SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
Torsdagen den 9 juni 2022

Skrivtid: 14.00-17.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Kristian Bjerklöv

Tentamen består av sex uppgifter, som vardera ger maximalt 6 poäng. Till antalet erhållna poäng från Uppgift 1 adderas dina bonuspoäng, upp till som mest 6 poäng. Poängsumman på Uppgift 1 kan alltså bli högst 6 poäng, bonuspoäng medräknade. Bonuspoängen beräknas automatiskt och antalet bonuspoäng framgår av din resultatsida.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

Var god vänd!

DEL A

1. Låt $f(x) = \tan x$ och $g(x) = \sin(\ln x)$.
   (a) Är linjen $y = x$ tangent till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(0, f(0))$? **(3 p)**
   (b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till g kring $x = 1$. **(3 p)**

2. Bestäm arean av det begränsade område som innesluts av kurvan $y = \dfrac{1}{1+4x^2}$ och linjen $y = 1/2$. Förenkla ditt svar så långt som möjligt. **(6 p)**

DEL B

3. Bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = 2xe^{x-x^2}$. **(6 p)**

4. Vilka av följande olikheter är sanna? (Glöm inte att motivera ordentligt.)
   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+\arctan x} \leq 1.$ **(2 p)**
   (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{2x^2 - \sin^2 x}\,dx \leq 1.$ **(2 p)**
   (c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{x^3 + \ln x}\,dx \leq 1.$ **(2 p)**

DEL C

5. Finns det ett kortaste linjesegment sådant att ena ändpunkten är på x-axeln och den andra ändpunkten är på y-axeln och som går genom punkten $(9, \sqrt{3})$? Bestäm längden på ett sådant kortaste linjesegment om ett sådant finns, annars förklara varför det inte finns något. **(6 p)**

6. Visa att för varje heltal $n \geq 1$ gäller: **(6 p)**

$$2\ln(2) - 1 \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq 2\ln(2) - 1 + \frac{\ln 2}{n}.$$