KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
Lördagen den 11 januari, 2014

Skrivtid: 9:00-14:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Bengt Ek, Maria Saprykina

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Resultatet på del A, som omfattar de tre första uppgifterna, kan höjas av resultat från den löpande examinationen (seminarierna) under kursen. Poängen från seminarierna läggs till poängen på del A på skrivningen, dock så att den totala poängen på del A blir högst 12p.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C. För de högsta betygen, A och B, krävs vissa poäng på del C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

Del A

1. Hur många gånger (om någon) antar funktionen
$$f(x) = (12 - x)\sqrt{x}$$
värdet 13 i intervallet $1 \leq x \leq 9$?

2. Använd en lämplig variabelsubstitution för att beräkna integralen
$$\int_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x}\, dx.$$

3. En mjölkförpackning med temperaturen 4 °C tas ur kylskåpet och placeras i ett rum med konstant temperatur 20 °C. Efter 12 minuter har mjölken antagit temperaturen 12 °C. Efter hur lång tid ytterligare har mjölkens temperatur nått 18 °C?
Förutsätt att förloppet följer Newtons lag, dvs att mjölkens temperaturändring per tidsenhet är proportionell mot temperaturskillnaden mellan rummet och mjölken.

Del B

4. Vi betraktar differentialekvationen
$$y'' - 5y' + 6y = 10\sin x.$$
a. (3p) Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen.
b. (1p) Bestäm den lösning vars graf passerar origo $(0, 0)$ och tangerar x-axeln där.

5. Det begränsade område som ligger mellan kurvan $y = x^2$ och linjen $y = 1$ delas av linjen $y = k$ i två områden med lika stora areor.
Bestäm värdet på konstanten k.

6. a. (2p) Låt
$$f(x) = (1 + x)^\alpha, \text{ där } \alpha \text{ är ett reellt tal,}$$
och ange Maclaurinutvecklingen (dvs Taylorutvecklingen kring $x = 0$) av ordning 2 för $f(x)$, dvs ange Maclaurinpolynomet av grad 2 med tillhörande restterm (på valfri form).
b. (2p) Bestäm med hjälp av resultatet i uppgift a. gränsvärdet
$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt[3]{x^6 + 3x^5}).$$
(Det kan vid beräkningen av gränsvärdet vara lämpligt att införa variabeln t, där $t = \frac{1}{x}$.)

Del C

7. Formulera och bevisa analysens huvudsats.
   Utan bevis får integralkalkylens medelvärdessats användas.

8. Vi betraktar den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \ln(1 + \tfrac{1}{x^2})\, dx.$$

   a. (1p) Bevisa olikheten

$$\ln(1+x) \leq x \text{ för } x \geq 0.$$

   b. (1p) Använd olikheten i a. för att visa att den givna integralen är konvergent.
   c. (2p) Beräkna också integralens värde.

9. Funktionen f är kontinuerligt deriverbar för alla x (dvs f' existerar och är kontinuerlig för alla x). Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(\sin x) - f(\arctan x)}{x^3}.$$

   (Svaret kan innehålla f:s och f':s värden i enstaka punkter.)