KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Måndagen den 7 januari, 2013

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Roy Skjelnes

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examinationen under period 1, 2012. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid de två första tentamenstillfällena du deltar vid under läsåret, med start från kursomgångens ordinarie tentamen.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

Del A

1. Betrakta det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + az = 1 \\ 3x + 4y + 6z = b \end{cases}$$

i de tre obekanta x, y och z.

(a) Undersök för vilka värden på konstanterna a, b som ekvationssystemet har precis en lösning, oändligt många lösningar, respektive ingen lösning. **(2 p)**

(b) Bestäm alla lösningar till systemet i de fall det har oändligt många lösningar. **(2 p)**

2. Alla delrum i $\mathbb{R}^n$ kan ses både som nollrum och som bildrum till linjära avbildningar. Det finns i allmänhet många linjära avbildningar som ger samma nollrum och samma bildrum. Låt W vara det delrum i $\mathbb{R}^3$ som ges av ekvationen $x + 4y - 3z = 0$.

(a) Bestäm matriserna för två olika avbildningar $S_1, S_2 \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ som har W som nollrum. **(3 p)**

(b) Bestäm en 3×3-matris, på reducerad trappstegsform, som har W som nollrum. **(1 p)**

3. Bestäm alla värden av parametern a så att matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

är diagonaliserbar. **(4 p)**

DEL B

4. Bestäm standardmatrisen för den linjär avbildning $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vars matris med avseende till basen $\mathfrak{B} = \left(\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}\right]\right)$ är
$$\begin{bmatrix} -1 & 11 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}.$$
(4 p)

5. Vid en mätning av två storheter har vi fått följande mätvärden

I (mA)	0	2	4	6
U (mV)	1	7	8	10

Två forskare tvistar om det finns ett linjärt samband $U = RI$, eller om det krävs en konstantterm för att förklara sambandet, $U = RI + U_0$.
(a) Ställ upp de två minsta-kvadratproblem som fås från de givna mätdata för att bestämma de okända parametrarna i de två modellerna. **(2 p)**
(b) Lös minsta-kvadratproblemen och formulera adekvata slutsatser. **(1 p)**
(c) Förklara varför minsta-kvadratavvikelsen säkerligen är mindre i det andra fallet. **(1 p)**

6. Låt ℓ vara linjen $(1, 0, 1) + t(2, 1, -1)$ och m vara linjen $(0, 1, 2) + t(1, 2, 1)$.
(a) Det finns många plan i $\mathbb{R}^3$ som varken skär ℓ eller m. Alla dessa är parallella. Bestäm en normalvektor till dem. **(1 p)**
(b) Bestäm en ekvation för det plan i $\mathbb{R}^3$ som varken skär ℓ eller m och som har samma avstånd till ℓ som till m. **(3 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Låt A vara en symmetrisk 3×3-matris. Antag att 1 är ett egenvärde till A, och att alla vektorer $\vec{v}$ som ligger i planet $x - y + 2z = 0$ uppfyller $A\vec{v} = 2\vec{v}$. Bestäm
$$A \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$
(4 p)

8. Den linjära avbildningen $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bestäms av
$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Delrummet W av $\mathbb{R}^3$ ges av ekvationen $3x + 4y - 5z = 0$. Vi får en *inducerad* linjär avbildning $T_W\colon W \to \mathbb{R}^3$ som skickar $\vec{w}$ i W till $T(\vec{w})$. Bestäm en matris för T_W med avseende på någon bas för W. **(4 p)**

9. Låt
$$U = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{och} \quad V = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$
Låt vidare W vara det delrum i $\mathbb{R}^5$ som består av alla vektorer som ligger i både U och V. Bestäm en bas för W. **(4 p)**