SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2022.01.10

DEL A

1. Bestäm den lösning $y(x)$ till differentialekvationen
$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 6$$
som uppfyller villkoren $y(0) = 0$ och $\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{e^{3x}} = 0$. **(6 p)**

Lösning. Vi löser först motsvarande homogena ekvation
$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 0.$$
Denna ekvation har den karakteristiska ekvationen $r^2 - 4r + 3 = 0$ som har rötterna $r = 3$ och $r = 1$. Således ges den allmänna lösningen till den homogena ekvatione av
$$y_h(x) = Ae^x + Be^{3x},$$
där A och B är konstanter.

Vi söker nu en partikulärlösning y_p till den givna ekvationen $y''(x)-4y'(x)+3y(x) = 6$. Eftersom högeledet är en konstant gör vi ansatsen $y_p(x) = a$, där a är en konstant. Då är $y_p'(x) = y_p''(x) = 0$, så insättning i ekvationen ger villkoret
$$3a = 6$$
vilket ger $a = 2$. Således är $y_p(x) = a$ en partikulärlösning.

Från detta följer att den allmänna lösningen till ekvationen $y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 6$ ges av
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^x + Be^{3x} + 2.$$

Eftersom
$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{e^{3x}} = B$$
ser vi att vi måste ha $B = 0$ för att villkoret $\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{e^{3x}} = 0$ ska kunna vara uppfyllt. Alltså måste den sökta lösningen vara på formen $y(x) = Ae^x + 2$. Vilkoret $y(0) = 0$ ger ekvationen $0 = A + 2$, dvs $A = -2$. Den sökta lösningen är således
$$y(x) = 2 - 2e^x.$$

Svar: Den sökta lösningen är $y(x) = 2 - 2e^x$. □

2. Låt
$$f(x) = \frac{1}{(2+x)^2},\ 1 \leq x \leq 3.$$
Bestäm den punkt $(a, f(a)), 1 \leq a \leq 3$, på grafen $y = f(x)$ som gör arean av rektangeln med hörn i punkterna $(0,0), (a,0), (a, f(a))$ och $(0, f(a))$ minimal. **(6 p)**

Lösning. Givet en punkt $(a, f(a))$ på grafen $y = f(x)$ så ges arean av rektangeln av $af(a)$. Således vill vi hitta det mista värdet av funktionen
$$g(a) = af(a) = \frac{a}{(2+a)^2}$$
på intervallet $1 \leq a \leq 3$.

Eftersom funktionen g är kontinuerlig på det slutna och begränsade intervallet $[1,3]$ så vet vi att ett minsta (och största) värde finns, och detta värde måste antas i en kritisk punkt eller en ändpunkt (funktionen g saknar singulära punkter på intervallet).

Vi söker kritiska punkter i $[1,3]$. Vi har
$$g'(a) = \frac{(2+a)^2 - 2a(2+a)}{(2+a)^4} = \frac{(2+a) - 2a}{(2+a)^3} = \frac{2-a}{(2+a)^3}.$$
Således är $a = 2$ den enda kritiska punkten.

Det minsta värdet av g på $[1,3]$ måste alltså antas i någon av punkterna $a = 1, a = 2$ och $a = 3$. Vi jämför fuktionens värden i dessa punkter: $g(1) = 1/9, g(2) = 1/8, g(3) = 3/25$. Eftersom $1/9 = 3/27 < 3/25$ ser vi att det minsta värdet antas då $a = 1$.

Svar: Det minsta värdet antas i punkten $(1, 1/9)$. $\square$

DEL B

3. Bestäm värdet på konstanten a så att **(6 p)**

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+x} = \int_1^\infty axe^{-x}\,dx.$$

Lösning. Vi noterar först att

$$\int_1^\infty axe^{-x}\,dx = a\int_1^\infty xe^{-x}\,dx.$$

Låter vi

$$I_1 = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2+x} \text{ och } I_2 = \int_1^\infty xe^{-x}\,dx$$

ser vi att vi vill bestämma a så att $I_1 = aI_2$, dvs $a = I_1/I_2$.

För att beräkna I_1 behöver vi först partialbråksuppdela. Vi gör ansatsen

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}.$$

Multiplicerar vi med $x(x+1)$ fås

$$1 = A(x+1) + Bx$$

vilket vi skriver som

$$1 = (A+B)x + A.$$

Identifierar vi koefficienterna fås villkoren $A+B=0$ och $A=1$, vilket ger $A=1$ och $B=-1$. Således har vi

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

Detta ger

$$I_1 = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{dx}{x^2+x} = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \lim_{R\to\infty}\left[\ln|x| - \ln|x+1|\right]_1^R =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[\ln\left(\frac{|x|}{|x+1|}\right)\right]_1^R = \lim_{R\to\infty}\left(\ln\left(\frac{|R|}{|R+1|}\right) - \ln(1/2)\right) = \ln 1 - \ln(1/2) = \ln 2.$$

Vi beräknar nu I_2. Partiell integration ger

$$\int_1^R xe^{-x}\,dx = \left[-xe^{-x}\right]_1^R - \int_1^R (-e^{-x})dx = e^{-1} - Re^{-R} + ([-e^{-x}]_1^R) = 2e^{-1} - Re^{-R} - e^{-R}.$$

Från detta följer nu

$$I_2 = \lim_{R\to\infty}\int_1^R xe^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left(2e^{-1} - Re^{-R} - e^{-R}\right) = 2e^{-1}.$$

Således får vi

$$a = \frac{I_1}{I_2} = \frac{\ln 2}{2e^{-1}} = \frac{e \ln 2}{2}.$$

Svar: Värdet är $a = \dfrac{e \ln 2}{2}$. $\square$

4. Låt $f(x) = \int_0^x \ln(1+\sin t)\,dt$.
   (a) Bestäm Taylorpolynomet av ordning 2 till f kring $x = 0$ och använd polynomet för att approximera värdet $f(1/2)$. **(3 p)**
   (b) Avgör om felet i approximationen i uppgift (a) är mindre än $1/10$. **(3 p)**

Lösning. (a) Det sökta Taylorpolynomet ges av

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2.$$

Vi har

$$f(0) = \int_0^0 \ln(1+\sin t)\,dt = 0.$$

Vidare, enligt integralkalkylens fundamentalsats har vi

$$f'(x) = \ln(1+\sin x).$$

Deriverar vi detta fås

$$f''(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x}.$$

Alltså har vi $f'(0) = \ln 1 = 0$ och $f''(0) = 1$, så det sökta polynomet P ges av

$$P(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Således har vi

$$f(1/2) \approx P(1/2) = 1/8,$$

dvs $1/8$ är ett approximativt värde av $f(1/2)$.

(b) Enligt Tayolors formel ges felet i approximationen av

$$|f(1/2) - P(1/2)| = \left| \frac{f'''(s)}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \right|,$$

där s är något tal mellan 0 och $1/2$. Eftersom

$$f'''(x) = \frac{-(\sin x)(1+\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2} = -\frac{1+\sin x}{(1+\sin x)^2} = -\frac{1}{1+\sin x},$$

och eftersom $\sin x > 0$ för $0 < x < 1/2$, så har vi $|f'''(s)| \leq 1$. Använder vi detta fås

$$\left| \frac{f'''(s)}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \right| \leq \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{48} < 1/10.$$

Således, felet i appoximationen i (a) är mindre än $1/10$.

Svar: (a) Det sökta Taylorpolynomet är $P(x) = \dfrac{x^2}{2}$. (b) Felet är mindre än $1/10$. □

DEL C

5. Bestäm alla värden på konstanten $b > 0$ för vilka det gäller att ekvationen $e^{2x} = bx$ har precis en lösning. **(6 p)**

Lösning. Låt

$$f(x) = e^{2x} - bx.$$

Den givna ekvationen har en unik lösning om, och endast om, funktionen $f(x)$ har ett unikt nollställe. Vi ska nu undersöka för vilka $b > 0$ som ekvationen $f(x) = 0$ har en unik lösning.

Vi har $f'(x) = 2e^{2x} - b$. Derivatans nollställen ges av ekvationen

$$2e^{2x} = b.$$

Om $b > 0$ så har denna ekvation den unika lösningen

$$x_0 = \ln(b/2)/2.$$

Eftersom e^{2x} är en växande funktion får vi följande teckentabell för derivatan: $f'(x) < 0$ för $x < x_0$, och $f'(x) > 0$ för $x > x_0$. Alltså, om $b > 0$ så har f ett unikt minimum i punkten x_0.

Eftersom $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ och $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ för alla $b > 0$ så ger derivataanalysen ovan följande bild: om $f(x_0) > 0$ så saknar ekvationen $f(x) = 0$ lösningar; om $f(x_0) = 0$ så är x_0 det unika nollstället; om $f(x_0) < 0$ så har ekvationen $f(x) = 0$ två nollställen.

Vi ska allstå bestämma $b > 0$ så att $f(x_0) = 0$. Vi får ekvationen

$$0 = f(x_0) = e^{2x_0} - bx_0.$$

Sätter vi in $x_0 = \ln(b/2)/2$ fås

$$0 = \frac{b}{2} - \frac{b\ln(b/2)}{2} = \frac{b}{2}\left(1 - \ln(b/2)\right).$$

Eftersom vi ska ha $b > 0$ måste vi således ha $1 - \ln(b/2) = 0$ för att detta ska vara uppfyllt, dvs

$$b = 2e.$$

Svar: Ekvationen har en unik lösning för $b = 2e$. □

6. Visa att **(6 p)**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} \leq \frac{2+3\ln 2}{4}.$$

Lösning. Låt

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

Vi har

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}.$$

Derivatan har nollställe i punkten $x = e^{1/2} < 2$, och vi ser att $f'(x) < 0$ för alla $x \geq 2$. Således är funktionen f avtagande på intervallet $[2, \infty)$.

Eftersom f är avtagande på $[2, \infty)$ så gäller följande för varje heltal $n \geq 3$:

$$f(n) \leq f(x) \text{ för alla } n-1 \leq x \leq n.$$

Detta ger (eftersom integralen av konstanten $f(n)$ över ett intervall av längd 1 är precis $f(n)$) att

$$f(n) = f(n) \int_{n-1}^{n} dx = \int_{n-1}^{n} f(n)\, dx \leq \int_{n-1}^{n} f(x)\, dx \text{ för alla heltal } n \geq 3.$$

(Rita en figur.) Således får vi

$$\sum_{n=3}^{\infty} f(n) \leq \int_{2}^{\infty} f(x)\, dx.$$

Partiell integration ger

$$\int_{2}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{2}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \lim_{R\to\infty} \left(\left[-\frac{\ln x}{x} \right]_2^R + \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2} \right) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(\left[-\frac{\ln x}{x} \right]_2^R - \left[\frac{1}{x} \right]_2^R \right) = \lim_{R\to\infty} \left(\frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln R}{R} + \frac{1}{2} - \frac{1}{R} \right) = \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}.$$

Enligt olikheten ovan har vi alltså

$$\sum_{n=3}^{\infty} f(n) \leq \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}.$$

Detta ger nu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} = \sum_{n=2}^{\infty} f(n) = f(2) + \sum_{n=3}^{\infty} f(n) = \frac{\ln 2}{4} + \sum_{n=3}^{\infty} f(n) \leq \frac{\ln 2}{4} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2+3\ln 2}{4}.$$

$\square$