TENTAMEN

<table>
<tr><td>Kursnummer:</td><td>HF0024
Matematik för basår II</td></tr>
<tr><td>Moment:</td><td>TENA</td></tr>
<tr><td>Program:</td><td>Tekniskt basår</td></tr>
<tr><td>Rättande lärare:</td><td>Staffan Linnaeus</td></tr>
<tr><td>Examinator:</td><td>Niclas Hjelm</td></tr>
<tr><td>Datum:
Tid:</td><td>2018-10-24
08:00-12:00</td></tr>
<tr><td>Hjälpmedel:</td><td>Formelsamling: ISBN 978-91-27-72279-8 eller ISBN 978-91-27-42245-2 (**utan anteckningar**).
Inga andra formelsamlingar är tillåtna!
Miniräknare, penna, radergummi, linjal, gradskiva</td></tr>
<tr><td>Omfattning och betygsgränser:</td><td>
<table>
<tr><th>Poäng</th><th>Betyg</th></tr>
<tr><td>11</td><td>Fx</td></tr>
<tr><td>12 – 14</td><td>E</td></tr>
<tr><td>15 – 17</td><td>D</td></tr>
<tr><td>18 – 20</td><td>C</td></tr>
<tr><td>21 – 23</td><td>B</td></tr>
<tr><td>24 – 26</td><td>A</td></tr>
</table>
Till samtliga uppgifter krävs fullständiga lösningar. Lösningarna skall vara tydliga och lätta att följa. Införda beteckningar skall definieras. Uppställda samband skall motiveras.
Skriv helst med blyertspenna!
Svaret ska framgå tydligt och vara förenklat så långt som möjligt. Svara med enhet och lämplig avrundning på tillämpade uppgifter. Svara exakt på övriga uppgifter, om inte annat anges. Lycka till!</td></tr>
</table>

1. Beräkna det exakta värdet av $\cos 2v$ då man vet att $\cos v = \frac{2}{3}$. (1p)

2. Bestäm $f'(\pi)$ då $f(x) = 3x \sin x$. (2p)

3. Lös ekvationen $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$. (2p)

4. Visa att $\tan x + \frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{1}{\cos x}$. (2p)

5. En kula skjuts rakt upp i luften från 2,1 m höjd. Dess hastighet v m/s kan beskrivas med formeln $v(t) = 590 - 9{,}82t$, där t är tiden i sekunder. Beräkna kulans höjd över marken efter 120 sekunder. (2p)

6. En liten ö har formen av en cirkel. På grund av landhöjningen växer öns area. När öns radie är 10,52 m så ökar den med hastigheten 0,01052 m/år. Med vilken hastighet växer öns area vid det tillfället? (2p)

7. Bestäm det minsta värde som funktionen $f(x) = 11 - 4\cos 2x + \sin 2x$ kan anta. (2p)

8. Visa att om $n^2 + 5$ är ett udda heltal så är n ett jämnt heltal. (2p)

9. Lös ekvationen $2\sin^2 x + \cos x = 1$. (3p)

10. Kurvan $y = x^2 - x - 6$ begränsar tillsammans med linjen $y = -4$ ett område. Beräkna områdets area exakt. (3p)

11. Funktionen $f(x)$ har andraderivatan $f''(x) = \sin x + \cos x$. $f(x)$ går genom origo och tangerar i origo linjen $y = 2x$. Bestäm $f(x)$. (3p)

12. Bestäm $\int_{-1}^{1} x^{2n} dx$ där n är ett positivt heltal. (2p)

Lösningsförslag

1. $\cos 2v = 2\cos^2 v - 1 = \left[\cos v = \frac{2}{3}\right] = 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{9}$

Svar: $\cos 2v = -\frac{1}{9}$

2. $(x) = 3x\sin x$

$f'(x) = 3\ \sin x + 3x\cos x$

$f'(\pi) = 3\sin\pi + 3\pi\cos\pi = 3\cdot 0 + 3\pi(-1) = -3\pi$

Svar: $f'(\pi) = -3\pi$.

3. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + n2\pi \quad eller \quad x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + n2\pi$ (n är heltal)

$$x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + n2\pi \qquad eller \qquad x = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + n2\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + n2\pi \qquad eller \qquad x = \frac{7\pi}{12} + n2\pi$$

Svar: $x = -\frac{\pi}{12} + n2$ eller $x = \frac{7\pi}{12} + n2\pi$.

4. $= \tan x + \frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{\sin x(1+\sin x)+\cos x\cos x}{\cos x(1+\sin x)} =$

$$\frac{\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x\,(1+\sin x)} = \frac{(\sin x + 1\ )}{\cos x\,(1+\sin x)} = \frac{1}{\cos x} = HL \qquad d.v.s. \quad VL = HL \quad V.S.V.$$

En lösning där konjugatregeln används:

$$VL = \tan x + \frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x\,(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)} =$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x\,(1-\sin x)}{1-\sin^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x\,(1-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{(1-\sin x)}{\cos x} =$$

$$\frac{\sin x + 1 - \sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} = HL \qquad d.v.s. \quad VL = HL \quad V.S.V.$$

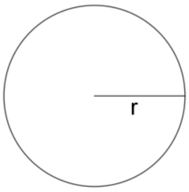
5.

$$\Delta s = \int_0^{120} v(t)dt = \int_0^{120} (590 - 9{,}82t)dt = [590t - 4{,}91t^2]_0^{120} = 590\cdot 120 - 4{,}91\cdot 120^2 = 96$$

Alltså är $s(120) - s(0) = 96$ => $s(120) = 96 + 2{,}1 = 98{,}1$

Svar: Kulans höjd är 98 m

6.

Beteckningar: A: arean (m^2) r: radien (m) t: tiden (år)	Cirkeln: $A = \pi r^2$ $\frac{dA}{dr} = 2\,\pi r$ 
Givet: (gäller just nu) r = 10,52 m $\frac{dr}{dt} = 0{,}01052$ m/år	Kedjeregeln för $(r(t))$: $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 2\,\pi r \frac{dr}{dt} =$ $= 2\pi \cdot 10{,}52 \cdot 0{,}01052 = 0{,}69536 \ldots \approx 0{,}6954$ m^2/år

Svar: Arean ökar med hastigheten $0{,}6954$ m^2/år.

7. $f(x) = 11 - 4\cos 2x + \sin 2x = 11 + \sin 2x - 4\cos 2x =$

$11 + \sqrt{1^2 + 4^2}\,\sin(2x - v)$=$11 + \sqrt{17}\,\sin(2x + v) \quad \Rightarrow$

$f_{min} = 11 + \sqrt{17} \cdot (-1) = 11 - \sqrt{17}$ ty $-1 \le \sin t \le 1$

Svar: $f_{min} = 11 - \sqrt{17}$

8. $,m,k$ nedan betecknar heltal.

Indirekt bevis:

Det som ska visas är att $n^2 + 5$ är udda $\Rightarrow n$ är jämn.

Detta är ekvivalent med att visa att n är udda $\Rightarrow$ $n^2 + 5$ är jämn.

n är udda och kan skrivas $= 2k + 1 \Rightarrow$

$\underline{n^2 + 5} = (2k + 1)^2 + 5 = 2^2k^2 + 2 \cdot 2k + 1 + 5 = 2(2k^2 + 2k + 3) = \underline{2m}$. V.S.B.

Motsägelsebevis:

Det som ska visas är att $n^2 + 5$ är udda $\Rightarrow n$ är jämn.

Nu antas att n är udda d.v.s. $n = 2k + 1$. Detta antagande innebär att

$\underline{n^2 + 5} = (2k + 1)^2 + 5 = 2^2k^2 + 2 \cdot 2k + 1 + 5 = 2(2k^2 + 2k + 3) = \underline{2m}$

men detta ger en motsägelse, eftersom $n^2 + 5$ är udda. V.S.B.

Direkt bevis:

Det som ska visas är att $n^2 + 5$ är udda $\Rightarrow n$ är jämn.

Detta är ekvivalent med att visa att n^2 är jämn $\Rightarrow n$ är jämn.

n^2 är jämn och kan skrivas $n^2 = 2k$ d.v.s. $n \cdot n = 2 \cdot k.$ Eftersom det finns en faktor 2 i HL måste även VL innehålla (minst) en faktor 2 $\Rightarrow n$ är jämn. V.S.B.

9.

$2\sin^2 x + \cos x = 1$

$2(1 - \cos^2 x) + \cos x = 1$

$0 = 1 - 2 + 2\cos^2 x - \cos x$

$\cos^2 x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2} = 0$

Sätter $t = \cos x$.

$t^2 - \frac{t}{2} - \frac{1}{2} = 0$

$t = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}}$

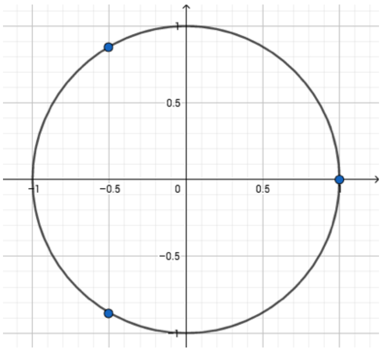
$t = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$

$t = 1 \quad eller \quad t = -\frac{1}{2}$

Återgår till $\cos x = t$.

$\cos x = 1 \quad eller \quad \cos x = -\frac{1}{2}$

$x = n360° \quad eller \quad x = \pm 120° + n360°$ (n är heltal)



Svar: $x = n120°$

10.

Skärningspunkter mellan linje och graf bestäms:

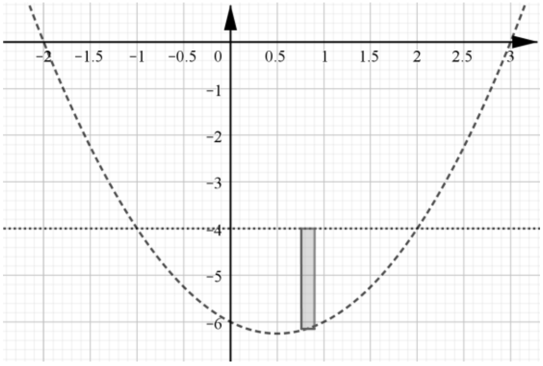
$x^2 - x - 6 = -4$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}}$

$x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \quad eller \quad x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$

$x = 2 \quad eller \quad x = -1$



Positiv koefficient för x^2-termen ger att $y = x^2 - x - 6$ är underfunktion och då skärningspunkterna är $x = -1$ och $x = 2$ så kan arean beräknas med följande integral:

$Area = \int_{-1}^{2}(-4 - (x^2 - x - 6)dx = \int_{-1}^{2}(-x^2 + x + 2)dx =$

$\left[\frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{-2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2\right) - \left(\frac{-(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 2(-1)\right) =$

$\frac{-8}{3} + 2 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = 8 - \frac{1}{2} - \frac{9}{3} = \frac{9}{2}$

Svar: Arean är $\frac{9}{2}$ a.e.

11.

$f''(x) = \sin x + \cos x$

$f'(x) = -\cos x + \sin x + C$

$f(x) = -\sin x - \cos x + Cx + D$

Kurvan *f(x)* går genom origo, dvs $f(0) = 0$ samtidigt som

$f(0) = -sin0 - cos0 + C \cdot 0 + d = -1 + D$.

Vi får då

$-1 + D = 0$ => $\underline{= 1}$.

Kurvan *f(x)* tangerar i origo linjen *y=2x*, dvs i origo har tangenten luntningen 2.
$f´(0) = 2$ samtidigt som $´(0) = -\cos 0 + \sin 0 + C$.
Vi får då
$-cos0 + sin0 + C = 2$ => $-1 + 0 + C = 2$ => $\underline{C = 3.}$

Funktionen blir således $f(x) = -sinx - cosx + 3x + 1$.

Svar: $f(x) = -sinx - cosx + 3x + 1$

12.

$$\int_{-1}^{1} x^{2n} dx = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2n+1}(1^{2n+1} - (-1)^{2n+1}) =$$

$$\frac{1}{2n+1}(1 - (-1)^{1}(-1)^{2n}) = \frac{1}{2n+1}(1 + ((-1)^{2})^{n}) =$$

$$\frac{1}{2n+1}(1 + 1) = \frac{2}{2n+1}$$

Svar: $\frac{2}{2n+1}$

Rättningsmall, TENA I Matematik för basår II, KH0024, vårterminen 2018

A. Varje beräkningsfel	-1 poäng
(Därefter fortsatt rättning enligt nya förutsättningar)	
B. Beräkningsfel; allvarliga och/eller leder till förenkling	-2 poäng eller mer
C. Prövning istället för generell metod	- samtliga poäng
D. Felaktiga antaganden/ansatser	- samtliga poäng
E. Antar numeriska värden	- samtliga poäng
F. Lösning svår att följa och/eller Svaret framgår inte tydligt	-1 poäng eller mer
(*Vid flera svar väljs det minst gynnsamma. Svara antingen avrundat eller exakt, se nedan.)*	
G. Matematiska symboler används felaktigt/saknas	-1poäng eller mer
Bl.a Om '=' saknas (t.ex. '=>' används istället)	-1 poäng/tenta
Om '=' används felaktigt (t.ex. istället för '=>')	-1 poäng/tenta
Teoretiska uppgifter:	
H. Avrundat svar	-1 poäng/tenta
Tillämpade uppgifter:	
I. Enhet saknas/fel	-1 poäng/tenta
J. Avrundningar i delberäkningar som ger fel svar	-1 poäng/tenta
K. Svar med felaktigt antal värdesiffror (±1 värdesiffra ok)	-1 poäng/tenta
L. Andra avrundningsfel	-1 poäng/tenta
M. Exakt svar	-1 poäng/tenta

1.	Beräknar/använder en vinkel v, utan att motivera varför det räcker, ex. $\cos(2\arccos\frac{2}{3})$	- 1p
2.	Felderiverat	- 2p
	Korrekt $f'(x)$t, men fel $f'(\pi)$	- 1p
3.	Hittar enbart en lösningsgrupp	- 1p
	Period saknas/felaktig	- 1p
	Felaktig vinkel	- 1p/gång
4.	Utgår från båda led och flyttar termer mellan leden	- 2p
5.	Svarar 96 m d.v.s. ej hänsyn till s(0)=2,1	- 1p
6.	Kedjeregeln felaktig och/eller Arean felaktigt deriverad	- 2p
	Framgår inte tydligt vilken variabel som avses vid derivering, ex. A'=…	- 1p
7.	Löser med derivata, påvisar ej maximum och/eller hittar ej alla vinklarna	- 1p
	Felaktigt argument, t.ex. beräknar förskjutningen, men gör detta felaktigt	- 1p
	Sätter sinustermen till -1 vid beräkning av max utan någon motivering	- 0p
8.	Visar att n är jämn $\Rightarrow$ n^2+5 är udda.	- 2p
9.	Fel andragradsekv	-3p
	Hittar $t=1$ & $t=-\frac{1}{2}$ därefter fel.	- 2p
	Rätt andragradsekvation, räknefel vid lösning	- 1p
	Hittar enbart en lösningsgrupp	- 1p
	Period saknas/felaktig	- 1p
	Felaktig vinkel	- 1p/gång
	Skriver ej ihop lösningarna	- 0p
10.	Korrekt uppställd integral inklusive analytiskt bestämda gränser	+1p
	Bestämmer inte skärningspunkter/integrationsgränser analytiskt	- 1p
	Felaktig primitiv funktion	- 2p
	Motiverar ej val av över- resp. underfunktion	- 0p
	Svarar med $-\frac{9}{2}$ eller bristfällig motivering av teckenbyte	- 1p

	(Ej ok: 'areor är ej negativa'. Ok: ' $y = -4$ borde använts som överfunktion'.)	
	Enhet a.e. anges ej.	OK
11.	Felaktig primitiv funktion	- 2p
	Felaktig konstantbestämning	- 1p/gång
12.	Felaktig primitiv funktion	- 2p
	Hittat $\frac{1}{2n+1}(1^{2n+1} - (-1)^{2n+1})$ därefter fel/ej fullständigt förenklat	-1p