TENTAMEN

Kursnummer:	HF0024 Matematik för basår II
Moment:	TENB
Program:	Tekniskt basår
Rättande lärare:	Staffan Linnaeus, Erik Melander & Jonas Stenholm
Examinator:	Niclas Hjelm 08-790 48 57
Datum: Tid:	2021-06-02 8:00-12:00
Hjälpmedel:	**Miniräknare är inte tillåten på denna tentamen!** Formler och Tabeller, Natur och Kultur: • ISBN 978-91-27-45720-1 • ISBN 978-91-27-42245-2 • ISBN 978-91-27-72279-8 Linjal, passare, gradskiva.
Omfattning och betygsgränser:	(se tabell nedan)

Tentamens-betyg	F	Fx	E	D	C	B	A
Del 1	0-6	7	8-12				
Del 2	Rättas ej.		0-2	3-5	6-8	9-11	12-14

Till samtliga uppgifter krävs fullständiga lösningar, om inte annat anges.
Lösningarna skall vara tydliga och lätta att följa.
Införda beteckningar skall definieras.
Uppställda samband skall motiveras.

Svaret ska framgå tydligt och vara förenklat så långt som möjligt. Svara med enhet och lämplig avrundning på tillämpade uppgifter. Svara exakt på övriga uppgifter, om inte annat anges.

Mätning i figur ger 0 poäng, om inte annat anges.
Lösningar ska baseras på generella algebraiska metoder. Lösning baserad på testning godtas inte.

Använd helst blyertspenna. Undvik röda pennor.
Ange ditt personnummer på varje papper.
Skriv bara på papprets ena sida och ha inte mer än en uppgift per papper.

Del 1

1. Bestäm den primitiva funktionen $F(x)$ till $f(x) = e^{-x/3} + x$ som uppfyller villkoret $F(0) = 2$. 2p

2. Bestäm $\operatorname{Re} z$ och $\operatorname{Im} z$ om $z = \dfrac{1}{i^3 - 3i}$. 2p

3. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 81y = 0$ som uppfyller villkoren $y(0) = e$ och $y'(0) = 2\pi$. 2p

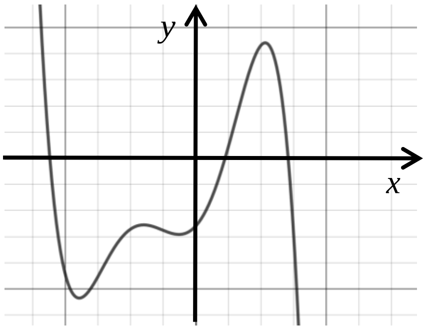
4. I en aritmetisk talföljd är det första talet 4 och det tionde talet 0. Bestäm n så att $S_n = 0$. 2p

5. Bestäm de reella talen a och b så att $z = 2 + 5i$ är en lösning till ekvationen $z^2 + az + b = 0$. 2p

6. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' = \dfrac{e^{-x}}{y}$, $y > 0$ som uppfyller villkoret $y(0) = 2$. 2p

Del 2

7. Figuren visar grafen till en polynomfunktion, $y = f(x)$, av 5:te graden.



Hur många reella respektive hur många icke-reella rötter har ekvationen

a) $f(x) = 0$? *(Endast svar.)* 1p

b) $f'(x) = 0$? *(Endast svar.)* 1p

8. Funktionen y uppfyller villkoret $y' = y + \frac{x}{3}$

Bestäm ekvationen för funktionens tangent i punkten (1, 2). 2p

9. Beräkna $\int_0^{2\pi} 2x \sin\frac{x}{2}\,dx$. 2p

10. Ekvationen $z^4 - \frac{1}{2}z^3 + 4z^2 - 2z = 0$ har en rot, $z = 2i$.

Lös ekvationen fullständigt. 3p

11. Det ändliga område som begränsas av x-axeln och kurvan $y = ax - \frac{x^2}{2}$ där $a > 0$ roterar dels runt x-axeln och dels runt y-axeln.

Bestäm a, så att rotationskropparna får lika stor volym. 2p

12. En tank innehåller initialt 100 liter av en saltlösning med den totala saltmängden 2,0 kg. Vid tiden $t = 0$ startar ett konstant inflöde av en saltlösning med en annan saltkoncentration (enhet: kg/liter). Den nya lösningen tillförs till tanken med en hastighet av 4,0 liter/min. Av den väl blandade lösningen i tanken bortförs 4,0 liter/min. Efter 25 min är saltkoncentrationen i tanken dubbelt så stor som saltkoncentrationen för inflödet. Vad är saltkoncentrationen för inflödet?

Svara exakt. 3p

Preliminära **Lösningsförslag:**

1. $F(x) = \int (e^{-x/3} + x)dx = -3e^{-x/3} + \frac{x^2}{2} + C$

   Villkoret $F(0) = 2$ ger $-3e^{-0/3} + \frac{0^2}{2} + C = 2 \quad \Leftrightarrow \quad C = 5$

   Sökt primitiv funktion: $F(x) = -3e^{-x/3} + \frac{x^2}{2} + 5$ **Svar:** $F(x) = -3e^{-x/3} + \frac{x^2}{2} + 5$.

2. $z = \frac{1}{i^3 - 3i} = \frac{1}{-i - 3i} = \frac{1}{-4i} = \frac{1 \cdot 4i}{(-4i) \cdot 4i} = \frac{4i}{16} = \frac{i}{4}$

   Vi får $\operatorname{Re} z = 0$ och $\operatorname{Im} z = \frac{1}{4}$. **Svar:** $\operatorname{Re} z = 0$ och $\operatorname{Im} z = \frac{1}{4}$.

3. DE $y'' + 81y = 0$ ger den karakteristiska ekvationen $k^2 + 81 = 0 \Leftrightarrow \quad k = \pm 9i$

   Komplexa rötter ger den allmänna lösningen: $y = A\cos 9x + B\sin 9x$.

   A och B bestäms med hjälp av villkoren $y(0) = e$ och $y'(0) = 2\pi$.

   $y(0) = e$ ger $e = A\cos 0 + B\sin 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = e$

   $y' = -9A\sin 9x + 9B\cos 9x$

   $y'(0) = 2\pi$ ger $2\pi = -9A\sin 0 + 9B\cos 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = \frac{2\pi}{9}$

   Svar: $y = e\cos 9x + \frac{2\pi}{9}\sin 9x$

4. För en aritmetisk talföljd gäller $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ och $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$

   $a_1 = 4$ och $a_{10} = 0$ ger $0 = 4 + (10-1) \cdot d \quad \Leftrightarrow \quad d = -\frac{4}{9}$

   Vi får $a_n = 4 - \frac{4}{9}(n-1)$ och $S_n = \frac{n(4 + 4 - \frac{4}{9}(n-1))}{2} = \frac{8n - \frac{4n^2}{9} + \frac{4n}{9}}{2} = \frac{38n - 2n^2}{9}$

   $S_n = 0$ då $38n - 2n^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2n(19 - n) = 0 \Leftrightarrow \quad n_1 = 0 \quad n_2 = 19$

   Svar: $n = 19$

5. Ekvationen $z^2 + az + b = 0$ har rötterna $z = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$.

Om $z = 2 + 5i$ är en rot $\Rightarrow \begin{cases} -\frac{a}{2} = 2 & (1) \\ \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b = -25 & (2) \end{cases}$

(1) ger $a = -4$ vilket sätts in i (2) $\Rightarrow$ $4 - b = -25$ $\Rightarrow$ $b = 29$

Svar:
$\begin{cases} a = -4 \\ b = 29 \end{cases}$

6. DE $y' = \frac{e^{-x}}{y}$ (Separabel) $\Rightarrow$

$y \cdot \frac{dy}{dx} = e^{-x}$

$\int y dy = \int e^{-x} dx$

$\frac{y^2}{2} = -e^{-x} + C_1$

$y^2 = -2e^{-x} + C_2$

Villkoret $y(0) = 2$ ger $2^2 = -2e^{-0} + C_2 \Leftrightarrow C_2 = 6$

$y^2 = -2e^{-x} + 6$ och $y > 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{6 - 2e^{-x}}$

Svar: $y = \sqrt{6 - 2e^{-x}}$

7. a) 3 reella och 2 icke-reella rötter. b) 4 reella och 0 icke-reella rötter.

Lösning/förklaring krävdes ej.

a) Ekvationen $f(x) = 0$ har 5 komplexa rötter. I grafen kan man avläsa att 3 av dessa är reella och då är alltså två icke-reella.

b) Derivatan är en fjärdegradsfunktion. I grafen kan man avläsa att $f'(x) = 0$ i fyra punkter. Det betyder att ekvationen $f'(x) = 0$ har fyra reella rötter och noll icke-reella.

8. $y' = y + \frac{x}{3}$

Tangentens k-värde ges av derivatans värde i punkten (1,2) $y' = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

d.v.s. $k = \frac{7}{3}$ och enpunktsformeln i punkten (1,2) ger

tangentens ekvation: $y - 2 = \frac{7}{3}(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{7x}{3} - \frac{1}{3}$ **Svar:** $y = \frac{7x}{3} - \frac{1}{3}$

9. Bestäm först primitiv funktion med partiell integration:

$$\int 2x\sin\frac{x}{2}\,dx = 2x\cdot(-2\cos\frac{x}{2}) - \int 2\cdot(-2\cos\frac{x}{2})dx = -4x\cos\frac{x}{2} + \int 4\cos\frac{x}{2}\,dx =$$

$$= -4x\cos\frac{x}{2} + 8\sin\frac{x}{2} + C$$

$$\int_0^{2\pi} 2x\sin\frac{x}{2}\,dx = \left[-4x\cos\frac{x}{2} + 8\sin\frac{x}{2}\right]_0^{2\pi} = -8\pi\cos\pi + 8\sin\pi - (8\sin 0) = 8\pi$$

Svar: $\int_0^{2\pi} 2x\sin\frac{x}{2}\,dx = 8\pi$

10. Sätt $p(z) = z^4 - \frac{1}{2}z^3 + 4z^2 - 2z = z(z^3 - \frac{1}{2}z^2 + 4z - 2)$

$z_1 = 2i$ är en rot till $p(z) = 0$ och då koefficienterna i $p(z)$ är reella får vi att
$z_2 = \overline{z}_1 = -2i$ också är en rot.
$p(2i) = 0 \Rightarrow (z - 2i)$ är en faktor till $p(z)$.
$p(-2i) = 0 \Rightarrow (z + 2i)$ är en faktor till $p(z)$. (Faktorsatsen)

$$p(z) = z^4 - \frac{1}{2}z^3 + 4z^2 - 2z = z(z^3 - \frac{1}{2}z^2 + 4z - 2) = z(z-2i)(z+2i)q(z) = (z^3 + 4z)q(z)$$

$q(z)$ kan bestämmas med polynomdivision

$$\begin{array}{lllll|l}
z & -0,5 & & & & \\
\hline
z^4 & -0,5z^3 & +4z^2 & -2z & & z^3 + 4z \\
\cline{6-6}
-(z^4 & & +4z^2) & & & \\
\cline{1-4}
 & -0,5z^3 & +0\cdot z^2 & -2z & & \\
 & -(-0,5z^3 & & -2z) & & \\
\cline{2-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Polynomet kan nu skrivas: $p(z) = z^4 - \frac{1}{2}z^3 + 4z^2 - 2z = z(z^2 + 4)(z - \frac{1}{2})$

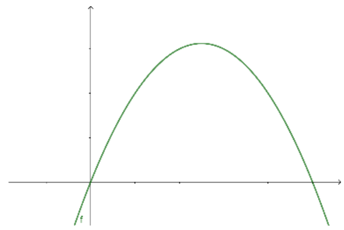
Ekvationen som ska lösas är $z(z^2 + 4)(z - \frac{1}{2}) = 0$ och det är lätt att se

rötterna $z_3 = 0$ och $z_4 = \frac{1}{2}$

Svar: $z_1 = 2i$, $z_2 = -2i$, $z_3 = 0$ och $z_4 = \frac{1}{2}$

11. Funktionens nollställen: $ax - \frac{x^2}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(a - \frac{x}{2}) = 0$

d.v.s. $x_1=0 \quad x_2=2a$.



Vid rotation kring x-axeln fås:

$$V_x = \pi \int_0^{2a} (ax - \frac{x^2}{2})^2 \, dx = \pi \int_0^{2a} (a^2x^2 - ax^3 + \frac{x^4}{4}) dx = \pi \left[\frac{a^2x^3}{3} - \frac{ax^4}{4} + \frac{x^5}{20} \right]_0^{2a} =$$

$$= \pi(\frac{2^3a^5}{3} - \frac{2^4a^5}{4} + \frac{2^5a^5}{20}) = \frac{\pi 4a^5}{15}$$

Vid rotation kring y-axeln fås:

$$V_y = 2\pi \int_0^{2a} x(ax - \frac{x^2}{2}) dx = 2\pi \int_0^{2a} (ax^2 - \frac{x^3}{2}) dx = 2\pi \left[\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{8} \right]_0^{2a} = 2\pi(\frac{2^3a^4}{3} - \frac{2^4a^4}{8}) = \frac{\pi 4a^4}{3}$$

$V_x = V_y$ ger

$$\frac{\pi 4a^5}{15} = \frac{\pi 4a^4}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi 4a^5}{15} - \frac{\pi 4a^4}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 5 \quad (a > 0)$$

Svar: $a = 5$

12. Låt $s(t)$ vara saltmängden i tanken vid tiden t min och låt C vara saltkoncentrationen i inflödet. Förändringshastigheten för saltmängden i tanken kan skrivas som:

$$\frac{ds}{dt} = (\text{saltflöde in}) - (\text{saltflöde ut}), \quad s(0) = 2,$$

där

$$(\text{saltflöde in}) = C\frac{\text{kg}}{\text{l}} \cdot 4\frac{\text{l}}{\text{min}} = 4C\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

$$(\text{saltflöde ut}) = \frac{s(t)}{100}\frac{\text{kg}}{\text{l}} \cdot 4\frac{\text{l}}{\text{min}} = \frac{s(t)}{25}\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

Så differentialekvationen blir:

$$\frac{ds}{dt} = 4C - \frac{s(t)}{25}, \quad s(0) = 2.$$

Differentialekvationen är en inhomogen ekvation av ordning ett med konstanta koefficienter.

Lösning av DE:

(i) Partikulärlösning: Vi ansätter $s_p = a$, med $s'_p = 0$. Insättning ger

$0 = 4C - a/25 \Leftrightarrow a = 100C$. Så $s_p = 100C$.

(ii) Homogena lösningar: $s_h = Ae^{-t/25}$.

(iii) Allmän lösning: $s = s_h + s_p = Ae^{-t/25} + 100C$

(iv) Applicera villkor: $s(0) = 2 \Leftrightarrow 2 = Ae^0 + 100C = A + 100C$, så $A = 2 - 100C$.
För den initiala saltmängden 2 kg får vi alltså lösningen:

$$s(t) = (2 - 100C)e^{-t/25} + 100C.$$

Efter $t = 25$ min har vi salthalten:

$$s(25) = (2 - 100C)e^{-1} + 100C.$$

Saltkoncentrationen vid $t = 25$ blir $s(25)/100 = 2C$. Således får vi

$$\begin{aligned}
& 200C = (2 - 100C)e^{-1} + 100C \\
\Leftrightarrow \quad & 100C = (2 - 100C)e^{-1} \\
\Leftrightarrow \quad & 100eC = 2 - 100C \\
\Leftrightarrow \quad & 50eC = 1 - 50C \\
\Leftrightarrow \quad & C(50 + 50e) = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & C = \frac{1}{50(1+e)}
\end{aligned}$$

<u>Svar:</u> Inflödet har saltkoncentrationen $\frac{1}{50(1+e)}$ kg/l.

Preliminär Rättningsmall

Generella riktlinjer för tentamensrättning

A. Varje beräkningsfel -1 poäng
(Därefter fortsatt rättning enligt nya förutsättningar)
B. Beräkningsfel; allvarliga och/eller leder till förenkling -2 poäng eller mer
C. Prövning istället för generell metod - samtliga poäng
D. Felaktiga antaganden/ansatser - samtliga poäng
E. Antar numeriska värden - samtliga poäng
F. Lösning svår att följa och/eller Svaret framgår inte tydligt -1 poäng eller mer
(Vid flera svar väljs det minst gynnsamma. Svara antingen avrundat eller exakt, se nedan.)
G. Matematiska symboler används felaktigt/saknas -1poäng eller mer
Bl.a Om '=' saknas (t.ex. '=>' används istället) -1 poäng/tenta
Om '=' används felaktigt (t.ex. istället för '=>') -1 poäng/tenta

Teoretiska uppgifter:

H. Avrundat svar -1 poäng/tenta

Tillämpade uppgifter:

I. Enhet saknas/fel -1 poäng/tenta
J. Avrundningar i delberäkningar som ger fel svar -1 poäng/tenta
K. Svar med felaktigt antal värdesiffror (±1 värdesiffra ok) -1 poäng/tenta
L. Andra avrundningsfel -1 poäng/tenta
M. Exakt svar -1 poäng/tenta

Rättningsmall

1. Felaktig integrering -2p
   Integrerar korrekt men bestämmer inte C. -1p
2. Anger imaginärdel som $\operatorname{Im} z = \frac{i}{4}$ -1p
3. Fel karakteristisk ekvation -2p
   Bestämmer endast en av konstanterna korrekt . -1p
4. Svarar även med lösningen $n = 0$ -0p
   Löser problemet med ett resonemang om att $a_1 + a_{19} = 0 \quad a_2 + a_{18} = 0 \; .....,$
   för full poäng måste tydlig koppling till att talföljden är aritmetisk,
   summan $S_n = 0$ och att a_{10} (som är noll) är det mittersta talet.
5. --
6. Svarar även med negativ lösning -1p
   Påstår att $y^2 = -2e^{-x} + 6$ ger $y = \sqrt{e^{-x} + 6}$ utan motivering -0p
7. a) fel svar -1p
   b) fel svar -1p
8. Rätt k-värde +1p
   Löser differentialekvationen korrekt men har inte förstått uppgiften -2p
9. Korrekt primitiv funktion men sedan fel. -1p
   Primitiv funktion för obestämd integral saknar konstanten C -0p
   Formaliafel i integraler ex dx saknas -1p
10. Motiverar inte den komplexkonjugerade roten -0p
    Motiverar inte omvandlingen rot till faktor. -0p
    Korrekt polynomdivision +1p

	Lösningen $z=0$ saknas	-1p
11.	Tecknar två korrekta integraler för rotationsvolymerna.	+1p
	Felaktig integrering	−1p
12.	Korrekt uppställd differentialekvation inklusive villkor.	+1p
	Korrekt lösning till differentialekvationen, $s(t)=(2-100C)e^{-t/25}+100C$.	+1p