SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
Tisdag 24 oktober 2017

Skrivtid: 08.00-11.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Roy Skjelnes

Tentamen består av tre delar; A, B och C, som vardera ger maximalt 12 poäng. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng, upp till som mest 12 poäng. Poängsumman på del A kan alltså bli högst 12 poäng, bonuspoäng medräknade. Bonuspoängen beräknas automatiskt och antalet bonuspoäng framgår av din resultatsida.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. (a) Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = \cos^3(x)\sin(x) + 2$. **(3 p)**
   (b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2, omkring $x = 1$, till $\ln(1 + \frac{1}{2}x^2)$. **(3 p)**
   (c) Ange definitionsmängden och värdemängden till funktionen $f(x) = \arcsin(x)$. Bestäm slutligen $\arcsin(\sin(\frac{3\pi}{4}))$. **(3 p)**
   (d) Skissera funktionsgrafen till $f(x) = \sqrt{\sin^2(x-1)}$. **(3 p)**

DEL B

2. (a) Ge ett exempel på en funktion definierad på ett slutet och begränsat intervall som inte antar ett största värde. **(2 p)**
   (b) Visa att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}e^x & \text{om } x \neq \frac{1}{2}, \\ \sqrt{e} & \text{om } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

   är kontinuerlig i punkten $x = \frac{1}{2}$. **(2 p)**
   (c) Avgör om funktionen $f(x)$ antar ett största och ett minsta värde på det slutna intervallet $[0, 1]$. **(2 p)**

3. (a) Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = e^{3x}\sin(2x)$. **(4 p)**
   (b) En kurva parametriseras med $x(t) = \cos^3(t)$ och $y(t) = \sin^3(t)$, där t genomlöper intervallet $[0, \pi/2]$. Bestäm längden av kurvan. **(2 p)**

DEL C

4. Visa att $I(p) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^p}\,dx$ divergerar för $0 < p \leq 1$. **(6 p)**

5. Visa olikheten

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k}+1)} \geq \ln(\frac{n}{4})$$

   för alla $n \geq 1$. (Tips: Summan är en översumma för en integral). **(6 p)**