TENTAMEN

Kursnummer:	HF0024 Matematik för basår II
Moment:	TENB
Program:	Tekniskt basår
Rättande lärare:	Maria Shamoun
Examinator:	Niclas Hjelm
Datum: Tid:	2020-01-14 08:00-12:00
Hjälpmedel:	Formelsamling: Björk m fl ”Formler och tabeller” **utan anteckningar**, passare, gradskiva, penna, radergummi och linjal **Miniräknare är ej tillåten!**
Omfattning och betygsgränser:	(see below)

Poäng	Betyg
11	Fx
12 – 14	E
15 – 17	D
18 – 20	C
21 – 23	B
24 – 26	A

Till samtliga uppgifter krävs fullständiga lösningar. Lösningarna skall vara tydliga och lätta att följa. Införda beteckningar skall definieras. Uppställda samband skall motiveras. Skriv helst med blyertspenna!
Svaret ska framgå tydligt och vara förenklat så långt som möjligt. Svara med enhet och lämplig avrundning på tillämpade uppgifter. Svara exakt på övriga uppgifter, om inte annat anges.

1. Förenkla följande uttryck så långt som möjligt. Svara på formen $a+bi$.

   a. $e^{1-3\pi i}$ **(1p)**

   b. $\dfrac{-1+i}{1+\sqrt{2}i}$ **(2p)**

2. Låt $z=-1-i$ och $w=2+2\sqrt{3}i$. Bestäm $\dfrac{z}{w}$ på polär form. Svara med ett argument mellan 0 och 2π. **(2p)**

3. Beräkna integralen

$$\int_0^1 3xe^{2x}dx.$$

(2p)

4. Bestäm den allmänna lösningen $y(x)$ till differentialekvationen $y''-2y'-3y=6.$ **(2p)**

5. Bestäm volymen av rotationskroppen som uppstår då området som begränsas av x - axeln och kurvan $y=x^2-x$ roteras kring y - axeln. **(3p)**

6. Talföljden $a_1,\ a_2,\ldots,\ a_{12}$ är geometrisk och alla element i talföljden är positiva. Vi vet att $a_3=\dfrac{\pi}{2}$ och att $a_5=\dfrac{\pi}{4}$. Bestäm $\sum_{n=1}^{12} a_n$. **(3p)**

7. Låt D vara en godtycklig konstant. Avgör om $y=\dfrac{5x^2}{x^5+D}$ är en lösning till differentialekvationen

$$y'-\frac{2y}{x}=-x^2y^2.$$

(Ekvationen kallas Riccatis ekvation och är viktig inom reglerteknik.) **(2p)**

8. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y' + \frac{\sin x - 1}{y^2} = 0$$

som uppfyller $y(0) = 2$. **(3p)**

9. En känd sats är följande:
Om y_{p1} är en partikulärlösning till differentialekvationen $y'' + ay' + by = f_1(x)$ och y_{p2} är en partikulärlösning till differentialekvationen $y'' + ay' + by = f_2(x)$ så är $y_p = y_{p1} + y_{p2}$ en partikulärlösning till differentialekvationen $y'' + ay' + by = f_1(x) + f_2(x)$.
a. Bevisa satsen ovan! **(2p)**
b. Bestäm en partikulärlösning till differentialekvationen $y'' + 2y' + y = \sin x + e^x$. **(1p)**

10. Ekvationen $e^{3z} + ie^{2z} - 36e^z - 36i = 0$ har en lösning $z_1 = \frac{3\pi}{2} i$. Bestäm samtliga lösningar till ekvationen. **Tips:** använd substitutionen $w = e^z$. **(3p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

1.

a. Med hjälp av Eulers formel, och eftersom $\cos x$ och $\sin x$ är 2π - periodiska får vi:

$$e^{1-3\pi i} = e^1 e^{-3\pi i} = \mathrm{e}\left(\cos(-3\pi) + i\sin(-3\pi)\right) =$$
$$= e\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) = \mathrm{e}(-1+0i) = -\mathrm{e}.$$

b. Vi förlänger med konjugatet till nämnaren och får:

$$\frac{-1+i}{1+\sqrt{2}i} = \frac{(-1+i)\left(1-\sqrt{2}i\right)}{\left(1+\sqrt{2}i\right)\left(1-\sqrt{2}i\right)} = \frac{-1+\sqrt{2}i+i+\sqrt{2}}{1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}$$
$$= \frac{-1+\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}+1\right)i}{3} = \frac{\sqrt{2}-1}{3} + \frac{\sqrt{2}+1}{3}i.$$

2. Beloppen bestäms

$$|z| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$
$$|w| = \sqrt{(2)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = 4.$$

Argumenten bestäms

$$\arg z = \arctan\frac{-1}{-1} + k\pi = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

där k är ett heltal. Eftersom z ligger i tredje kvadranten är $k=1$, (eller mer generellt udda). Vi får

$$\arg z = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}.$$
$$\arg w = \arctan\frac{2\sqrt{3}}{2} + k\pi = \frac{\pi}{3} + k\pi,$$

där k är ett heltal. Eftersom w ligger i första kvadranten är $k=0$, (eller mer generellt jämnt). Vi får

$$\arg w = \frac{\pi}{3}.$$

På polär form har vi

$$z = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}$$
$$w = 4e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

Därför är

$$\frac{z}{w}=\frac{\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}}{4e^{\frac{\pi}{3}i}}=\frac{\sqrt{2}}{4}e^{\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)i}=\frac{\sqrt{2}}{4}e^{\frac{15-4}{12}\pi i}=\frac{\sqrt{2}}{4}e^{\frac{11}{12}\pi i}$$

Argumentet för $\frac{z}{w}$ behöver inte korrigeras då $0\leq\frac{11}{12}\pi<2\pi$. (Annars hade vi fått dra till eller lägga till en heltalsmultipel av 2π)

Svar: $\frac{z}{w}=\frac{\sqrt{2}}{4}e^{\frac{11}{12}\pi i}$, alternativt $\frac{z}{w}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi\right)$.

3. Partiell integration ger

$$\int_0^1 3xe^{2x}dx=\left[3x\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1-\int_0^1 3\frac{e^{2x}}{2}dx=\frac{3}{2}e^2-0-\left[\frac{3e^{2x}}{4}\right]_0^1=\frac{3}{2}e^2-\left(\frac{3e^2}{4}-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}e^2+\frac{3}{4}$$

Svar: Den sökta integralens värde är $\frac{3}{4}e^2+\frac{3}{4}$.

4. Vi löser först motsvarande homogena ekvation $y''-2y'-3y=0$.

Karaktäristiska ekvationen är $r^2-2r-3=0$ och har lösningarna (pq-formeln):

$$\begin{aligned} r&=1\pm\sqrt{1^2+3} \\ r&=1\pm2, \end{aligned}$$

så $r=3$ eller $r=-1$

Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen ges därför av:

$$y_h(x)=Ae^{3x}+Be^{-x}.$$

Vi söker nu en partikulärlösning till (den ursprungliga) ekvationen. Eftersom HL är konstant ansätter vi $y_p(x)=k$. Vi får $y_p'(x)=0$ och $y_p''(x)=0$. Insättning ger $-3k=6$, så $k=-2$.

En partikulärlösning till den homogena ekvationen ges alltså av $y_p(x)=-2$.

Den allmänna lösningen till ekvationen ges av $y(x)=y_h(x)+y_p(x)=Ae^{3x}+Be^{-x}-2$.

Svar: Den allmänna lösningen till ekvationen ges av $y(x)=Ae^{3x}+Be^{-x}-2$.

5. Vi bestämmer först skärningen mellan kurvan och x-axeln

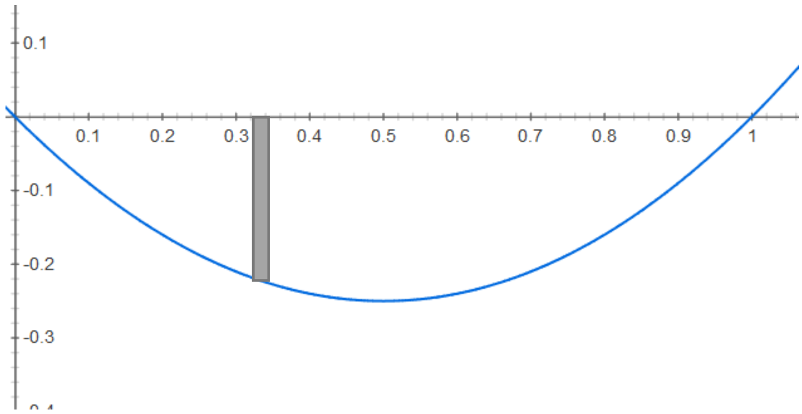
$$\begin{aligned} 0&=\mathrm{x}^2-x \\ 0&=x(x-1), \end{aligned}$$

så skärningspunkterna fås då $x=0$ och då $x=1$.

Integrationsgränserna skall alltså vara 0 och 1.

Eftersom $y\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$ ligger området vi ska rotera under x-axeln.

Området med en strimma framgår av figuren nedan.



Eftersom kurvan ligger under x-axeln ges strimmans höjd av $-y(x)$

Cylindriska skal ger

$$\mathrm{V}=\int_0^1 2\pi x\left(-y(x)\right)dx=2\pi\int_0^1 x\left(-x^2+x\right)dx=2\pi\int_0^1\left(-x^3+x^2\right)dx=$$

$$=2\pi\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1=2\pi\left(-\frac{1^4}{4}+\frac{1^3}{3}\right)=2\pi\left(\frac{4-3}{12}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

Svar: Den sökta volymen är $\frac{\pi}{6}$.

6. Eftersom talföljden är geometrisk är $a_n=a_1k^{n-1}$. Vi behöver bestämma a_1 och k.

Insättning av $n=3$ och $n=5$ ger $\frac{\pi}{2}=a_1k^2$ och $\frac{\pi}{4}=a_1k^4$.

Division ger

$$\frac{a_1k^4}{a_1k^2}=\frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}}$$

$$k^2=\frac{1}{2}$$

$$k=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\ \left(\text{negativ rot falsk då vartantat tal i följden skulle bli negativt}\right)$$

$$k = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vi får för $n = 3$

$$\frac{\pi}{2} = a_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{a_1}{2}$$

$$a_1 = \pi,$$

så $a_n = \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1}$.

Formeln för en geometrisk summa ger

$$\sum_{n=1}^{12} a_n = \frac{a_1\left(1-k^{12}\right)}{1-k} = \pi \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{12}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \pi \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{12}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = 2\pi \frac{1-\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right)^{6}}{2-\sqrt{2}} = 2\pi \frac{1-\frac{1}{64}}{2-\sqrt{2}}$$

$$= 2\pi \frac{\frac{64-1}{64}}{2-\sqrt{2}} = \pi \frac{63}{32\left(2-\sqrt{2}\right)} = \pi \frac{63\left(2+\sqrt{2}\right)}{32\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)} = \pi \frac{63\left(2+\sqrt{2}\right)}{32\left(2^2-\sqrt{2}^2\right)} = \pi \frac{63\left(2+\sqrt{2}\right)}{64}.$$

Svar: Den sökta summan är $\pi \frac{63\left(2+\sqrt{2}\right)}{64}$.

7. Kvotregeln ger

$$y' = \frac{10x \cdot \left(x^5 + D\right) - 5x^2 \cdot 5x^4}{\left(x^5 + D\right)^2} = \frac{-15x^6 + 10Dx}{\left(x^5 + D\right)^2},$$

så

$$VL = \frac{-15x^6 + 10Dx}{\left(x^5 + D\right)^2} - \frac{2 \cdot 5x^2}{x(x^5 + D)} = \frac{-15x^6 + 10Dx}{\left(x^5 + D\right)^2} - \frac{10x}{x^5 + D} =$$

$$\frac{-15x^6 + 10Dx - 10x\left(x^5 + D\right)}{\left(x^5 + D\right)^2} = -\frac{25x^6}{\left(x^5 + D\right)^2}.$$

Högerledet förenklas till

$$HL = -x^2 \left(\frac{5x^2}{x^5 + D} \right)^2 = -\frac{25x^6}{\left(x^5 + D\right)^2},$$

så $VL = HL$, dvs $y = \dfrac{5x^2}{x^5 + D}$ är en lösning till differentialekvationen.

Svar: $y = \dfrac{5x^2}{x^5 + D}$, där D är en konstant, är en lösning till differentialekvationen.

8. Ekvationen är separabel och kan skrivas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \sin x}{y^2}$$
$$y^2 \frac{dy}{dx} = 1 - \sin x.$$

Integration ger

$$\int y^2 dy = \int (1 - \sin x) dx$$
$$\frac{y^3}{3} = x + \cos x + C_1 \ .$$

Vi löser ut y

$$y^3 = 3x + 3\cos x + 3C_1$$
$$y = \sqrt[3]{3x + 3\cos x + C_2},$$

där $C_2 = 3C_1$.

Begynnelsevillkoret $y(0) = 2$ ger att

$$2 = \sqrt[3]{0 + 3\cos 0 + C_2}$$
$$3 + C_2 = 2^3$$
$$C_2 = 8 - 3$$
$$C_2 = 5$$

Lösningen som uppfyller begynnelsevillkoret är alltså $y = \sqrt[3]{3x + 3\cos x + 5}$.

Svar: Den sökta lösningen är $y = \sqrt[3]{3x + 3\cos x + 5}$.

9.

a. Låt y_{p1} vara en partikulärlösning till differentialekvationen $y'' + ay' + by = f_1(x)$. Då är

$$y''_{p1} + ay'_{p1} + by_{p1} = f_1(x).$$

Låt y_{p2} vara en partikulärlösning till differentialekvationen $y'' + ay' + by = f_2(x)$. Då är

$$y''_{p2} + ay'_{p2} + by_{p2} = f_2(x).$$

Om $y_p = y_{p1} + y_{p2}$ så är

$$y_p' = y_{p1}' + y_{p2}'$$
$$y_p'' = y_{p1}'' + y_{p2}''.$$

Insättning i VL ger

$$\begin{aligned} y_p'' + ay_p' + by_p &= y_{p1}'' + y_{p2}'' + a\left(y_{p1} + y_{p2}\right) + b\left(y_{p1} + y_{p2}\right) \\ &= y_{p1}'' + y_{p2}'' + ay_{p1} + ay_{p2} + by_{p1} + by_{p2} \\ &= \left(y_{p1}'' + ay_{p1}' + by_{p1}\right) + \left(y_{p2}'' + ay_{p2}' + by_{p2}\right) = f_1(x) + f_2(x), \end{aligned}$$

dvs y_p är en partikulärlösning till $y'' + ay' + by = f_1(x) + f_2(x)$.

b. Om $f_1(x) = \sin x$ och $f_2(x) = e^x$ är VL i ekvationen $f_1(x) + f_2(x)$.

Vi bestämmer en partikulärlösning till $y'' + 2y' + y = \sin x$ genom att ansätta

$$y_{p1} = A\sin x + B\cos x$$

och får

$$y_{p1}' = A\cos x - B\sin x$$
$$y_{p1}'' = -A\sin x - B\cos x.$$

Insättning i VL ger

$$VL = -A\sin x - B\cos x + 2\left(A\cos x - B\sin x\right) + A\sin x + B\cos x = -2B\sin x + 2A\cos x.$$

Vi får en partikulärlösning då

$$\begin{cases} -2B = 1 \\ 2A = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} B = -\dfrac{1}{2} \\ A = 0 \end{cases}$$

dvs då $y_{p1} = -\dfrac{1}{2}\cos x.$

Vi bestämmer en partikulärlösning till $y'' + 2y' + y = e^x$ genom att ansätta

$$y_{p2} = Ce^x$$

och får

$$y_{p2}' = Ce^x$$
$$y_{p2}'' = Ce^x.$$

Insättning i VL ger

$$VL = Ce^x + 2Ce^x + Ce^x = 4Ce^x.$$

Vi får en partikulärlösning då

$$4C = 1$$

$$C=\frac{1}{4}$$

dvs då $y_{p2}=\frac{e^x}{4}$.

Enligt (a) ges en partikulärlösnig till $y''+2y'+y=\sin x+e^x$ av

$$y_p=y_{p1}+y_{p2}=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{e^x}{4}.$$

Svar: en partikulärlösnig ges av $y_p=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{e^x}{4}$.

Alternativ lösning: Derivering av ansats på rätt form, dvs $y_p=A\sin x+B\cos x+Ce^x$ och insättning i ekvationen $y''+2y'+y=\sin x+e^x$. ger samma ekvationer för A, B och C som ovan. Ur dessa bestäms A, B och C, och därmed y_p.

10. Ekvationen kan skrivas

$$\left(e^z\right)^3+i\left(e^z\right)^2-36e^z-36i=0.$$

Substitutionen $w=e^z$ ger polynomekvationen

$$w^3+iw^2-36\mathrm{w}-36i=0(*).$$

Eftersom z_1 är en lösning till den ursprungliga ekvationen är

$$w_1=e^{z_1}=e^{\frac{3\pi}{2}i}=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$$

en lösning till $(*)$. Faktorsatsen ger att $w-w_1=w+i$ är en faktor till vänsterledet i $(*)$.

Polynomdivision ger:

$$\begin{array}{c|c} w^2-36 & \\ \hline w^3+iw^2-36\mathrm{w}-36i & w+i \\ -\left(w^3+iw^2\right) & \\ \hline -36\mathrm{w}-36i & \\ -(-36\mathrm{w}-36i) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

där $w^2-36=(w+6)(w-6)$, så $(*)$ kan skrivas som

$(\mathrm{w}+\mathrm{i})(w+6)(w-6)=0.$

Samtliga lösningar till $(*)$ ges därför av $w_1 = -i$, $w_2 = -6$ och $w_3 = 6$.

Slutligen bestäms lösningarna till den ursprungliga ekvationen.

Låt $z = a + bi$. Då är $e^z = e^a(\cos b + i\sin b)$, så $|e^z| = e^a$ och $\arg e^z = b + k2\pi$, där k är ett heltal.

Vi har

$$\begin{gathered} \arg w_1 = \frac{3\pi}{2}, |w_1| = 1 \\ \arg w_2 = \pi, |w_2| = 6 \\ \arg w_3 = 0, |w_3| = 6 \end{gathered}$$

Av $e^z = w_1$ får vi lösningarna

$$\begin{cases} e^a = 1 \\ b = \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$
$$\begin{cases} a = 0 \\ b = \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi, \end{cases}$$

dvs $z = \left(\frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)i$, där k är ett heltal.

Av $e^z = w_2$ får vi lösningarna

$$\begin{cases} e^a = 6 \\ b = -\pi + k2\pi \end{cases}$$
$$\begin{cases} a = \ln 6 \\ b = -\pi + k2\pi, \end{cases}$$

dvs $z = \ln 6 + (-\pi + k2\pi)i$, där k är ett heltal.

Av $e^z = w_3$ får vi lösningarna

$$\begin{cases} e^a = 6 \\ b = k2\pi \end{cases}$$
$$\begin{cases} a = \ln 6 \\ b = k2\pi, \end{cases}$$

dvs $z = \ln 6 + k2\pi i$, där k är ett heltal.

Svar: Ekvationens samtliga lösningar ges av $z=\left(\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right)i$, $z=\ln 6+(-\pi+k2\pi)i$ och $z=\ln 6+k2\pi i$, där k är ett heltal.

Generell rättningsmall

A.	Varje beräkningsfel	-1 poäng
	(Därefter fortsatt rättning enligt nya förutsättningar)	
B.	Beräkningsfel; allvarliga och/eller leder till förenkling	-2 poäng eller mer
C.	Prövning istället för generell metod	- samtliga poäng
D.	Felaktiga antaganden/ansatser	- samtliga poäng
E.	Antar numeriska värden	- samtliga poäng
F.	Lösning svår att följa och/eller Svaret framgår inte tydligt	-1 poäng eller mer
	(Vid flera svar väljs det minst gynnsamma. Svara antingen avrundat eller exakt, se nedan.)	
G.	Matematiska symboler används felaktigt/saknas	-1 poäng eller mer
	Bl.a Om ’=’ saknas (t.ex. ’=>’ används istället)	-1 poäng/tenta
	Om ’=’ används felaktigt (t.ex. istället för ’=>’)	-1 poäng/tenta

Teoretiska uppgifter:

H.	Avrundat svar	-1 poäng/tenta

Tillämpade uppgifter:

I.	Enhet saknas/fel	-1 poäng/tenta
J.	Avrundningar i delberäkningar som ger fel svar	-1 poäng/tenta
K.	Svar med felaktigt antal värdesiffror (±1 värdesiffra ok)	-1 poäng/tenta
L.	Andra avrundningsfel	-1 poäng/tenta
M.	Exakt svar	-1 poäng/tenta

Preliminär rättningsmall

1.

a. Hänvisar ej till Eulers formel -0p.

b. Korrekt metod: förlänger med nämnarens konjugat +1p

2. Skriver $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ok

Bestämmer argumenten mha bild ok

Ingen motivation till varför $\arg z = \frac{\pi}{4} + \pi$ -1p

Svarar med korrekt vinkel, dock utanför angivet intervall -1p

3. Felaktig användning av partiell integration -2p

4. Felaktig lösning till homogen ekvation -1p

Felaktig partikulärlösning -1p

5. Korrekt tecknad integral för volymen sedan fel -1p

Visar ej hur integrationsgränserna bestämts (grafiskt eller med beräkning) -1p

Förväxlar över- och underfunktion, dvs räknar med $y(x)$ istället för $-y(x)$, byter tecken utan/(med oklar) motivering -1p

6. Helt fel k -2p

Utesluter ej negativt k -1p

Fel a_1 -1p

Svarar med rot i nämnaren för summan -0p

7. Korrekt derivering (innan förenkling), undersöker VL och HL separat +1p

8. Konstanten saknas eller helt fel -2p

Konstanten felberäknad -1p

9. a. Otydlig lösning, t ex beroende på bristande/ofullständig indexering så att det inte är tydligt vilka termer som hör till f_1 respektive f_2 -1p

b. Ansätter $y_p = A\sin x + B\cos x + Ce^x$ utan att använda a OK

Svarar med den allmänna lösningen till differentialekvationen, dvs

$y = Ae^{-x} + Bxe^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{e^x}{4}.$ -1p

10. Genomför variabelbyte och bestämmer en faktor till polynomet, därefter fel +1p

Svarar med tre korrekta w / Anger tre korrekta w, sedan fel -1p

Anger tre korrekta lösningar, men utan $+k2\pi i$ -1p

Otydlig lösning, t ex beroende på bristande/ofullständig indexering så att det inte är tydligt vilka termer som hör till f1 respektive f2 -1p