KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2020.01.07

DEL A

1. (a) Låt $g(x) = \arcsin(\sqrt{x})$. Bestäm g:s definitionsmängd och bestäm $g'(x)$. **(2 p)**

   (b) Låt $f(x) = x + \arctan(x)$. Bestäm f:s definitionsmängd och värdemängd. Använd derivatan för att avgöra om funktionen f är inverterbar eller ej. **(4 p)**

Lösning. (a) Rotfunktionen är definierad för alla $x \geq 0$. Arcussinus är definierad på intervallet $[-1, 1]$. Alltså är g definierade för alla $x \geq 0$ sådana att $-1 \leq \sqrt{x} \leq 1$, det vill säga g är definierade på det slutna intervallet $[0, 1]$.

Eftersom $\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ger kedjeregeln att

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}.$$

(b) Funktionen $f(x) = x + \arctan x$ är definierad för alla $x \in \mathbb{R}$, eftersom bägge termerna x och $\arctan x$ är definierade för alla reella x. Eftersom $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ och f är kontinuerlig så måste f anta varje värde i intervallet $(-\infty, \infty)$. Således är värdemängden till f hela reella axeln.

Vidare är

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2} > 1 > 0$$

för alla x, så f är strikt växande på hela sin definitionsmängd $\mathbb{R}$, och därmed inverterbar.

SVAR: (a) Definitionsmängden till g är det slutna intervallet $[0, 1]$. Derivatan g' ges av att $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

(b) Definitions- och värdemängden till f är $\mathbb{R}$, och f är inverterbar.

$\square$

2. (a) Beräkna $\displaystyle\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx.$ **(3 p)**

   (b) Funktionen $f(x)$ uppfyller $f'(x) = x\ln(x)$ och $f(1) = 1$. Bestäm funktionen $f(x)$. **(3 p)**

Lösning. (a) Vi gör variabelsubstitutionen $u = \sqrt{x}$, och får $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$ och de nya integrationsgränserna $u\left(\pi^2\right) = \pi$ och $u\left(4\pi^2\right) = 2\pi$, vilket ger

$$\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_{\pi}^{2\pi} \sin u\,du = 2\left[-\cos u\right]_{\pi}^{2\pi} = -2(\cos 2\pi - \cos\pi) = -4$$

(b) Om $f'(x) = x\ln x$ så finner vi med hjälp av partiell integration att

$$f(x) = \int x\ln x\,dx = \left\{U = \ln x, dU = \frac{1}{x}\,dx \text{ och } dV = x, V = \frac{1}{2}x^2\right\}$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

Villkoret $f(1) = 1$ ger nu att

$$\frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{4} + C = 1 \iff C = \frac{5}{4}.$$

SVAR: (a) $\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = -4$
(b) $f(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{5}{4}$

□

DEL B

3. Låt $f(x) = xe^{-x},\ x \geq 1$.
   (a) Bestäm den punkt (x_0, y_0) på funktionsgrafen $y = f(x)$ som gör arean av triangeln med hörn i $(0,0), (x_0, 0)$ och (x_0, y_0) maximal. **(4 p)**
   (b) Finns det någon punkt (x_1, y_1) på funktionsgrafen $y = f(x)$ som gör arean av triangeln med hörn i $(0,0), (x_1, 0)$ och (x_1, y_1) minimal? **(2 p)**

Lösning. Givet en punkt (x, y) på funktionsgrafen, dvs $x \geq 1$ och $y = f(x)$, så ges arean av (den rätvinkliga) triangeln med hörn i $(0,0), (x,0)$ och $(x, f(x))$ av

$$A(x) = \frac{xf(x)}{2} = \frac{x^2e^{-x}}{2}.$$

a) Vi ska visa att funktionen $A(x)$ har ett maximum på intervallet $x \geq 1$. Derivering ger

$$A'(x) = xe^{-1} - \frac{x^2e^{-x}}{2} = \frac{xe^{-x}}{2}(2-x).$$

Detta ger följande teckentabell: $A'(x) > 0$ för $1 \leq x < 2$ och $A'(x) < 0$ för $x > 2$. Alltså, $A(x)$ är strängt växande på intervallet $[1, 2]$ och strängt avtagande på intervallet $[2, \infty)$. Vi kan därför dra slutsatsen att på intervallet $x \geq 1$ så har funktionen $A(x)$ största värde för $x = 2$. Den sökta punkten är således $(x_0, y_0) = (2, f(2)) = (2, 2e^{-2})$.

b) Eftersom $A(x) > 0$ för alla $x \geq 1$ och $\lim_{x\to\infty} A(x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2e^{-x}}{2} = 0$ så saknar funktionen $A(x)$ ett minsta värde på intervallet $[1, \infty)$. Alltså finns det ingen punkt (x_1, y_1) som minimerar arean.

Svar: a) $(x_0, y_0) = (2, f(2)) = (2, 2e^{-2})$ och b) Nej! $\square$

4. Låt $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.
   (a) Bestäm Taylorpolynomet av ordning 1 till $F(x)$ omkring $x = 0$. **(2 p)**
   (b) Bestäm ett närmevärde till $F(1/2)$ som avviker högst $1/8$ från det exakta värdet. **(4 p)**

Lösning. Med $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ ger Integral- och differentialkalkylens huvudsats att F är deriverbar med derivata

$$F'(x) = e^{-x^2}.$$

Derivering av F' ger med hjälp av kedjeregeln $F''(x) = -2xe^{-x^2}$. Alltså är

$$F(0) = \int_0^0 e^{-t^2}\,dt = 0 \text{ och } \quad F'(0) = e^{-0^2} = 1.$$

(a) Första ordningens Taylorpolynom P kring $x = 0$ till F ges alltså av

$$P(x) = F(0) + F'(0)x = x.$$

(b) Eftersom P är ett Taylorpolynom kring $x = 0$ till F, och eftersom $x = 1/2$ är "nära" $x = 0$, så har vi att $F(1/2) \approx P(1/2) = 1/2$. Frågan är om $1/2$ avviker med högst $1/8$ från $F(1/2)$, dvs om $|F(1/2) - 1/2| \leq 1/8$. Detta ska vi nu undersöka. (Eventuellt skulle vi kunna behöva använda ett Taylorpolynom av högre ordning för att få ett tillräckligt bra närmevärde.)

Enligt Taylors formel har vi

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + E(x) = x + E(x),$$

där

$$E(x) = \frac{F''(s)}{2}x^2 = \frac{-2se^{-s^2}}{2}x^2 = -se^{-s^2}x^2$$

för något s mellan 0 och x. Detta ger

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + E \quad \text{där } E = E\left(\frac{1}{2}\right) = -te^{-t^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{-te^{-t^2}}{4}$$

för något t mellan 0 och $1/2$. Eftersom $0 < t < 1/2$ är

$$\frac{te^{-t^2}}{4} < \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-t^2}}{4} < \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-0^2}}{4} = \frac{1}{8}.$$

Eftersom $t \geq 0$ är också $\frac{te^{-t^2}}{4} \geq 0$. Följaktligen är

$$|F(1/2) - 1/2| = |E| = \frac{te^{-t^2}}{4} < \frac{1}{8}.$$

Med andra ord, $1/2$ är ett närmevärde till $F(1/2)$ som avviker med högst $1/8$.

SVAR: (a) Första ordningens Taylorpolynom P kring $x = 0$ till F ges av $P(x) = x$.
(b)$F\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1/2$, där närmevärdet avviker med högst $1/8$ från det exakta värdet.

□

DEL C

5. (a) Visa att för alla heltal $n \geq 1$ gäller olikheten $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \ln(n)$. **(3 p)**

   (b) Beräkna gränsvärdet **(3 p)**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Lösning. (a) Rita en figur med grafen till $y = f(x) = 1/x$ över intervallet $[1, n+1]$. Över intervallet $[1, 2]$ ritar vi också in en rektangel med höjd $f(1) = 1$ och bas 1, över $[2, 3]$ ritar vi en rektangel med höjd $f(2) = 1/2$ och bas 1 och så vidare fram till sista intervallet $[n, n+1]$ där vi ritar en rektangel med bas 1 och höjd $f(n) = 1/n$.

Av figuren framgår att

- Den sammanlagda arean hos de ritade rektanglarna är lika med summan $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
- Det område O som begränsans av kurvan $y = 1/x$ och linjerna $y = 0$, $x = 1$ och $x = (n+1)$ ligger inom det område som täcks av rektanglarna, och arean av O är strikt mindre den sammanlagda arean av rektanglarna.

Av detta följer att

$$\int_{1}^{n+1} \frac{1}{x}\, dx < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Å andra sidan är

$$\int_{1}^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = [\ln x]_{1}^{n+1} = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1) > \ln n,$$

så alltså är

$$\ln n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(b) Från del (a) vet vi att $\ln n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Vi gör nu en ny konstruktion med rektanglar och kurvan $y = 1/x$. På intervallet $[1, 2]$ ritar en rektangel med höjd $f(2) = 1/2$ och bas 1, över $[2, 3]$ ritar vi en rektangel med höjd $f(3) = 1/3$ och bas 1 och så vidare fram till och med intervallet $[n-1, n]$ där vi ritar en rektangel med bas 1 och höjd $f(n) = 1/n$. Av den nya figuren framgår att

- Den sammanlagda arean hos de ritade rektanglarna är lika med summan $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$
- Det område som utgörs av rektanglarna ligger inom det område O som begränsans av kurvan $y = 1/x$ och linjerna $y = 0$, $x = 1$ och $x = n$, och arean av O är strikt större än den sammanlagda arean av rektanglarna.

Alltså är

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \int_{1}^{n} \frac{1}{x}\, dx = 1 + \ln n.$$

Vi har nu sammantaget att

$$\ln n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \ln n.$$

Division med $\ln n$ ger

$$1 < \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \frac{1}{\ln n}.$$

Eftersom de både ytterleden båda går mot 1 då $n \to \infty$ följer av instängningssatsen att även

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1$$

SVAR: (a) — (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1$

$\square$

6. Antag att funktionen $f(x)$ är definierad på hela reella linjen och att $(f(x))^2 \leq x^4 + x^6$ för alla x.
   (a) Avgör om f måste vara kontinuerlig i punkten $x = 0$. **(3 p)**
   (b) Avgör om f måste vara deriverbar i punkten $x = 0$. **(3 p)**
   Motivera dina svar med bevis eller motexempel.

Lösning. Eftersom $a^2 \leq b^2$ medför att $\sqrt{a^2} \leq \sqrt{b^2}$, och eftersom $\sqrt{a^2} = |a|$, så ger antagandet på f att vi har uppskattningen

$$|f(x)| \leq \sqrt{x^4 + x^6} = x^2\sqrt{1 + x^2} \text{ för alla } x.$$

Vi noterar speciellt att för $x = 0$ har vi $|f(0)| \leq 0$, dvs $|f(0)| = 0$. Alltså måste $f(0) = 0$.

Vi kommer att utnyttja att om $\lim_{x\to 0} |g(x)| = 0$ så gäller att $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Detta följer från instängningssatsen eftersom $-|g(x)| \leq g(x) \leq |g(x)|$.

(a) Funktionen f är kontinuerlig i punkten $x = 0$ om $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ (dvs gränsvärdet existerar och är lika med $f(0)$). Från uppskattningen ovan har $0 \leq |f(x)| \leq x^2\sqrt{1 + x^2}$. Eftersom $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sqrt{1 + x^2} = 0$ så följer det från instängningssatsen att $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = 0$. Således har vi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, dvs f är kontinuerlig i punkten $x = 0$.

(b) Funktionen f är deriverbar i punkten $x = 0$ om gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

existerar. Eftersom vi har $f(0) = 0$ får vi, om vi använder uppskattningen på $|f(x)|$, att

$$0 \leq \left|\frac{f(h) - f(0)}{h}\right| = \left|\frac{f(h)}{h}\right| \leq \frac{h^2\sqrt{1 + h^2}}{|h|} = |h|\sqrt{1 + h^2}.$$

Efersom $\lim\limits_{h\to 0} |h|\sqrt{1 + h^2} = 0$ följer det igen av instängningssatsen att

$$\lim_{h\to 0} \left|\frac{f(h) - f(0)}{h}\right| = 0.$$

Alltså har vi

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0$$

dvs f är deriverbar i punkten $x = 0$ (och derivatan är 0).

SVAR: (a) Ja!, (b) Ja! (Se argumenten för svaren ovan.)

□