KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
Lördagen den 26 oktober, 2013

Skrivtid: 9:00-14:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Bengt Ek, Maria Saprykina

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Resultatet på del A, som omfattar de tre första uppgifterna, kan höjas av resultat från den löpande examinationen (seminarierna) under kursen. Poängen från seminarierna läggs till poängen på del A på skrivningen, dock så att den totala poängen på del A blir högst 12p.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C. För de högsta betygen, A och B, krävs vissa poäng på del C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Bestäm värdemängden till funktionen
$$f(x) = \frac{x(1-x)}{1+x^2} + \arctan x.$$

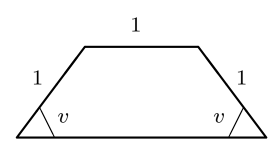
2. Beräkna den generaliserade integralen
$$\int_0^\infty \frac{1}{b^2 + c^2x^2}\,dx,$$
då konstanterna b och c båda är > 0.

3. a. (3p) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen
$$y'' - 4y' + 4y = 8e^{2x}.$$
b. (1p) Bestäm den lösning som satisfierar $y(0) = 3,\ y'(0) = 4$.

DEL B

4. Vi approximerar funktionen
$$f(x) = \ln(1+x)$$
med dess Maclaurinpolynom (dvs Taylorpolynomet kring $a = 0$) av grad 2 i intervallet $0 < x < \frac{1}{10}$.
a. (1p) Vilket är det approximerande polynomet?
b. (2p) Är felet vid approximationen garanterat mindre än $5 \cdot 10^{-4}$?
c. (1p) Vilken approximation av $\ln 1.05$ får vi?

5. I ett likbent parallelltrapets är tre av sidorna 1 längdenhet och vinklarna vid den fjärde sidan är v, se figuren.
a. (2p) Finn trapetsets area som en funktion av v, $A(v)$.
b. (2p) Beräkna det största värde trapetsets area kan ha.



6. Låt
$$f(x) = x^3 + x - 3.$$
a. (1p) Visa att ekvationen $f(x) = 0$ har exakt en lösning x_0 sådan att $1 < x_0 < 2$.
b. (1p) Ange en ekvation för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten på kurvan med x-koordinaten 1.
c. (1p) Bestäm med hjälp av tangenten i uppgift b en approximation x^* till lösningen x_0.
d. (1p) Avgör om x^* är större eller mindre än x_0.

DEL C

7. a. (2p) Formulera differentialkalkylens medelvärdessats.
   b. (2p) Använd differentialkalkylens medelvärdessats för att visa att om f är deriverbar med $f'(x) = 0$ för alla x i ett öppet intervall, är f konstant där.

8. Avgör (med ordentlig motivering) om det finns något tal $M > 10$ sådant att
$$\int_{10}^{M} \frac{1}{2x + 3 + \sin x + 2\ln x}\, dx = 100.$$

9. Bestäm alla deriverbara funktioner $y(x)$ som uppfyller
$$\begin{cases} y'(x) - 4y(x) = 5 + x^2 - 4\int_0^x y(t)\, dt, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$