SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Onsdag, 12 januari 2022

Skrivtid: 08:00-11:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Maria Saprykina

Tentamen består av sex uppgifter som vardera ger maximalt sex poäng.

Del A på tentamen utgörs av de två första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från Uppgift 1 adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på Uppgift 1 kan dock som högst bli 6 poäng.

De två följande uppgifterna utgör del B och de två sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär att lösningarna ska vara prydligt skrivna med en handstil som är lätt att läsa. Det innebär också att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Alla steg i alla beräkningar ska finnas redovisade och vara lätta att följa. Lösningar och svar utan korrekta, utförliga och tydliga motiveringar ger ingen poäng.

Del A

1. Planet P är parallellt med vektorerna $(0,3,2)$ och $(1,0,-2)$ och går genom punkten $A=(0,-3,1)$. Bestäm avståndet mellan planet P och punkten $B=(-1,4,3)$.

2. Låt

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 2 & 0\end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

(a) Visa att vektorn $\vec{v}$ är en egenvektor till A, och bestäm motsvarande egenvärde. **(1 p)**

(b) Talen 1 och 2 är egenvärden för matrisen A. Bestäm alla egenvektorer till A som motsvarar dessa egenvärden. **(3 p)**

(c) Bestäm, om det är möjligt, en diagonalmatris D och en basbytesmatris P så att $A=PDP^{-1}$. (Matrisen P^{-1} behöver inte bestämmas.) **(2 p)**

Del B

3. En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definieras av $F(\vec{x}) = \vec{v} \times \vec{x}$ där $\vec{v} = (2, -2, 1)^T$ (här står T för transponat).

(a) Bestäm standardmatrisen A för avbildningen F; **(2 p)**

(b) Ange en bas för nollrummet $null(A)$ och en bas för kolonnrummet $Col(A)$ för A; **(3 p)**

(c) Bestäm alla lösningar till ekvationen $F(\vec{x}) = (0, 2, 2)^T$. **(1 p)**

4. Låt H vara planet genom origo i $\mathbb{R}^3$ som är ortogonalt mot vektorn

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm en ON-bas för H. Lägg till vektor(er) för att få en ON-bas, $\mathcal{B}$, för $\mathbb{R}^3$. **(2 p)**

(b) Låt R vara den linjära avbildning som ges av rotation med vinkeln $\pi/4$ kring $\vec{v}$ (med andra ord, vektorer roteras med vinkeln $\pi/4$ kring linjen som spänns upp av $\vec{v}$, och rotationen sker moturs om man betraktar H från huvudet av ortsvektorn $\vec{v}$). Bestäm matrisen för R med avseende på ON-basen $\mathcal{B}$ från deluppgift (a). **(2 p)**

(c) Bestäm matrisen för R med avseende på standardbasen för $\mathbb{R}^3$. **(2 p)**

Del C

5. Låt V vara rummet av alla reella 2×2 matriser, och definiera en linjär avbildning $S : V \to V$ genom $S(A) = A - A^T$.

(a) Bestäm en bas för bildrummet (dvs, värderummet) till S. **(2 p)**

(b) Bestäm en bas för nollrummet till S. **(4 p)**

6. Det karakteristiska polynomet till en kvadratisk matris A är polynomet

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

där λ är variabeln. Om $p(x) = a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0$ är ett polynom och A är en kvadratisk matris, definieras $p(A)$ genom

$$p(A) = a_n A^n + \cdots a_1 A + a_0 \, I.$$

Cayley-Hamiltons sats säger att $p_A(A) = 0$ för varje kvadratisk matris A (där högerledet är nollmatrisen av samma storlek som A).

(a) Bevisa Cayley-Hamiltons sats i specialfallet då A är diagonaliserbar. Tips: Börja med att undersöka $p_A(A)\,\vec{v}$ för lämpliga vektorer $\vec{v}$. **(4 p)**

(b) Låt A vara en inverterbar $n \times n$-matris. Använd Cayley-Hamiltons sats för att visa att A^{-1} kan skrivas som en linjärkombination av A^{n-1}, $A^{n-2}, \ldots, A$ och I. **(2 p)**