KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2018.06.08

DEL A

1. Beräkna gränsvärdet **(3 p)**

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1 - x}{\ln(1+x^2)}.$$

Lösning. Med l'Hopitals regel. Eftersom alla gränsvärden nedan, utom det sista, är av typ $\left[\frac{0}{0}\right]$ och det sista gränsvärdet existerar, fås (i varje steg ersätts kvoten med kvoten av täljarens och nämnarens derivator):

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1 - x}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)e^{\sin(x)} - 0 - 1}{\frac{2x}{1+x^2}} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)e^{\sin(x)} + \cos^2(x)e^{\sin(x)}}{\frac{2}{1+x^2} - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}} = \frac{1}{2}.$$

$\square$

2. Vad menas med att en funktion φ är kontinuerlig i en punkt x? **(4 p)**

Lösning. Se kursbok. $\square$

3. Kurvan $y = \sqrt{1 + |x|^3}$ samt linjerna $x = -3, x = 3$ och $y = 0$ innesluter ett begränsat område i planet. Detta område roteras kring x-axeln och genererar en rotationskropp. Bestäm volymen av denna rotationskropp. **(5 p)**

   Lösning. Rotationskroppen har sin symmetriaxel längs x-axeln, med $-3 \leq x \leq 3$, och för sådana x har den tvärsnittsarean av en cirkelskiva med radie $y(x) = \sqrt{1 + |x|^3}$,
   $$A(x) = \pi y(x)^2.$$
   Volymen är därför
   $$\text{Vol} = \int_{-3}^{3} A(x)\, dx = \pi \int_{-3}^{3} y(x)^2\, dx = \pi \int_{-3}^{3} \big(1 + |x|^3\big) dx.$$
   Vi kan förenkla denna integral genom att notera att integranden är en jämn funktion och integrationsområdet symmetriskt med avseende på reflektionen $x \mapsto -x$,
   $$\int_{-3}^{3} \big(1 + |x|^3\big) dx = 2 \int_{0}^{3} \big(1 + x^3\big) dx = 2 \left[x + \frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{3} = 2 \left(3 + \frac{3^4}{4} \right) = \frac{93}{2}.$$
   Alltså,
   $$\text{Vol} = \pi \int_{-3}^{3} \big(1 + |x|^3\big) dx = \frac{93}{2} \pi.$$
   $\square$

DEL B

4. Vi har funktionen $F(x) = 4\arctan(x) - 4x + x^2$ definierad för alla reella tal x.
   (a) Lös ekvationen $F'(x) = 0$. **(2 p)**
   (b) Visa att $F'(x) > 0$ för alla $x > 1$. **(2 p)**
   (c) Visa att $4\arctan(x) > \pi - 3 + 4x - x^2$ för alla $x > 1$. **(2 p)**

Lösning. a) Vi deriverar funktionen $F(x)$ och får att

$$F'(x) = \frac{4}{1+x^2} - 4 + 2x.$$

Ekvationen $F'(x) = 0$ blir då

$$\frac{4}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}(4(1+x^2) - 2x(1+x^2)).$$

Nämnaren $1 + x^2$ är nollskilld, vilket ger oss ekvationen

$$0 = 4x^2 - 2x - 2x^3 = -2x(x^2 - 2x + 1) = -2x(x-1)^2.$$

Lösningarna till ekvationen $F'(x) = 0$ är därmed $x = 0$ och $x = 1$.

b) Från a) har vi att funktionen $F'(x)$ är antingen positiv eller negativ för $x > 1$, då funktionen är kontinuerlig och aldrig blir noll. Vi insätter ett specifikt värde, till exempel $x = 2$, och har att

$$F'(2) = \frac{4}{5} - 4 + 4 = \frac{4}{5} > 0.$$

c) Vi vill visa att $f(x) > g(x)$ för alla $x > 1$, vilket är ekvivalent med att $F(x) = f(x) - g(x) > 0$ för alla $x > 1$. Vi har att

$$F(1) = 4\frac{\pi}{4} - \pi + 3 - 4 + 1 = 0.$$

Av b) har vi vidare att $F'(x) > 0$ för alla $x > 1$, vilket betyder att funktionen är växande. Med andra ord har vi att $F(x) > 0$ för alla $x > 1$.

$\square$

5. Låt $f(x) = \ln(1+x)$.
   (a) Bestäm Taylorpolynomet av grad n till $f(x)$, omkring $x = 0$. **(2 p)**
   (b) Ge ett närmevärde till $\ln(6/5)$ som inte avviker mer än $1/300$. **(4 p)**

Lösning. a). Taylorpolynomet av grad n kring $x = 0$ (dvs, Maclaurinpolynomet) är

$$f(0) + f'(0)x + \tfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \tfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k.$$

Med $f(x) = \ln(1+x)$ finner vi derivatorna

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (1+x)^{-1}, \\
f''(x) &= (-1)(1+x)^{-2}, \\
f'''(x) &= (-1)(-2)(1+x)^{-3}, \\
&\vdots \\
f^{(k)}(x) &= (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k},
\end{aligned}$$

så $f(0) = \ln(1) = 0$ och koefficienten för $x^k,\ k = 1, 2, \ldots$ blir

$$\tfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = \tfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} = \tfrac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

(Strikt kan uttrycket för $f^{(k)}(x)$ visas med ett induktionsbevis.) Taylorpolynomet är alltså

$$p_n(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k.$$

Alternativt kan polynomet fås genom termvis integration av de $n-1$ första termerna i $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \ldots$ från 0 till x, se avsnitten 9.5 och 9.6 i kursboken.

b). Enligt Taylors sats ges resttermen för polynomet av grad n av

$$E_n(x) = \tfrac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}x^{n+1} = \tfrac{(-1)^n n!}{(1+s)^{n+1}(n+1)!}\, x^{n+1} = \tfrac{(-1)^n}{(1+s)^{n+1}(n+1)}\, x^{n+1},$$

för något s mellan 0 och x.

Om vi approximerar $\ln(\frac{6}{5}) = \ln(1+\frac{1}{5})$ med $p_n(\frac{1}{5})$ blir felet alltså $E_n(\frac{1}{5}) = \frac{(-1)^n}{(1+s)^{n+1}(n+1)5^{n+1}}$, med $0 < s < \frac{1}{5}$, dvs:

$$\left|E_n\left(\tfrac{1}{5}\right)\right| < \frac{1}{5^{n+1}(n+1)}.$$

Med $n = 2$ blir nämnaren i uttrycket ovan $125 \cdot 3 > 300$, vilket ger att felet är mindre än $\frac{1}{300}$. Ett närmevärde blir då

$$P_2(\frac{1}{5}) = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{5})^2 = \frac{9}{50}.$$

$\square$

DEL C

6. Använd substitutionen $x = 2\sin(t)$ för att bestämma en primitiv funktion till **(6 p)**

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}.$$

Lösning. Med $x = 2\sin(t)$ fås $dx = \frac{dx}{dt}dt = 2\cos(t)\,dt$ och vi får att

$$\int \sqrt{1 - \tfrac{x^2}{4}}\,dx = \int \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cdot 2\cos(t)\,dt = \int 2\cos^2(t)\,dt$$
$$= \int (1 + \cos(2t))\,dt = t + \tfrac{1}{2}\sin(2t) + C,$$

någon godtycklig konstant C, som vi kan sätta lika med noll då vi söker en primitiv funktion. I det fjärde ledet har vi använt att $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1$. Och vi använder nu att $\sin(2t) = 2\cos(t)\sin(t)$ vilket ger

$$t + \frac{1}{2}\sin(2t) = t + \cos(t)\sin(t).$$

Slutligen skriver vi om funktionen i variabeln x. Vi har att $x = 2\sin(t)$ vilket ger att $\cos(t) = \sqrt{1 - x^2/4}$, och att $t = \arcsin(x/2)$. Detta ger att en primitiv funktion till $f(x)$ är

$$\arcsin(\frac{x}{2}) + \frac{x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}{2} = \arcsin(\frac{x}{2}) + x\frac{f(x)}{2}.$$

□

7. Avgör frågan om konvergens eller divergens av serien **(6 p)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\sqrt{n}-1}{n^3-n+1}.$$

Lösning. De dominerande termerna i täljare och nämnare är $2n\sqrt{n}$ och n^3. Vi jämför därför serien med följande serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\sqrt{n}}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\sqrt{n}}.$$

Denna andra serie är konvergent enligt integralkriteriet eftersom $\int_1^\infty x^{-3/2}\,dx$ är konvergent. Den första serien konvergerar därför även den eftersom gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n\sqrt{n}-1}{n^3-n+1}}{\frac{2}{n\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-1/n^{3/2}}{2-2/n^2+2/n^3} = 1$$

existerar och är nollskilt. $\square$