SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2020.06.03

DEL A

1. Beräkna gränsvärdena **(3+3 p)**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x/2} + \ln(x) + 2e^{2x}}{3e^{2x} + x^{100} - 7} \quad \text{och} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x - x\cos(x)}.$$

Lösning. I det första gränsvärdet så noterar vi att e^{2x} är den dominerande termen i både täljaren och nämnaren då $x \to \infty$. Vi förkortar därför med denna:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x/2} + \ln(x) + 2e^{2x}}{3e^{2x} + x^{100} - 7} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-3x/2} + \ln(x)/e^{2x} + 2}{3 + x^{100}/e^{2x} - 7/e^{2x}} = \frac{0+0+2}{3+0-0} = \frac{2}{3}$$

I det andra gränsvärdet så kan vi utnyttja de kända Taylorutvecklingarna

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5), \qquad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4).$$

Detta ger

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x - x\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + O(x^5)}{\frac{x^3}{2} + O(x^5)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6} + O(x^2)}{\frac{1}{2} + O(x^2)} = \frac{1}{3}.$$

Alternativt kan vi använda L'Hôpitals regel 3 gånger (gränsvärdena är av typen $[0/0]$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x - x\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{1 - \cos(x) + x\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2\sin(x) + x\cos(x)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{3\cos(x) - x\sin(x)} = \frac{1}{3}.$$

Svar: Gränsvärdena är $\frac{2}{3}$ och $\frac{1}{3}$.

$\square$

2. (a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = 1/(x^2 + 5x + 6)$. **(3 p)**

   (b) Bestäm arean av området i planet som begränsas av kurvan $y = xe^{-x}$ och linjerna $y = 0, x = 0$ och $x = 1$. **(3 p)**

Lösning. (a) Först delar vi upp

$$\frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{(x+2)(x+3)}$$

i partiella bråk. Från

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$$

får vi $A = 1$ och $B = -1$. Nu har vi

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+5x+6}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) dx \\ &= \ln|x+2| - \ln|x+3| + C\end{aligned}$$

där C är en godtycklig konstant. En primitiv funktion är alltså $\ln|x+2| - \ln|x+3|$.

(b) Låt A beteckna den sökta arean. Då gäller (notera att $xe^{-x} \geq 0$ för alla $x \geq 0$)

$$A = \int_0^1 xe^{-x}\,dx.$$

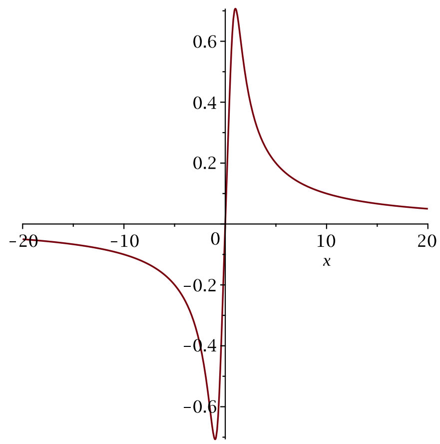
Med hjälp av partiell integration får vi

$$A = \int_0^1 xe^{-x}\,dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx = -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1 = 1 - 2e^{-1}.$$

Den sökta arean är alltså $1 - 2e^{-1}$.

Svar: (a) En primitiv funktion är: $\ln|x+2| - \ln|x+3|$. (b) Arean är $1 - 2e^{-1}$.

□



FIGUR 1. Figure of Exercise 3.

DEL B

3. Låt $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}$. **(6 p)**

- Bestäm alla intervall där f är växande respektive avtagande och bestäm alla lokala extrempunkter.
- Finn alla asymptoter till kurvan $y = f(x)$.

Använd informationen ovan för att skissa kurvan $y = f(x)$. Bestäm också eventuella största och minsta värden hos funktionen f.

Lösning. Vi deriverar funktionen:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^4+1} - x\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}}}{x^4+1} = \frac{(x^4+1) - 2x^4}{(x^4+1)\sqrt{x^4+1}} = \frac{1-x^4}{(x^4+1)^{3/2}}.$$

De stationära punkterna ges av att täljaren är 0, dvs $x = \pm 1$. Nämnaren är alltid positiv så funktionen är positiv precis när $-1 < x < 1$. Detta ger teckentabellen:

x		-1		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$

Funktionen är alltså växande på intervallet $[-1, 1]$, avtagande på intervallen $(-\infty, -1]$ och $[1, \infty)$ samt har ett lokalt maximum $\frac{1}{\sqrt{2}}$ i punkten $x = 1$ och ett lokalt minimum $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ i punkten $x = -1$. Notera att vi inte vet om dessa lokala extrempunkter också är globala extrempunkter innan vi undersökt vad som händer vid $\pm\infty$.

Vi undersöker nu om f har några asymptoter. Eftersom f är kontinuerlig på hela reella axeln saknas vertikala asymptoter (för att ha en vertikal asyptot måste det finnas en punkt $x = a$ där $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ eller $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$; detta går ej då f är kontinuerlig i varje punkt). Vidare har vi

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0,$$

så kurvan $y = f(x)$ har den horisontala asymptoten $y = 0$. Några andra asymptoter finns ej.

Vi kan nu använda informationen ovan för att skissa kurvan $y = f(x)$. Se figur. Från figuren ser vi att funktione f har ett största värde $f(1) = 1/\sqrt{2}$ i punkten $x = 1$ och ett minsta värde $f(-1) = -1/\sqrt{2}$ i punkten $x = -1$.

$\square$

4. Avgör om följande generaliserade integraler är konvergenta eller divergenta. Beräkna dem om de är konvergenta.

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x} dx.$ **(3 p)**

   (b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2} dx.$ **(3 p)**

Lösning. (a) Funktionen e^{-x} är positiv och avtagande på intervallet $[0, \infty)$. Således har vi uppskattningen

$$\frac{e^{-x}}{x} \geq \frac{e^{-1}}{x} > 0 \text{ för alla } 0 \leq x \leq 1.$$

Eftersom den generaliserade integralen

$$\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x} dx = e^{-1} \int_0^1 \frac{dx}{x}$$

är divergent, så följer det från jämförelsetestet för integraler med positiva integrander att den givna integralen också är divergent.

(b) För $M > 2$ tittar vi på intergralen

$$\int_2^M \frac{1}{x(\ln x)^2} dx.$$

Vi gör variabelbytet $u = \ln x$ och får $du = dx/x$ och vi får de nya gränserna $u(2) = \ln 2$ och $u(M) = \ln M$, vilket get

$$\int_2^M \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \int_{\ln 2}^{\ln M} \frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u}\right]_{\ln 2}^{\ln M} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln M}.$$

Detta ger nu att

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \lim_{M\to\infty} \int_2^M \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \lim_{M\to\infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln M}\right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

SVAR: a) Divergent, b) Konvergent, med värdet $1/\ln(2)$. □

DEL C

5. Visa att **(6 p)**

$$\ln\left(\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}\right) > 1 \quad \text{för alla } 0 < x < 1.$$

Lösning. Eftersom $x > 0$ har vi:

$$\begin{aligned}\ln\left(\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}\right) > 1 &\iff \frac{1}{2x}\big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\big) > 1\\ &\iff \ln(1+x) - \ln(1-x) > 2x\\ &\iff \ln(1+x) - \ln(1-x) - 2x > 0.\end{aligned}$$

Vi sätter därför $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) - 2x$ och analyserar denna funktion. Vi har att $f(0) = 0$ och

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} - 2 = \frac{2 - 2(1-x^2)}{1-x^2} = \frac{2x^2}{1-x^2} > 0$$

då $0 < x < 1$. Alltså är $f(x)$ strängt växande på intervallet $[0, 1)$ och därmed är $f(x) > 0$ på intervallet $(0, 1)$ och olikheten följer.

Alternativt är olikheten t ex ekvivalent med $g(x) = (x-1)e^{2x} + x + 1 > 0$ men $g(x)$ är något svårare att analysera än $f(x)$.

$\square$

6. Antag att funktionen f är definierad på hela reella axeln och att f, f' och f'' är kontinuerliga överallt. Antag vidare att $f(0) = f'(0) = 0$ och att $f''(x) \geq 0$ för alla x. Visa att serien $\sum_{k=1}^{\infty} f(1/k)$ är konvergent. **(6 p)**

Lösning. Vi använder Taylors formel kring punkten $a = 0$, tilsammans med $f(0) = f'(0) = 0$, för att skriva

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(c)}{2}x^2 = \frac{f''(c)}{2}x^2,$$

där c är ett tal mellan 0 och x. Eftersom $f''(t) \geq 0$ för alla t ser vi från uttrycket ovan att vi har

$$f(x) \geq 0 \text{ för alla } x.$$

Vidare, eftersom f'' är kontinuerlig på intervallet $[0, 1]$ måste f'' vara begränsad där, dvs det finns en konstant $M > 0$ sådan att $|f''(t)| \leq M$ för alla $0 \leq t \leq 1$.

Vi tittar nu på termerna $f(1/k)$ i serien ovan. Eftersom vi för varje heltal $k \geq 1$ har att $0 < 1/k \leq 1$ så följer det från obervationerna och uppskattningarna ovan att vi för vaje $k \geq 1$ har

$$0 \leq f(1/k) = \frac{f''(c_k)}{2}\left(\frac{1}{k}\right)^2 \leq \frac{M}{2k^2}$$

där c_k är ett tal mellan 0 och $1/k \leq 1$. Speciellt ser vi att alla termer i den givna serien är positiva, så kan vi använda jämförelsetestet för serier med icke-negativa termer. Eftersom serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{2k^2} = \frac{M}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

är konvergent så följer det från jämförelsetestet att serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(1/k)$$

också är konvergent.

□