SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
Torsdagen den 15 oktober 2020

Skrivtid: 8.00-11.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Kristian Bjerklöv

Tentamen består av sex uppgifter, som vardera ger maximalt 6 poäng. Till antalet erhållna poäng från Uppgift 1 adderas dina bonuspoäng, upp till som mest 6 poäng. Poängsumman på Uppgift 1 kan alltså bli högst 6 poäng, bonuspoäng medräknade. Bonuspoängen beräknas automatiskt och antalet bonuspoäng framgår av din resultatsida.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

Var god vänd!

DEL A

1. (a) Bestäm alla funktioner $y(t)$ som uppfyller $y'' + y' - 2y = 0$. **(2 p)**
   (b) Bestäm alla funktioner $y(t)$ som uppfyller **(4 p)**

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 4e^{-t} \\ \lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \\ y(0) = 5. \end{cases}$$

2. Beräkna följande integraler: **(3+3 p)**

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx \quad \text{och} \quad \int \frac{x+4}{x^2+2x}\,dx$$

DEL B

3. Låt $f(x) = x\ln x$.
   (a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till f kring punkten $x = 1$ och använd det för att bestämma ett närmevärde till $3\ln 3$. **(2 p)**
   (b) Är det sant att närmevärdet i (a) avviker med högst $1/10$ från det faktiska värdet? **(3 p)**
   (c) Är närmevärdet större eller mindre än $3\ln 3$? **(1 p)**

4. Hur många lösningar har ekvationen

$$\frac{1}{x} + 2\arctan x = 3?$$

DEL C

5. Visa att för alla positiva heltal m och n gäller att

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq \ln 2 \leq \sum_{k=m}^{2m-1} \frac{1}{k}.$$

6. (a) Antag att $f(0) = 0$ och att $|f(x)| > \sqrt{|x|}$ för alla $x \neq 0$. Visa att funktionen f inte kan vara deriverbar i punkten $x = 0$. **(3 p)**
   (b) Antag att funktionen g är definierad på hela reella axeln och uppfyller följande villkor: $g'(0) = k,\ g(0) \neq 0$ och $g(x+y) = g(x)g(y)$ för alla x och y. Visa att $g(0) = 1$ och att $g'(x) = kg(x)$ för alla x. **(3 p)**