KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
1

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Roy Skjelnes

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examinationen under . De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. De tre punkterna $A = (1,0,1)$, $B = (4,2,-1)$ och $C = (5,1,4)$ bildar en triangel i rummet. Med *höjden*, h, mot sidan AB menas avståndet från punkten C till linjen genom A och B.
   (a) Bestäm höjden h. (*Ledning*: Dela upp $\overrightarrow{AC}$ i en komposant som är parallell med $\overrightarrow{AB}$ och en som är vinkelrät mot $\overrightarrow{AB}$.) **(2 p)**
   (b) Använd resultatet från del (a) för att bestämma arean av triangeln. **(1 p)**
   (c) Beräkna arean av triangeln även med hjälp av vektorprodukten av $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$. **(1 p)**

2. Låt $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ vara en linjär avbildning sådan att:
$$T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\0\\2\\0\end{bmatrix}$$
   (a) Bestäm $T\left(\left[\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right]\right)$. **(2 p)**
   (b) Bestäm en bas för nollrummet $\ker(T)$. **(2 p)**

3. (a) Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen
$$A = \begin{bmatrix}-2 & 2\\-2 & 3\end{bmatrix}.$$
(3 p)
   (b) Förklara varför matrisen $B = \frac{1}{19}A$ har samma egenvektorer som matrisen A. **(1 p)**

DEL B

4. Låt $W = \mathrm{im}(A)$ vara bildrummet till matrisen
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & -4 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & -4 & -4 & -4 \end{bmatrix}.$$
Bestäm en ortonormal bas för W. **(4 p)**

5. Låt $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara speglingen i linjen $3x + 4y = 0$.
   (a) Bestäm matrisen för T. **(2 p)**
   (b) Rita upp hur parallellogrammen med hörn i $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,1)$ och $(1,3)$ avbildas genom avbildningen. **(2 p)**

6. Vektorerna $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$ och $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ bildar en bas $\mathfrak{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ för delrummet W i $\mathbb{R}^4$. Matrisen
$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$
är övergångsmatrisen som omvandlar koordinater med avseende på basen $\mathfrak{B}$ till koordinater med avseende på basen $\mathfrak{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Bestäm vektorerna $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$. **(4 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Låt V vara mängden av alla $7{\times}7$-matriser. Betrakta V som $\mathbb{R}^{49}$ genom att ställa kolonnerna i matriserna under varandra.
   (a) Visa att avbildningen $T\colon V \to V$ som skickar en matris A till $A + A^T$ är en linjär avbildning. **(2 p)**
   (b) Visa att de nollskilda symmetriska matriserna är egenvektorer för T. **(2 p)**

8. Låt $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ vara en bas för $\mathbb{R}^n$. Vi säger att $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ är en *dual bas* för $\mathbb{R}^n$ om

$$\vec{u}_i \cdot \vec{v}_j = \begin{cases} 0, & \text{om } i \neq j, \\ 1, & \text{om } i = j. \end{cases} \tag{1}$$

   (a) Visa att villkoren (1) innebär att $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ faktiskt utgör en bas för $\mathbb{R}^n$. **(2 p)**
   (b) Låt $n = 3$ och bestäm en dual bas $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ om

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(2 p)

9. Visa att det för 2×2-matriser A gäller att om $A^k = 0$, för något heltal $k > 2$, så är också $A^2 = 0$. **(4 p)**