KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen 2012-12-13

DEL A

1. Betrakta punkterna $A = (2,2)$ och $B = (6,4)$ och linjen $(-1,3) + t(2,-1)$ i planet.
   (a) Det finns exakt en punkt P på linjen så att triangeln ABP är rätvinklig med den räta vinkeln i B. Bestäm P. **(2 p)**
   (b) Det finns även exakt en punkt Q på linjen så att triangeln ABQ är rätvinklig med den räta vinkeln i Q. Bestäm Q. **(2 p)**

Lösningsförslag. a) Låt $P = (2t-1, 3-t)$ vara en punkt på linjen. Vi betraktar vektorerna

$$\vec{AB} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ och } \vec{BP} = \begin{bmatrix} 2t-7 \\ -t-1 \end{bmatrix}$$

som går längs triangelns två sidor. Vinkeln i B är rät om och endast om $\vec{AB} \cdot \vec{BP} = 0$. Vi vill bestämma t så att detta är uppfyllt. Vi får ekvationen

$$0 = \vec{AB} \cdot \vec{BP} = (8t-28) + (-2t-2) = 6t - 30 \iff t = 5.$$

Således är $P = (9,-2)$ den unika punkten på linjen som gör triangeln ABP rätvinklig i punkten B.

b) Låt $Q = (2t-1, 3-t)$ vara en punkt på linjen. Nu betraktar vi vektorerna

$$\vec{AQ} = \begin{bmatrix} 2t-3 \\ 1-t \end{bmatrix}, \vec{QB} = \begin{bmatrix} 7-2t \\ 1+t \end{bmatrix}.$$

Vinkeln i Q är rät precis då $\vec{AQ} \cdot \vec{QB} = 0$. Vi får ekvationen

$$0 = \vec{AQ} \cdot \vec{QB} = (2t-3)(7-2t) + (1-t)(1+t) = -(5t^2 - 20t + 20) = -5(t-2)^2.$$

Detta är endast uppfyllt då $t = 2$, dvs då $Q = (3,1)$.

Svar.
(a) Punkten $P = (9,-2)$.
(b) Punkten $Q = (3,1)$.

2. Betrakta den linjära avbildning $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som ges av matrisen
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Linjen med ekvation $3x + 4y = 0$ avbildas av T på en linje H. Bestäm en ekvation för linjen H. **(3 p)**
   (b) Även linjen med ekvation $3x + 4y = 1$ avbildas på en linje. Bestäm en ekvation för denna linje. **(1 p)**

Lösningsförslag. a) Vi ser att linjen $3x+4y = 0$ har en riktningsvektor $\vec{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ (eftersom $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ är en normal till linjen). Således måste $\vec{v} = T(\vec{u})$ vara en riktningsvektor till linjen H, om $\vec{v}$ är noll-skilld. Vi beräknar $\vec{v}$:
$$\vec{v} = A\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}.$$
Eftersom linjen $3x + 4y = 0$ går genom origo, måste också linjen H gå genom origo (origo avbildas på origo). Alltså är $9x - 5y = 0$ en ekvation för linjen H.

b) Eftersom linjerna $3x + 4y = 0$ och $3x + 4y = 1$ är parallella, måste bilden av linjen $3x + 4y = 1$ ha samma rikning som H. Linjen $3x + 4y = 1$ går genom punkten $(-1, 1)$. En enkel räkning visar att denna punkt avbildas av T på $(-1, -2)$. Således kan den sökta linjen skrivas på formen $9x - 5y = 1$, eftersom $9(-1) - 5(-2) = 1$.

Svar.
   (a) En ekvation för H är $9x - 5y = 0$.
   (b) En ekvation är $9x - 5y = 1$.

3. Om $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är två vektorer i rummet så får vi en linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^1$ genom

$$T(\vec{x}) = (\vec{u} \times \vec{x}) \cdot \vec{v},$$

för $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^3$.

(a) Låt

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och bestäm matrisen för T i detta fall. **(2 p)**

(b) Bestäm nollrum och bildrum för T om $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är två linjärt oberoende vektorer. **(2 p)**

Lösningsförslag. Vi får att

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2z \\ -z \\ y - 2x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 4z + y - 2x.$$

Från detta följer att T ges av matrisen $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

b) Vi kommer ihåg att $|(\vec{u} \times \vec{x}) \cdot \vec{v}|$ ger volymen av den parallellepiped som spänns upp av vektorerna $\vec{u}, \vec{x}$ och $\vec{v}$. Eftersom $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är linjärt oberoende, så spänner de upp ett plan $V = \text{span}(\vec{u}, \vec{v})$. Om $\vec{x}$ ligger i V så är volymen av parallellepipeden 0; om inte så är volymen positiv. Från detta följer att avbildningen T har nollrummet V och bildrummet $\mathbb{R}$.

Svar.

(a) Matris $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

(b) Bildrummet är hela $\mathbb{R}$, nollrummet är Span$(\vec{u}, \vec{v})$.

DEL B

4. Låt $\mathfrak{B} = (\vec{e}, \vec{f})$ vara en bas för ett delrum V i $\mathbb{R}^n$. Låt $\vec{u}$ och $\vec{v}$ vara två vektorer i $\mathbb{R}^n$ som uppfyller relationerna

$$\vec{u} + \vec{e} = \vec{v} \quad \text{och} \quad \vec{f} + 2\vec{u} = -3\vec{v}.$$

(a) Bestäm koordinatvektorn till $\vec{v}$ med avseende på basen $\mathfrak{B}$. **(2 p)**

(b) Visa att vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$ också utgör en bas för V. **(2 p)**

Lösningsförslag. a) Vi vill skriva vektorn $\vec{v}$ som en linjärkombination av $\vec{e}$ och $\vec{f}$. Eftersom vi vet att $\vec{v} = \vec{u} + \vec{e}$, kan vi sätta in detta i den andra relationen, vilket ger oss $\vec{f} + 2\vec{u} = -3(\vec{u} + \vec{e})$. Från detta får vi att $\vec{u} = -(3/5)\vec{e} - (1/5)\vec{f}$. Från den första relationen får vi då att $\vec{v} = (2/5)\vec{e} - (1/5)\vec{f}$. Således har vektorn $\vec{v}$ koordinaterna $\begin{bmatrix} 2/5 \\ -1/5 \end{bmatrix}$ i basen $\mathcal{B}$.

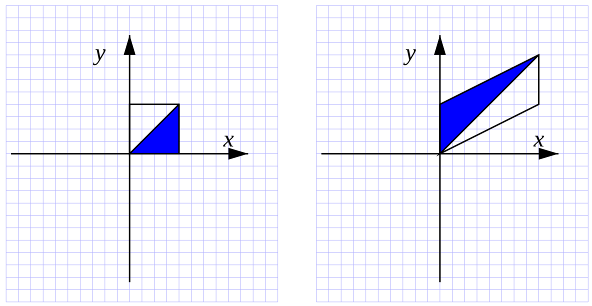
b) Eftersom rummet V är två-dimensionellt, behöver vi bara se att vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är linjärt oberoende. Om de var linjärt beroende måste $\vec{v} = t\vec{u}$ för något tal t. Detta betyder nu att $\vec{u} + \vec{e} = t\vec{u}$, och att $\vec{f} + 2\vec{u} = -3t\vec{u}$. Då ser vi att båda $\vec{e}$ och $\vec{f}$ är skalärmultippler av $\vec{u}$, och då kan inte $\vec{e}$ och $\vec{f}$ vara linjärt oberoende. Detta motsäger antagelsen om att $\vec{e}$ och $\vec{f}$ är en bas.

Svar.

(a) Koordinatmatrisen är $\begin{bmatrix} 2/5 \\ -1/5 \end{bmatrix}$.

(b) -

5. Den linjära avbildningen $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avbildar enhetskvadraten på en parallellogram enligt figuren nedan. Rita ut egenrummen och ange motsvarande egenvektorer. **(4 p)**



FIGUR 1. Enhetskvadraten och dess bild genom avbildningen T.

Lösningsförslag. Från figuren ser vi att vektorn $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ avbildas på vektorn $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, och vektorn $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ avbildas på $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$. Alltså vet vi att avbildningen har standardmatrisen

$$\begin{bmatrix}0 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}.$$

Vi bestämmer egenvärdena till matrisen ovan. Vi har att det karakteristiska polynomet $c(\lambda)$ är

$$\det\begin{bmatrix}\lambda & -2\\-1 & \lambda-1\end{bmatrix} = \lambda(\lambda-1)-2.$$

Nollställen till det karakteristiska polynomet $c(\lambda)$ är $\lambda = -1$ och $\lambda = 2$. Insättning av dessa värden ger med $\lambda = -1$, att egenrummet är nollrummet till matrisen

$$\begin{bmatrix}-1 & -2\\-1 & -2\end{bmatrix}.$$

En bas för detta egenrum är vektorn $\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$. På liknande sätt hittar vi att och en bas för egenrummet $\lambda = 2$ är vektorn $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.

Svar.

(a) Linjen $\begin{bmatrix}-2t\\t\end{bmatrix}$, tal $t \neq 0$ är egenvektorer med egenvärdet -1. Linjen $\begin{bmatrix}t\\t\end{bmatrix}$, tal $t \neq 0$ är egenvektorer med egenvärdet 2.

6. Låt V vara alla vektorer $\begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix}^T$ i $\mathbb{R}^4$ som uppfyller $x = y$ och $x + y = z + w$.
   (a) Förklara varför V är ett delrum av $\mathbb{R}^4$. **(1 p)**
   (b) Bestäm standardmatrisen för en linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ vars bildrum, $\mathrm{im}(T)$, är V. **(3 p)**

Lösningsförslag. a) V är ett delum av $\mathbb{R}^4$ eftersom det är lösningsrummet till det homogena systemet

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - z - w = 0 \end{cases} .$$

b) Vi betraktar det linjära systemet ovan. Om vi låter $x = t$ och $z = s$, får vi $y = t$ och $w = 2t - s$. Således har vi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

dvs delrummet V spänns upp av vektorerna $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Om den linjära avbildningen T ska ha V som bildrum, så måste V spännas upp av kolonnvektorerna i standardmatrisen för T. Alltså är, t ex,

$$[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ 0 \ 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

standardmatrisen till en linjär avbildning vars bildrum är V.

Svar.
   (a) -
   (b) -

DEL C

7. (a) Låt A vara en inverterbar och diagonaliserbar matris. Visa att alla potenser A^k också är diagonaliserbara, där k är ett godtyckligt heltal. **(2 p)**
   (b) Ge ett exempel på en 2×2-matris A som inte är diagonaliserbar, medan A^2 är diagonaliserbar. **(2 p)**

Lösningsförslag. a) Vi betraktar först $k \geq 1$. Eftersom A är diagonaliserbar så finns det en inverterbar matris S sådan att $S^{-1}AS = D$, där D är en diagonalmatris. Detta betyder att A kan skrivas $A = SDS^{-1}$. Från detta följer att $A^2 = (SDS^{-1})(SDS^{-1}) = SD^2S^{-1}$. På sama sätt fås att $A^k = SD^kS^{-1}$ för varje $k \geq 1$. Eftersom D^k är en diagonalmatris (diagonalmatris gånger diagonalmatris ger en diagonalmatris), så ser vi alltså att $S^{-1}A^kS = D^k$, dvs A^k är diagonaliserbar.

Om $k = 0$ är $A^k = I$, som är en diagonalmatris. Vi behandlar nu fallet $k \leq -1$. Eftersom vi vet att $S^{-1}AS = D$, och eftersom A är inverterbar så måste också D vara inverterbar. Vidare måste D^{-1} vara en diagonalmatris. Således har vi $D^{-1} = (S^{-1}AS)^{-1} = (AS)^{-1}(S^{-1})^{-1} = S^{-1}A^{-1}S$, vilket betyder att A^{-1} är diagonaliserbar. Genom att göra på precis samma sätt som ovan, fast för A^{-1}, följer nu att A^k är diagonaliserbar för varje $k \leq -1$.

b) Matrisen

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ger en rotation med vinkeln $\pi/2$. Nollställen till det karakteristiska polynomet $\det(\lambda I - R)$ är de komplexa talen $(\pm i)$, så matrisen R är ej diagonaliserbar. Men R^2 är rotation med vinkel π, dvs

$$R^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

som är en diagonalmatris (så speciellt är den diagonaliserbar).

Svar.

(a)

(b)

8. Delrummet W av $\mathbb{R}^4$ spänns upp av vektorerna

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Den linjära avbildningen $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ uppfyller att $T(\vec{v}) = \vec{v} + \vec{w}$ och $T(\vec{w}) = 2\vec{w}$, samt att nollrummet, $\ker(T)$, har dimension 2.

Bestäm egenvärdena till avbildningen T. **(4 p)**

Lösningsförslag. Eftersom vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är linjärt oberoende, så utgör de en bas för delrummet W. Således vet vi att W är två-dimensionellt. Eftersom kärnan ker(T) är två-dimensionell vet vi att 0 är ett egenvärde (med egenrummet ker(T)), och att multipliciteten är två. Vidare vet vi att $T(\vec{w}) = 2\vec{w}$. Eftersom $\vec{w} \neq \vec{0}$, så måste alltså 2 vara ett egenvärde till T. Vi ser också att

$$T(\vec{w} - \vec{v}) = T(\vec{w}) - T(\vec{v}) = 2\vec{w} - (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{w} - \vec{v},$$

så 1 är också ett egenvärde till T. Alltså, avbildningen T har egenvärdena $0, 1$ och 2, och detta är alla egenvärden.

Svar.

(a)

(b)

9. De tre punkterna $(6, 5, 5)$, $(5, 4, 1)$ och $(4, 3, 6)$ är tre av de åtta hörnen i en kub. Bestäm volymen av denna kub. **(4 p)**

Lösningsförslag. I en kub finns det tre möjliga avstånd mellan två hörn: sidlängd samt läng av diagonalen på vardera sida av kuben, samt längden av den långa diagonalen mellan två motsatta sidor. Vi beräknar avståndet mellan de tre givna punkterna. Låt $P = (6, 5, 5), Q = (5, 4, 1)$ och $R = (4, 3, 6)$. Då är

$$\left|\vec{QP}\right| = \left|\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix}\right| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \left|\vec{RP}\right| = \left|\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}\right| = 3$$

och

$$|RQ| = \left|\begin{bmatrix}1\\1\\5\end{bmatrix}\right| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

Eftersom det minsta av dessa tal, 3, måste vara kubens sidlängd (diagonalerna är alltid längre), följer alltså att kubens volym är $3^3 = 27$.

Svar.

(a)

(b)