KTH Teknikvetenskap

# SF1625 Envariabelanalys
# Lösningsförslag till tentamen 2014-01-11

## DEL A

1. Hur många gånger (om någon) antar funktionen
$$f(x) = (12 - x)\sqrt{x}$$
värdet 13 i intervallet $1 \leq x \leq 9$?

**Lösningsförslag.**
I intervallets ändpunkter antar $f$ värdena
$$f(1) = (12-1)\sqrt{1} = 11 \text{ och } f(9) = (12-9)\sqrt{9} = 9.$$
För att finna dess värden däremellan bestämmer vi först $f$:s derivata (derivatan av en produkt)
$$f'(x) = (-1)\sqrt{x} + (12-x)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}(12-3x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}(4-x).$$
Dess enda nollställe är $x = 4$ och $f(4) = (12-4)\sqrt{4} = 16$.
Tabell:

| $x$ | 1 | | 4 | | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | 11 | $\nearrow$ | 16 | $\searrow$ | 9 |

I intervallet $[1, 4]$ är $f$ kontinuerlig (en produkt av elementära funktioner) och $f(1) = 11 < 13 < 16 = f(4)$, så $f$ antar värdet 13 minst en gång i intervallet (enligt satsen om mellanliggande värden). Eftersom $f'(x) > 0$ för alla $x$ med $1 < x < 4$ är $f$ strängt växande där och kan inte anta samma värde mer än en gång. $f$ antar alltså värdet 13 precis en gång i intervallet $]1, 4[$.
På samma sätt ($f$ kontinuerlig, $f(4) = 16 > 13 > 9 = f(9)$, $f'(x) < 0$ så $f$ strängt avtagande) ser man att $f$ antar värdet 13 precis en gång i intervallet $]4, 9[$.
För $x = 1, 4, 9$ är $f(x) \neq 13$, så $f$ antar värdet 13 precis två gånger i intervallet $[1, 9]$.

**Svar.** $f$ antar värdet 13 precis två gånger i intervallet $[1, 9]$.

2. Använd en lämplig variabelsubstitution för att beräkna integralen

$$\int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx.$$

**Lösningsförslag.**

Eftersom integranden har en faktor $\frac{1}{x}$ (vilket ju är derivatan av $\ln x$) och resten är en funktion av just $\ln x$, inför vi $t = \ln x$ som ny variabel och får:

$$\int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx = \begin{bmatrix} t = \ln x; & x = e \Rightarrow t = 1 \\ dt = \frac{1}{x}dx; & x = 1 \Rightarrow t = 0 \end{bmatrix} = \int_0^1 \sqrt{1+t}\,dt =$$

$$= \left[\tfrac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \tfrac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}) = \tfrac{2}{3}(\sqrt{8}-1).$$

(Det går också bra att använda $t = \sqrt{1+\ln x}$ som ny variabel. Då blir integralen $\int_1^{\sqrt{2}} 2t^2\,dt$.)

**Svar.** Integralens värde är $\frac{2}{3}(\sqrt{8}-1)$.

3. En mjölkförpackning med temperaturen 4 °C tas ur kylskåpet och placeras i ett rum med konstant temperatur 20 °C. Efter 12 minuter har mjölken antagit temperaturen 12 °C. Efter hur lång tid ytterligare har mjölkens temperatur nått 18 °C?
Förutsätt att förloppet följer Newtons lag, dvs att mjölkens temperaturändring per tidsenhet är proportionell mot temperaturskillnaden mellan rummet och mjölken.

**Lösningsförslag.**

Låt mjölkens temperatur vid tid $t$ vara $T(t)$ och kalla 4 °C för $T_0$ och 20 °C för $T_1$.
Enligt Newtons lag uppfyller då $T(t)$ för någon (positiv) konstant $k$:

$$\begin{cases} T' = -k(T - T_1), \\ T(0) = T_0. \end{cases}$$

Vi löser först differentialekvationen.
Karakteristiska ekvationen för motsvarande homogena ekvation är

$$r = -k,$$

med roten $r_1 = -k$, så den homogena ekvationens allmänna lösning är

$$T_h(t) = Ae^{-kt}, \ A \text{ en godtycklig konstant.}$$

För en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen görs ansatsen $T(t) = c$, en konstant. Insättning i ekvationen ger $0 = -k(c - T_1)$, så vi får en lösning om $c = T_1$,

$$T_p(t) = T_1.$$

Den allmänna lösningen till ekvationen är alltså

$$T(t) = T_h(t) + T_p(t) = Ae^{-kt} + T_1.$$

Konstanten $A$ bestäms av villkoret på $T(0)$. Det ger

$$A + T_1 = T_0,$$

vilket ger $A = T_0 - T_1$ och lösningen

$$T(t) = (T_0 - T_1)e^{-kt} + T_1.$$

Kalla 12 minuter för $t_a$, 12 °C för $T_a$ och tiden då mjölken är 18 °C (=$T_b$) för $t_b$.
Då är $T_a = T(t_a) = (T_0 - T_1)e^{-kt_a} + T_1$, så $e^{-kt_a} = \frac{T_a - T_1}{T_0 - T_1}$, och p.s.s. $e^{-kt_b} = \frac{T_b - T_1}{T_0 - T_1}$. Om man sätter in talvärden för $T$:na får man $e^{-kt_a} = \frac{12-20}{4-20} = \frac{1}{2}$ och $e^{-kt_b} = \frac{18-20}{4-20} = \frac{1}{8} = (e^{-kt_a})^3 = e^{-k \cdot 3t_a}$, så $t_b = 3t_a$ och den sökta tiden $t_b - t_a = 2t_a$, dvs 24 minuter.

**Svar.**

Efter ytterligare 24 minuter.

## DEL B

4. Vi betraktar differentialekvationen

$$y'' - 5y' + 6y = 10 \sin x.$$

a. (3p) Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen.
b. (1p) Bestäm den lösning vars graf passerar origo $(0, 0)$ och tangerar $x$-axeln där.

**Lösningsförslag.**
a. Karakteristiska ekvationen för motsvarande homogena ekvation är

$$r^2 - 5r + 6 = 0,$$

med rötterna $r_{1,2} = 2,\ 3$, så den homogena ekvationens allmänna lösning är

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x},\ \text{där } C_1,\ C_2 \text{ är godtyckliga konstanter.}$$

För att finna en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen låter vi den komplexa funktionen $u(x)$ uppfylla ekvationen

$$u'' - 5u' + 6u = 10e^{ix} (= 10(\cos x + i \sin x)).$$

Då uppfyller $y = \operatorname{Im} u$ den givna ekvationen. Ansätt en lösning $u(x) = ce^{ix},\ c$ en konstant. Det ger $u'(x) = ice^{ix}$, $u''(x) = -ce^{ix}$. Insättning i ekvationen ger $(-c - 5ic + 6c)e^{ix} = 10e^{ix}$, så vi får en lösning om $c = \frac{10}{5-5i} = \frac{2}{1-i} = 1 + i$. $u_p(x) = (1 + i)e^{ix}$, så

$$y_p(x) = \operatorname{Im} u_p(x) = \operatorname{Im}(1 + i)(\cos x + i \sin x) = \cos x + \sin x.$$

(Man kan också ansätta partikulärlösningen $y(x) = a \cos x + b \sin x$ och sätta in. Det ger en lösning om $a = b = 1$, så samma $y_p$ som ovan.)

Den allmänna lösningen till ekvationen är alltså

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \cos x + \sin x,$$

vilket ger $y'(x) = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x} - \sin x + \cos x$.
Konstanterna $C_1, C_2$ bestäms av villkoret att grafen tangerar $x$-axeln i $(0, 0)$, dvs $y(0) = y'(0) = 0$. De ger

$$C_1 + C_2 + 1 = 0 \text{ och } 2C_1 + 3C_2 + 1 = 0,$$

vilket ger $C_1 = -2, C_2 = 1$ och lösningen

$$y(x) = -2e^{2x} + e^{3x} + \cos x + \sin x.$$

**Svar.**
a. Den allmänna lösningen är $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \cos x + \sin x$, där $C_1,\ C_2$ är godtyckliga konstanter,
b. Den sökta lösningen är $y(x) = -2e^{2x} + e^{3x} + \cos x + \sin x$.

5. Det begränsade område som ligger mellan kurvan $y = x^2$ och linjen $y = 1$ delas av linjen $y = k$ i två områden med lika stora areor.
Bestäm värdet på konstanten $k$.

**Lösningsförslag.**
Vi beräknar för $k > 0$ arean av det begränsade området mellan linjen $y = k$ och kurvan $y = x$ och kallar den $A(k)$.
$x$-värdena för punkter i området ges av $x^2 \leq k$, dvs $-\sqrt{k} \leq x \leq \sqrt{k}$. För vart och ett av dessa $x$ ligger $(x, y)$ i området precis om $x^2 \leq y \leq k$, så arean är

$$A(k) = \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} (k - x^2)\, dx = \left[kx - \tfrac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} = \tfrac{4}{3}k^{\frac{3}{2}}.$$

$k = 1$ ger arean av området som skulle halveras, så villkoret som bestämmer $k$ är

$$A(k) = \tfrac{1}{2}A(1), \text{ dvs } \tfrac{4}{3}k^{\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{4}{3}, \text{ så } k^{\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{2} \text{ och } k = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

**Svar.**
Det sökta värdet är $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

6. a. (2p) Låt

$$f(x) = (1+x)^\alpha, \text{ där } \alpha \text{ är ett reellt tal,}$$

och ange Maclaurinutvecklingen (dvs Taylorutvecklingen kring $x = 0$) av ordning 2 för $f(x)$, dvs ange Maclaurinpolynomet av grad 2 med tillhörande restterm (på valfri form).
b. (2p) Bestäm med hjälp av resultatet i uppgift a. gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+2x^3} - \sqrt[3]{x^6+3x^5}).$$

(Det kan vid beräkningen av gränsvärdet vara lämpligt att införa variabeln $t$, där $t = \frac{1}{x}$.)

**Lösningsförslag.**
a. Utvecklingen är en standardutveckling (binomialformeln) och får ges från minnet.
Utan minne: $f(x) = (1+x)^\alpha,\ f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1},\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$,
så $f(0) = (1+0)^\alpha = 1,\ f'(0) = \alpha,\ f''(0) = \alpha(\alpha-1)$.
Det ger Maclaurinpolynomet $p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2$.
Eftersom $f$ är deriverbar hur många gånger som helst då $x > -1$ är resttermen $x^3 \cdot B(x)$, där $B(x)$ är begränsad i någon omgivning till $x = 0$. Den sökta utvecklingen blir

$$f(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + x^3 \cdot B(x),\ \text{($B(x)$ begränsad i en omgivning till $x = 0$).}$$

b. Med den rekommenderade variabeln $t = \frac{1}{x}$ och $\alpha = \frac{1}{2}$ resp. $\frac{1}{3}$ i utvecklingen i a. fås

$$\sqrt{x^4+2x^3} = \sqrt{\frac{1}{t^4}+\frac{2}{t^3}} = \frac{1}{t^2}\sqrt{1+2t} = \frac{1}{t^2}(1 + \frac{1}{2}\cdot 2t + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}(2t)^2 + t^3 \cdot B_1(t)) =$$
$$= \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + t \cdot B_1(t),$$
$$\sqrt[3]{x^6+3x^5} = \sqrt[3]{\frac{1}{t^6}+\frac{3}{t^5}} = \frac{1}{t^2}\sqrt[3]{1+3t} = \frac{1}{t^2}(1 + \frac{1}{3}\cdot 3t + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}(3t)^2 + t^3 \cdot B_2(t)) =$$
$$= \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} - 1 + t \cdot B_2(t),$$

där $B_1(t)$ och $B_2(t)$ är begränsade i en omgivning till $t = 0$.
Det ger

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+2x^3} - \sqrt[3]{x^6+3x^5}) = \lim_{t\to 0+}((\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + t \cdot B_1(t)) - (\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} - 1 + t \cdot B_2(t))) =$$
$$= \lim_{t\to 0+}(\frac{1}{2} + t \cdot (B_2(t) - B_2(t))) = \frac{1}{2}.$$

**Svar.** a. Utvecklingen kan skrivas $f(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + x^3 \cdot B(x)$, där $B(x)$ är begränsad i en omgivning till $x = 0$.
b. Gränsvärdet är $\frac{1}{2}$.

## DEL C

7. Formulera och bevisa analysens huvudsats.
Utan bevis får integralkalkylens medelvärdessats användas.

**Lösningsförslag.**
Satsen säger att om $f$ är kontinuerlig i intervallet $a \leq x \leq b$ så är funktionen

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt,\ a \leq x \leq b$$

deriverbar och

$$S'(x) = f(x) \text{ för alla } x \text{ med } a < x < b.$$

För att bevisa påståendet skall vi visa att då $a < x < b$ existerar

$$\lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h}$$

och att det är lika med $f(x)$ (det är ju definitionen av derivatan $S'$).
Integralkalkylens medelvärdessats säger att om $f$ är en kontinuerlig funktion i $[c, d]$ finns $\xi \in [c, d]$ med $\int_c^d f(t)\,dt = f(\xi)(d - c)$ (om $c > d$ skall $[c, d]$ tolkas som $[d, c]$ och, som vanligt, $\int_c^d f(t)\,dt = -\int_d^c f(t)\,dt$).
Låt $a < x < b$ och $h$ vara så litet (till beloppet) att $a < x + h < b$. Då ger medelvärdessatsen att

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi_h),$$

för något $\xi_h$ mellan $x$ och $x + h$. Då $h \to 0$ fås $\xi_h \to x$, så $f(\xi_h) \to f(x)$ ($f$ är ju kontinuerlig i $x$). Det visar att gränsvärdet $\lim_{h\to 0}$ av vänsterledet också existerar, så $S$ är deriverbar i $x$ och $S'(x) = f(x)$. **Saken är klar.**

**Svar.** Se lösningen.

8. Vi betraktar den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \ln(1+\tfrac{1}{x^2})\,dx.$$

a. (1p) Bevisa olikheten

$$\ln(1+x) \le x \text{ för } x \ge 0.$$

b. (1p) Använd olikheten i a. för att visa att den givna integralen är konvergent.
c. (2p) Beräkna också integralens värde.

**Lösningsförslag.**
a. Låt $f(x) = x - \ln(1+x)$. Vi skall visa att $f(x) \ge 0$ då $x \ge 0$.
Derivering av $f$ ger $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$, så $f'(x) > 0$ då $x > 0$. Eftersom $f$ är kontinuerlig då $x \ge 0$ ger det att $f$ är strängt växande då $x \ge 0$. $f(0) = 0 - \ln 1 = 0$, så $f(x) = f(x) - f(0) \ge 0$ då $x \ge 0$. **Saken i a. är klar.**
b. För alla $x \ne 0$ är $0 \le \ln(1+\frac{1}{x^2})$ och $\frac{1}{x^2} > 0$ så med resultatet i a. fås $0 \le \ln(1+\frac{1}{x^2}) \le \frac{1}{x^2}$.
Eftersom $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ är konvergent är enligt en känd jämförelsesats också den betraktade integralen det. **Saken i b. är klar.**
c. Vi inför en faktor $1\cdot$ i integranden och använder partialintegration (derivering av $\ln(1+\frac{1}{x^2})$ ger ju då en rationell integrand).

$$\int_1^X 1\cdot\ln(1+\tfrac{1}{x^2})\,dx = \left[x\cdot\ln(1+\tfrac{1}{x^2})\right]_1^X - \int_1^X x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{-2}{x^3}\,dx =$$

$$= \left[x\cdot\ln(1+\tfrac{1}{x^2})\right]_1^X + \int_1^X \frac{2}{x^2+1}\,dx = \left[x\cdot\ln(1+\tfrac{1}{x^2}) + 2\arctan x\right]_1^X.$$

Enligt b. är $0 \le \ln(1+\frac{1}{x^2}) \le \frac{1}{x^2}$, så $\lim_{X\to\infty} X\cdot\ln(1+\frac{1}{X^2}) = 0$ och

$$\int_1^\infty \ln(1+\frac{1}{x^2})\,dx = \lim_{X\to\infty}\int_1^X \ln(1+\frac{1}{x^2})\,dx =$$

$$= \lim_{X\to\infty}\left((X\cdot\ln(1+\tfrac{1}{X^2}) + 2\arctan X) - (1\cdot\ln(1+1) + 2\arctan 1)\right) =$$

$$= 0 + 2\cdot\tfrac{\pi}{2} - \ln 2 - 2\cdot\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\pi}{2} - \ln 2.$$

**Svar.** a. och b. visade ovan.
c. Integralens värde är $\frac{\pi}{2} - \ln 2$.

9. Funktionen $f$ är kontinuerligt deriverbar för alla $x$ (dvs $f'$ existerar och är kontinuerlig för alla $x$). Beräkna gränsvärdet
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(\sin x) - f(\arctan x)}{x^3}.$$
(Svaret kan innehålla $f$:s och $f'$:s värden i enstaka punkter.)

**Lösningsförslag.**

$f$ är deriverbar, så medelvärdessatsen ger att $f(\sin x) - f(\arctan x) = f'(\xi)(\sin x - \arctan x)$ för ett $\xi$ mellan $\sin x$ och $\arctan x$. Då $x \to 0$ fås $\xi \to 0$, så $\lim_{x\to 0} f'(\xi) = f'(0)$, eftersom $f'$ är kontinuerlig.

Då fås
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(\sin x) - f(\arctan x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \left(f'(\xi) \cdot \tfrac{\sin x - \arctan x}{x^3}\right) = f'(0) \cdot \lim_{x\to 0} \tfrac{\sin x - \arctan x}{x^3}.$$

Maclaurinutvecklingarna $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^5 \cdot B(x)$ och $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + x^5 \cdot C(x)$, där $B$, $C$ är begränsade i en omgivning till $x = 0$, ger
$$\lim_{x\to 0} \tfrac{\sin x - \arctan x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \tfrac{\frac{x^3}{6} + x^5\cdot(B(x) - C(x))}{x^3} = \lim_{x\to 0} \tfrac{\frac{1}{6} + x^2\cdot(B(x) - C(x))}{1} = \tfrac{1}{6}.$$

Det sökta gränsvärdet är alltså $\frac{1}{6} \cdot f'(0)$.

**Svar.** Det sökta gränsvärdet är $\frac{1}{6} \cdot f'(0)$.