



SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2021.03.11

DEL A

1. Beräkna följande integraler:

(3+3 p)

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} \quad \text{och} \quad \int \frac{dx}{x^2 - 4}.$$

Lösning. (a) Vi gör variabelsubstitutionen $u = \ln x$ och får då $du = dx/x$ och de nya integrationsgränserna $u(e) = 1$ och $u(e^2) = 2$, vilket ger

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \int_1^2 \frac{du}{u} = [\ln |u|]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

(b) Vi partialbråksuppdelar integranden. Eftersom $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ så söker vi en uppdelning på formen

$$\frac{1}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 2}.$$

Multiplicerar vi upp nämnaren $(x + 2)(x - 2)$ fås

$$1 = A(x - 2) + B(x + 2)$$

vilket kan skrivas

$$1 = (A + B)x + (2B - 2A).$$

Identifierar vi respektive koefficienter på båda sidor fås ekvationssystemet

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2B - 2A = 1. \end{cases}$$

Detta system har lösningen $A = -1/4$, $B = 1/4$. Således har vi

$$\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 2} \right).$$

Integration ger nu att

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4} = \frac{1}{4} (\ln |x - 2| - \ln |x + 2|) + C = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{|x - 2|}{|x + 2|} \right) + C.$$

Svar: (a) $\ln 2$, (b) $\frac{1}{4} \ln \left(\frac{|x-2|}{|x+2|} \right) + C$.

□

2. Låt $f(x) = \sqrt{1-x}$, $0 \leq x \leq 1$. Bestäm den punkt (x_0, y_0) på grafen $y = f(x)$ som gör rektangeln med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(x_0, 0)$, (x_0, y_0) och $(0, y_0)$ maximal. Glöm inte att förklara varför arean blir maximal i punkten. **(6 p)**

Lösning. Om (x_0, y_0) är en punkt på kurvan så är $0 \leq x_0 \leq 1$, $y_0 = \sqrt{1-x_0}$, och arean A av rektangeln ges av

$$A = x_0 y_0 = x_0 \sqrt{1-x_0}.$$

Vi söker således det största värdet av funktionen

$$A(x) = x\sqrt{1-x}$$

på intervallet $[0, 1]$. Eftersom funktionen A är kontinuerlig på det slutna och begränsade intervallet $[0, 1]$ så vet vi att största (och minsta) värde finns, och måste antas i en ändpunkt till intervallet, en singulär punkt eller en kritisk punkt.

Vi söker kritiska punkter. Vi har

$$A'(x) = \sqrt{1-x} - x \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2(1-x) - x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}.$$

Notera att $A'(x)$ existerar för alla $0 < x < 1$ (så singulära punkter saknas här) och att $x = 2/3$ är den enda kritiska punkten. Således måste A :s största värde på intervallet $[0, 1]$ antas i någon av punkterna $x = 0$, $x = 2/3$ och $x = 1$. Eftersom $A(0) = A(1) = 0$ och $A(2/3) > 0$ har vi alltså att A antar sitt största värde för $x = 2/3$. Detta betyder att $(2/3, f(2/3)) = (2/3, 1/\sqrt{3})$ är den sökta punkten.

Svar: $(2/3, 1/\sqrt{3})$.

□

DEL B

3. Avgör om det finns någon lösning $y(t)$ till differentialekvationen $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0$ som uppfyller att

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t)}{t} = 1.$$

Bestäm en sådan lösning om en sådan lösning finns, annars förklara varför det inte finns någon. **(6 p)**

Lösning. Vi löser differentialekvationen. Karakteristiska ekvationen $r^2 + 2r + 5 = 0$ har lösning $r = -1 \pm 2i$ så differentialekvationen har allmän lösning $y(t) = e^{-t}(A \cos 2t + B \sin 2t)$, för godtyckliga konstanter A och B .

Första kravet för att denna funktion $y(t)$ ska uppfylla att

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t)}{t} = 1$$

är att konstanten $A = 0$ ty annars saknas gränsvärdet helt. Vidare gäller (med l'Hopitals regel) att

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-t}B \sin 2t}{t} = [0/0] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-e^{-t}B \sin t + e^{-t}2B \cos 2t}{1} = 2B.$$

Vi ser att gränsvärdet blir 1 om vi väljer $B = 1/2$

Vi får alltså att $y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} \sin 2t$ är en lösning till differentialekvationen med de efterfrågade egenskaperna.

□

Svar: $y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} \sin 2t$ uppfyller villkoren.

4. Bestäm de punkter på kurvan $y = e^{x^2+2x}$ i vilka tangenten till kurvan går genom punkten $(1, 0)$. (Notera att punkten $(1, 0)$ inte ligger på kurvan.) **(6 p)**

Lösning. Låt $f(x) = e^{x^2+2x}$. Vi har då $f'(x) = (2x + 2)e^{x^2+2x}$. Om $(a, f(a))$ är en punkt på kurvan så ges tangenten till kurvan i denna punkt av

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Denna linje går igenom punkten $(1, 0)$ om och endast om vi har

$$0 = f(a) + f'(a)(1 - a).$$

Stoppar vi in uttrycken för f och f' får vi ekvationen

$$0 = (1 + (2a + 2)(1 - a))e^{a^2+2a},$$

vilket kan skrivas (eftersom $e^{a^2+2a} \neq 0$)

$$3 - 2a^2 = 0.$$

Denna ekvation har lösningarna $a = \pm\sqrt{3}/\sqrt{2}$.

Således, i punkterna $(\sqrt{3}/\sqrt{2}, f(\sqrt{3}/\sqrt{2}))$ och $(-\sqrt{3}/\sqrt{2}, f(-\sqrt{3}/\sqrt{2}))$ går tangenten till kurvan genom punkten $(1, 0)$.

Svar: I punkterna $(\sqrt{3}/\sqrt{2}, f(\sqrt{3}/\sqrt{2}))$ och $(-\sqrt{3}/\sqrt{2}, f(-\sqrt{3}/\sqrt{2}))$. □

DEL C

5. Betrakta integralen $\int_1^\infty \frac{2}{2x^2 + \sin x + 1} dx$

(a) Visa att integralen är konvergent. (2 p)

(b) Bestäm ett närmevärde till integralen där felet inte är större än $\frac{1}{8}$. (4 p)

Lösning. Vi börjar med att observera att $0 \leq \sin x + 1 \leq 2$ för alla x .

a) Vi har att

$$0 \leq \frac{2}{2x^2 + \sin x + 1} \leq \frac{2}{2x^2} = \frac{1}{x^2},$$

och eftersom den generaliserade integralen $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ är konvergent så är också integralen $\int_1^\infty \frac{2}{2x^2 + \sin x + 1} dx$ konvergent, enligt jämförelsesatsen för generaliserade integraler med positiv integrand.

b) Låt

$$I = \int_1^\infty \frac{2}{2x^2 + \sin x + 1} dx.$$

Observera att

$$\frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{2}{2x^2 + \sin x + 1} \leq \frac{1}{x^2}$$

för alla x . Därför är

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1 + x^2} \leq I \leq \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}.$$

Eftersom

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1 + x^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} [\arctan x]_1^R = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} > \frac{3}{4}$$

och

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right] = 1$$

är

$$\frac{3}{4} \leq I \leq 1.$$

Sätt nu $\hat{I} = 7/8$ som ett approximativt värde till I . Då får från olikheterna ovan att

$$-1/8 = 3/4 - 7/8 \leq I - \hat{I} \leq 1 - 7/8 = 1/8.$$

Alltså, $I \approx 7/8$, där felet inte är större än $1/8$.

Svar: (a) Se bevis ovan; (b) $7/8$. □

6. För varje heltal $n \geq 1$, låt

$$A_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\left(\frac{1}{n^2}\right)} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^{\left(\frac{2}{n^2}\right)} \cdot \left(\frac{3}{n}\right)^{\left(\frac{3}{n^2}\right)} \cdots \left(\frac{n}{n}\right)^{\left(\frac{n}{n^2}\right)}.$$

Bestäm $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$. (6 p)

Lösning. Först logariterar vi A_n och beräknar $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(A_n))$:

$$\ln(A_n) = \frac{1}{n^2} \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{2}{n^2} \ln\left(\frac{2}{n}\right) \cdots + \frac{n}{n^2} \ln\left(\frac{n}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right).$$

Uttrycket $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$ ser formellt ut som en Riemannsumma för funktionen $y = x \ln x$ över intervallet $[0,1]$, men problemet är att $x \ln x$ inte är definierat för $x=0$.

Notera att

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{1/x}\right) = (\text{L'Hôpital}, [\infty/\infty]) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1/x}{-1/x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Därför är funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x, & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{om } x = 0 \end{cases}$$

kontinuerlig och därmed integrerbar på intervallet $[0,1]$.

Uttrycket $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$ är nu en Riemannsumma $\sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1})$ för integralen

$\int_0^1 f(x) dx$ med $x_k = \frac{k}{n}$, och $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$, $k = 1, \dots, n$. Detta medför att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(A_n)) = \int_0^1 x \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 x \ln x dx = (\text{partiell integration}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{x}{2} dx \right) =$$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4} - \varepsilon^2 \ln \varepsilon \right) = -\frac{1}{4}$. Notera att $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^2 \ln \varepsilon = 0$ vilket visas på samma sätt som ovan.

Slutligen, eftersom e^x är en kontinuerlig funktion, har vi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{\ln(A_n)}) = e^{-1/4}$$

Svar. $e^{-1/4}$.

□