KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2017-03-17

Del A

1. (a) Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\cos e^x\,dx$. **(2 p)**

   (b) Bestäm gränsvärdet **(2 p)**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)(1-x^2)}{x+x^2}.$$

Lösning. (a) Med substitutionen $u = e^x$, där $du = e^x\,dx$, blir de nya gränserna 1 och e. Partiell integration ger nu att

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{2x}\cos e^x\,dx &= \int_1^e u\cos u\,du\\ &= [u\sin u]_1^e - \int_1^e \sin u\,du\\ &= e\sin e - \sin 1 + \cos e - \cos 1.\end{aligned}$$

(b) Vi har att $(1-x^2) = (1-x)(1+x)$, och därför blir

$$\frac{\sin(2x)(1-x^2)}{x+x^2} = (1-x)\frac{\sin(2x)}{x}.$$

Vi har att $\lim_{x\to 0}(1-x) = 1$, och vi behöver bara bestämma

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x},$$

till vilket vi använder l'Hôpitals formel. Vi får att

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)}{1} = 2.$$

□

2. Effekten P (Watt) i ett motstånd med resistansen R (Ohm) är en funktion av spänningen U (Volt). För denna funktion $P = P(U)$ gäller att $P'(220) = 440/R$. Använd derivatan för att uppskatta hur mycket effekten ändras om spänningen ökas från 220 till 230 volt.

(4 p)

Lösning. Med hjälp av linjär approximation (eller derivatans definition) har vi att

$$P(230) - P(220) \approx P'(220)(230 - 220) = \frac{440}{R} \cdot 10 = \frac{4400}{R}.$$

Effekten ändras med ungefär $4400/R$ Watt.

$\square$

3. (a) Skriv upp en integral som ger arean mellan t-axeln och kurvan $y = (\arctan t)^2$ på intervallet $[0, x]$. **(2 p)**
   (b) Bestäm ökningstakten av arean i uppgift a) i punkten $x = 1$. **(2 p)**

Lösning. (a) Funktionen $(\arctan t)^2$ är positiv, och kontinuerlig. Vi har att arean ges av integralen

$$\int_0^x (\arctan t)^2 \, dt.$$

(b) Ökningstakten ges av derivatan, som vi kan beräkna med hjälp av analysens huvudsats. I punkten x är ökningstakten

$$\frac{d}{dx} \int_0^x (\arctan t)^2 \, dt = (\arctan x)^2.$$

I punkten $x = 1$ blir ökningstakten av volymen därför $\pi^2/16$.

□

DEL B

4. Newtons avsvalningslag säger att ett varmt objekt svalnar i en takt som är proportionell mot temperaturskillnaden mot omgivningen. Låt $y(t)$ vara temperaturen i ett vattenkärl, vid tiden t minuter. När vattnet kokar ställs kärlet utomhus i $-20°$. Temperaturen $y(t)$ uppfyller differentialekvationen på formen $y'(t) = k(y(t) + 20)$. Vi vet också att temperaturen är $40°$ efter 10 minuter.
   (a) Lös differentialekvationen (ledning: Substituera $u(t) = y(t) + 20$). **(3 p)**
   (b) När är temperaturen $25°$? **(1 p)**

   Lösning. Låt $u(t) = y(t) + 20$. Vi har då att
   $$\frac{du}{dt} = \frac{dy}{dt} = k \cdot u(t),$$
   vilket har lösning $u(t) = Ce^{kt}$, för någon konstant C. Detta ger att
   $$y(t) = u(t) - 20 = Ce^{kt} - 20.$$
   Begynnelsevillkoret $y(0) = 100$ (eftersom vattnet var vid kokpunkten när det sattes ut). Detta ger $C = 120$. Vi har $y(t) = 120e^{kt} - 20$. Eftersom vi vet att $y(10) = 40$ kan vi bestämma talet k:
   $$y(10) = 40 \iff 120e^{10k} - 20 = 40 \iff k = \frac{-\ln 2}{10}.$$
   Vattnets temperatur i grader C vid tiden t minuter ges av
   $$y(t) = 120e^{-(t\ln 2)/10} - 20.$$
   Nu söker vi den tidpunkt då temperaturen är $25°$ C. Det vill säga
   $$y(t) = 25 \iff 120e^{-(t\ln 2)/10} - 20 = 25 \iff t = -\frac{10\ln\frac{45}{120}}{\ln 2} = 10\frac{\ln 8 - \ln 3}{\ln 2},$$
   vilket är ungefär 14 minuter.

   $\square$

5. Skissa funktionsgrafen till funktionen $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x^2-3}$. Det ska framgå var funktionen är växande, respektive avtagande, och vilka lokala extrempunkter, nollställen, och asymptoter den har. **(4 p)**

Lösning. Funktionen $f(x)$ är definierad för alla $x \neq \pm\sqrt{3}$. Nollställerna till funktionen hittar vi vid lösning av $x^2+x-1=0$. Detta ger $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ och $x = -\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$. Funktionens derivata $f'(x)$ är

$$(2x+1)(x^2-3)^{-1} + (x^2+x-1)(-1)(x^2-3)^{-2}(2x) = \frac{-1}{(x^2-3)^2}(x^2+4x+3).$$

Polynomet $x^2+4x+3 = (x+3)(x+1)$, och det följer att funktionen f har lokala maxima i $x=-3$ och $x=-1$. Funktionsvärdet i dessa punkt är $f(-3) = \frac{9-4}{9-3} = \frac{5}{6}$ och $f(-1) = \frac{1-2}{1-3} = \frac{1}{2}$. Vi har vidare att

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)) = \lim_{x\to-\infty}(f(x)) = 1.$$

Nu håller vi reda på tecknet av derivatan, och kan skissera kurvan. Från vänster. Funktionsvärdet ligger under 1, strängt avtagande till lokalt minimim i $x=-3$, strängt växande för att bli obegränsad när x närmar sig vertikal asymptoten i $x=-\sqrt{3}$. Funktionen är sedan strïgt växande, skär x-axeln, och har ett lokalt maximum i $x=-1$. Blir sedan strängt avtagande, skär x-axeln, och blir negativt obegränsat när den närmar sig vertikal asymptoten i $x=\sqrt{3}$. Är sedan strängt avtagande och närmar sig värdet $y=1$ ovanifrån. $\square$

6. Linjär approximation av funktionen $f(x) = x^{1/3}$ omkring punkten $a = 8$ ger feltermen $E(x)$. För varje x finns ett tal $s = s(x)$ sådant att $E(x) = \frac{f''(s)}{2}(x-8)^2$, där $8 < s < x$.
   (a) Visa att $|E(x)| < \frac{1}{9 \cdot 32}$ på intervallet $8 \leq x \leq 9$. **(2 p)**
   (b) Visa att $|9^{1/3} - \frac{25}{12}| < \frac{1}{9 \cdot 32}$. **(2 p)**

Lösning. (a) Då $8 < s$ är

$$|f''(s)| = \frac{2}{9}\frac{1}{s^{5/3}} < \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{32}.$$

Detta ger att

$$|E_2(x)| < \frac{1}{9 \cdot 32}(x-8)^2 \leq \frac{1}{9 \cdot 32} \cdot 1,$$

när $8 \leq x \leq 9$.

(b) Vi utvecklar Taylor polynomet till $f(x) = x^{1/3}$ omkring $x = 8$. Vi har att $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$. Detta ger att den linjära approximationen omkring $x = 8$ är

$$P_1(x) = f(8) + f'(8)(x-8) = 2 + \frac{1}{12}(x-8),$$

och speciellt att $P_1(9) = \frac{25}{12}$. Differansen mellan $f(9)$ och approximationen $P_1(9)$ mäts av resttermen $E(9)$. Från a) har vi att

$$|\ 9^{1/3} - \frac{25}{12}\ | = |E(9)| < \frac{1}{9 \cdot 32}.$$

$\square$

DEL C

7. Vi betraktar funktionen f som ges av

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(a) Visa att f är deriverbar i origo, och bestäm $f'(0)$. **(2 p)**

(b) Är f:s derivata kontinuerlig i origo? **(2 p)**

Lösning. (a) Vi använder derivatans definition, och har att

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h}.$$

Då $|\sin(1/h)| \leq 1$ för alla h, följer det att gränsvärdet $\lim_{h\to 0} h \sin(1/h) = 0$. Detta visar att f är deriverbar i origo, och att derivatan är 0.

(b) För att undersöka om derivatan är kontinuerlig i origo behöver vi först konstatera att för $x \neq 0$ gäller att

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

För att derivatan ska vara kontinuerlig i origo krävs att

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0).$$

Men

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} (2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x})$$

som saknas (den första termen går visserligen mot 0 men den andra termen antar alla värden mellan -1 och 1 på varje intervall runt origo). Derivatan är alltså inte kontinuerlig i origo.

□

8. Resonemanget: “Då $-1/x$ är en primitiv funktion till $1/x^2$ har vi att

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -2.\text{”}$$

är galet. Förklara vad som är fel i resonemanget, och bestäm sedan korrekt värde av integralen ovan. **(4 p)**

Lösning. Felet i resonemanget är att $-1/x$ inte alls är en primitiv funktion till $1/x^2$ i något intervall som innehåller origo – eftersom $-1/x$ varken är definierad eller deriverbar där. Integrationsintervallet innehåller origo.

För att göra en korrekt analys av integralen behöver vi observera att den är generaliserad i origo eftersom integranden är obegränsad när $x \to 0$. Vi behöver dela upp integralen i två och skriva

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$$

och bara om båda integralerna i högerledet är konvergenta är vår integral konvergent. Men vi har att

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to 0^-} \int_{-1}^{c} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to 0^-} [-1/x]_{-1}^{c} = \infty$$

och på samma sätt visas att den andra integralen i högerledet också är divergent.

Slutsatsen är att integralen $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$ är divergent.

$\square$

9. Kardioidkurvan parametriseras genom

$$x(t) = \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{4}\cos 2t \qquad y(t) = \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

(a) Bestäm längden av kurvan. **(2 p)**

(b) Bestäm minsta avståndet från kurvan till origo. **(2 p)**

Lösning. (a) Längden L av av en parameterkurva ges av

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

I vårt fall är

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\sin t \sin 2t + \cos t \cos 2t) = \frac{1}{2}(1 + \cos t) = \cos^2 \frac{t}{2},$$

så längden av vår kardioidkurva blir

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 \frac{t}{2}}\, dt = \int_0^{2\pi} \left|\cos \frac{t}{2}\right| dt = 2\int_0^{\pi} \cos \frac{t}{2}\, dt = 4.$$

(b) För att minimera avståndet till origo ska vi minimera $d(x, y) = x^2 + y^2$ för punkter (x, y) på kurvan. Dvs vi söker minimum av funktionen

$$f(t) = \left(\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{4}\cos 2t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)^2, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Efter uträkning och förenklingar med trigonometriska formler ser vi att vi kan skriva f som

$$f(t) = \frac{5}{16} + \frac{1}{4}\cos t,$$

som uppenbart har ett minimum som antas när $t = \pi$. Minsta avståndet är $\sqrt{1/16} = 1/4$.

□