SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
Tisdagen 23 oktober 2018

Skrivtid: 8.00-11.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Roy Skjelnes

Tentamen består av tre delar; A, B och C, som vardera ger maximalt 12 poäng. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng, upp till som mest 12 poäng. Poängsumman på del A kan alltså bli högst 12 poäng, bonuspoäng medräknade. Bonuspoängen beräknas automatiskt och antalet bonuspoäng framgår av din resultatsida.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Låt $f(x) = \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$, med $x \neq 1$.
   (a) Bestäm gränsvärdet $\lim_{x\to 1+}(f(x))$. **(2 p)**
   (b) Avgör om gränsvärdet $\lim_{x\to 1}(f(x))$ existerar. **(2 p)**
   (c) För vilka x gäller det att $f(x) < 1$. **(2 p)**

2. Beräkna nedanstående integraler.
   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}dx.$ **(3 p)**
   (b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^2}{1+x^2}\,dx.$ **(3 p)**

DEL B

3. En modell för en population $P(t)$ ges av integralekvationen
$$P'(t) = 2P(t) - 2\int_0^t P(s)\,ds - e^{2t},$$
   där t är tiden.
   (a) Deriverar man integralekvationen erhåller man en andra ordningens ordinär differential ekvation (ODE). Bestäm denna ODE. **(2 p)**
   (b) Bestäm $P(t)$ om startpopulationen $P(0) = 10$. **(4 p)**

4. Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ är definierad för alla positiva reella tal.
   (a) Bestäm Taylorpolynomet $P(x)$ av grad 2 till f kring punkten $x = 4$. **(2 p)**
   (b) Bestäm ett närmevärde till $\sqrt{5}$ som avviker högst $1/200$ från det faktiska värdet. **(4 p)**

DEL C

5. Visa att $\ln(n!) > 1 + n(\ln(n) - 1)$ för alla $n \geq 2$. **(6 p)**

6. Antag att funktionen $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är två gånger deriverbar och att $\phi''(x)$ är kontinuerlig överallt. Visa att om $\phi''(x) > x^2$ för alla x, och om $\phi(0) = -1$, så finns det ett tal $c > 0$ sådant att $\phi(c) = 0$. **(6 p)**