KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Tisdagen den 12 juni, 2012

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examinationen under period 1-2, 2011 och period 3, 2012. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

Del A

1. En triangel i rummet har hörnen i punkterna $P = (-1, 2, 1)$, $Q = (5, 2, 3)$ och $R = (2, 1, -1)$.
   (a) Använd skalärprodukten för att visa att triangeln är rätvinklig. **(2 p)**
   (b) Bestäm arean av triangeln. **(2 p)**

2. (a) Bestäm matrisen som representerar den linjära avbildningen $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ som uppfyller
$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
(2 p)
   (b) Visa att det inte finns någon linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ som uppfyller
$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$
(2 p)

3. Betrakta avbildningen $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ som ges av matrisen
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$
   (a) Bestäm en bas för nollrummet, $\ker(T)$. **(2 p)**
   (b) Bestäm en bas för bildrummet, $\operatorname{im}(T)$. **(2 p)**

DEL B

4. Låt $W = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \\ 13 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$.
   (a) Bestäm en ortonormal bas för W. **(2 p)**
   (b) Låt $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ vara den ortogonala projektionen på delrummet W. Bestäm matrisen för avbildningen T. **(2 p)**

5. Låt $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vara avbildningen som ges av matrisen
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ -1 & 7 & 2 \\ 7 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$
   Det finns nollskilda vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$ sådana att
$$T(\vec{u}) = -7\vec{u} \quad \text{och} \quad T(\vec{v}) = 7\vec{v}.$$
   (a) Bestäm alla sådana vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$. **(2 p)**
   (b) Bestäm en ortogonal bas för $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer till T. **(2 p)**

6. Efter mätningar leds en student till att bestämma ekvationen, $y = ax^2 + bx + c$, för den parabel som i minsta-kvadratmening bäst anpassar till punkterna $(-2, 5)$, $(-1, 7)$, $(0, 6)$, $(1, 4)$ och $(2, 3)$. Efter räkningar kommer studenten fram till ekvationssystemet med totalmatris
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 34 & 0 & 10 & 43 \\ 0 & 10 & 0 & -7 \\ 10 & 0 & 5 & 25 \end{array}\right].$$
   (a) Förklara hur man kommer fram till detta ekvationssystem. **(2 p)**
   (b) Kontrollera att $a = -0,5$, $b = -0,7$ och $c = 6$ är en lösning och förklara vilken slutsats vi kan dra för det ursprungliga problemet. **(2 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. (a) Låt $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning med egenskapen att sammansättningen $T^2 = T \circ T$ är lika med nollavbildningen. Visa att varje vektor i bildrummet, $\mathrm{im}(T)$, också ligger i nollrummet, $\ker(T)$. **(2 p)**

   (b) För varje reell konstant a, bestäm alla linjära avbildningar $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sådana att $T\left(\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]\right) = \left[\begin{smallmatrix}a\\1\end{smallmatrix}\right]$ och $T^2 = 0$. **(2 p)**

8. Bevisa eller ge motexempel till nedanstående påståenden om kvadratiska matriser.

   (a) Om A^2 är inverterbar så är A inverterbar. **(2 p)**

   (b) Om A^2 är ortogonal så är A ortogonal. **(2 p)**

9. Låt $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

   Låt V vara delrummet i $\mathbb{R}^4$ som ges av ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

   (a) Bestäm en bas $\mathfrak{B}$ för V. **(1 p)**

   (b) Genom att använda koordinater med avseende på basen $\mathfrak{B}$ kan vi identifiera V med $\mathbb{R}^2$ och får därmed en linjär avbildning $S\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ genom att använda T på de vektorer i $\mathbb{R}^4$ som ligger i V. Bestäm matrisen för S. **(3 p)**