SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2022.03.11

DEL A

1. Bestäm primitiva funktioner till $f(x) = x^{2022} \ln x$ och $g(x) = \dfrac{(\ln x)^{2022}}{x}$. **(3+3 p)**

Lösning. De primitiva funktionerna till f ges av $\int x^{2022} \ln x \, dx$. Partiell integration ger (eftersom $\frac{d}{dx}(\ln x) = 1/x$ och $x^{2023}/2023$ är en primitiv funktion till x^{2022})

$$\int x^{2022} \ln x \, dx = \frac{x^{2023} \ln x}{2023} - \int \frac{x^{2023}}{2023} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^{2023} \ln x}{2023} - \frac{x^{2023}}{2023^2} + C$$

där C är en konstant. Alltså är t ex (sätt $C = 0$)

$$F(x) = \frac{x^{2023} \ln x}{2023} - \frac{x^{2023}}{2023^2}$$

en primitiv till f.

De primitiva funktionerna till g ges av $\int \frac{(\ln x)^{2022}}{x} \, dx$. Vi gör variabelsubstitutionen $u = \ln x$ och får då $du = \frac{dx}{x}$, vilket ger

$$\int \frac{(\ln x)^{2022}}{x} \, dx = \int u^{2022} \, du = \frac{u^{2023}}{2023} + C = \frac{(\ln x)^{2023}}{2023} + C$$

där C är en konstant. Allstå är t ex (sätt $C = 0$)

$$G(x) = \frac{(\ln x)^{2023}}{2023}$$

en primitiv till g.

Svar: a) T ex $F(x) = \dfrac{x^{2023} \ln x}{2023} - \dfrac{x^{2023}}{2023^2}$; b) t ex $G(x) = \dfrac{(\ln x)^{2023}}{2023}$.

□

2. Låt $f(x) = \arctan(x^2)$.
   (a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till f kring $x = 0$. **(3 p)**
   (b) Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x^2)}{x^2 + x^3}$. **(3 p)**

Lösning. a) Det sökta Taylorpolynomet ges av

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2.$$

Derivering ger

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^4} \text{ och } f''(x) = \frac{2(1 + x^4) - 2x \cdot 4x^3}{(1 + x^4)^2}.$$

Således har vi $f(0) = \arctan 0 = 0$, $f'(0) = 0$ och $f''(0) = 2$, vilket ger

$$P(x) = x^2.$$

b) Eftersom $P(x)$ är Taylorpolynomet av grad 2 till f kring $x = 0$ (och eftersom f''' är kontinuerlig) har vi

$$f(x) = P(x) + O(x^3) = x^2 + O(x^3) \text{ då } x \to 0.$$

Detta ger att

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x^2)}{x^2 + x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + O(x^3)}{x^2 + x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + O(x)}{1 + x} = 1.$$

(Man kan också använda L'Hôpitals regel för att beräkna gränsvärdet.)

Svar: a) $P(x) = x^2$; b) 1. □

DEL B

3. Vi betraktar funktionen $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$. **(6 p)**
   - Lös olikheten $f(x) < 0$.
   - Bestäm de intervall där f är växande respektive avtagande och bestäm alla lokala extrempunkter.
   - Finn alla asymptoter till kurvan $y = f(x)$.

   Använd informationen ovan för att skissa kurvan $y = f(x)$.

Lösning. Vi vet att $\ln x$ är definierad för $x > 0$, och att $\ln x < 0$ för $0 < x < 1$, $\ln(1) = 0$ och $\ln x > 0$ för $x > 1$. Detta betyder att funktionen f är definierad för $x > 0$ och $x \neq 1$.

Vi noterar att $f(x) < 0$ precis då nämnaren $x\ln x < 0$, dvs då $0 < x < 1$.

För att undersöka på vilka intervall som f är växande respektive avtagande undersöker vi derivatan. Vi har

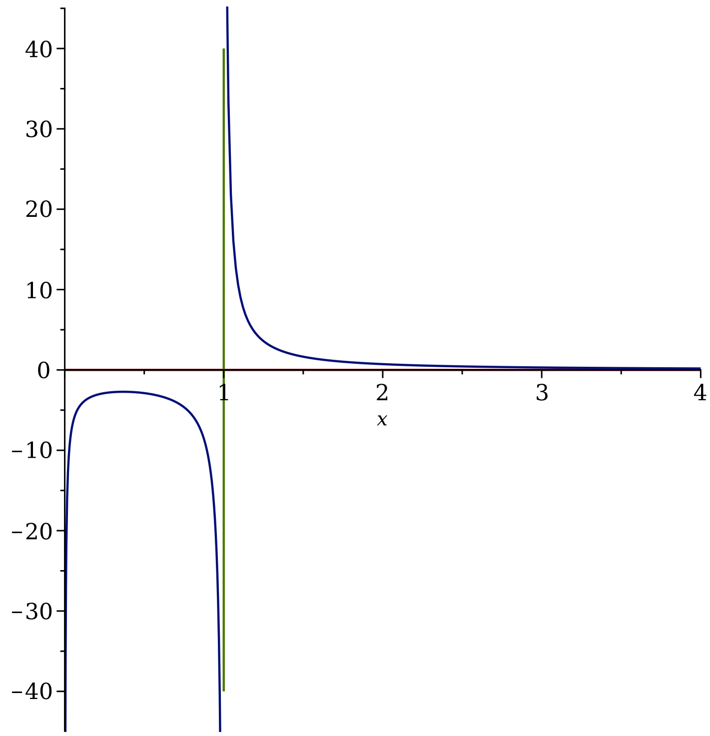
$$f'(x) = -\frac{1}{(x\ln x)^2} \cdot \frac{d}{dx}(x\ln x) = -\frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}, x > 0, x \neq 1.$$

Eftersom nämnaren aldrig kan vara negativ ges tecknet på $f'(x)$ av tecknet på $-(1+\ln x)$. Eftersom $1+\ln x = 0$ har lösningen $x = e^{-1} < 1$ och eftersom $\ln x$ är en växande funktion ser vi att $f'(e^{-1}) = 0$, $f'(x) > 0$ för $0 < x < e^{-1}$ och $f'(x) < 0$ då $e^{-1} < x < 1$ eller då $x > 1$ (och $f'(x)$ är ej definierad för $x = 1$). Således är f växande på intervallet $(0, e^{-1}]$ och avtagande på intervallen $[e^{-1}, 1)$ och $(1, \infty)$. Detta betyder att den kritiska punkten $x = e^{-1}$ är ett lokalt maximium.

Vi undersöker om det finns några asymptoter. Eftersom $x\ln x = 0$ för $x = 1$ (och täljaren är 1) så följer det att linjen $x = 1$ är en vertikal asymptot till grafen $y = f(x)$. Vi ser också (eftersom $x\ln x > 0$ för $x > 1$ och $x\ln x < 0$ för $0 < x < 1$) att $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty$ och $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$. Eftersom $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ (så $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ eftersom $x\ln x < 0$ för $0 < x < 1$) så är linjen $x = 0$ en vertikal asymptot till grafen $y = f(x)$. För $0 < x < 1$ och $x > 1$ är nämnaren $\neq 0$, så i dessa punkter kan det ej finnas några vertikala asymptoter.

Vidare har vi $\lim_{x\to\infty} x\ln x = \infty$ så $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, dvs linjen $y = 0$ är en horisontell asymptot till grafen $y = f(x)$.

Vi kan nu skissa grafen till f (se figur på nästa sida). $\square$



FIGUR 1. Kurvan $y = f(x)$ i uppgift 3.

4. (a) Avgör om serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$ är konvergent eller divergent. **(3 p)**

(b) Avgör om den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ är konvergent eller divergent. **(3 p)**

Lösning. a) Vi använder Cauchys integraltest.

Låt

$$f(x) = \frac{x}{e^x} = xe^{-x}.$$

Funktionen f är kontinuerlig, och vi har $f(x) > 0$ för alla x. Vidare, $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x} < 0$ för alla $x > 1$. Således är f (strängt) avtagande på intervallet $[1, \infty)$. Vi kan alltså använda Cauchys integraltest som säger att serien ovan är konvergent om (och endast om) den generaliserade integralen

$$\int_1^{\infty} xe^{-x}\, dx$$

är konvergent. Partiell integration ger

$$\int_1^\infty xe^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^M xe^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left(\left[-xe^{-x}\right]_1^M - \int_1^M (-e^{-x})\,dx\right) =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left(\left[-xe^{-x}\right]_1^M - \left[e^{-x}\right]_1^M\right) = \lim_{R\to\infty}\left(-Me^{-M} + e^{-1} - (e^{-M} - e^{-1})\right) = 2e^{-1}.$$

Således är den generaliserade integralen konvergent, och därmed är också serien konvergent enligt Cauchys integraltest (som vi verifierat är tillämpbart).

(Man kan också använda kvottestet.)

b) Vi noterar att vi har $\frac{1}{x+\sqrt{x}} \geq 0$ för alla $x > 0$, så vi har en positiv integrand. Eftersom

$$0 \leq \frac{1}{x+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ för alla } x > 0$$

och eftersom integralen

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2,$$

dvs den är konvergent, så följer det från jämförelsesatsen för positiva integrander att integralen

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$$

också är konvergent.

Svar: a) Serien är konvergent; b) den generaliserade integralen är konvergent.

□

DEL C

5. (a) Antag att funktionen f är deriverbar i punkten x_0. Visa att funktionen f är kontinuerlig i punkten x_0. **(3 p)**

   (b) Antag att funktionen f är deriverbar i punkten x_0 och att $f(x_0) \neq 0$. Visa att funktionen $1/f$ är deriverbar i punkten x_0. **(3 p)**

Lösning. a) Se bevis av Theorem 1 i kapitel 2.3 i kursboken.

b) Se bevis av Theorem 4 i kapitel 2.3 i kursboken.

□

6. Bestäm en tangent till kurvan $y = e^{2x} - 2e^{-x} + x$ som inte är parallell med någon annan tangent till kurvan. **(6 p)**

Lösning. Låt
$$f(x) = e^{2x} - 2e^{-x} + x.$$
Två linjer är parallella om de har samma riktningskoefficient. Om vi kan hitta en punkt x_0 sådan att $f'(x) \neq f'(x_0)$ för alla $x \neq x_0$ så kommer tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(x_0, f(x_0))$ ha egenskapen att ingen annan tangent till kurvan är parallell med denna tangent.

Vi behöver således analysera $f'(x)$. Vi har
$$f'(x) = 2e^{2x} + 2e^{-x} + 1.$$
För att se var f' växer och avtar tittar vi på f''. Derivering ger
$$f''(x) = 4e^{2x} - 2e^{-x} = 2e^{-x}(2e^{3x} - 1).$$
Eftersom $e^{-x} \neq 0$ för alla x ser vi att vi har $f''(x) = 0$ precis då $2e^{3x} - 1 = 0$. Denna sista ekvation har den unika lösningen $x = \ln(1/2)/3 = -\ln(2)/3$.

Genom att analysera tecknet på f'' får vi följande teckentabell: vi har $f''(x) < 0$ för $x < -\ln(2)/3$, och $f''(x) > 0$ för $x < -\ln(2)/3$.

Således har f' ett globalt minimum i punkten $x_0 = -\ln(2)/3$, och $f'(x) > f'(x_0)$ för alla $x \neq x_0$. Detta betyder därför att det inte finns någon annan tangent till kurvan $y = f(x)$ som är parallell med tangenten till kurvan i punkten $(x_0, f(x_0))$ (eftersom $f'(x) \neq f'(x_0)$ för alla $x \neq x_0$).

Slutligen, en ekvation för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(x_0, f(x_0))$ ges av
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = -\left(\frac{3 \cdot 2^{1/3}}{2} + \frac{\ln 2}{3}\right) + (3 \cdot 2^{1/3} + 1)\left(x + \frac{\ln 2}{3}\right).$$
Och enligt argumentet ovan finns det ingen annan tangent till kurvan $y = f(x)$ som är parallell med denna.

(Eftersom $f'(x) \to \infty$ då $x \to \infty$ och $f'(x) \to \infty$ då $x \to -\infty$ följer det från analysen ovan att för varje värde $a > f'(x_0)$ så har ekvationen $f'(x) = a$ två olika lösningar. Detta betyder att den tangent vi hittat är den enda tangent till kurvan $y = f(x)$ med den önskade egenskapen.)

$\square$