SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
måndag, 25 oktober 2021

Skrivtid: 08:00-11:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Maria Saprykina

Tentamen består av sex uppgifter som vardera ger maximalt sex poäng.

Del A på tentamen utgörs av de två första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från Uppgift 1 adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på Uppgift 1 kan dock som högst bli 6 poäng.

De två följande uppgifterna utgör del B och de två sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För poäng på en uppgift krävs att lösningen är välpresenterad och lätt att följa. Det innebär att lösningarna ska vara prydligt skrivna med en handstil som är lätt att läsa. Det innebär också att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är välmotiverade och tydligt förklarade. Alla steg i alla beräkningar ska finnas redovisade och vara lätta att följa. Lösningar och svar utan korrekta, utförliga och tydliga motiveringar ger ingen poäng.

DEL A

1. För vilka värden på parametrarna p och q har ekvationssystemet (med avseende på x, y och z)

$$\begin{cases} 3x - p\,y + z &= 1 \\ p\,x + y + z &= 3 \\ 3x + y + 2z &= q \end{cases}$$

a) en entydig lösning; b) oändligt många lösningar; c) ingen lösning? **(2+2+2 p)**

2. Bestäm konstanterna a, b och c så att parabeln

$$y = ax^2 + bx + c$$

utgör den bästa approximationen (enligt minstakvadratmetoden) till följande punkter:
$(-1, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(2, 2)$. **(6 p)**

Del B

3. Låt $W = \text{col}(A)$ vara kolonnrummet *(column space)* till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Avgör om vektorn $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ligger i W. **(2 p)**

b) Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ på W. **(4 p)**

4. En kvadrat med sidlängden 1 har ett hörn i origo, ett hörn i $(1, 1, 0)$ och ligger i ett plan som är parallellt med vektorn $(1, 2, 2)$. Bestäm koordinaterna för de övriga två hörnen. **(6 p)**

Del C

5. Låt $\mathcal{P}$ vara vektorrummet av alla reella polynom av grad högst 2.

(a) Bestäm en bas för $\mathcal{P}$ och bestäm dimensionen av $\mathcal{P}$. **(2 p)**
(b) Visa att deriveringsoperatorn $\frac{d}{dx} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ är en linjär avbildning. **(2 p)**
(c) Bestäm alla egenvärden till $\frac{d}{dx}$. **(2 p)**

6. Låt $\vec{v}_1$,...,$\vec{v}_k$ vara k vektorer i $\mathbb{R}^n$. Matrisen M definieras genom

$$M = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_k \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_k \\ \vdots & & & \vdots \\ \vec{v}_k \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_k \cdot \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_k \cdot \vec{v}_k \end{bmatrix},$$

där $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j$ betecknar skalärprodukten mellan $\vec{v}_i$ och $\vec{v}_j$.
Bevisa att $\det(M) = 0$ om och endast om vektorerna $\vec{v}_1$,...,$\vec{v}_k$ är linjärt beroende.

(6 p)