



**SF1625 Envariabelanalys**  
**Tentamen**  
**Fredagen 9 juni**

Skrivtid: 8:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Roy Skjelnes

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del A på tentamen utgörs av de första tre uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng, upp till som mest 12 poäng. Poängsumman på del A kan alltså bli högst 12 poäng, bonuspoäng medräknade. Bonuspoängen beräknas automatiskt och antalet bonuspoäng framgår av din resultatsida.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de sista tre uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

*Var god vänd!*

---

DEL A

1. Halveringstiden för den radioaktiva isotopen kol-14 är cirka 5730 år. Levande organismer har en ungefärligen konstant halt kol-14, men i döda organismer minskar ämnet i en takt som är proportionell mot mängden av ämnet, dvs mängden  $y(t)$  uppfyller en differentialekvation på formen  $y' = ky$  för någon konstant  $k$ . Ett visst benfragment innehåller 80% av den ursprungliga mängden kol-14. Hur gammalt är benfragmentet? **(4 p)**
  2. Låt  $R$  vara det begränsade område i första kvadranten som ligger över kurvan  $y = x^2$  och under kurvan  $y = 8 - x^2$ . Bestäm volymen av den rotationskropp som genereras då  $R$  roteras ett varv runt  $y$ -axeln. **(4 p)**
  3. Ellipsen  $E$  ges som lösningar till ekvationen  $3x^2 + 4y^2 = 5$ . Bestäm en ekvation för linjen  $L$  som tangerar  $E$  i punkten  $P = (1, \sqrt{2}/2)$ . **(4 p)**
-

---

DEL B

---

4. Beräkna nedanstående integraler:

(a)  $\int_1^e x^5 \ln x \, dx.$  **(2 p)**

(b)  $\int_3^4 \frac{6}{x^2 - x - 2} \, dx.$  **(2 p)**

5. Låt  $P(x)$  vara andra ordningens Taylorpolynom kring  $x = 0$  till funktionen  $f(x) = e^x$ .

(a) Använd  $P(x)$  för att ge ett närmevärde till  $\sqrt{e}$ . **(2 p)**

(b) Avgör om felet i närmevärdet är större eller mindre än 0.02. **(2 p)**

6. Betrakta funktionen  $f$  som ges av  $f(x) = \frac{x^3}{2x^2 - 1}$ . Skissa kurvan  $y = f(x)$  med hjälp av en undersökning där det framgår var funktionen är växande respektive avtagande, vilka lokala extrempunkter funktionen har, vilka funktionens nollställen är och vilka asymptoter funktionskurvan har. **(4 p)**

---

*Var god vänd!*

---

DEL C

7. (a) För vilka reella  $x$  gäller sambandet  $\sin(\arcsin x) = x$ ? **(2 p)**  
(b) Härled derivatan av  $\arcsin x$  genom implicit derivering av detta samband. **(2 p)**

8. Bevisa, genom beräkning av en integral, formeln  $A = \pi ab$  för arean  $A$  av en ellips med halvaxlarna  $a$  och  $b$ . **(4 p)**

9. Bevisa att formeln

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx$$

gäller för alla heltal  $n \geq 2$ .

**(4 p)**

---