KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
fredag, 19 oktober 2018

Skrivtid: 08:00-11:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Danijela Damjanović, Tilman Bauer

Tentamen består av sex uppgifter som vardera ger maximalt sex poäng.

Del A på tentamen utgörs av de två första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De två följande uppgifterna utgör del B och de två sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst tre poäng.

DEL A

1. Låt Π vara det plan i $\mathbb{R}^3$ som går genom punkterna $A = (1, 3, 1), B = (2, 0, 0), C = (0, 1, 1)$.

(a) Bestäm en ekvation på formen $ax + by + cz = d$ till Π. **(4 p)**

(b) Bestäm om $(0, 2, 0)$ tillhör planet Π. **(2 p)**

2. Betrakta matrisen

$$A = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -5 & 12 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm alla egenvärden och tillhörande egenvektorer till A. **(3 p)**

(b) Är avbildningen som matrisen beskriver en spegling, en projektion, en rotation, eller något annat? Motivera ditt svar. **(3 p)**

Var god vänd!

DEL B

3. Betrakta ekvationen

$$\begin{bmatrix} 12t+6 & -7t-4 \\ -7t-3 & 4t+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm något värde på t för vilket ekvationen inte har några lösningar. **(3 p)**

(b) Bestäm något värde på t för vilket ekvationen har oändligt många lösningar, samt bestäm dessa lösningar. **(3 p)**

4. Låt L vara den linjära avbildning från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ som definieras genom

$$L(\vec{x}) = \vec{v} \times \vec{x}, \quad \text{där } \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm standardmatrisen för L. **(3 p)**

(b) Bestäm matrisen för L i basen $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$. **(3 p)**

DEL C

5. Betrakta den kvadratiska formen $Q(x, y) = 5x^2 - 4xy + 8y^2$.

(a) Finn den symmetriska matris A som är associerad till Q. **(1 p)**

(b) Avgör karaktären av Q. **(2 p)**

(c) Finn en matris P som ortogonalt diagonaliserar matrisen A ovan. **(3 p)**

6. Bestäm de funktioner $f(n)$, $g(n)$ och $h(n)$, där n är ett naturligt tal, som satisfierar ekvationssystemet

$$\begin{aligned} f(n+1) &= 3f(n) + g(n) \\ g(n+1) &= -g(n) + h(n) \\ h(n+1) &= -6g(n) + 4h(n) \end{aligned}$$

och villkoren $f(0) = 0$, $g(0) = 1$ och $h(0) = 0$. **(6 p)**

Tips: Skriv systemet på matrisform.