TENTAMEN

Kursnummer:	HF0024 Matematik för basår II
Moment:	TENB
Program:	Tekniskt basår
Rättande lärare:	Staffan Linnaeus, Erik Melander & Jonas Stenholm
Examinator:	Niclas Hjelm 08-790 48 57
Datum: Tid:	2021-06-12 8:00-12:00
Hjälpmedel:	**Miniräknare är inte tillåten på denna tentamen!** Formler och Tabeller, Natur och Kultur: • ISBN 978-91-27-45720-1 • ISBN 978-91-27-42245-2 • ISBN 978-91-27-72279-8 Linjal, passare, gradskiva.
Omfattning och betygsgränser:	

Tentamens-betyg	F	Fx	E	D	C	B	A
Del 1	0-6	7	8-12				
Del 2	Rättas ej.		0-2	3-5	6-8	9-11	12-14

Till samtliga uppgifter krävs fullständiga lösningar, om inte annat anges.
Lösningarna skall vara tydliga och lätta att följa.
Införda beteckningar skall definieras.
Uppställda samband skall motiveras.

Svaret ska framgå tydligt och vara förenklat så långt som möjligt. Svara med enhet och lämplig avrundning på tillämpade uppgifter. Svara exakt på övriga uppgifter, om inte annat anges.

Mätning i figur ger 0 poäng, om inte annat anges.
Lösningar ska baseras på generella algebraiska metoder. Lösning baserad på testning godtas inte.

Använd helst blyertspenna. Undvik röda pennor.
Ange ditt personnummer på varje papper.
Skriv bara på papprets ena sida och ha inte mer än en uppgift per papper.

DEL 1

1. Lös ekvationen $\bar{z} + iz + 1 = 2\,\mathrm{Re}(z)$. 2p

2. Bestäm tangenten till $y = \sin(x)$ då $x = 0$ och använd denna till att beräkna ett närmevärde till sin(0,1). 2p

3. Skriv:
   (a) $(1+i)^7$ på polär form. 1p

   (b) $2e^{-\frac{\pi}{4}i}$ på formen $a + bi$. 1p

4. Beräkna integralen $\int 2x\cos(x)dx$. 2p

5. Lös differentialekvationen $y' = 3y + 2e^{2x}$. 2p

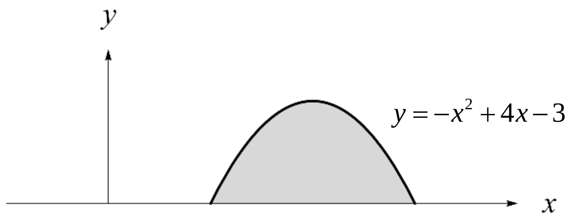
6. I en geometrisk talföljd är kvoten $1/2$ och summan av de sex första talen -63. Vad är det andra talet i talföljden? 2p

DEL 2

7. Lös differentialekvationen $y''+2y'+y=2t$ under villkoren $y(0)=1$ och $y'(0)=0$. 3p

8. Ekvationen $z^4-3z^3-2z^2+2z+12=0$ har en lösning $z=-1+i$. Bestäm samtliga lösningar till ekvationen. 3p

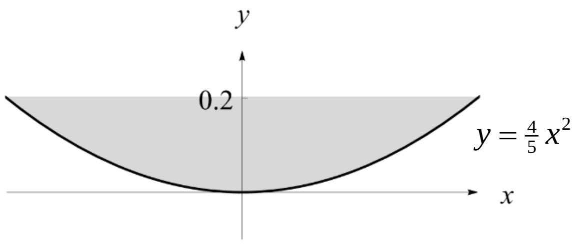
9. Ett område begränsas av kurvan $y=-x^2+4x-3$ och x-axeln. Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas då området roteras kring y-axeln.



2p

10. Igelkottar är rödlistade i Sverige, vilket innebär att de behöver extra skydd för att inte riskera att utrotas. En enkel modell för det totala antalet igelkottar $y(t)$ vid tiden t år, under vissa gynnsamma förutsättningar, är differentialekvationen $y'+0,2y=10t-50$. Den 1 januari år 2020 uppskattades antalet igelkottar i Sverige till 5000. Bestäm det år efter år 2020 då antalet igelkottar kommer att vara som lägst.
Ange svaret exakt. 3p

11. Ett runt handfat har i tvärsnitt formen av en parabel. Ekvationen för parabeln är $y=\frac{4}{5}x^2$ och handfatets djup är 0,20 m; se figur. En vattenkran ger en tillförsel av vatten med 0,125 dm³/s. Hur snabbt stiger vattenytan vid det tillfälle då handfatet är fyllt till halva dess djup? (Du kan använda att $1/\pi \approx 0,32$)



3p

LÖSNINGAR

1. Låt $z = x + iy$, där x och y är reella tal. Vi får:

$$\begin{aligned} \bar{z} + iz + 1 = 2\mathrm{Re}(z) &\Leftrightarrow x - iy + i(x+iy) + 1 = 2x \\ &\Leftrightarrow x - iy + ix - y + 1 - 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow -x - y + 1 + i(x-y) = 0. \end{aligned}$$

Vilket leder till följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} -x - y + 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 1 & (1) \\ y = x & (2) \end{cases}$$

Insättning av (1) i (2) ger: $-x + 1 = x \Leftrightarrow x = 1/2$. Vilket från (2) implicerar att $y = 1/2$.

<u>Svar:</u> $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

2. Låt $f(x) = \sin(x)$ med $f'(x) = \cos(x)$. Tangenten y till $f(x)$, då $x = 0$, kan skrivas som

$$\begin{aligned} y - f(0) = f'(0)(x - 0) &\Leftrightarrow y = f(0) + f'(0)x \\ &\Leftrightarrow y = \sin(0) + \cos(0)x \\ &\Leftrightarrow y = 0 + 1 \cdot x \\ &\Leftrightarrow y = x. \end{aligned}$$

Tangenten $y(x)$ är en linjär approximation till $\sin(x)$ runt $x = 0$. Så:
$\sin(0{,}1) \approx y(0{,}1) = 0{,}1$.

<u>Svar:</u> $\sin(0{,}1) \approx 0{,}1$.

3. (a) Skriver $1 + i$ på polär form:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Vi använder sedan de Moivres formel:

$$\begin{aligned} (1+i)^7 &= (\sqrt{2})^7\left(\cos\left(7 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(7 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 8\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right). \end{aligned}$$

<u>Svar:</u> $(1+i)^7 = 8\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$.

(b) Eulers formel ger:

$$\begin{aligned} 2e^{-\frac{\pi}{4}i} &= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}-i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

<u>Svar:</u> $2e^{-\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

4. Partiell integration ger:

$$\begin{aligned} \int 2x\cos(x)dx &= 2x\sin(x)-\int 2\sin(x)dx \\ &= 2x\sin(x)-(-2\cos(x))+C \\ &= 2x\sin(x)+2\cos(x)+C. \end{aligned}$$

<u>Svar:</u> $\int 2x\cos(x)dx = 2x\sin(x)+2\cos(x)+C$.

5. $y' = 3y+2e^{2x} \Leftrightarrow y'-3y = 2e^{2x}$.

(i) Partikulärlösning: Ansats: $y_p = ae^{2x}$, med $y'_p = 2ae^{2x}$.

Partikulärlösningen måste uppfylla differentialekvationen, vilket ger ett värde på a:

$$\begin{aligned} y'_p = 3y_p + 2e^{2x} \quad &\Leftrightarrow 2ae^{2x} = 3ae^{2x}+2e^{2x} \\ &\Leftrightarrow -ae^{2x} = 2e^{2x} \\ &\{e^{2x} \neq 0\} \\ &\Leftrightarrow a = -2. \end{aligned}$$

Så: $y_p = -2e^{2x}$.

(ii) Homogena lösningar: $y_h = Ce^{3x}$.

(iii) Allmän lösning: $y = y_h + y_p = Ce^{3x}-2e^{2x}$.

<u>Svar:</u> $y = Ce^{3x}-2e^{2x}$.

6. Kvoten är $k = 1/2$. Vi använder formeln för en geometrisk summa S_n, med $n = 6$, för att ta reda på a_1:

$$S_6 = \frac{a_1(k^6-1)}{k-1} = a_1\frac{\frac{1}{2^6}-1}{-\frac{1}{2}} = -a_1\left(\frac{1}{2^5}-2\right) = -\frac{a_1}{32}(1-64) = \frac{63a_1}{32}.$$

Eftersom $S_6 = -63$ får vi: $-63 = \frac{63a_1}{32} \Rightarrow a_1 = -32$. Det andra talet i den geometriska talföljden blir således $a_2 = a_1 k = -32 \cdot \frac{1}{2} = -16$.

<u>Svar:</u> Det andra talet i den geometriska talföljden är -16.

7. *(i) Partikulärlösning:* Ansats $y_p = at + b$, med $y'_p = a$ och $y''_p = 0$, ger:

$$y''_p + 2y_p' + y_p = 2t \Leftrightarrow 0 + 2a + at + b = 2t \Rightarrow a = 2, \text{ och } 2a + b = 0.$$

Så, $a = 2$ och $b = -4$, och $y_p = 2t - 4$.

(ii) Homogena lösningar: Vi löser den homogena ekvationen $y'' + 2y' + y = 0$. Den har följande karakteristiska ekvation:

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r+1)^2 = 0 \Leftrightarrow r = -1 \text{ (dubbelrot).}$$

Så, $y_h = (C_1 t + C_2)e^{-t}$.

(iii) Allmän lösning: $y = y_h + y_p = (C_1 t + C_2)e^{-t} + 2t - 4.$

(iv) Applicera villkor: Första villkoret $y(0) = 1$ ger oss ett värde på C_2:

$$y(0) = C_2 - 4 \Leftrightarrow 1 = C_2 - 4 \Leftrightarrow C_2 = 5.$$

För det andra villkoret $y'(0) = 0$ behöver vi först derivera y:

$$y'(t) = C_1 e^{-t} - (C_1 t + C_2)e^{-t} + 2 = e^{-t}(C_1 - C_2 - C_1 t) + 2.$$

Vi bestämmer sedan C_1 med hjälp av det andra villkoret:

$$y'(0) = C_1 - C_2 + 2 \Leftrightarrow 0 = C_1 - C_2 + 2 \Leftrightarrow C_1 = C_2 - 2 = 5 - 2 = 3.$$

Så, $C_1 = 3$ och $C_2 = 5$. Den specifika lösningen blir $y = (3t+5)e^{-t} + 2t - 4$.

<u>Svar:</u> $y = (3t+5)e^{-t} + 2t - 4$.

8. Eftersom polynomekvationen har reella koefficienter så kommer alla icke-reella lösningar i konjugerande par. Då $z_1 = -1 + i$ är en lösning är alltså $z_2 = -1 - i$ en annan lösning och $(z+1-i)(z+1+i) = (z+1)^2 + 1 = z^2 + 2z + 2$ en faktor till $z^4 - 3z^3 - 2z^2 + 2z + 12$.

Polynomdivision ger:

$$\begin{array}{l|l}
\multicolumn{1}{l}{z^2 - 5z + 6} & \\
\hline
z^4 - 3z^3 - 2z^2 + 2z + 12 & z^2 + 2z + 2 \\
\cline{2-2}
-(z^4 + 2z^3 + 2z^2) & \\
\cline{1-1}
-5z^3 - 4z^2 + 2z + 12 & \\
-(-5z^3 - 10z^2 - 10z) & \\
\cline{1-1}
6z^2 + 12z + 12 & \\
-(6z^2 + 12z + 12) & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Så, $z^4-3z^3-2z^2+2z+12=(z^2-5z+6)(z+1+i)(z+1-i)$. Eftersom en faktor nu är ett andragradspolynom kan vi använda pq-formeln för att finna de sista rötterna:

$$z^2-5z+6=0 \Leftrightarrow z=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-6}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2} \Rightarrow z_3=2 \text{ och } z_4=3.$$

<u>Svar:</u> $z_1=-1+i$, $z_2=-1-i$, $z_3=2$ och $z_4=3$.

9. Vi använder skalmetoden. Integrationsgränserna blir de x-värden där kurvan skär x-axeln, dvs. där $y=0$:

$$-x^2+4x-3=0 \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{4-3}=2\pm1 \Rightarrow x_1=1 \text{ och } x_2=3.$$

Integralen för rotationsvolymen kan sedan beräknas som:

$$\begin{aligned}
V &= \int_1^3 2\pi xy\,dx \\
&= 2\pi\int_1^3 x(-x^2+4x-3)dx \\
&= 2\pi\int_1^3 (-x^3+4x^2-3x)dx \\
&= 2\pi\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right]_1^3 \\
&= 2\pi\left(\left(-\frac{3^4}{4}+\frac{4\cdot3^3}{3}-\frac{3\cdot3^2}{2}\right)-\left(-\frac{1}{4}+\frac{4}{3}-\frac{3}{2}\right)\right) \\
&= 2\pi\left(\left(-\frac{9\cdot27}{12}+\frac{16\cdot27}{12}-\frac{6\cdot27}{12}\right)-\left(-\frac{3}{12}+\frac{16}{12}-\frac{18}{12}\right)\right) \\
&= 2\pi\left(\frac{32}{12}\right) \\
&= \frac{16}{3}\pi.
\end{aligned}$$

<u>Svar:</u> Volymen är $16\pi/3$ v.e.

10. DE $y'+0,2y=10t-50$ med villkor $y(0)=5000$ där $t=0$ år 2020.

$y=y_p+y_h$ där $y_h=Ce^{-0,2t}$

Ansats: $y_p=at+b \Rightarrow y_p'=a$ sätts in i DE:

$VL=y'+0,2y=a+0,2(at+b)=0,2at+a+0,2b=10t-50=HL$

$VL=HL$ om

$$\begin{cases}0,2a=10\\ a+0,2b=-50\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=50\\ b=-500\end{cases} \Rightarrow y_p=50t-500$$

$y=Ce^{-0,2t}+50t-500$ (Allmän lösning)

$y(0)=5000 \Rightarrow C=5500$

$y = 5500e^{-0,2t} + 50t - 500$ (Beskriver antalet igelkottar som funktion av tiden.)

Minimipunkt söks med derivata:
$y' = -0,2 \cdot 5500e^{-0,2t} + 50 = -1100e^{-0,2t} + 50$
$y' = 0$ då $\quad -1100e^{-0,2t} + 50 = 0 \quad \Rightarrow$
$t = -\dfrac{1}{0,2}\ln\dfrac{50}{1100} = -5\ln\dfrac{1}{22} = -5(\ln 1 - \ln 22) = 5\ln 22$
$y'' = -0,2 \cdot (-1100e^{-0,2t}) = 220e^{-0,2t} > 0$ för alla t dvs $t = 5\ln 22$ ger en minimipunkt.

Svar: År $(2020 + 5\ln 22)$ är antalet igelkottar som lägst enligt modellen.

11. Volymen V (dm³) som en funktion av höjden h (dm), från bottnen av handfatet, kan bestämmas med en rotationskropp kring y-axeln:

$$\begin{aligned} V(h) &= \int_0^h \pi(x(y))^2\,dy \\ &\{y = \frac{4}{5}x^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{y}\} \\ &= \int_0^h \pi\frac{5}{4}y\,dy \\ &= \frac{5\pi}{4}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h \\ &= \frac{5\pi h^2}{8}, \end{aligned}$$

där $0 \le h \le 0,2$. Hastigheten som vattenytan stiger med, dh/dt, kan bestämmas genom att derivera den sammansatta funktionen $V(h(t))$ med hjälp av kedjeregeln:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} \Leftrightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{dV}{dt}\bigg/\frac{dV}{dh}.$$

Vidare vet vi att $dV/dt = 0,125$ dm³/s och att

$$\frac{dV}{dh} = \frac{d}{dh}\left\{\frac{5\pi h^2}{8}\right\} = \frac{5\pi h}{4}$$

Så, då $h = 0,10\text{ m} = 1,0$ dm (halva djupet), stiger vattenytan med följande hastighet:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dV}{dt}\bigg/\frac{dV}{dh}\bigg|_{h=1,0} = 0,125\bigg/\frac{5\pi\cdot 1,0}{4} = \frac{0,125}{1,25\pi} = 0,10\cdot\frac{1}{\pi} \approx 0,032\text{ dm/s}.$$

Svar: Vattenytan stiger med ca 3,2 mm/s vid den tidpunkt då handfatet är fyllt till halva djupet.

RÄTTNINGSMALL

Generella riktlinjer för tentamensrättning:

A.	Varje beräkningsfel.	-1 poäng
	(Därefter fortsatt rättning enligt nya förutsättningar)	
B.	Beräkningsfel; allvarliga och/eller leder till förenkling	-2 poäng eller mer
C.	Prövning istället för generell metod	- samtliga poäng
D.	Felaktiga antaganden/ansatser	- samtliga poäng
E.	Antar numeriska värden	- samtliga poäng
F.	Lösning svår att följa och/eller Svaret framgår inte tydligt	-1 poäng eller mer
	(Vid flera svar väljs det minst gynnsamma. Svara antingen avrundat eller exakt, se nedan.)	
G.	Matematiska symboler används felaktigt/saknas	-1poäng eller mer
	Bl.a Om '=' saknas (t.ex. '=>' används istället)	-1 poäng/tenta
	Om '=' används felaktigt (t.ex. istället för '=>')	-1 poäng/tenta

Teoretiska uppgifter:

H.	Avrundat svar	-1 poäng/tenta

Tillämpade uppgifter:

I.	Enhet saknas/fel	-1 poäng/tenta
J.	Avrundningar i delberäkningar som ger fel svar	-1 poäng/tenta
K.	Svar med felaktigt antal värdesiffror (±1 värdesiffra ok)	-1 poäng/tenta
L.	Andra avrundningsfel	-1 poäng/tenta
M.	Exakt svar	-1 poäng/tenta

Uppgifter:

1.	Svarar med $\mathrm{Re}(z)$ och $\mathrm{Im}(z)$ var för sig.	-0p
	Påstår att $\mathrm{Im}(z) = yi$.	-1p
	Tecknar korrekt ekvationssystem för x och y.	+1p
2.	Felaktig tangent.	-2p
	Använder likhet istället för $\approx$.	-1p
3.	–	
4.	Felaktig partiell integration.	-2p
	Integrationskonstant saknas	-1p
5.	Fel allmän lösning till homogen ekvation.	-1p
	Fel i partikulärlösningen.	-1p
	Kombinerar inte allmän lösning till homogen ekvation och partikulärlösning till inhomogen ekvation.	-1p
6.	Korrekt bestämt a_1.	+1p
7.	Fel allmän lösning till homogen ekvation.	-1p
	Fel i partikulärlösningen.	-1p
	Kombinerar inte allmän lösning till homogen ekvation och partikulärlösning till inhomogen ekvation.	-1p
	Felbestämda konstanter.	-1p
	Använder beteckningar x och t för samma sak	-1p
8.	Identifierar andragradsfaktor och korrekt uppställd polynomdivision.	+1p
	Korrekt andragradsekvation för att finna de sista två lösningarna.	+1p

Svarar ej med samtliga rötter. -1p

9. Korrekt uppställd integral med korrekt bestämda gränser. +1p

10. Svarar $t = 5\ln 22$. . - 1p

Svarar år $2020 - 5\ln\frac{1}{22}$. OK

Verifierar inte minimum. -1p

11. Felaktig integrering. -3p

Felaktig derivering eller felaktig kedjeregel. -2p