TENTAMEN

Kursnummer:	HF0024 Matematik för basår II
Moment:	TENA
Program:	Tekniskt basår
Rättande lärare:	Niclas Hjelm, Staffan Linnaeus & Jonas Stenholm
Examinator:	Niclas Hjelm
Datum: Tid:	2020-03-13 08:00-12:00
Hjälpmedel:	Formelsamling: ISBN 978-91-27-45720-1 eller ISBN 978-91-27-72279-8 eller ISBN 978-91-27-42245-2 (**utan anteckningar**). **Inga andra formelsamlingar är tillåtna!** Miniräknare, penna, radergummi, linjal, gradskiva
Omfattning och betygsgränser:	see below

Poäng	Betyg
11	Fx
12 – 14	E
15 – 17	D
18 – 20	C
21 – 23	B
24 – 26	A

Till samtliga uppgifter krävs fullständiga lösningar. Lösningarna skall vara tydliga och lätta att följa. Införda beteckningar skall definieras. Uppställda samband skall motiveras.

Skriv helst med blyertspenna!

Svaret ska framgå tydligt och vara förenklat så långt som möjligt. Svara med enhet och lämplig avrundning på tillämpade uppgifter. Svara exakt på övriga uppgifter, om inte annat anges. Lycka till!

1. Lös ekvationen $3\tan(2v + 36^\circ) = 2$; $0^\circ \leq v \leq 360^\circ$. Svara i hela grader. 2 p

2. Beräkna $\int_{-1}^{2} \left(2x^2 - x\right) dx$ 2 p

3. Bestäm derivatan av $f\left(x\right) = \dfrac{5x-3}{x^2+1}$ 2 p

4. Beräkna arean av det område som begränsas av kurvorna $y = 2x - 3$ och $y = x^2 - 2x$ 3 p

5. Bestäm eventuella lokala maximi- och minimipunkter samt terrasspunkter till funktionen $f\left(x\right) = x^3 e^{-3x}$. 3 p

6. En motorbåt rör sig längs en rät linje med farten 12 m/s när motorn plötsligt stannar. Båten fortsätter med avtagande hastighet $v = \dfrac{12}{1,0 + 0,33t}$ m/s, där t är tiden i s. Hur långt har båten glidit 3,0 s efter att motorn stannade? 2 p

7. Visa att $\left(\dfrac{1-\tan v}{1+\tan v}\right)^2 = \dfrac{1-\sin 2v}{1+\sin 2v}$ 2 p

8. Lös ekvationen $\int_2^x \left(x - t\right) dt = 8$. 2 p

9. Lös ekvationen $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1 + \sin x$ 3 p

10. Visa att om summan av fyra heltal är udda så är minst ett av talen udda och minst ett av talen jämnt. 2 p

11. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f\left(x\right) = \cos \dfrac{2\pi x}{3\left(1+x^2\right)}$. 3 p

Lösningar

1. $3\tan(2v + 36^\circ) = 2 \Leftrightarrow \tan(2v + 36^\circ) = 2/3$.
   Den allmänna lösningen ges då av
   $2v + 36^\circ \approx 33{,}69^\circ + n\cdot 180^\circ \;\Rightarrow\; v \approx -1{,}15^\circ + n \cdot 90^\circ \approx -1^\circ + n \cdot 90^\circ$.
   Svar: Mellan 0° och 360° finns lösningarna $v \approx 89^\circ$, $v \approx 179^\circ$, $v \approx 269^\circ$ och $v \approx 359^\circ$.

2. $$\int_{-1}^{2}\left(2x^2 - x\right)dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{2\cdot 8}{3} - \frac{4}{2} - \left(\frac{2\cdot(-1)}{3} - \frac{1}{2}\right)$$
   $$= \frac{16}{3} - 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{32-12+4+3}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}.$$
   Svar: $\frac{9}{2}$.

3. Kvotregeln ger $f'(x) = \dfrac{5\cdot\left(x^2+1\right) - \left(5x-3\right)2x}{\left(x^2+1\right)} = \dfrac{-5x^2+6x+5}{\left(x^2+1\right)^2}$

   Svar: $\dfrac{-5x^2+6x+5}{\left(x^2+1\right)^2}$

4. Skärningspunkterna ges av
   $2x-3 = x^2 - 2x \;\Leftrightarrow\; x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2^2-3} = 2 \pm 1$,
   dvs. skärningspunkterna är vid $x = 1$ och $x = 3$.
   Vi undersöker vilken funktion som är överfunktion genom att bestämma funktionernas värden för något värde inuti intervallet, t.ex. $x = 2$. Då är $f(x) = 2x-3 = 2\cdot 2 - 3 = 1$ och $g(x) = x^2 - 2x = 2^2 - 2\cdot 2 = 0$. Alltså är f överfunktion. Vi får

   $$A = \int_{1}^{3}\left[2x-3-\left(x^2-2x\right)\right]dx = \int_{1}^{3}\left(4x - x^2 - 3\right)dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} - 3x\right]_{1}^{3} =$$
   $$18-9-9-\left(2-\frac{1}{3}-3\right) = \frac{4}{3}$$

   Svar: $\frac{4}{3}$.

5. Produktregeln ger $f'(x) = 3x^2 \cdot e^{-3x} + x^3 \cdot \left(-3e^{-3x}\right) = 3\left(x^2 - x^3\right)e^{-3x}$.

Vi söker nollställen till derivatan: $f'(x) = 0 \Rightarrow 3\left(x^2 - x^3\right)e^{-3x} = 0$

Eftersom exponentialfunktionen saknar nollställen, ges alla derivatans nollställen av $x^2 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x^2(1-x) = 0$.

Nollproduktsmetoden ger lösningarna x = 0 och x = 1.

Vi gör en teckentabell. Vi beräknar t ex

$$f(0) = 0^3 \cdot e^0 = 0$$
$$f(1) = 1^3 \cdot e^{-3\cdot1} = e^{-3}$$
$$f'(-1) = 3\left((-1)^2 - (-1)^3\right)e^{-3\cdot(-1)} = 12e^3 > 0$$
$$f'(1/2) = 3\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right)e^{-3\cdot\frac{1}{2}} = 3\cdot\frac{1}{8}\cdot e^{-3/2} > 0$$
$$f'(2) = 3\left(2^2 - 2^3\right)e^{-3\cdot2} = 3\cdot(-4)\cdot e^{-6} < 0$$

x		0		1	
y'	+	0	+	0	-
y	↗	0	↗	e^{-3}	↘

Här syns att funktionen har en terrasspunkt då $x = 0$ och en lokal maximipunkt då $x = 1$.

Svar: Terrasspunkt i (0,0), lokalt maximum i (1, e^{-3}).

6. Sträckan $s = \int_0^{3,0} v(t)\,dt = \int_0^{3,0} \frac{12}{1+0,33t}\,dt = \left[\frac{12}{0,33}\ln(1+0,33t)\right]_0^{3,0} = \frac{12}{0,33}\ln 1,99 \approx 25$

Svar: 25 m

7. $$VL = \left(\frac{1-\tan v}{1+\tan v}\right)^2 = \left(\frac{1-\frac{\sin v}{\cos v}}{1+\frac{\sin v}{\cos v}}\right)^2 = \left(\frac{\cos v - \sin v}{\cos v + \sin v}\right)^2 =$$

$$\frac{\cos^2 v - 2\cos v \sin v + \sin^2 v}{\cos^2 v + 2\cos v \sin v + \sin^2 v} = \frac{1-2\sin v\cos v}{1+2\sin v\cos v} = \frac{1-\sin 2v}{1+\sin 2v} = HL$$

V.S.B.

8. $\int_2^x (x-t)\,dt = \left[xt - \frac{t^2}{2} \right]_2^x = x^2 - \frac{x^2}{2} - \left(2x - \frac{4}{2} \right) = \frac{x^2}{2} - 2x + 2$

Ekvationen blir $\frac{x^2}{2} - 2x + 2 = 8 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$

Lösning: $x = 2 \pm \sqrt{2^2 + 12} = 2 \pm 4$

Svar: Lösningarna är x = 6 och x = -2.

9. Vänsterledet skrivs om:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \cos x \cos\frac{\pi}{6} + \sin x \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x .$$

Detta ger ekvationen

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = 1 + \sin x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = -1 .$$

Med hjälp av formeln $a\sin x - b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\,\sin(x - v)$ kan ekvationen skrivas på formen

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\,\sin(x - v) = -1,$$

där $\tan v = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$. Här kan v kan väljas i första kvadranten: $v = \frac{\pi}{3}$.

Efter förenkling får vi

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3} \right) = -1 .$$

Eftersom ekvationen $\sin u = -1$ har lösningarna

$$u = -\frac{\pi}{2} + n2\pi \qquad \text{och} \qquad u = \pi - \left(-\frac{\pi}{2} \right) + n2\pi = \frac{3\pi}{2} + n2\pi$$

där de två lösningsfamiljerna ger samma lösningar, får vi med samtliga lösningar genom att välja någon av lösningsfamiljerna. (Ritar man en enhetscirkel ser man direkt att nämnda sinusekvation bara har en lösning per varv!) Väljer man den först fås detta:

Allmän lösning $x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Svar: $x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

10. Kalla de fyra talen a, b, c och d. Summan $s = a + b + c + d$. Vi visar genom motsägelsebevis att alla talen inte kan vara jämna eller udda.

Antag först att alla talen är jämna, dvs det finns heltal x, y, z och w så att $a = 2x$, $b = 2y$, $c = 2z$, $d = 2w$. Då blir $s = 2x + 2y + 2z + 2w = 2(x + y + z + w)$.
Summan blir alltså jämn, vilket motsäger att summan är udda.
Anta nu istället att alla talen a, b, c och d är udda, dvs. det finns heltal x, y, z och w så att $a = 2x + 1$, $b = 2y + 1$, $c = 2z + 1$, $d = 2w + 1$. Då blir
$s = 2x + 1 + 2y + 1 + 2z + 1 + 2w + 1 = 2(x + y + z + w + 2)$.
Också i detta fall blir alltså summan jämn, vilket ger en motsägelse.
Alltså måste det bland de fyra talen finnas minst ett jämnt och ett udda tal v.s.b.

11. Funktionen och dess derivata är definierade för alla x. Största och minsta värdena kan därför bara antas vid derivatans nollställen. Men för att kontrollera att funktionen verkligen har ett största och minsta värde, måste man också undersöka funktionens beteende då $x \to \pm\infty$.

<u>Derivatans nollställen</u>

Kvotregeln och kedjeregeln ger

$$f'(x) = -\frac{2\pi}{3}\frac{1\cdot(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}\sin\frac{2\pi x}{3(1+x^2)} = \frac{2\pi}{3}\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\sin\frac{2\pi x}{3(1+x^2)}.$$

Nollställena bestäms genom nollproduktsmetoden.

1) $1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.

2) $\sin\frac{2\pi x}{3(1+x^2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi x}{3(1+x^2)} = n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$2\pi x = 3(1+x^2)n\pi \Leftrightarrow 3nx^2 - 2x + 3n = 0$.

För $n = 0$ blir lösningen $x = 0$. För andra n får man

$$x^2 - \frac{2}{3n}x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3n} \pm \sqrt{\frac{1}{9n^2} - 1},$$

där det blir negativt under rottecknet för alla heltal n.

Sammanfattningsvis är derivatans nollställen alltså $x = \pm 1$ och $x = 0$.

Funktionsvärdena i dessa punkter är $f(0) = \cos\frac{2\pi 0}{3(1+0^2)} = \cos 0 = 1$,

$$f(\pm 1) = \cos\frac{\pm 2\pi}{3(1+1^2)} = \cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

<u>Funktionens beteende i oändligheten</u>

Eftersom $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2\pi x}{3(1+x^2)} = 0$, blir $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \cos 0 = 1$. Dessa gränsvärden ligger mellan de värden som antas vid de lokala extrempunkterna.

Svar: Största värdet är 1, minsta värdet är $\frac{1}{2}$.

Alternativ lösning

Vi gör substitutionen $u = g\left(x\right) = \frac{2\pi x}{3\left(1+x^2\right)} = \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{x}{1+x^2}$. Definitionsmängden är alla reella x.

Vi söker först värdemängden till funktionen g och kan därefter bestämma största och minsta värde till $f(u) = \cos u$ på denna mängd.

$$g'\left(x\right) = \frac{2\pi}{3}\cdot\left(\frac{1\cdot(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}\right) = \frac{2\pi}{3(1+x^2)^2}\cdot\frac{1-x^2}{1}$$

Nollställen till derivatan ges av

$$g'\left(x\right) = 0$$

vilket, eftersom $(1+x^2)^2 \neq 0$ för alla x, leder till

$$1 - x^2 = 0$$
$$1 = x^2$$
$$x = \pm 1$$

Teckenstudium:

$$g'\left(-2\right) = \frac{2\pi}{3(1+(-2)^2)^2}\cdot\frac{1-(-2)^2}{1} < 0$$
$$g'(0) = \frac{2\pi}{3(1+0^2)^2}\cdot\frac{1-0^2}{1} > 0$$
$$g'(2) = \frac{2\pi}{3(1+2^2)^2}\cdot\frac{1-2^2}{1} < 0$$

Vilket innebär att g har lokalt minumum för $x = -1$ och lokalt maximum för $x = 1$.

Gränsvärde för g då $x \to \pm\infty$ beräknas:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{x}{1+x^2} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{x}{1+x^2} = 0$$

Vi beräknar
$$g\left(-1\right) = \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{-1}{1+(-1)^2} = -\frac{\pi}{3}$$
$$g\left(1\right) = \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{1+1^2} = \frac{\pi}{3}$$

x		-1		1	

f'	-	0	+	0	-
f	↘	$-\dfrac{\pi}{3}$	↗	$\dfrac{\pi}{3}$	↘

Vi har alltså funnit att $-\dfrac{\pi}{3} \le g(x) \le \dfrac{\pi}{3}$

Återstår nu att bestämma största och minsta värde till $f(u) = \cos u \quad -\dfrac{\pi}{3} \le u \le \dfrac{\pi}{3}$.

Nollställen till derivatan sökes:

$$f\,'(u) = -\sin u$$

$$f\,'(u) = 0 \quad \text{ger}$$
$$\sin u = 0$$
$$u = 0 + n\pi$$

Endast $u = 0$ ligger i intervallet. Kandidater till största och minsta värde är

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$
$$f(0) = 1$$
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Svar: Största värdet är 1, minsta värdet är $\dfrac{1}{2}$.

Rättningsmall

Generella riktlinjer för tentamensrättning

Varje beräkningsfel	-1 poäng
(Därefter fortsatt rättning enligt nya förutsättningar)	
Beräkningsfel; allvarliga och/eller leder till förenkling	-2 poäng eller mer
Prövning istället för generell metod	- samtliga poäng
Felaktiga antaganden/ansatser	- samtliga poäng

Lösning svår att följa och/eller <u>Svaret</u> framgår inte tydligt	-1 poäng eller mer
Matematiska symboler används felaktigt/saknas	-1poäng eller mer
Bl.a Om '=' saknas (t.ex. '=>' används istället)	-1 poäng/tenta
Om '=' används felaktigt (t.ex. istället för '=>')	-1 poäng/tenta

1.	Varje missad eller felaktig lösning	-1 p
	En eller flera lösningar utanför intervallet	-1 p
	Fel period	-2 p
2.	Integrationsfel	-2 p
3.	Ofullständigt förenklat	-1 p
4.	Korrekt uppställda integraler inklusive analytiskt bestämda gränser	+1 p
	Fel område	-3 p
	Integreringsfel	-2 p
	Skärningspunkterna ej analytiskt bestämda	-1 p
	Negativ area eller får negativt svar och trollar bort minustecknet:	-1 p
5.	Deriveringsfel	-3 p
	Varje missat nollställe till derivatan	-1 p
	Påpekar ej att $e^{-3x} = 0$ saknar lösning/Faktorn e^{-3x} försvinner utan kommentar	-1 p
	Felaktig kategorisering eller ej kategoriserade punkter	-1 p/uppgift
6.	Integreringsfel, t.ex. missad inre derivata	-2 p
	Numeriskt svar saknas eller felaktigt	-1 p
7.	Utgår från det som ska bevisas	-1 p
	Förändrar storleken på vänster- och högerled	-2p
8.	Korrekt beräknad integral	+1 p
9.	Fel period / period saknas	-1 p
	Hittar bara en lösning till tangensekvationen utan att kommentera att detta räcker	-0 p
10.	Visar bara ena påståendet	-1 p
11.	Deriveringsfel	-3 p
	Varje missat nollställe till derivatan	-2 p
	Undersöker endast $n = 0$ i uttrycket för derivatans nollställen	-1 p
	Ej undersökt gränsvärdena	-1 p