KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen 2013-10-28

DEL A

1. Vi har matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm vilka elementära radoperationer vi måste utföra på matrisen A för att få matrisen EA. **(1 p)**

(b) Bestäm en matris E_2 sådan att E_2A byter plats på rad 1 och 4 i matrisen A. **(1 p)**

(c) Bestäm rangen till A. **(1 p)**

(d) Bestäm determinanten till A. **(1 p)**

Lösning. (a) När vi utför matrisprodukten EA ser vi att följande två elementära radoperationer utförs. Den ena är att -3 gånger tredje raden adderas till första raden. Den andra är att andra och fjärde raden byter plats.

(b) Matrisen

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

är sådan att E_2A byter plats på raderna 1 och 4 i matrisen A.

(c) Vi utför elementära radoperationer på matrisen A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_4 \\ \\ \\ R_1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ R_2 + R_1 \\ R_3 - R_1 \\ R_4 - R_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ R_3 + R_2 \\ R_4 - R_2 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi har nått den reducerade trappstegsformen. Antal ledande ettor i den reducerade trappstegsformen till matrisen A är två, vilket är rangen till A.

(d) I och med att rangen inte är fyra är determinanten noll. Vi kan också se det genom att utveckla determinanten längs fjärde raden. Uttrycket att beräkna blir

$$-1\det\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix} + 0 - 0 + (-1)\det\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

I matrisen till vänster är rad 2 och rad 3 linjärt beroende, och dennas determinant blir då noll. I matrisen till höger är också rad 2 och rad 3 linjärt beroende, så dennas determinant blir också noll. Den sökte determinant är noll.

$\square$

2. Lösningsmängden V till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

är ett delrum av $\mathbb{R}^4$.

(a) Bestäm en bas för V. **(1 p)**

(b) Bestäm en avbildning $T\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ sådan att bildrummet är V. **(1 p)**

(c) Bestäm en bas för det ortogonala komplementet $V^\perp$. **(2 p)**

Lösning. a) Vi utför Gauss-Jordan elimination på totalmatrisen till ekvationssystemet och får

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ R_2 - 2R_1 \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} R_1 - R_2 \\ \\ R_3 - R_2 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Med parametrar s och t för de båda fria variablerna får vi

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s + 2t \\ -s - t \\ s \\ t \end{bmatrix}$$

Lösningsmängden V är $(2t+2s, -t-s, t, s)$, med variabler s, t. En bas för V kan vi välja som $\{(2,-1,1,0),(2,-1,0,1)\}$.

b) Ett exempel är avbildningen som ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bildrummet spänns upp av kolumner i matrisen A.

c) Ortogonala komplementet V ges av ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x - y + z &= 0 \\ 2x - y + w &= 0 \end{cases}$$

Gauss-Jordan elimination, addera -rad1 till rad2, multiplicera rad 2 med -1, addera -1rad2 till rad1, på totalmatrisen ger matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Delar vi första raden med 2 så får vi den reducerade trappstegsmatrisen. Lösningsmängden är $(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}s, t, s, s)$, med variabler s, t. En bas för $V^\perp$ blir $\{(1,2,0,0),(-1,0,2,2)\}$. $\square$

3. Avbildningen $T \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm egenvektorer och egenvärden till T. **(1 p)**
(b) Rita upp egenrummen till T. **(1 p)**
(c) Bestäm två linjärt oberoende egenvektorer för T. **(1 p)**
(d) Bestäm matrisrepresentationen av T med avseende på en bas av egenvektorer. **(1 p)**

Lösning. a) Vi bestämmer först egenvärden, dvs nollställen till det karakteristiska polynomet

$$\det(\lambda - A) = (\lambda - 1)\lambda - 2 = (\lambda - \frac{1}{2})^2 - 2 - \frac{1}{4}.$$

Vi har att $2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$, vilket ger att egenvärden är

$$\lambda = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \quad \text{och} \quad \lambda = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1.$$

Egenvektorer tillhörande egenvärdet $\lambda = 2$ ges av ekvationen $x - 2y = 0$. Egenvektorer tillhörandet egenvärdet $\lambda = -1$ ges av ekvationen $-2x - 2y = 0$, som vi också kan skriva som $x + y = 0$.

c) Två egenvektorer tillhörande olika egenvärden är linjär oberoende. Exempelsvis har vi egenvektorerna $\vec{e} = (2, 1)$ och $\vec{f} = (1, -1)$.

d) En matrisrepresentation av avbildningen T med avseende på en bas av egenvektorer, tex med basen $\{\vec{e}, \vec{f}\}$ blir

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

□

DEL B

4. Anna, Bertil, Cecilia och Daniel köper snask i en kiosk där alla priser är i hela kronor.
   - Anna köper 1 lakritsklubba, 2 salta remmar och 8 hallonkolor.
   - Bertil köper 2 lakritsklubbor, 3 salta remmar och 10 hallonkolor.
   - Cecilia köper 3 lakritsklubbor, 4 salta remmar och 12 hallonkolor.
   - Daniel köper 5 lakritsklubbor, 4 salta remmar och 3 hallonkolor.

   Anna betalar 21 kronor, Bertil 31 kronor och Cecilia 41 kronor. Vad betalar Daniel?

(4 p)

Lösning. Om en lakritsklubba kostar x kronor, en salt rem y kronor och en hallonkola z kronor, då får vi ett linjärt ekvationssystem

$$\begin{cases} x + 2y + 8z = 21 \\ 2x + 3y + 10z = 31 \\ 3x + 4y + 12z = 41 \end{cases}$$

med totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 8 & 21 \\ 2 & 3 & 10 & 31 \\ 3 & 4 & 12 & 41 \end{array}\right].$$

Med radoperationer får vi nu

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 8 & 21 \\ 2 & 3 & 10 & 31 \\ 3 & 4 & 12 & 41 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 8 & 21 \\ 0 & -1 & -6 & -11 \\ 0 & -2 & -12 & -22 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 + 2R_2 \\ -R_2 \\ R_3 - 2R_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

och vi har nått reducerad trappstegsform. Vi har ledande ettor i första och andra kolumnen men inte i tredje så vi sätter $z = t$, där t är en reell parameter, och får $y = 11 - 6t$ och $x = -1 + 4t$. Eftersom priserna är i hela kronor måste t vara ett heltal. Men om $t \geq 2$ blir y negativ och om $t \leq 0$ blir x negativ, så enda möjligheten är att $t = 1$ och $x = 3$, $y = 5$, $z = 1$. Daniel får alltså betala $5 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 38$ kronor. □

Svar: Daniel får betala 38 kronor.

5. En två meter lång man står i en plan sluttning med ekvationen $x - 2y + 2z = 3$. Han har fötterna i punkten $P = (1, 2, 3)$ och huvudet i punkten $Q = (1, 2, 5)$. Det är mitt i natten och den enda ljuskällan i närheten är en lampa i punkten $R = (-5, -4, 8)$. Hur lång är mannens skugga? **(4 p)**

Lösning. Låt L vara linjen genom punkterna R och Q. Skuggan av mannens huvud hamnar i punkten S där L skär planet, så låt oss först beräkna S.

Linjen L har riktningsvektorn $\overline{RQ} = (6, 6, -3)$. Vi multiplicerar med $1/3$ för att få en riktningsvektor $(2, 2, -1)$ som är trevligare att räkna med. Nu kan vi skriva $S = R + t(2, 2, -1) = (-5, -4, 8) + t(2, 2, -1)$ för något tal t och om vi stoppar in koordinaterna för S i planets ekvation får vi $(2t-5)-2(2t-4)+2(8-t) = 3$ med lösningen $t = 4$. Vi drar slutsatsen att $S = (-5, -4, 8) + 4(2, 2, -1) = (3, 4, 4)$. Fötternas skugga hamnar förstås i samma punkt $P = (1, 2, 3)$ som fötterna eftersom mannen står i sluttningen, så längden av hela mannens skugga är $|\overline{PS}| = |(3, 4, 4) - (1, 2, 3)| = |(2, 2, 1)| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$. $\square$

Svar: Skuggans längd är 3 meter.

6. Låt
$$A = \vec{u}\vec{u}^T + 2\vec{v}\vec{v}^T,$$
där
$$\vec{u} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ och } \vec{v} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

(a) Visa att $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är egenvektorer till A. **(2 p)**

(b) Visa att A är ortogonalt diagonaliserbar genom att ange en ortognal matris P och en diagonalmatris D så att $A = PDP^T$. **(2 p)**

Lösning. Observera att $|\vec{u}| = \frac{1}{5}\sqrt{3^2+4^2} = 1$, $|\vec{v}| = \frac{1}{5}\sqrt{4^2+(-3)^2} = 1$ och $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{5^2}\big(3\cdot 4 + 4\cdot(-3)\big) = 0$ så $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ är en ortonormal bas för $\mathbb{R}^2$.

Det gäller då att $A\vec{u} = \vec{u}\vec{u}^T\vec{u} + 2\vec{v}\vec{v}^T\vec{u} = \vec{u}$ (eftersom $\vec{u}^T\vec{u} = 1$ och $\vec{v}^T\vec{u} = 0$) så $\vec{u}$ är en egenvektor till A med egenvärde 1. På motsvarande sätt är $A\vec{v} = \vec{u}\vec{u}^T\vec{v} + 2\vec{v}\vec{v}^T\vec{v} = 2\vec{v}$ (eftersom $\vec{u}^T\vec{v} = 0$ och $\vec{v}^T\vec{v} = 1$) så $\vec{v}$ är en egenvektor till A med egenvärde 2. Vi har hittat en ortonormal bas av egenvektorer så A är ortogonalt diagonaliserbar och vi kan välja
$$P = \begin{bmatrix} | & | \\ \vec{u} & \vec{v} \\ | & | \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \text{ och } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$
$\square$

Svar: A är ortogonalt diagonaliserbar och $A = PDP^T$ där
$$P = \begin{bmatrix} | & | \\ \vec{u} & \vec{v} \\ | & | \end{bmatrix} = \tfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \text{ och } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

DEL C

7. Till varje tal a har vi följande tre vektorer i $\mathbb{R}^3$,

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1-a \\ a \\ 2a-1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ a \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm för vilka tal a vektorerna $\vec{u}$, $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är linjärt beroende. **(2 p)**

(b) Låt $a = \frac{2}{3}$. Förklara att det finns oändligt många linjära avbildningar $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ med egenskapen att **(2 p)**

$$T(\vec{u}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \ T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ T(\vec{w}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Lösning. a) Tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ är linjärt oberoende om de spänner upp hela $\mathbb{R}^3$. Detta kan vi kolla med determinanten. Vi har att determinanten

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1-a & 2 \\ 2 & a & 3 \\ 1 & 2a-1 & a \end{bmatrix} = (a^2 - 3(2a-1)) - (1-a)(2a-3) + 2(2(2a-1) - a).$$

Som vi kan skriva som $3a^2 - 5a + 2$. Vektorerna är linjärt oberoende om och endast om determinanten är noll-skilld. Vi har att

$$a^2 - \frac{5}{3}a + \frac{2}{3} = (a - \frac{5}{6})^2 + \frac{2}{3} - \frac{25}{36} = (a - \frac{5}{6})^2 - \frac{1}{36}.$$

Vektorerna är linjär beroende om och endast om a är lika med

$$a = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1 \quad \text{eller} \quad a = \frac{5}{6} - 16 = \frac{2}{3}.$$

b) När $a = \frac{2}{3}$ då ser vi att $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{v}$. Vektorerna $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är linjär oberoende, och kan utvidgas till en bas $\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$ för $\mathbb{R}^3$. En linjär avbildning är bestämd av sitt värde på basvektorerna, och det är då klart att det finns oändligt många avbildningar sådan att $T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ och $T(\vec{w}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Värdet på $\vec{u}$ är dock bestämd som

$$T(\vec{u}) = \frac{1}{3}T(\vec{v}) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

vilket också stämmer med uppgiften.

$\square$

8. I $\mathbb{R}^2$ har vi linjen L som ges av ekvationen $4x + 3y = 0$. Låt

$$A = \frac{1}{50}\begin{bmatrix} -9 & -48 \\ -48 & 19 \end{bmatrix},$$

och låt $\vec{x}$ vara en godtycklig vektor i $\mathbb{R}^2$ Visa/förklara att när n växer, så kommer $A^n\vec{x}$ närma sig (konvergera mot) linjen L. $\left(\text{Ledning:} \frac{9 \cdot 19 + 48^2}{50^2} = \frac{9 \cdot 11}{10^2}.\right)$ **(4 p)**

Lösning. Vi tänker oss att A representerar en linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ med avseende på standardbasen. Denna avbildning är diagonaliserbar. Vi bestämmer först egenrum och egenvärden vilket vi gör genom att bestämma nollställen till det karakteristiska polynomet

$$\det(\lambda - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda + \frac{9}{50} & \frac{48}{50} \\ \frac{48}{50} & \lambda - \frac{19}{50} \end{bmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{5}\lambda - \frac{9 \cdot 11}{10^2} = 0.$$

Vi fortsätter med att kvadratkomplettera uttrycket $\lambda^2 - \frac{2}{10}\lambda = \frac{9 \cdot 11}{10}^2$, och erhåller att

$$(\lambda - \frac{1}{10})^2 = \frac{9 \cdot 11}{10}^2 + \frac{1}{10}^2 = 1.$$

Egenvärden blir därmed $\lambda_1 = -\frac{9}{10}$ och $\lambda_2 = \frac{11}{10}$. Vi bestämmer egenrummet tillhörande λ_1 på vanligt vis, dvs elementära radoperationer på matrisen

$$\begin{bmatrix} -\frac{9}{10} + \frac{9}{50} & \frac{48}{50} \\ \frac{48}{50} & -\frac{9}{10} - \frac{19}{50} \end{bmatrix} = \frac{1}{50}\begin{bmatrix} -36 & 48 \\ 48 & -64. \end{bmatrix}.$$

Den nedre raden är en mutippel av den övre, och vi ser att egenrummet E_{λ_1} ges av linjen $3x - 4y = 0$. Då A är symmetrisk har vi att egenrummet E_{λ_2} ges av ekvationen $4x + 3y$, dvs $E_{\lambda_2} = L$. Låt $\{\vec{e}, \vec{f}\}$ vara en bas av egenvektorer, där $\vec{f}$ är en bas för L. En godtycklig vektor $\vec{x}$ kan då skrivas som

$$\vec{x} = a\vec{e} + b\vec{f}.$$

Om vi itererar $T^n(\vec{x})$, och använder att T är linjär och att basen består av egenvektorer har vi att

$$T^n(\vec{x}) = a\lambda_1^n\vec{e} + b\lambda_2^n\vec{f} = a(-1)^n\frac{9^n}{10^n}\vec{e} + b\frac{11^n}{10^n}\vec{f}.$$

När n växer vill λ_1^n gå mot noll, vilket betyder att $T^n(\vec{x})$ går mot

$$b\frac{11^n}{10^n}\vec{f} = t \cdot \vec{f},$$

det vill säga linjen L. □

9. Låt $A = (a_{i,j})$ vara en *strikt* övretriangluär 4×4-matris; dvs $a_{i,j} = 0$ om $i \geq j$. Låt I beteckna identitetsmatrisen, och låt V vara vektorrummet av alla (4×4)-matriser.
   (a) Visa att $A^4 = 0$. **(2 p)**
   (b) Visa att $(I - A)^{-1}$ är med i det linjära höljet Span$\{I, A, A^2, A^3\}$. **(2 p)**

Lösning. a) Om Aär en övre-triangulär matris, då verifierar man att $A^4 = 0$, tex på följande sätt. Låt A vara en övretriangular matris, $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Vi beräknar produkten A^2 som $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ad & ae+bf \\ 0 & 0 & 0 & df \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Låt B vara en matris på formen $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & 0 & c' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Man erhåller att $B^2 = 0$, vilket betyder att $A^4 = 0$.

b) Vi har att $A^4 = 0$. Detta betyder att matrisen $B = 1 + A + A^2 + A^3$ multiplicerad med $I - A$ blir

$$(I - A)B = 1 + A + A^2 + A^3 - A - A^2 - A^3 - A^4 = I.$$

Och på samma sätt har vi att $B(I - A) = I$, vilket betyder att matrisen B är inversen till $I - A$. Per konstruktion ligger B i det linjära höljet till I, A, A^2, A^3.

$\square$