Eftersom ekvationen kvadrerades ska lösningen prövas i den ursprungliga ekvationen:

$$\sqrt{x^2+(y-6)^2}=y+2$$

V.L. = $\sqrt{x^2+(y-6)^2}=\sqrt{x^2+(\frac{x^2}{16}+2-6)^2}=\sqrt{x^2+(\frac{x^2}{16}-4)^2}=\sqrt{x^2+(\frac{x^2}{16})^2-2\cdot\frac{x^2}{16}\cdot 4+4^2}=$

$$=\sqrt{x^2+(\frac{x^2}{16})^2-\frac{x^2}{2}+4^2}=\sqrt{(\frac{x^2}{16})^2+\frac{x^2}{2}+4^2}=\sqrt{(\frac{x^2}{16}+4)^2}=\frac{x^2}{16}+4$$

H.L. = $y+2=\frac{x^2}{16}+2+2=\frac{x^2}{16}+4$ = V.L. Detta är en äkta lösning.

<u>Svar:</u> $y=\frac{x^2}{16}+2$

12. Riktningskoefficienterna (k_1 och k_2) för två mot varandra vinkelräta linjer uppfyller följande samband: $k_1\cdot k_2=-1$

För tangenten i (x,y) gäller $k_{\tan}=y'$

För linjen genom origo och (x,y), d.v.s. normalen, gäller $k_{nor}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y-0}{x-0}=\frac{y}{x}$

Detta ger en differentialekvation

$$k_{\tan} \cdot k_{nor} = y' \cdot \frac{y}{x}$$

$$-1 = y' \cdot \frac{y}{x}$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Differentialekvationen är separabel.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$y\frac{dy}{dx} = -x$$

$$\int ydy = \int -xdx$$

$$\frac{y^2}{2} + C_1 = -\frac{x^2}{2} + C_2$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C_3$$

$$x^2 + y^2 = C$$

$$y = \pm\sqrt{C - x^2}$$

Anm: C måste vara icke-negativ och kan därför skrivas R^2 , d.v.s. $x^2 + y^2 = R^2$
Kurvorna visar sig vara cirklar, alla med centrum i origo, men med olika radier, beroende på konstantens värde.

Svar: $y = \pm\sqrt{C - x^2}$

Rättningsmall

Generell rättningsmall

A.	Varje beräkningsfel (Därefter fortsatt rättning enligt nya förutsättningar)	-1 poäng
B.	Beräkningsfel; allvarliga och/eller leder till förenkling	-2 poäng eller mer
C.	Prövning istället för generell metod	- samtliga poäng
D.	Felaktiga antaganden/ansatser	- samtliga poäng
E.	Antar numeriska värden	- samtliga poäng
F.	Lösning svår att följa och/eller Svaret framgår inte tydligt (Vid flera svar väljs det minst gynnsamma. Svara antingen avrundat eller exakt, se nedan.)	-1 poäng eller mer
G.	Matematiska symboler används felaktigt/saknas	-1 poäng eller mer
	Bl.a Om '=' saknas (t.ex. '=>' används istället)	-1 poäng/tenta
	Om '=' används felaktigt (t.ex. istället för '=>')	-1 poäng/tenta

Teoretiska uppgifter:

H.	Avrundat svar	-1 poäng/tenta

Tillämpade uppgifter:

I.	Enhet saknas/fel	-1 poäng/tenta
J.	Avrundningar i delberäkningar som ger fel svar	-1 poäng/tenta
K.	Svar med felaktigt antal värdesiffror (±1 värdesiffra ok)	-1 poäng/tenta (andra gången)
L.	Andra avrundningsfel	-1 poäng/tenta
M.	Exakt svar	-1 poäng/tenta

Preliminär rättningsmall

1.	Räknefel	-1p
2.	Räknefel	-1p
3.	Integrationsgränser ej analytiskt bestämda eller illustrerade i figur	-1p
	Integrationsfel	-2p
4.	Fel vid insättning av villkor	-1 p
	Helt felaktig allmän lösning, rätt tillämpning av randvillkor	-2 p
5.	Får $r = \pm\sqrt{2}$	-1p
	Fel period	-1p
	Svarar på polär form	inget avdrag
6.	Endast korrekt partikulärlösning	+1p
	Endast korrekt homogen lösning	+1p
	Partikulärlösning, homogen lösning och allmän lösning, samtliga korrekta	+2p
7.	Korrekt uppställd diffekvation med villkor	+1p

8.	Integrationskonstant saknas		-1p
9.	Formella fel av typen $z = 3i \quad \Rightarrow \quad z - 3i$		-1p
	Har inte med den givna lösningen $z = 3i$ i svaret		-0p?
10.	Korrekt allmän lösning, $y(x) = C\cos 3x + D\sin 3x$		+1p
	Svarar $y(x) = \dfrac{4}{1+\sqrt{3}} \cdot \cos 3x + \dfrac{4}{1+\sqrt{3}} \cdot \sin 3x$	§	-0p
11.	Prövar inte lösningar till rotekvationen		-0p denna gång
12.	Korrekt differentialekvation		+1p
	Integrationskonstant saknas		-1p
	+- saknas.		-1p
	Svarar $x^2 + y^2 = C$		-0p
	Ställer inte upp någon differentialekvation		-2p