KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen med lösningsförslag
11 januari 2021

1. Linjerna L_1 och L_2 ges på parameterform av

$$L_1 : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$L_2 : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestäm en skalär ekvation för det plan $\mathcal{P}$ som innehåller linjen L_1 och är parallellt med linjen L_2. **(3 p)**

(b) Bestäm det kortaste avståndet mellan L_1 och L_2. (Tips: det kortaste avståndet mellan L_1 och L_2 är samma som avståndet från en godtycklig punkt på L_2 till planet $\mathcal{P}$). **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) Låt $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, och $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Planet är vinkelrät mot $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, och går genom punkten $P_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. En ekvation för planet är

$$(x-5) - 4(y-2) + 2(z-0) = 0$$

eller, efter förenkling,

$$x - 4y + 2z = -3.$$

Alternativ lösning: Planet i parameterform ges av

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Alltså

$$\begin{aligned} x - 5 &= 2s \\ y - 2 &= t \\ z &= 2t - s \end{aligned}.$$

Vi eliminerar $s = (x-5)/2$ och $t = y - 2$:

$$z = 2t - s = 2(y-2) - \frac{1}{2}(x-5).$$

och får

$$x - 4y + 2z = -3.$$

(b) Vi betecknar:

$P_1 = \begin{bmatrix}5\\2\\0\end{bmatrix}$, $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}$, och $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}$.

Låt $\vec{a} = \overrightarrow{P_2P_1} = \begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}$ och $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}-1\\4\\-2\end{bmatrix}$.

Avståndet mellan L_1 och L_2 är

$$\|proj_{\vec{n}}\vec{a}\| = |\frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}| = \frac{8}{\sqrt{21}}.$$

2. Låt A vara matrisen

$$\begin{bmatrix}2 & 2 & 7\\0 & 2 & 1\\3 & -14 & 2\end{bmatrix}.$$

(a) Hitta en vektor $\vec{v}$ så att ekvationen $A\vec{x} = \vec{v}$ inte har några lösningar. **(3 p)**

(b) Hitta en vektor $\vec{w} \neq \vec{0}$ så att ekvationen $A\vec{x} = \vec{w}$ har oändligt många lösningar. **(3 p)**

Lösningsförslag.

A radreduceras till $\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & 1/2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

Vi ser att $\mathrm{Range}(A)$ spänns upp av de två första kolonnerna $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix}$ och $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix}2\\2\\-14\end{bmatrix}$, samt att A's radrank är två.

(a): Vi ser t.ex. att ekvationen saknar lösning om vi tar $\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$.

(b): Om vi tar $\vec{w} = \vec{v}_1$ ser vi att det finns en lösning, och således oändligt många eftersom radranken är två.

3. Låt $\vec{u} = \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}$, $\vec{w} = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$. Låt F vara en avbildning som uppfyller:

$$F(\vec{u}) = \vec{u}, \quad F(\vec{v}) = 2\vec{v}, \quad F(\vec{w}) = -\vec{w}.$$

(a) Bestäm avbildningsmatrisen i standardbasen. **(4 p)**

(b) Diagonalisera avbildningsmatrisen. **(2 p)**

Lösningsförslag.

Låt A vara avbildningsmatris i standardbasen. Enligt antagandet gäller
$A\vec{u} = \vec{u}$, $A\vec{v} = 2\vec{v}$ och $A\vec{w} = -\vec{w}$
som vi kan skriva som en matris ekvation
$A[\vec{u}|\vec{v}|\vec{w}] = [\vec{u}|2\vec{v}| - \vec{w}]$ dvs $AM = B$ där

$M = \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\-2 & 0 & 1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix}1 & 4 & 1\\-2 & 0 & -1\\1 & -2 & 0\end{bmatrix}$

Matrisen M är inverterbar och har inversen $M^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 1 & 1\\2 & 3 & 4\end{bmatrix}$.

Från $AM = B$ har vi
$$A = BM^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 10 \\ -4 & -5 & -8 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
b)
Från relationerna
$A\vec{u} = \vec{u}$, $A\vec{v} = 2\vec{v}$ och $A\vec{w} = -\vec{w}$
ser vi att $\vec{u},\ \vec{v}$ och $\vec{w}$ är matrisens egenvektorer med motsvarande egenvärden 1, 2 och -1 . Enligt a-delen är $\vec{u},\ \vec{v}$ och $\vec{w}$ linjärt oberoende. Alltså har A tre sticken linjärt oberoende egenvektorer och är därmed diagonaliserbar. Om vi väljer
$$P = M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ och } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
har vi

$A = PDP^{-1}$ (eller $P^{-1}AP = D$)

Svar.
a) $\begin{bmatrix} 7 & 8 & 10 \\ -4 & -5 & -8 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ b) Se ovan.

4. Låt $V = \text{span}(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix})$.

(a) Avgör om $\vec{v} = [\ 1 \quad 1 \quad 1\ ]^T$ finns i V. **(2 p)**
(b) Bestäm dimensionen $\dim(V)$ av V. **(1 p)**
(c) Hitta en ortonormal bas för V. **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) Frågan är om det finns konstanter c_1, c_2 och c_3 sådana att
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Vi radreducerar motsvarande totalmatris enligt
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1/4 \\ 0 & 5 & 5 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & -7/4 \end{array}\right],$$
från vilken vi ser att motsvarande ekvationssystem saknar lösning, och därmed att $\vec{v}$ inte finns i V.

(b) Från den radreducerade totalmatrisen i uppgift (a) ser vi att de tre vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ som spänner upp V är linjärt beroende, och att systemet har två pivotkolonner. Därmed är dimensionen av V $\dim(V) = 2$.

(c) De två pivotkolonnerna $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ och $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ bildar en bas för V, eftersom de är linjärt oberoende och spänner upp V.

Från $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ kan vi bilda en ortogonal bas $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$, där $\vec{b}_1 = \vec{v}_1$ och $\vec{b}_2 = \vec{v}_2 - \text{proj}_{\vec{b}_1}\vec{v}_2$. Basvektorerna i $\mathcal{B}$ kan sedan normeras till en ortonormal bas $\mathcal{B}'$ för V. Vi får

$$\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{7}{21}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix},$$

så att $\mathcal{B}' = \{\frac{1}{\sqrt{21}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \sqrt{\frac{1}{33}}\begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}\}$ bildar en ortonormal bas för V.

Observera att det finns fler ortonormala baser för V.

5. Matrisen A är symmetrisk och har storlek 3×3. Den har ett enkelt egenvärde $\lambda_1 = 3$ med en egenvektor $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ och ett dubbelt egenvärde $\lambda_2 = -1$.

(a) Bestäm matrisen A. **(3 p)**

(b) Beräkna $A^{99}w$, där $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a)

Eftersom$A$ är en simmetrisk matris är den diagonaliserbar. Därmed är den geometriska multipliciteten för λ_k lika med den algebraiska multipliciteten för λ_k, för varje egenvärde λ_k $(k = 1, 2)$. Därför är $\dim(E_{\lambda_2}) = 2$. Egenvektorerna till en symmetrisk matris som ligger i olika egenrum är ortogonala.

Låt $\vec{v}_2$ och $\vec{v}_3$ vara två basvektorer i egenrummet E_{λ_2}.

Då är $s\vec{v}_2 + t\vec{v}_3, \quad s, t \in \mathbb{R}, \quad s^2 + t^2 \neq 0$, också egenvektorer till matrisen A, och alla är vinkelräta mot $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

För att få en bas i E_{λ_2} väljer vi två linjärt oberoende vektorer som är vinkelräta mot $\vec{v}_1$. T ex $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Låt $P = [\vec{v}_1|\vec{v}_2|\vec{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Då är $A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

som ger

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b)
$$A^{99}w = PD^{99}P^{-1}w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^{99} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \left(\tfrac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$
Vi börjar med sista multiplikationen
$$A^{99}w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^{99} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$
Svar. a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

6. Låt U vara ett ändligdimensionellt vektorrum, och låt V och W vara två delrum av U. Då sägs $U = V \oplus W$ vara den *inre direkta summan* av V och W om varje vektor $\vec{u} \in U$ på ett *entydigt* sätt kan skrivas som $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, där $\vec{v} \in V$ och $\vec{w} \in W$.
Visa att $U = V \oplus W$ om och endast om följande två påståenden är uppfyllda: **(6 p)**

(1) $V \cap W = \vec{0}$,
(2) dim(V) + dim(W) = dim(U).

Lösningsförslag.
Vi visar först att (1) och (2) $\Rightarrow U = V \oplus W$.
Antag att dim(V)=m och dim(W)=n, och att vi har basen $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ för V och $\mathcal{C} = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ för W. Vi ska nu visa att $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ bildar en bas för U. Då räcker det att visa att de $m+n$ vektorerna är linjärt oberoende, ty
$$\text{dim}(U) = m + n$$
enligt (2), och vektorerna spänner därmed upp U.
Anta att
$$b_1\vec{v}_1 + \ldots + b_m\vec{v}_m + c_1\vec{w}_1 + \ldots + c_n\vec{v}_n = \vec{0}$$
eller
$$b_1\vec{v}_1 + \ldots + b_m\vec{v}_m = -c_1\vec{w}_1 + \ldots - c_n\vec{v}_n.$$
Beteckna $\vec{v} = b_1\vec{v}_1 + \ldots + b_m\vec{v}_m$ och $\vec{w} = -c_1\vec{w}_1 - \ldots - c_n\vec{v}_n$
Från (1) vet vi att
$$\vec{v} = \vec{w} \iff \vec{v} = \vec{w} = \vec{0},$$
och då $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$ är baser får vi att
$$b_1\vec{v}_1 + \ldots + b_m\vec{v}_m = \vec{0} = -c_1\vec{w}_1 - \ldots - c_n\vec{v}_n$$
$$\iff$$
$$b_1 = \ldots = b_m = 0 = c_1 = \ldots c_n.$$

Alltså gäller
$$b_1\vec{v}_1 + \ldots + b_m\vec{v}_m + c_1\vec{w}_1 + \ldots + c_n\vec{v}_n = \vec{0}$$
$$\iff$$
$$b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_n = 0,$$

vilket visar att vektorerna är linjärt oberoende, och därmed bildar en bas för U. Då varje vektor $\vec{u} \in U$ kan uttryckas som en linjär kombination av basvektorerna har vi

$$\vec{u} = b_1\vec{v}_1 + \ldots + b_m\vec{v}_m + c_1\vec{w}_1 + \ldots + c_n\vec{v}_n.$$

dvs $\vec{u} = \vec{x_1} + \vec{y_1}$,
där $\vec{x_1} = b_1\vec{v}_1 + \ldots + b_m\vec{v}_m \in V$
och $\vec{y_1} = c_1\vec{w}_1 + \ldots + c_n\vec{v}_n \in W$.
Anta nu att $\vec{u} = \vec{x_2} + \vec{y_2}$, där $\vec{x_2} \in V$ och $\vec{y_2} \in W$. Då gäller
$\vec{x_1} + \vec{y_1} = \vec{x_2} + \vec{y_2}$, och därmed
$\vec{x_1} - \vec{x_2} = \vec{y_2} - \vec{y_1}$.
Härav, enligt (1) $\vec{x_1} = \vec{x_2}$ och $\vec{y_2} = \vec{y_1}$.

Vi har visat entydlighet. Därmed är det klart att $U = V \oplus W$, och den ena implikationen gäller.

Vi ska nu visa den andra implikationen $U = V \oplus W \Rightarrow$ (1) och (2).

(1): Det gäller att varje $\vec{u} \in U$ kan skrivas på ett entydigt sätt som $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, där $\vec{v} \in V$ och $\vec{w} \in W$. Tag till exempel $\vec{u} = \vec{0}$. Vi har att $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0}$, så att $\vec{v} + \vec{w} = \vec{0} \iff \vec{v} = \vec{w} = \vec{0}$. Vi ska nu visa att det inte finns $\vec{x} \neq \vec{0}$ sådant att $\vec{x} \in V$ och $\vec{x} \in W$. Antag motsatsen. Då existerar $-\vec{x} \in W$, eftersom delrum uppfyller homogenitet. Det skulle innebära att $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$, vilket är en motsägelse, då entydighet antas råda. Därmed har vi visat att

$$U = V \oplus W \Rightarrow V \cap W = \vec{0}.$$

(2): Antag att vi har baserna $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$ från tidigare, och att $\vec{v} = b_1\vec{v}_1 + \ldots + b_m\vec{v}_m$ och $\vec{w} = c_1\vec{w}_1 + \ldots + c_n\vec{v}_n$. Av entydighet vet vi också att

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{0} \iff \vec{v} = \vec{w} = \vec{0},$$

och att

$$b_1\vec{v}_1 + \ldots + b_m\vec{v}_m = \vec{0} = c_1\vec{w}_1 + \ldots + c_n\vec{v}_n$$
$$\iff$$
$$b_1 = \ldots = b_m = 0 = c_1 = \ldots c_n,$$

ty mängderna $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ och $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ är linjärt oberoende. Således får vi att

$$b_1\vec{v}_1 + \ldots + b_m\vec{v}_m + c_1\vec{w}_1 + \ldots + c_n\vec{w}_n = \vec{0}$$
$$\iff$$
$$b_1 = \ldots = b_m = c_1 = \ldots = c_n = 0,$$

och alltså att vektorerna $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ är linjärt oberoende. Om varje $\vec{u} \in U$ ska kunna skrivas som $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ för $\vec{v} \in V$ och $\vec{w} \in W$ så måste $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ spänna upp U. Det ger att $\dim(U) \leq m + n$, och då vektorerna är linjärt oberoende krävs likhet,

$$\dim(U) = m + n = \dim(V) + \dim(W).$$

Alltså

$$U = V \oplus W \Rightarrow \dim(U) = \dim(V) + \dim(W).$$