**SF1624 Algebra och geometri**
**Tentamen med lösningsförslag**
**fredag, 18 oktober 2019**

KTH Teknikvetenskap

**1.** (a) Bestäm en ekvation för det plan $\Pi$ som innehåller punkterna $(2, 0, -1)$, $(4, 1, 2)$ och $(3, 1, 0)$. **(3 p)**

(b) Linjen

$$(2, 0, -1) + t(1, 1, 2), \quad t \text{ reellt tal},$$

och normalvektorn till $\Pi$ bildar två vinklar vars summa är $\pi$. Beräkna cosinus av den vinkel som är mindre än $\pi/2$. **(3 p)**

**Lösningsförslag.**

(a) De två vektorerna

$$\vec{v}_1 = (4, 1, 2) - (2, 0, -1) = (2, 1, 3) \qquad \vec{v}_2 = (3, 1, 0) - (2, 0, -1) = (1, 1, 1)$$

ligger i planet $\Pi$. Det betyder att deras kryssprodukt

$$\vec{w} = (2, 1, 3) \times (1, 1, 1) = (-2, 1, 1)$$

är en normalvektor till planet. Planet $\Pi$ består alltså av alla punkter $(x, y, z)$ som uppfyller ekvationen

$$0 = ((x, y, z) - (2, 0, -1)) \cdot (-2, 1, 1) = -2(x - 2) + y + (z + 1),$$

eller

$$-2x + y + z + 5 = 0.$$

(b) Vi beräknar vinkeln $\theta$ mellan

$$\vec{w} = (-2, 1, 1)$$

och

$$\vec{v} = (1, 1, 2).$$

Cosinus av vinkeln $\theta$ ges av

$$\cos\theta = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{w}\|\|\vec{v}\|} = \frac{-2 + 1 + 2}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{6}.$$

Notera att $\cos\theta > 0$. Detta innebär att $\theta$ ligger mellan $0$ och $\pi/2$ och är därför den sökta vinkeln.

**2.** För vilka värden på konstanten $x$ är vektorerna $(1, 2, 3)$, $(3, 4, x)$ och $(4, x, 6)$ komplana? (Vektorer i $\mathbb{R}^3$ är *komplana* om de ligger i samma plan.) **(6 p)**

**Lösningsförslag.**

Låt $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (3, 4, x)$, och $\vec{w} = (4, x, 6)$. Vektorerna ligger i samma plan om och endast om den skalära trippelprodukten

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0.$$

Vi får,

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = (24 - x^2, 4x - 18, 3x - 16),$$

och

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = (1, 2, 3) \cdot (24 - x^2, 4x - 18, 3x - 16) = -x^2 + 17x - 60.$$

Vi undersöker när den skalära trippelprodukten är noll,

$$-x^2 + 17x - 60 = 0,$$

och får

$$\begin{aligned} &x^2 - 17x + 60 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{17}{2} \pm \frac{7}{2}, \\ &\Leftrightarrow x_1 = 5, x_2 = 12. \end{aligned}$$

Alltså ligger de tre vektorerna i samma plan om $x = 5$ eller $x = 12$.

Alternativ lösning:

Tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ är komplana om och endast om de är linjärt beroende. Vektorerna $\vec{u}$, $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är linjärt oberoende om ekvationssystemet, som representeras av följande totalmatris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} & \vec{0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & x & 0 \\ 3 & x & 6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 - \frac{x}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 30 - \frac{17}{2}x + \frac{x^2}{2} & 0 \end{array}\right],$$

har minst en fri variabel. Detta gäller om

$$\begin{aligned} &30 - \frac{17}{2}x + \frac{x^2}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{17}{2} \pm \frac{7}{2} \\ \Leftrightarrow &x = 5 \text{ eller } x = 12. \end{aligned}$$

Notera att det finns flera alternativa lsningsmetoder, t ex $det(A) = 0$ eller $rang(A) \leq 2$, d A= $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & x \\ 3 & x & 6 \end{bmatrix}$

**3.** Vektorrummet $V$ i $\mathbb{R}^4$ består av lösningarna till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z + 2w &= 0 \\ x - y - 2z + w &= 0 \\ x + 3y + 4z + 3w &= 0 \end{cases}$$

(a) Bestäm en bas $\mathcal{B}$ för vektorrummet $V$. **(3 p)**

(b) Bestäm koordinatvektorn för $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & -2 \end{bmatrix}^T$ i basen $\mathcal{B}$. **(3 p)**

**Lösningsförslag.**

(a) Vektorrummet $V$ är nollrummet till matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Genom radoperationer överförs denna matris till

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi ser att den allmänna lösningen till ekvationsystemet är

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}s - \frac{3}{2}t \\ -\frac{3}{2}s - \frac{1}{2}t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alltså utgör $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ med

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en bas för vektorrummet $V$.

(b) För att hitta koordinatvektorn till $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & -2 \end{bmatrix}^T$ i basen $\mathcal{B}$ behöver vi bestämma $a, b$ så att

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Från de sista två raderna ser vi att den enda lösningen kan vara $a = b = -2$. Genom att sätta in de första två raderna ser vi att detta faktiskt är en lösning. Den sökta koordinatvektorn är alltså

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

**4.** Vid en mätning har uppmätts mätdata som enligt den teoretiska modellen skulle uppfylla $x_2 = ax_1 + b$ för konstanter $a$ och $b$. Använd minsta kvadrat-metoden för att bestämma konstanterna $a$ och $b$ om de givna mätdata gavs av följande tabell.

| $x_1$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 |

**(6 p)**

**Lösningsförslag.**

Låt

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Då är

$$A^T A\hat{x} = A^T\vec{b}$$

normalekvationerna till systemet $A\vec{x} = \vec{b}$. Den bästa lösningen till vårt mätdataproblem är i minstakvadratmening $\hat{x} = (a, b)$, där $\hat{x}$ löser normalekvationerna, och $a$, $b$ är de sökta konstanterna.

Vi får,

$$A^T A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

och

$$A^T\vec{b} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 29 \end{bmatrix},$$

samt normalekvationerna

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \hat{x} = \begin{bmatrix} 15 \\ 29 \end{bmatrix} \iff \hat{x} = (\frac{3}{2}, \frac{29}{5}).$$

Alltså är $a = \dfrac{3}{2}$, $b = \dfrac{29}{5}$ de konstanter som enligt minstakvadratmetoden ger den bästa linjära anpassningen till den givna mätdatan.

**5.** Låt $V$ vara ett delrum i $\mathbb{R}^3$ med en ortonormerad (=ortonormal) bas $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

(a) Visa att standardmatrisen för den ortogonala projektionen på $V$ ges av $AA^T$, där $A$ är matrisen med de givna basvektorerna som kolonner. **(3 p)**

(b) Använd detta för att bestämma den ortogonala projektionen i $\mathbb{R}^3$ av vektorn $\vec{u} = (2, -1, 3)$ på delrummet $V = \operatorname{span}\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$. **(3 p)**

**Lösningsförslag.**

(a) Enligt projektionsformeln har vi $proj_{\vec{v}_1}\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 = (\vec{v}_1 \cdot \vec{x})\vec{v}_1$. Om vi betraktar $\vec{v}_1$ och $\vec{x}$ som $3 \times 1$ matriser, och talet $\vec{v}_1 \cdot \vec{x}$ som en $1 \times 1$ matris kan vi skriva

$$proj_{\vec{v}_1}\vec{x} = (\vec{v}_1 \cdot \vec{x})\vec{v}_1 = \vec{v}_1(\vec{v}_1 \cdot \vec{x}) = \vec{v}_1(\vec{v}_1^T\vec{x}) = \vec{v}_1\vec{v}_1^T\vec{x}.$$

På samma sätt har vi

$$proj_{\vec{v}_2}\vec{x} = \vec{v}_2\vec{v}_2^T\vec{x}.$$

Nu har vi

$$proj_V\vec{x} = \vec{v}_1\vec{v}_1^T\vec{x} + \vec{v}_2\vec{v}_2^T\vec{x} = (\vec{v}_1\vec{v}_1^T + \vec{v}_2\vec{v}_2^T)\vec{x}$$

$$= \begin{bmatrix} | & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -- & \vec{v}_1^T & -- \\ -- & \vec{v}_2^T & -- \end{bmatrix} \vec{x} = AA^T\vec{x}.$$

Därmed har vi visat att standardmatrisen för den ortogonala projektionen på $V$ ges av $AA^T$.

(b) Den givna basen till delrummet $V$ är inte ortonormerad. En ortogonal bas för $V$ ges av

$$\left((-1, 1, 0), (-1, 0, 1) - \frac{(-1, 0, 1) \cdot (-1, 1, 0)}{2}(-1, 1, 0)\right)$$

$$= ((-1, 1, 0), (-1/2, -1/2, 1)),$$

så en ortonormerad bas för $V$ är

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2)\right).$$

Detta ger

$$AA^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Den ortogonala projektionen av vektorn $\vec{u} = (2, -1, 3)$ på delrummet $V$ är alltså

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

**6.** Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & a \\ 4 & 7 & a(a+1) \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) För vilka värden på $a$ är matrisen $A$ diagonaliserbar? **(4 p)**

(b) Finns det något värde på $a$ sådant att $A$ är ortogonalt diagonaliserbar? **(2 p)**

Motivera ditt svar!

**Lösningsförslag.**

(a) Matrisen $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ är diagonaliserbar om den har 3 linjärt oberoende egenvektorer. Detta gäller om och endast om

$$\sum_{i=1}^{k} \dim(\mathrm{E_i}) = 3$$

där $\dim(\mathrm{E_i})$ är dimensionen av egenrum nummer $i$ tillhörande $A$.

Vi ser att

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & a \\ 4 & 7-\lambda & a(a+1) \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} &= \{\text{kofaktor rad 3}\} \\
&= -(1+\lambda)\left[(1-\lambda)(7-\lambda) - 16\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow (1+\lambda) = 0 \text{ eller} \\
&\quad (1-\lambda)(7-\lambda) - 16 = \lambda^2 - 8\lambda - 9 = (\lambda - 9)(\lambda + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -1, \lambda_3 = 9.
\end{aligned}$$

Alltså är $\lambda = -1$ en dubbelrot till den karakteristiska ekvationen. Vi behöver se till att $\dim(\mathrm{E_1}) = 2$, där $E_1$ är det egenrum som tillhör egenvärdet $\lambda = -1$. För $\lambda = -1$ gäller $(A + I)\vec{x} = \vec{0}$, det vill säga

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & a & 0 \\ 4 & 8 & a(a+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & a & 0 \\ 0 & 0 & -2a + a^2 + a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Detta system har två fria variabler då

$$a^2 - a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ eller } a = 1.$$

Alltså är $\dim(\mathrm{E_1}) = 2$ och $\sum_{i=1}^{2} \dim(\mathrm{E_i}) = 3$ då $a = 0$ eller $a = 1$. För samma värden på $a$ är $A$ diagonaliserbar.

(b) En matris är ortogonalt diagonaliserbar om och endast om den är symmetrisk.

I detta fall ser vi att $A$ är symmetrisk precis då $a = 0$ och $a(a+1) = 0$. Vi drar slutsatsen att $A$ är ortogonalt diagonaliserbar precis då $a = 0$.