TENTAMEN

Kursnummer:	HF0024 Matematik för basår II
Moment:	TENA
Program:	Tekniskt basår
Rättande lärare:	Staffan Linnaeus, Erik Melander & Jonas Stenholm
Examinator:	Niclas Hjelm 08-790 48 57
Datum: Tid:	2021-06-10 8:00-12:00
Hjälpmedel:	Basårsgodkänd räknare: • CASIO FX-82EX • CASIO FX-82ES PLUS • SHARP EL-W531TH-(färgbeteckning) • SHARP EL-W531TG-(färgbeteckning) • Texas Instruments TI-30XB MultiView • Texas Instruments TI-30XS MultiView Formler och Tabeller, Natur och Kultur: • ISBN 978-91-27-45720-1 • ISBN 978-91-27-42245-2 • ISBN 978-91-27-72279-8 Linjal, passare, gradskiva.
Omfattning och betygsgränser:	(see table below)

Tentamens-betyg	**F**	**Fx**	**E**	**D**	**C**	**B**	**A**
Del 1	0-6	7	8-12				
Del 2	Rättas ej.		0-2	3-5	6-8	9-11	12-14

Till samtliga uppgifter krävs fullständiga lösningar, om inte annat anges.
Lösningarna skall vara tydliga och lätta att följa.
Införda beteckningar skall definieras.
Uppställda samband skall motiveras.

Svaret ska framgå tydligt och vara förenklat så långt som möjligt. Svara med enhet och lämplig avrundning på tillämpade uppgifter. Svara exakt på övriga uppgifter, om inte annat anges.

Mätning i figur ger 0 poäng, om inte annat anges.
Lösningar ska baseras på generella algebraiska metoder. Lösning baserad på testning godtas inte.

Använd helst blyertspenna. Undvik röda pennor.
Ange ditt personnummer på varje papper.
Skriv bara på papprets ena sida och ha inte mer än en uppgift per papper.

Del 1

1. Lös ekvationen $2\sin(2x - 60°) = 1$. (2p)

2. Låt $f(x) = e^{2x}\cos 4x$. Beräkna $f'(\pi/2)$. (2p)

3. Bestäm samtliga primitiva funktioner till $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{3x}$. (2p)

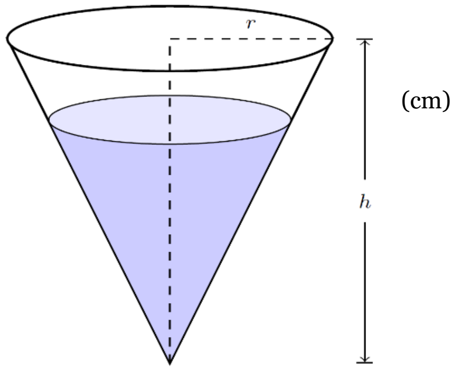
4. Beräkna $\int_1^2 (x^2 - 2^x)dx$. (2p)

5. Visa att
$$\frac{1 - \cos 2x}{\tan x} = \sin 2x\ .$$
(2p)

6. Beräkna arean av det ändliga området som begränsas av kurvorna $y = 2x^2 - 4x$ och $y = -x$. (2p)

Del 2

7. Ett konformat glas, där höjden är dubbelt så lång som radien, fylls med vatten med hastigheten 10,0 cm³/s. Hur snabbt ökar vattennivån i glaset då vattenhöjden är 7,0 cm?



(2p)

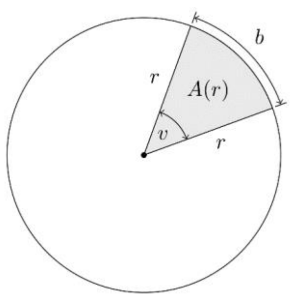
8. Lös ekvationen $\sqrt{3}\sin x = \sqrt{3} + \cos x$. (2p)

9. Bestäm de intervall där funktionen $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$ är växande respektive avtagande. (2p)

10. Derivera funktionen $f(x) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. (2p)

11. En cirkelsektor har en **given omkrets *a*** och en medelpunktsvinkel v $(0 < v < 2\pi)$. Bestäm medelpunktsvinkeln v så att sektorns area blir så stor som möjligt.

    Ledning: Studera arean som funktion av radien. (3p)



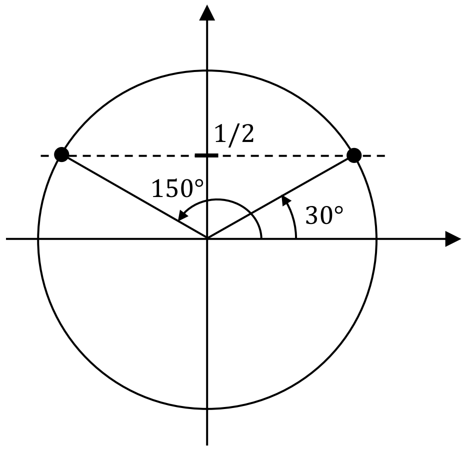
12. Låt $f(x) = \sin\left(\frac{x}{a}\right)\cos\left(\frac{x}{a}\right)$ där a är en konstant $(a \neq 0)$. Bestäm de värden på a som gör att

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx = 0.$$

(3p)

Lösningsförslag

1. $2\sin(2x - 60°) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(2x - 60°) = \frac{1}{2}$. Två fall:



i)
$$2x - 60° = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + n \cdot 360°$$
$$2x - 60° = 30° + n \cdot 360°$$
$$2x = 90° + n \cdot 360°$$
$$x = 45° + n \cdot 180°$$

ii)
$$2x - 60° = 180° - 30° + n \cdot 360°$$
$$2x - 60° = 150° + n \cdot 360°$$
$$2x = 210° + n \cdot 360°$$
$$x = 105° + n \cdot 180°$$

Svar: $x = 45° + n \cdot 180°$ eller $x = 105° + n \cdot 180°$, n heltal.

2. Derivatan av $f(x) = e^{2x}\cos 4x$ beräknas med produktregeln och kedjeregeln:

$$f'(x) = 2e^{2x}\cos 4x + e^{2x}(-\sin 4x)\cdot 4 = 2e^{2x}(\cos 4x - 2\sin 4x)$$

Den sökta derivatan blir

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2e^{\pi}(\cos 2\pi - 2\sin 2\pi) = 2e^{\pi}$$

Svar: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2e^{\pi}$.

3. Skriv om funktionen:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{3x} = \frac{\sqrt{x}}{3x} - \frac{1}{3x} = \frac{1}{3\sqrt{x}} - \frac{1}{3x} = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}$$

Alla primitiva funktioner ges nu av

$$F(x) = \int f(x)dx = \frac{1}{3}\frac{x^{1/2}}{1/2} - \frac{1}{3}\ln|x| + C = \frac{2}{3}\sqrt{x} - \frac{1}{3}\ln|x| + C$$

där C är en reell konstant.

Svar: Alla primitiva funktioner $F(x)$ ges av $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x} - \frac{1}{3}\ln|x| + C$ där C är en reell konstant.

4. Integralen beräknas med primitiv funktion:

$$\int_1^2 (x^2 - 2^x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2^x}{\ln 2}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{\ln 2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{\ln 2}\right) = \frac{7}{3} - \frac{2}{\ln 2}.$$

Svar: Integralens värde är $\frac{7}{3} - \frac{2}{\ln 2}$.

5. Det ska visas att $\frac{1-\cos 2x}{\tan x} = \sin 2x$. Skriv om vänsterledet:

$$\mathrm{VL} = \frac{1-\cos 2x}{\tan x} = \frac{1-(1-2\sin^2 x)}{\tan x} = \frac{2\sin^2 x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = 2\sin^2 x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 2\sin x \cos x = \sin 2x$$
$$= \mathrm{HL}\,.$$

Alltså är $\mathrm{VL} = \mathrm{HL}$ i det givna påståendet, VSB.

6. Börja med att ta fram skärningspunkter för graferna $y = 2x^2 - 4x$ och $y = -x$:

$$2x^2 - 4x = -x$$
$$2x^2 - 3x = 0$$
$$x(2x-3) = 0$$
$$x = 0 \text{ eller } x = 3/2$$

Undersök vilken kurva som ligger överst genom att välja ett x-värde mellan 0 och $3/2$, t.ex. $x = 1$. Med detta x-värde är

$$2x^2 - 4x = -2$$

och

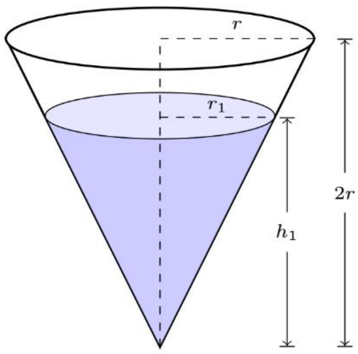
$$-x = -1$$

vilket innebär att $-x > 2x^2 - 4x$ på intervallet $0 < x < 3/2$, dvs $y = -x$ är den övre kurvan i det sökta området. Områdets area fås ur integralen

$$\int_0^{3/2} (-x-(2x^2-4x))dx = \int_0^{3/2} (3x-2x^2)dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^{3/2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{3^2}{2^2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{3^3}{2^3} - (0-0) = \frac{9}{8}.$$

Svar: Områdets area är $\frac{9}{8}$ a.e.

7. Volymen V av en rak cirkulär kon med basradie r och höjd h ges av $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$. Antag att vattenhöjden i konen är h_1 cm vid en given tidpunkt t s. Se figur. Likformighet ger att



$$\frac{r_1}{h_1} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2} \iff r_1 = \frac{h_1}{2}$$

Vattnets volym i cm3 kan därmed skrivas

$$V = \frac{\pi \frac{h_1^2}{4} h}{3} = \frac{\pi}{12} h_1^3$$

Vi studerar därför funktionen $V(h) = \frac{\pi}{12} h^3$.

Kedjeregeln ger att

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

Med $\frac{dV}{dt} = 10$ cm³/s får vi

$$10 = \frac{\pi}{12} \cdot 3h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$10 = \frac{\pi h^2}{4} \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4 \cdot 10}{\pi h^2}$$

När $h = 7$ cm förändras höjden med

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4 \cdot 10}{\pi \cdot 7^2} = \frac{40}{49\pi} \text{ cm/s} \approx 0{,}26 \text{ cm/s}$$

<u>Svar:</u> Vattennivån ökar med ca 0,26 cm/s när vattnet nått höjden 7,0 cm.

8. Skriv om ekvationen:

$$\sqrt{3} \sin x = \sqrt{3} + \cos x \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3} \sin x - \cos x = \sqrt{3}$$

Vänsterledet i den sista ekvationen skrivs om med hjälpvinkelsatsen:

$$\sqrt{3} \sin x - \cos x = A \sin(x - v)$$

där $\qquad A = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$

och $\qquad \tan v = \frac{1}{\sqrt{3}}$, så $v = \frac{\pi}{6}$ $\quad$ (v i första kvadranten).

Vi kan nu skriva om vänsterledet på följande sätt

$$\sqrt{3} \sin x - \cos x = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

och den givna ekvationen blir därmed

$$2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Två fall:

i) $\qquad x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$, n heltal.

ii) $\qquad x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$

$$x = \pi + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi\ ,\ \ n \text{ heltal.}$$

Svar: $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ eller $x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$, n heltal.

9. För den givna funktionen $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$ gäller att definitionsmängden är $x \geq 0$. Intervall där $f(x)$ är växande eller avtagande kan fås genom att studera tecknet för derivatan.

   Funktionen deriveras med hjälp av kvotregeln:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x^2+1) - \sqrt{x} \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{\frac{x^2+1}{2\sqrt{x}} - \frac{4x^2}{2\sqrt{x}}}{(x^2+1)^2} = \frac{1-3x^2}{2\sqrt{x}(x^2+1)} = \frac{3\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + x\right)}{2\sqrt{x}(x^2+1)}$$

   Derivatans enda nollställe för $x > 0$ är $x = 1/\sqrt{3}$, vilket inträffar då faktorn $\frac{1}{\sqrt{3}} - x = 0$. Faktorn $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - x\right)$ är positiv för $x < 1/\sqrt{3}$ och negativ för $x > 1/\sqrt{3}$. Vi får följande teckenschema:

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
$f'(x)$	ej def.	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗		↘

   Teckenschemat ger att $f(x)$ är växande för $0 \leq x \leq 1/\sqrt{3}$ och avtagande för $x \geq 1/\sqrt{3}$.

   Svar: $f(x)$ är växande för $0 \leq x \leq 1/\sqrt{3}$ och avtagande för $x \geq 1/\sqrt{3}$.

10. Vi kan derivera uttrycket med kedjeregeln och kvotregeln:

$$\mathrm{D} \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \underbrace{\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}}_{\text{yttre derivatan}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{1-x^2} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)}{1-x^2}}_{\text{inre derivatan}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1-x^2+x^2}{x(1-x^2)} = \frac{1}{x-x^3}.$$

   Alternativ lösning

   Definitionsmängden för det givna uttrycket är $0 < x < 1$ och vi kan därför skriva om uttrycket med logaritmlagar före derivering:

$$\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \ln x - \ln\sqrt{1-x^2} = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$$

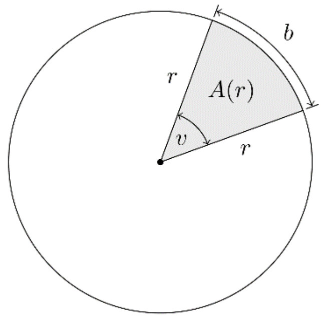
   Derivatan blir nu något enklare att beräkna:

$$\mathrm{D}\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \mathrm{D}\left(\ln x - \frac{1}{2}\ln(1-x^2)\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot(-2x)$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{x}{1-x^2} = \frac{1-x^2+x^2}{x(1-x^2)} = \frac{1}{x-x^3}.$$

Svar: $f'(x) = \frac{1}{x-x^3}$.

11. För den givna omkretsen a gäller, med beteckningar i figuren, att



$$a = 2r + b \iff b = a - 2r.$$

För medelpunktsvinkeln v radianer gäller att

$$b = vr \iff v = \frac{b}{r}.$$

Villkoret $0 < v < 2\pi$ ger oss nu möjliga värden på r:

$$0 < \frac{b}{r} < 2\pi$$

$$0 < \frac{a-2r}{r} < 2\pi$$

$$2r < a < 2\pi r + 2r$$

Dubbelolikheten ger att $r < \frac{a}{2}$ och $r > \frac{a}{2\pi + 2}$. Definitionsmängden är alltså

$$\frac{a}{2\pi+2} < r < \frac{a}{2}.$$

Arean $A(r)$ av cirkelsektorn ges av

$$A(r) = \frac{br}{2} = \frac{(a-2r)r}{2} = \frac{ar-2r^2}{2}$$

vars derivata är

$$A'(r) = \frac{a-4r}{2} = 2\left(\frac{a}{4} - r\right).$$

Teckenschema:

r	$\frac{a}{2\pi+2}$		$\frac{a}{4}$		$\frac{a}{2}$
$A'(r)$	ej def.	$+$	0	$-$	ej def.
$A(r)$	ej def.	$\nearrow$	max	$\searrow$	ej def.

Teckenschemat ger att största värdet för $A(r)$ antas i $r = \frac{a}{4}$. För denna radie är medelpunktsvinkeln

$$v = \frac{b}{r} = \frac{a-2r}{r} = \frac{a - \frac{a}{2}}{\frac{a}{4}} = \frac{a}{2}\cdot\frac{4}{a} = 2 \text{ rad}.$$

Svar: Sektorns area är maximal då medelpunktsvinkeln är 2 radianer.

12. Skriv om integranden med formeln för sinus för dubbla vinkeln och integrera:

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin\left(\frac{x}{a}\right)\cos\left(\frac{x}{a}\right)dx = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2}\cdot 2\sin\left(\frac{x}{a}\right)\cos\left(\frac{x}{a}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi} \sin\left(\frac{2x}{a}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos\left(\frac{2x}{a}\right)}{\frac{2}{a}}\right]_{\pi}^{2\pi} = -\frac{a}{4}\left[\cos\left(\frac{2x}{a}\right)\right]_{\pi}^{2\pi} = -\frac{a}{4}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{a}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{a}\right)\right).$$

Eftersom $a \neq 0$ så gäller att $\int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx = 0$ endast då $\cos\left(\frac{4\pi}{a}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{a}\right) = 0$:

$$\cos\left(\frac{4\pi}{a}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{a}\right) = 0$$
$$\cos\left(\frac{4\pi}{a}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{a}\right)$$

Om $\cos u = \cos v$ så gäller att $u = \pm v + n\cdot 2\pi$. Ekvationen $\cos\left(\frac{4\pi}{a}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{a}\right)$ ger då att

$$\frac{4\pi}{a} = \pm\frac{2\pi}{a} + n\cdot 2\pi$$
$$\frac{4}{a} = \pm\frac{2}{a} + 2n \qquad (n \text{ heltal}, n \neq 0)$$

För heltalet n gäller att $n \neq 0$ eftersom $\frac{4}{a} \neq \pm\frac{2}{a}$ för alla värden på a. Två fall:

i) $\frac{4}{a} = \frac{2}{a} + 2n \iff \frac{2}{a} = 2n \iff a = \frac{1}{n}$

ii) $\frac{4}{a} = -\frac{2}{a} + 2n \iff \frac{6}{a} = 2n \iff a = \frac{3}{n}$

Lösningarna $a = \frac{1}{n}$ och $a = \frac{3}{n}$ kan sammanfattas i $a = \frac{3}{n}$ eftersom alla tal av typen $a = \frac{1}{n}$ kan skrivas på formen $\frac{3}{n}$:

$$\frac{1}{n} = \frac{3}{3n} = \frac{3}{m}$$

för nollskilda heltal n och m.

<u>Svar:</u> $a = \frac{3}{n}$ för heltal $n \neq 0$.

Rättningsmall

1.	Varje saknad lösningsfamilj	-1p
	Felaktig period/period saknas	-1p
	Formella fel, t ex blandar ihop vinklar och kvoter	-1p
2.	Deriveringsfel	-2p
3.	Integrationsfel	-2p
	Integrationskonstant saknas	-1p
	Beloppstecken saknas på logaritmtermen	-1p
4.	Integrationsfel	-2p
5.	Utgår från det som ska bevisas	-1p
	Förändrar storleken på vänster- och högerled	-2p
6.	Svarar $A = -\frac{9}{8}$.	-2p
	Får integralens värde till $A = -\frac{9}{8}$, byter tecken utan godtagbar motivering	-1p
	Får integralens värde till $A = -\frac{9}{8}$, byter tecken med godtagbar motivering	-0p
7.	Deriveringsfel	-2p
	Enhet saknas/fel enhet	-1p
	Påstår att $r = \frac{1}{2}h$ för vattenmängden utan likformhetsresonemang	-0p
8.	Felaktig användning av hjälpvinkelsats	-2p
9.	Svarar med strikt olikhet i ett eller flera fall	-0p
10.	Deriveringsfel	-2p
	Korrekt $f'(x)$ men ofullständigt förenklat, t.ex. svarar med två delbråk	-1p
11.	Felaktig definitionsmängd /analyserar ej definitionsmängd	-1p
	Deriveringsfel	-2p
	Påvisar ej maximum	-1p
12.	Korrekt integral	+1p
	Svaret inte på enklaste form	-1p