SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
Fredag 17 mars 2017

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Roy Skjelnes

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del A på tentamen utgörs av de första tre uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng, upp till som mest 12 poäng. Poängsumman på del A kan alltså bli högst 12 poäng, bonuspoäng medräknade. Bonuspoängen beräknas automatiskt och antalet bonuspoäng framgår av din resultatsida.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de sista tre uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. (a) Beräkna integralen $\int_0^1 e^{2x} \cos e^x \, dx$. **(2 p)**

   (b) Bestäm gränsvärdet **(2 p)**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)(1-x^2)}{x+x^2}.$$

2. Effekten P (Watt) i ett motstånd med resistansen R (Ohm) är en funktion av spänningen U (Volt). För denna funktion $P = P(U)$ gäller att $P'(220) = 440/R$. Använd derivatan för att uppskatta hur mycket effekten ändras om spänningen ökas från 220 till 230 volt. **(4 p)**

3. (a) Skriv upp en integral som ger arean mellan t-axeln och kurvan $y = (\arctan t)^2$ på intervallet $[0, x]$. **(2 p)**

   (b) Bestäm ökningstakten av arean i uppgift a) i punkten $x = 1$. **(2 p)**

DEL B

4. Newtons avsvalningslag säger att ett varmt objekt svalnar i en takt som är proportionell mot temperaturskillnaden mot omgivningen. Låt $y(t)$ vara temperaturen i ett vattenkärl, vid tiden t minuter. När vattnet kokar ställs kärlet utomhus i $-20°$. Temperaturen $y(t)$ uppfyller differentialekvationen på formen $y'(t) = k(y(t) + 20)$. Vi vet också att temperaturen är $40°$ efter 10 minuter.
   (a) Lös differentialekvationen (ledning: Substituera $u(t) = y(t) + 20$). **(3 p)**
   (b) När är temperaturen $25°$? **(1 p)**

5. Skissa funktionsgrafen till funktionen $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 - 3}$. Det ska framgå var funktionen är växande, respektive avtagande, och vilka lokala extrempunkter, nollställen, och asymptoter den har. **(4 p)**

6. Linjär approximation av funktionen $f(x) = x^{1/3}$ omkring punkten $a = 8$ ger feltermen $E(x)$. För varje x finns ett tal $s = s(x)$ sådant att $E(x) = \frac{f''(s)}{2}(x-8)^2$, där $8 < s < x$.
   (a) Visa att $|E(x)| < \frac{1}{9 \cdot 32}$ på intervallet $8 \leq x \leq 9$. **(2 p)**
   (b) Visa att $|9^{1/3} - \frac{25}{12}| < \frac{1}{9 \cdot 32}$. **(2 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Vi betraktar funktionen f som ges av

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

   (a) Visa att f är deriverbar i origo, och bestäm $f'(0)$. **(2 p)**

   (b) Är f:s derivata kontinuerlig i origo? **(2 p)**

8. Resonemanget: "Då $-1/x$ är en primitiv funktion till $1/x^2$ har vi att

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -2."$$

   är galet. Förklara vad som är fel i resonemanget, och bestäm sedan korrekt värde av integralen ovan. **(4 p)**

9. Kardioidkurvan parametriseras genom

$$x(t) = \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{4}\cos 2t \qquad y(t) = \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

   (a) Bestäm längden av kurvan. **(2 p)**

   (b) Bestäm minsta avståndet från kurvan till origo. **(2 p)**