KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2013-10-26

DEL A

1. Bestäm värdemängden till funktionen

$$f(x) = \frac{x(1-x)}{1+x^2} + \arctan x.$$

Lösningsförslag.

f är deriverbar (och därmed kontinuerlig) för alla reella x, så om den antar två värden, antar den alla värden däremellan (enligt satsen om mellanliggande värden). Värdemängden bestäms alltså av f:s extremvärden och gränsvärden då $x \to \pm\infty$.

Vi börjar med att bestämma f:s derivata (bl.a. derivatan av en kvot):

$$f'(x) = \frac{(1-2x)\cdot(1+x^2) - x(1-x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1+x^2-2x-2x^3-2x^2+2x^3+1+x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x}{(1+x^2)^2} = 2\frac{1-x}{(1+x^2)^2}.$$

Dess enda nollställe är $x = 1$ och $f(1) = 0 + \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

Vidare är $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x^2}+1} + \arctan x\right) = -1 \pm \frac{\pi}{2}$.

Tabellen

x	"$-\infty$"		1		"∞"
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-1-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	$-1+\frac{\pi}{2}$

("$\pm\infty$" står för gränsvärdena) visar att den kontinuerliga funktionen f antar alla värden i intervallen $]-1-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$ och $]-1+\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$ (halvöppna, ty gränsvärdena i $\pm\infty$ antas inte).

Eftersom det första intervallet innehåller det andra är värdemängden det första intervallet, $]-1-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$, dvs den innehåller precis de y som uppfyller $-1-\frac{\pi}{2} < y \le \frac{\pi}{4}$.

Svar. Värdemängden är intervallet $]-1-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$.

2. Beräkna den generaliserade integralen
$$\int_0^\infty \frac{1}{b^2+c^2x^2}\,dx,$$
då konstanterna b och c båda är > 0.

Lösningsförslag.

Genom att bryta ut konstanten b^2 ur integrandens nämnare och byta variabel får vi

$$\int_0^X \frac{1}{b^2+c^2x^2}\,dx = \frac{1}{b^2}\int_0^X \frac{1}{1+(\frac{c}{b}x)^2}\,dx = \left[\begin{array}{cc} t=\frac{c}{b}x, & x=0\Rightarrow t=0 \\ dx=\frac{b}{c}dt, & x=X\Rightarrow t=\frac{c}{b}X \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{b^2}\int_0^{\frac{c}{b}X} \frac{\frac{b}{c}}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{bc}\left[\arctan t\right]_0^{\frac{c}{b}X} = \frac{1}{bc}\arctan(\tfrac{c}{b}X).$$

Definitionen av värdet av en generaliserad integral ger att

$$\int_0^\infty \frac{1}{b^2+c^2x^2}\,dx = \lim_{X\to\infty}\int_0^X \frac{1}{b^2+c^2x^2}\,dx = \lim_{X\to\infty}\frac{1}{bc}\arctan(\tfrac{c}{b}X) = \frac{\pi}{2bc}.$$

(I det sista gränsvärdet har använts att $\frac{c}{b} > 0$.)

(Man kan också göra variabelbytet i integralen $\int_0^\infty \ldots$ och skriva $x\to\infty \Rightarrow t\to\infty$ vid bytet.)

Svar. Integralens värde är $\frac{\pi}{2bc}$.

3. a. (3p) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' - 4y' + 4y = 8e^{2x}.$$

b. (1p) Bestäm den lösning som satisfierar $y(0) = 3,\ y'(0) = 4$.

Lösningsförslag.

Karakteristiska ekvationen för motsvarande homogena ekvation är

$$r^2 - 4r + 4 = 0,$$

med rötterna $r_{1,2} = 2$, en dubbelrot, så den homogena ekvationens allmänna lösning är

$$y_h(x) = (A + Bx)e^{2x}.$$

För en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen duger inte ansatsen e^{2x} eller ens $x\,e^{2x}$ eftersom de löser den homogena ekvationen, dvs ger VL=0. Vi ansätter i stället $y(x) = ax^2\,e^{2x},\ a$ en konstant, och finner $y'(x) = a(2x + 2x^2)\,e^{2x},\ y''(x) = a(2 + 8x + 4x^2)\,e^{2x}$. Insättning i ekvationen ger $a(4x^2 - 4\cdot 2x^2 + 4\cdot x^2 + 8x - 4\cdot 2x + 2)e^{2x} = 8e^{2x}$, så vi får en lösning om $a = 4$,

$$y_p(x) = 4x^2\,e^{2x}.$$

Den allmänna lösningen till ekvationen är alltså

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (A + Bx + 4x^2)\,e^{2x},$$

vilket ger $y'(x) = (2A + B + 2Bx + 8x + 8x^2)e^{2x}$.
Konstanterna A och B bestäms av villkoren på $y(0)$ och $y'(0)$. De ger

$$y(0) = A = 3 \text{ och } y'(0) = 2A + B = 4,$$

vilket ger $A = 3,\ B = -2$ och lösningen

$$y(x) = (3 - 2x + 4x^2)e^{2x}.$$

Svar.

a. Den allmänna lösningen är $y(x) = (A + Bx + 4x^2)\,e^{2x}$, där $A,\ B$ är godtyckliga konstanter,
b. Den sökta lösningen är $y(x) = (3 - 2x + 4x^2)e^{2x}$.

DEL B

4. Vi approximerar funktionen

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

med dess Maclaurinpolynom (dvs Taylorpolynomet kring $a = 0$) av grad 2 i intervallet $0 < x < \frac{1}{10}$.
a. (1p) Vilket är det approximerande polynomet?
b. (2p) Är felet vid approximationen garanterat mindre än $5 \cdot 10^{-4}$?
c. (1p) Vilken approximation av $\ln 1.05$ får vi?

Lösningsförslag.
a. f:s Maclaurinpolynom av grad 2 är

$$p_2(x) = x - \frac{x^2}{2}$$

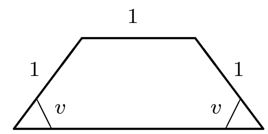
(vilket man minns som en standardutveckling, eller finner med $f(0) = \ln 1 = 0,\ f'(x) = \frac{1}{1+x},\ f'(0) = 1,\ f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},\ f''(0) = -1,\ p_2(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2$).
b. Felet vid approximation med $p_2(x)$ ges av (minus) resttermen $R_3(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3$, där ξ ligger mellan 0 och x. Vi har $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$, så då $0 < x < \frac{1}{10}$ får man

$$0 < R_3(x) < \tfrac{2}{6} \cdot (\tfrac{1}{10})^3 = \tfrac{1}{3} \cdot 10^{-3} < 4 \cdot 10^{-4} < 5 \cdot 10^{-4}.$$

Så ja, felet är (till beloppet) garanterat mindre än $5 \cdot 10^{-4}$.
c. Med $x = 0.05$ får vi $\ln 1.05 \approx 0.05 - \frac{0.05^2}{2} = 0.05 - 0.00125 = 0.04875$.
(Räknaren ger $\ln 1.05 \approx 0.048790164$, dvs vårt fel är $\approx 0.4 \cdot 10^{-4}$.)

Svar.
a. Det approximerande polynomet är $x - \frac{x^2}{2}$,
b. ja, felet vid approximationen är garanterat mindre än $5 \cdot 10^{-4}$,
c. vi får $\ln 1.05 \approx 0.04875$.

5. I ett likbent parallelltrapets är tre av sidorna 1 längdenhet och vinklarna vid den fjärde sidan är v, se figuren.
a. (2p) Finn trapetsets area som en funktion av v, $A(v)$.
b. (2p) Beräkna det största värde trapetsets area kan ha.



Lösningsförslag.

Trapetsets höjd blir $h = 1 \cdot \sin v = \sin v$ och arean fås som summan av areorna av två trianglar med höjd h och bas $b = 1 \cdot \cos v = \cos v$ och en rektangel med bas 1 och höjd h, så (om $\frac{\pi}{2} < v \leq \pi$ skall triangelareorna dras ifrån istället, men då blir b ovan < 0, så uttrycket stämmer även då)

$$A(v) = 2 \cdot \frac{b \cdot h}{2} + 1 \cdot h = (b+1)h = (\cos v + 1)\sin v = \tfrac{1}{2}\sin(2v) + \sin v \text{ (a.e.).}$$

I b. söker vi maxvärdet för $A(v)$ då $0 \leq v \leq \pi$. Vi deriverar och får

$$A'(v) = \cos(2v) + \cos v = 2\cos^2 v - 1 + \cos v = (2\cos v - 1)(\cos v + 1).$$

Dess enda nollställe i intervallets inre är $v = \frac{\pi}{3}$ (då $\cos v = \frac{1}{2}$) och

$$A(\frac{\pi}{3}) = \tfrac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

$A(v)$ är kontinuerlig på ett begränsat slutet intervall, så den antar säkert ett största värde. Eftersom $A(v)$ är deriverbar för alla v måste maxvärdet antas i derivatans nollställe eller en ändpunkt till intervallet. $A(0) = A(\pi) = 0 < A(\frac{\pi}{3})$, så maxvärdet är det funna. (Man kan förstås också studera derivatans tecken för att se att vi har ett maximum.)

Svar. a. Arean är $A(v) = (\cos v + 1)\sin v = \frac{1}{2}\sin(2v) + \sin v$ a.e.,
b. Maximala arean är $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ a.e.

6. Låt
$$f(x) = x^3 + x - 3.$$
a. (1p) Visa att ekvationen $f(x) = 0$ har exakt en lösning x_0 sådan att $1 < x_0 < 2$.
b. (1p) Ange en ekvation för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten på kurvan med x-koordinaten 1.
c. (1p) Bestäm med hjälp av tangenten i uppgift b en approximation x^* till lösningen x_0.
d. (1p) Avgör om x^* är större eller mindre än x_0.

Lösningsförslag.

Eftersom $f(1) = 1 + 1 - 3 = -1 < 0$, $f(2) = 8 + 2 - 3 = 7 > 0$ och f är kontinuerlig (eftersom den är ett polynom) i intervallet $[1, 2]$, ger satsen om mellanliggande värden att $f(x_0) = 0$ för minst ett x_0 med $1 < x_0 < 2$. Dessutom är $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ för alla (reella) x, så f är strängt växande och det finns därför inte mer än ett sådant x_0, så exakt ett.
Tangenten till kurvan för $x = 1$ har ekvationen $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$.
$f(1) = -1$ och $f'(1) = 3 \cdot 1 + 1 = 4$, så tangentens ekvation är
$$y = 4x - 5.$$
Som approximation x^* till x_0 använder vi x-koordinaten för tangentens skärning med x-axeln (eftersom tangenten approximerar kurvan nära tangeringspunkten, Newton-Raphsons metod), så $x^* = \frac{5}{4}$.
Vi vet att $f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-1)^2 = 4x - 5 + \frac{f''(\xi)}{2}(x-1)^2$ för något ξ mellan 1 och x (Taylors formel). $f''(x) = 6x > 0$ för alla $x > 0$, så $f(x^*) > 4x^* - 5 = 0$ och f:s nollställe x_0 uppfyller $1 < x_0 < x^*$ (enligt satsen om mellanliggande värden, tillämpad på intervallet $[1, x^*]$).

Svar.

a. Visat ovan.
b. Tangenten har ekvationen $y = 4x - 5$.
c. En approximation är $x^* = \frac{5}{4}$.
d. x^* är större än x_0.

DEL C

7. a. (2p) Formulera differentialkalkylens medelvärdessats.
b. (2p) Använd differentialkalkylens medelvärdessats för att visa att om f är deriverbar med $f'(x) = 0$ för alla x i ett öppet intervall, är f konstant där.

Lösningsförslag.

Satsen säger att om f är kontinuerlig i intervallet $a \leq x \leq b$ och deriverbar i intervallet $a < x < b$ så finns en punkt ξ, med $a < \xi < b$, sådan att

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

För att bevisa påståendet i b., tag en punkt c i det aktuella intervallet och låt x vara en godtycklig punkt där. Saken är klar om vi visar att $f(x) = f(c)$, ty då har ju f samma värde ($= f(c)$) i alla punkter i intervallet.

Om $x = c$ är förstås $f(x) = f(c)$ och annars är f kontinuerlig i det slutna intervallet mellan c och x (den är ju deriverbar i alla det intervallets punkter) och deriverbar i det öppna intervallet, så medelvärdessatsen ger att det finns ett ξ mellan c och x sådant att

$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c).$$

Men eftersom ξ ligger i det givna öppna intervallet är $f'(\xi) = 0$, så $f(x) - f(c) = 0$, dvs $f(x) = f(c)$. **Saken är klar.**

(Observera att vi inte förutsatte något om vilken av c och x som är störst.)

Svar. Se lösningen.

8. Avgör (med ordentlig motivering) om det finns något tal $M > 10$ sådant att
$$\int_{10}^{M} \frac{1}{2x+3+\sin x+2\ln x}\,dx = 100.$$

Lösningsförslag.

Integranden $\frac{1}{2x+3+\sin x+2\ln x}$ är en kontinuerlig funktion av x för alla $x \geq 10$ (nämnaren saknar nollställen), så enligt Analysens huvudsats är den givna integralen en deriverbar, och därmed kontinuerlig, funktion av M då $M \geq 10$. För $M = 10$ är den $= 0$. Om det finns något $M_1 > 10$ som gör integralen > 100 finns alltså enligt satsen om mellanliggande värden ett M mellan 10 och M_1 som ger integralen värdet 100.

Vi skall visa att ett sådant M_1 finns (vilket följer av att $\int_{10}^{\infty} \ldots$ divergerar mot ∞). Då $x > 0$ gäller
$$\frac{1}{2x+3+\sin x+2\ln x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2+\frac{3}{x}+\frac{\sin x}{x}+2\frac{\ln x}{x}}.$$
Eftersom $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ är $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2+\frac{3}{x}+\frac{\sin x}{x}+2\frac{\ln x}{x}} = \frac{1}{2}$ och det finns ett tal B sådant att $\frac{1}{2+\frac{3}{x}+\frac{\sin x}{x}+2\frac{\ln x}{x}} > \frac{1}{4}$ då $x > B$ (enligt definitionen av gränsvärde).

Det ger då $M > B$ att
$$\int_{10}^{M} \frac{1}{2x+3+\sin x+2\ln x}\,dx = \int_{10}^{B} \cdots + \int_{B}^{M} \cdots > \int_{10}^{B} \cdots + \int_{B}^{M} \frac{1}{4x}\,dx =$$
$$= \int_{10}^{B} \cdots + \tfrac{1}{4}(\ln M - \ln B).$$
($\ldots$ står förstås för $\frac{1}{2x+3+\sin x+2\ln x}\,dx$). $\ln M \to \infty$ då $M \to \infty$, så för tillräckligt stora M är detta > 100, vilket innebär att M_1 enligt ovan finns. **Saken är klar.**

Svar. Ja, ett sådant M finns.

9. Bestäm alla deriverbara funktioner $y(x)$ som uppfyller

$$\begin{cases} y'(x) - 4y(x) = 5 + x^2 - 4\int_0^x y(t)\,dt, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Lösningsförslag.

Ekvationen ger att $y'(x) = 4y(x) + 5 + x^2 - 4\int_0^x y(t)\,dt$ och om y är deriverbar och löser ekvationen är hela högerledet, och alltså y', också deriverbar. Om vi deriverar båda leden i ekvationen får vi (med Analysens huvudsats)

$$y''(x) - 4y'(x) = 0 + 2x - 4y(x),$$

dvs $y(x)$ löser differentialekvationen

$$y'' - 4y' + 4y = 2x \qquad (*)$$

Den karakteristiska ekvationen för motsvarande homogena ekvation är

$$r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0, \text{ med rötter } r_1 = r_2 = 2.$$

Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är alltså $y_h(x) = (C_1x + C_2)e^{2x}$, där C_1 och C_2 är godtyckliga konstanter.

För att finna en partikulärlösning till $(*)$ ansätter vi $y(x) = Ax + B$. Insättning i $(*)$ ger

$$0 - 4A + 4(Ax + B) = 4Ax + 4(-A + B) = 2x,$$

med lösningen $A = B = \frac{1}{2}$. Den allmänna lösningen till $(*)$ är alltså

$$y(x) = (C_1x + C_2)e^{2x} + \tfrac{1}{2}(x+1).$$

Eftersom vi fick $(*)$ genom att derivera den givna ekvationen vet vi att skillnaden mellan leden i den är konstant för alla lösningar till $(*)$, dvs dessa $y(x)$. Den konstanten är 0, dvs $y(x)$ löser den givna ekvationen, precis om den gör det för något x. Insättning av $x = 0$ ger $y'(0) - 4y(0) = 5 + 0 - 0$, vilket tillsammans med det givna $y'(0) = 1$ ger att $y(0) = -1$. Dessa båda villkor bestämmer lösningen till problemet.

$y(x) = (C_1x + C_2)e^{2x} + \frac{1}{2}(x+1)$ ger $y'(x) = (2C_1x + C_1 + 2C_2)e^{2x} + \frac{1}{2}$, så

$$y(0) = C_2 + \frac{1}{2} = -1 \quad \text{och} \quad y'(0) = C_1 + 2C_2 + \frac{1}{2} = 1.$$

De ger $C_2 = -\frac{3}{2}$ och $C_1 = \frac{7}{2}$, så den enda lösningen till problemet är

$$y(x) = \tfrac{1}{2}((7x-3)e^{2x} + x + 1).$$

Svar. Den enda sådana funktionen är $y(x) = \frac{1}{2}((7x-3)e^{2x} + x + 1)$.