KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen 2012-01-09

Del A

1. Bestäm ett tredje hörn, C, i en triangel ABC i planet så att arean av triangeln blir 10 areaenheter om $A = (-1, 1)$ och $B = (2, -3)$. **(4 p)**

Lösning. Om det tredje hörnet i triangeln har koordinater (x, y) kan vi beräkna arean genom att använda de två vektorerna som utgår från hörnet A och som har ändpunkter i de båda övriga hörnen. Vi får

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

och

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

Höjden i triangeln mot sidan AB ges av projektionen av $\overrightarrow{AC}$ på en vektor som är vinkelrät mot $\overrightarrow{AB}$, tex

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Alltså ges höjden av längden av

$$\text{Proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{AC} = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} = \frac{\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} x+1 \\ y-1 \end{smallmatrix}\right)}{\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)} \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = \frac{4x + 3y + 1}{25} \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$$

dvs av

$$\frac{|4x + 3y + 1|}{25} \sqrt{4^2 + 3^2} = \frac{|4x + 3y + 1|}{5}$$

Längden av sidan är AB är $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$. Därmed ges arean av triangeln av

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{|4x + 3y + 1|}{5} = \frac{|4x + 3y + 1|}{2}.$$

Vi vill att arean ska bli 10 areaenheter, viket ger att $|4x + 3y + 1| = 20$. Vi kan därmed exempelvis välja $x = 4$ och $y = 1$.

Ett annat sätt att komma fram till ett möjligt hörn C är genom att se att längden av sidan AB är $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$. För att arean skall vara 10 areaenheter ska alltså höjden mot sidan AB vara 4 längdenheter. Om vi går vinkelrätt mot $\overrightarrow{AB}$ fyra längdenheter från A får vi

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 4 \cdot \frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ \frac{17}{5} \end{pmatrix}.$$

Vi får därmed en rätvinklig triangel där BC är hypotenusan. $\square$

Svar: $C = (4, 1)$ är exempel på en sådan punkt. (Alla sådana punkter fås genom de (x, y) som uppfyller ekvationen $|4x + 3y + 1| = 20$.)

2. Låt V vara det tredimensionella delrum i $\mathbb{R}^4$ som ges av $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0$ och låt S vara mängden som består av följande fem vektorer i $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm alla vektorer i S som ligger i delrummet V. **(2 p)**

(b) Bestäm en bas för V som består av några av vektorerna från S. **(2 p)**

Lösning. (a) Vektorn $u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$ är med i V då

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 0.$$

Av samma skäl har vi att $u_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T$, $u_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & -3 \end{bmatrix}^T$ och $u_5 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ är med i V. Men, vektorn $u_4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T$ är inte med i V då

$$3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \neq 0.$$

(b) Vi har att V är tredimensionell. Vektorerna u_1, u_2 och u_5 är med i V, och dessa är linjärt oberoende. Ty, om

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = 0,$$

då ser vi från den sista komponentekvationen att $b = 0$. Detta i sin tur ger att den tredje komponentekvationen ger att $a = 0$. Slutligen ger $cu_5 = 0$ att $c = 0$ då u_5 inte är nollvektorn. Vi har då att $\{u_1, u_2, u_5\}$ är en bas för V.

$\square$

Svar:

(a) Alla vektorer förutom den fjärde vektorn är med i V

(b) Den första, andra och femte vektorn utgör en bas för V.

3. Låt $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som representeras av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm egenvärden och tillhörande egenrum för avbildningen T. **(3 p)**

(b) Bestäm en bas B för $\mathbb{R}^2$ så att matrisen för T med avseende på basen B blir en diagonalmatris. **(1 p)**

Lösning. (a) Det karakteristiska polynomet $\det(\lambda I - A)$ är

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4).$$

Nollställerna är $\lambda = 1$ och $\lambda = 4$. De tillhörande egenrummen är som följer. Egenrummet E_1 ges av

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.$$

Eftersom y är en fri variabel sätter vi $y = t$ för en parameter t och får att lösningarna är alla multipler av vektorn vektorn $\left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.
Egenrummet E_4 ges av ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.$$

Även här är y en fri variabel och vi får lösningarna som multiplerna av vektorn $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$.

(b) En bas för linjen E_1 är $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, och en bas för linjen E_4 är vektorn $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Detta ger att $\mathfrak{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ är en bas för $\mathbf{R}^2$, bestående enbart av egenvektorer för avbildningen T. Matrisrepresentation för avbildningen T i basen $\mathfrak{B}$ blir då en diagonalmatris.

$\square$

Svar:

(a) Egenvärdena är 1 och 4, med egenvektorer $t\left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, respektive $t\left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, där t är en nollskild reell parameter.

(b) En bas av egenvektorer är $\mathfrak{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

DEL B

4. En ingenjör har vid ett experiment uppmätt följande värden för tre storheter x, y och z enligt följande tabell:

x	-1	-1	0	1	1
y	-1	1	0	-1	1
z	3	5	4	4	7

Enligt en modell för förloppet ska storheterna uppfylla en ekvation $z = ax + by + c$.

(a) Med hjälp av minsta kvadratmetoden leds ingenjören till att lösa ekvationssystemet med totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 23 \end{array}\right].$$

Förklara hur ingenjören kommit fram till detta. **(2 p)**

(b) Vilken slutsats drar ingenjören när det gäller vilket samband $z = ax + by + c$ som i minsta-kvadratmening passar bäst till de gjorda mätningarna? **(1 p)**

(c) Jämför modellens värden med mätningarna och förklara vad det är som har minimerats med hjälp av minsta-kvadratmetoden. **(1 p)**

Lösning. (a) Om punkterna låg på planet som ges av ekvatinonen $z = ax + by + c$ skulle vi ha

$$\begin{cases} -a - b + c = 3 \\ -a + b + c = 5 \\ + c = 4 \\ a - b + c = 4 \\ a + b + c = 7 \end{cases}$$

Detta ekvationssystem är dock inkonsistent, och vi använder minsta-kvadratmetoden för att få den lösning som ligger närmast. Om vi skriver ekvationssystemet som $A\vec{x} = \vec{b}$ får vi normalekvationen som $A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}$. I vårt fall har vi

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Därmed ges normalekvationen av

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix},$$

vilket efter matrismultiplikationen blir

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 23 \end{bmatrix}.$$

(b) Lösningen till normalekvationen ges av $a = 3/4 = 0{,}75$, $b = 5/4 = 1{,}25$ och $c = 23/5 = 4{,}6$. Därmed drar ingenjören slutsatsen att $z = 0{,}75x + 1{,}25y + 4{,}6$ bäst passar till de givna mätdata.

(c) Det som minimeras vid minstakvadratmetoden är avståndet mellan höger- och vänsterled i det ursprungliga linjära överbestämda systemet. I vårt fall får vi när vi sätter in minsta-kvadratlösningen i vänsterledet

$$\begin{cases} -a - b + c = 2{,}6 \\ -a + b + c = 5{,}1 \\ \quad + c = 4{,}6 \\ a - b + c = 4{,}1 \\ a + b + c = 6{,}6 \end{cases}$$

och skillnaden mot högerledet blir

$$\begin{bmatrix} -0{,}4 \\ 0{,}1 \\ 0{,}6 \\ 0{,}1 \\ -0{,}4 \end{bmatrix}$$

vars längd är $\sqrt{0{,}16 + 0{,}01 + 0{,}36 + 0{,}01 + 0{,}16} = \sqrt{0{,}70}$.

□

Svar:

(b) Slutsatsen är att $z = 0{,}75x + 1{,}25y + 4{,}6$ bäst passar till de givna mätdata.

(c) Det är summan av kvadraterna av avvikelserna mot modellen som minimeras.

5. Låt $W = \ker(T)$ vara nollrummet till avbildningen $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ som ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm en ortogonal bas för W. **(2 p)**

(b) Beräkna den ortogonala projektionen på W av vektorn $\vec{v} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 2\end{bmatrix}^T$. **(2 p)**

Lösning. (a) En bas för W hittar vi ved Gauss-Jordan elimination. Den tredje raden i A är 2 gånger den första raden pluss 1 gång den andra raden. Om vi sedan tar och adderar -1 gånger den första raden till den andra, och sedan adderar -1 gånger den andra raden till den första får vi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Detta betyder att W är alla ordnade fyrtippler (x_1, x_2, x_3, x_4) på formen

$$W = (t + 2s, -2t - 3s, t, s),$$

godtyckliga tal t och s. En bas för W blir $\vec{u} = \begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$ och $\vec{w} = \begin{bmatrix}2 & -3 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$. En *ortogonal* bas får vi genom att sätta

$$\vec{u}_1 = \vec{u} \quad \text{och} \quad \vec{u}_2 = \vec{w} - \operatorname{proj}_{\vec{u}_1}(\vec{v}).$$

Projektionen $\operatorname{proj}_{\vec{u}_1}(\vec{v})$ av vektorn $\vec{v}$ ned på vektorn $\vec{u}_1$ ges av formeln

$$\operatorname{proj}_{\vec{u}_1}(\vec{v}) = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{v}}{||\vec{u}_1||^2}\vec{u}_1 = \frac{2+6}{6}\vec{u}_1.$$

Detta ger att

$$\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

är ortogonal med u_1. En ortogonal bas för W är $\{\vec{u}_1, 3\vec{u}_2\}$.

(b) Den ortogonala projektionen av vektorn $v = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 2\end{bmatrix}^T$ ned på vektorrummet W ges av formeln

$$\frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{v}}{||\vec{u}_1||^2}\vec{u}_1 + \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{v}}{||\vec{u}_2||^2}\vec{u}_2,$$

där $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ är en ortogonal bas för W. Vi väljer den ortognala basen $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$ och $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix}2 & -1 & -4 & 3\end{bmatrix}^T$. Detta ger att $||\vec{u}_1||^2 = 6$ och att $||\vec{u}_2||^2 = 30$. Vi beräknar att $\vec{u}_1 \cdot \vec{v} = 1 - 2 + 2 = 1$, och att $u_2 \cdot v = 2 - 1 - 8 + 6 = -1$. Detta ger att den ortogonala projektionen av $\vec{v}$ ned på W blir

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Svar:

(a) En ortogonal bas är $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

(b) Projektionen är $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

6. Betrakta en linjär avbildning, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sådan att lösningsmängden till

$$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ges av

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} t+1 \\ 3-t \end{bmatrix},$$

där t är en reell parameter.

(a) Bestäm nollrummet, $\ker(T)$. **(2 p)**

(b) Bestäm bildrummet, $\operatorname{im}(T)$. **(2 p)**

Lösning. (a) Vi har att avbildningen T skickar punkter på linjen $L = \begin{bmatrix} t+1 \\ 3-t \end{bmatrix}$ till punkten $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Detta betyder att om z och w är två punkter på linjen L så har vi att

$$T(z-w) = T(z) - T(w) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Med andra ord är differensen i kärnan till T. Differensen mellan två punkter $z = \begin{bmatrix} t+1 \\ 3-t \end{bmatrix}$ och $w = \begin{bmatrix} u+1 \\ 3-u \end{bmatrix}$ på linjen ges av linjen

$$N = \begin{bmatrix} s \\ -s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-u \\ -(t-u) \end{bmatrix}.$$

Det omvända gäller också: Om z är ett element i kärnan till T då har vi att $z + w$ är med i L, med w en godtycklig punkt på linjen L. Detta betyder att linjen N ovan är kärnan till T.

(b) Vi har att avbildningens definitionsmängd är tvådimensionell. Av uppgiften ovan har vi att kärnan är en-dimensionell, vilket betyder att bilden är en linje. Vi har att punkten $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ är med i bilden. Detta medför att bilden är linjen $\begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix}$.

$\square$

Svar:

(a) Kärnan är linjen $(t, -t)$, där t är en reell parameter.

(b) Bilden är linjen $(t, 2t)$, där t är en reell parameter.

DEL C

7. När vi har en triangel i rummet kan vi med hjälp av ortogonal projektion på de tre koordinatplanen xy-planet, xz-planet och yz-planet få tre olika trianglar.
   (a) Beskriv hur vi kan bestämma arean av triangeln om vi känner till areorna av de tre projektionerna. **(2 p)**
   (b) Illustrera metoden genom att beräkna arean av triangeln med hörn i punktern $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 2, 2)$ och $C = (3, 1, 6)$ både direkt och genom areorna av de tre projektionerna. **(2 p)**

Lösning. (a) När vi beräknar arean av en triangel i rummet kan vi utgå från vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$ från ett av hörnen till de båda andra hörnen. Arean ges sedan av halva längden av vektorprodukten $\vec{u} \times \vec{v}$.

När vi projicerar triageln på de tre koordinatplanen kommer vi att få motsvarande projektioner av de båda vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$ och kan sedan beräkna arean av dessa trianglar med hjälp av vektorprodukten av projektionerna.

Om vi har att

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

får vi projektionerna på de tre planen som

$$\vec{u}_{xy} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_{xz} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_{yz} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

respektive

$$\vec{v}_{xy} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{xz} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{yz} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

Vektorprodukten av $\vec{u}$ och $\vec{v}$ blir

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{bmatrix}$$

och för projektionerna får vi

$$\vec{u}_{xy} \times \vec{v}_{xy} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \cdot 0 - 0 \cdot y_2 \\ 0 \cdot x_2 - x_1 \cdot 0 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{bmatrix},$$

$$\vec{u}_{xz} \times \vec{v}_{xz} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ z_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot z_2 - z_1 \cdot 0 \\ z_1 x_2 - x_1 z_1 \\ x_1 \cdot 0 - 0 \cdot x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

och

$$\vec{u}_{yz} \times \vec{v}_{yz} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 \cdot 0 - 0 \cdot z_2 \\ 0 \cdot y_2 - y_1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi ser nu att komponenterna i $\vec{u} \times \vec{v}$ är lika med de nollskilda komponenterna i de tre vektorprodukterna från projektionerna. Alltså kan vi beräkna arean av triangeln genom

$$A = \sqrt{A_{yz}^2 + A_{xz}^2 + A_{xy}^2}$$

där A_{xy}, A_{xz} och A_{yz} är areorna av de projicerade trianglarna. (Observera att skalfaktorn $1/2$ finns med på båda sidor och att vi därför kan bortse från den.)

(b) I exemplet har vi

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Arean av triangeln ges av

$$\frac{1}{2}|\vec{u} \times v| = \frac{1}{2}\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{bmatrix} 0 \cdot 3 - (-1) \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 2 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 5^2 + 1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{27} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Vi kan istället projicera triangleln på de tre koordinatplanen och beräknar areorna med vektorprodukterna

$$\frac{1}{2}|\vec{u}_{xy} \times \vec{v}_{xy}| = \frac{1}{2}\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 2 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}|\vec{u}_{xz} \times \vec{v}_{xz}| = \frac{1}{2}\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{bmatrix} 0 \\ (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \frac{5}{2}$$

och

$$\frac{1}{2}|\vec{u}_{yz} \times \vec{v}_{yz}| = \frac{1}{2}\left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{bmatrix} 0 \cdot 3 - (-1) \cdot (-1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{2}.$$

Enligt formeln från del (a) får vi nu arean av triangeln som

$$A = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$\square$

Svar:

(a) Arean ges av längden av den vektor som har areorna av de tre projektionerna som koordinater.

(b) Arean är detta fall $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ och de tre projektionerna har areor $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$ och $\frac{1}{2}$.

8. För varje heltal $n \geq 1$, låt A_n vara $n \times n$-matrisen med ettor på diagonalen och superdiagonalen, minusettor på subdiagonalen och nollor för övrigt. För $n = 1$ finns inga super- eller subdiagonaler så vi definierar $A_1 = (1)$. Exempelvis är

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Det gäller att $\det A_n = \det A_{n-1} + \det A_{n-2}$ för alla $n \geq 3$. Varför? **(3 p)**

(b) Beräkna $\det A_{10}$. **(1 p)**

Lösning. (a) Först ett par observationer:

- Om man stryker den första raden och kolonnen i A_n får man A_{n-1}.
- Om man i stället stryker den första kolonnen och den andra raden får man en matris B_{n-1} som är likadan som A_{n-1} sånär som på att första raden bara innehåller en etta och inte två.

Om vi utvecklar determinanten för A_n längs med första kolonnen får vi $\det A_n = 1 \cdot \det A_{n-1} - (-1) \cdot \det B_{n-1}$. Utvecklar vi $\det B_{n-1}$ längs första raden får vi $\det B_{n-1} = \det A_{n-2}$.

(b) Vi kan direkt beräkna $\det A_1 = 1$ och $\det A_2 = 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) = 2$, och med rekursionsformeln från (a)-uppgiften får vi

$$\begin{aligned}
\det A_3 &= \det A_2 + \det A_1 = 2 + 1 = 3, \\
\det A_4 &= \det A_3 + \det A_2 = 3 + 2 = 5, \\
\det A_5 &= \det A_4 + \det A_3 = 5 + 3 = 8, \\
\det A_6 &= \det A_5 + \det A_4 = 8 + 5 = 13, \\
\det A_7 &= \det A_6 + \det A_5 = 13 + 8 = 21, \\
\det A_8 &= \det A_7 + \det A_6 = 21 + 13 = 34, \\
\det A_9 &= \det A_8 + \det A_7 = 34 + 21 = 55, \\
\det A_{10} &= \det A_9 + \det A_8 = 55 + 34 = 89.
\end{aligned}$$

□

Svar:

(b) $\det A_{10} = 89$.

9. Visa att en 3×3-matris A med rang $\mathrm{rank}(A) = 1$ och spår $\mathrm{tr}(A) = 0$ inte kan vara diagonaliserbar. **(4 p)**

Lösning. Om A är diagonaliserbar med diagonalmatris $D = S^{-1}AS$ har A samma rang och spår som D. Om rangen är ett finns precis ett nollskilt element på diagonalen av D, men då kan inte spåret vara noll. Detta ger en motsägelse som visar att A inte kan vara diagonaliserbar.

Vi kan också se det på följande vis. Om en matris har rang 1 betyder det att alla rader är parallella och också alla kolonner. Det betyder att det finns två vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$ så att $A = (\vec{u})(\vec{v})^T$. För att spåret ska vara noll krävs nu att $u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n = 0$, dvs att $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Men då är också $\vec{v} \cdot \vec{u} = (\vec{v})^T\vec{u} = 0$. Därmed är

$$A^2 = (\vec{u})(\vec{v})^T(\vec{u})(\vec{v})^T = (\vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{u})(\vec{v})^T = 0,$$

vilket visar att alla egenvärden måste vara noll om A är diagonaliserbar, men nollmatrisen har inte rang ett, vilket också ger en motsägelse. På det här sättet ser vi att det finns gott om matriser som uppfyller de båda villkoren på spåret och rangen, men ingen av dessa är diagonaliserbar. $\square$