KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen med lösningsförslag
fredag, 17 april 2020

1. Låt A vara en inverterbar (3×3)-matris och låt $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm den reducerade trappstegformen till A. **(2 p)**
(b) Beräkna $\det(AB^3A^{-1}B^{-1})$. **(4 p)**

Lösningsförslag. a) Då matrisen A är inverterbar har vi att den reducerade trappstegsformen är (3×3)-identitetsmatrisen.
b) Determinantfunktionen respekterar matrisprodukt, och vi har att $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$. Detta ger att den sökta determinanten

$$\det(AB^3A^{-1}B^{-1}) = \det(A)(\det(B))^3 \det(A^{-1}) \det(B^{-1}) = (\det(B))^2.$$

Vi bestämmer determinanten till B vid utveckling längs den tredje raden. Detta ger att

$$\det(B) = -1 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + 5 \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Därmed har vi att $\det(B) = 3 + 5(4 - 6) = -7$. Det sökta svaret är därmed $(\det(B))^2 = 49$.

2. Linjerna L_1 och L_2 i $\mathbf{R}^3$ ges av

$$L_1 : \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{reella tal} \quad t,$$

$$L_2 : \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{reella tal} \quad s.$$

(a) Bestäm skärningen av L_1 och L_2. **(2 p)**
(b) Bestäm vinkeln mellan L_1 och L_2. **(2 p)**
(c) Ett plan går genom origo och är ortogonalt mot linjen L_1. Bestäm skalär ekvation för detta plan.
(2 p)

Lösningsförslag.

(a)

$$\begin{aligned}
&P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in L_1 \cap L_2 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-2t \\ 2s-t \\ -s-t \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} s = -2/3 \\ t = -1/3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow P = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(b) En riktningsvektor för L_i, $i = 1, 2$ är $\vec{v}_i$ enligt nedan

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Om vinkeln mellan L_1 och L_2 är v gäller $|\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2| = ||\vec{v}_1|| \cdot ||\vec{v}_2|| \cos v$, (absolutbelopp eftersom det är vinkeln mellan *linjerna* som söks) så

$$\cos v = \frac{|\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2|}{||\vec{v}_1|| \cdot ||\vec{v}_2||} = \frac{1}{2}.$$

Eftersom $0 \le v \le \pi/2$ så är $v = \pi/3$.

(c) Kalla planet för Π. Då är $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ortogonal mot Π. Vi får

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Pi \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \circ \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 2x + y + z = 0.$$

3. Låt S i $\mathbb{R}^5$ vara det linjära höljet

$$S = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

och låt vidare

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm dimensionen av det ortogonala komplementet $S^{\perp}$. **(2 p)**
(b) Avgör om $\vec{x}$ är med i $S^{\perp}$. **(2 p)**
(c) Avgör om $\vec{x}$ är med i S. **(2 p)**

Lösningsförslag.

S är definierat som det linjära höljet av tre vektorer. Vi undersöker först om $\vec{x}$ kan skrivas som en linjärkombination av dessa tre vektorer. Eftersom

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

så ser vi att så inte är fallet. De tre vektorerna tillsammans med vektorn $\vec{x}$ utgör tydligen en linjärt oberoende mängd. Det följer också av detta att de tre vektorerna själva utgör en linjärt oberoende mängd och alltså är en bas för S. Vi har alltså visat att $\vec{x}$ inte ligger i S och att dimensionen av S är 3. Eftersom dim S + dim $S^{\perp} = 5$ så måste nu dim $S^{\perp} = 2$. Det gäller att $\vec{x}$ ligger i $S^{\perp}$ om och endast om $\vec{x}$ är ortogonal mot någon bas för S. Eftersom de tre vektorerna är en bas kan vi använda den och vi ser $\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = 1 \neq 0$ varför $\vec{x}$ inte ligger i $S^{\perp}$.

4. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Visa att matrisen A inte är diagonaliserbar. **(3 p)**

(b) Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$. Beräkna (och förenkla) $A^{83}\vec{v}$. (*Tips: skriv $\vec{v}$ som linjär kombination av egenvektorer till A*). **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) Först bestäms alla egenvärden till A. Den karakteristiska ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$ är

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & 2 & 3 \\ 0 & (1-\lambda) & 1 \\ 0 & 0 & (-1-\lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

dvs $(1-\lambda)^2(-1-\lambda) = 0$ och har lösningarna $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_{2,3} = 1$ (dubbelrot). För att bestämma motsvarande egenrum löser vi $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$.

För $\lambda = 1$ har vi

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 3z &= 0 \\ z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

så

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

och

$$E_{(\lambda=1)} = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

Eftersom den geometriska multipliciteten är lägre än den algebraiska multipliciteten för egenvärdet $\lambda_{2,3}$ så är A ej diagonaliserbar.

(b) Om vi kan uttrycka $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ som en linjärkombination av egenvektorer då kan vi beräkna $A^{83}\vec{v}$ på ett enkelt sätt (trots att matrisen inte är diagonaliserbar).

Egenrummet till $\lambda_1 = -1$ bestäms. Vi har

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 3z &= 0 \\ 2y + z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

så

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

och

$$E_{(\lambda=-1)} = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right).$$

Vi väljer två oberoende egenvektorer, t ex $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Från $\vec{v} = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2$ får vi systemet $\begin{cases} x + 2y &= -1 \\ y &= -2 \\ -2y &= 4 \end{cases}$ som har lösning $x = 3$, $y = -2$ och därmed är $\vec{v} = 3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$. Därför är

$$A^{83}\vec{v} = 3A^{83}\vec{v}_1 - 2A^{83}\vec{v}_2 = 3{\lambda_1}^{83}\vec{v}_1 - 2{\lambda_2}^{83}\vec{v}_2$$

$$= 3 \cdot 1^{83} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot (-1)^{83} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

5. Låt A vara en symmetrisk (2×2)-matris. Utan att använda Spektralsatsen, visa

(a) att det karakteristiska polynomet till A enbart har reella nollställen. **(3 p)**

(b) att det finns en bas för $\mathbf{R}^2$ bestående av egenvektorer till A. **(3 p)**

Lösningsförslag. a) En godtycklig symmetrisk 2×2-matris A kan skrivas $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ för några tal a, b, c. Karaktäristiska ekvationen blir $(\lambda - a)(\lambda - c) - b^2 = 0$ vilket är ekvivalent med $\lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0$. Vi löser denna och har att

$$(\lambda - \frac{(a+c)}{2})^2 = b^2 - ac + \frac{(a^2 + 2ac + c^2)}{4}.$$

Högerled är

$$b^2 + \frac{1}{4}(a^2 - 2ac + c^2) = b^2 + \frac{1}{4}(a - c)^2,$$

och är med andra ord ett positivt tal. Det följer nu att nollställerna till det karakteristiska polynomet är reella. Dessa är

$$\frac{1}{2}(a + c) \pm \frac{1}{4}\sqrt{4b^2 + (a - c)^2}.$$

b) Från uppgiften ovan har vi att det karakteristiska polynomet har reella lösningar. Speciellt har vi att om λ_1 är ett egenvärde så finns det åtminstone en egenvektor $\vec{v}$. Vi antar att $\vec{v}$ har längd 1, och låter $\beta = \{\vec{v}, \vec{w}\}$ vara en ortonormal bas för $\mathbb{R}^2$. Vi har därmed att matrisen $Q = \begin{pmatrix} \vec{v} & \vec{w} \end{pmatrix}$ förmedlar basbytet till standardbasen. Denna matris är ortogonal. Vi tänker oss att den givna symmetriska matrisen A är standardmatrisen till en avbildning. Denna avbildning representeras i basen β med matrisen $B = Q^T AQ$, och är symmetrisk. Då vektorn $\vec{v}$ var en egenvektor har vi att den första kolonnen i B är $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Då matrisen B är symmetrisk följer det nu att den andra kolonnen i B är på formen $\begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$, för något tal λ_2. Matrisen B är i vilket fall som helst en diagonal matris, och vi har att basen β består av egenvektorer.

6. Låt $P\colon V \to V$ vara en linjär avbildning sådan att $P \circ P = P$. En sådan avbildning kallas en projektion.

(a) Visa att för varje vektor $\vec{v}$ i V så ligger $\vec{v} - P(\vec{v})$ i nollrummet $\ker(P)$. **(2 p)**

(b) Visa att varje vektor $\vec{v}$ i V kan skrivas som $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, där $\vec{u}$ ligger i $\ker(P)$ och $\vec{w}$ ligger i bildrummet $\mathrm{Im(P)}$. **(2 p)**

(c) Visa att uppdelningen i b) är unik, det vill säga visa att om $\vec{v} = \vec{u_1} + \vec{w_1} = \vec{u_2} + \vec{w_2}$ där $\vec{u_1},\ \vec{u_2}$ ligger i $\ker(P)$ och $\vec{w_1},\ \vec{w_2}$ ligger i $\mathrm{Im(P)}$, så är $\vec{u_1} = \vec{u_2}$ och $\vec{v_1} = \vec{v_2}$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) $P(\vec{v} - P(\vec{v})) = P(\vec{v}) - P(P(\vec{v})) = P(\vec{v}) - P \circ P(\vec{v}) = P(\vec{v}) - P(\vec{v}) = 0$, så $\vec{v} - P(\vec{v}) \in \ker P$.

(b) $\vec{v} = (\vec{v} - P(\vec{v})) + P(\vec{v})$, där $\vec{v} - P(\vec{v}) \in \ker P$ enligt a) och $P(\vec{v}) \in \mathrm{ImP}$ enligt definition.

(c) Antag att $\vec{v} = \vec{u_1} + \vec{w_1} = \vec{u_2} + \vec{w_2}$ med $\vec{u}_i,\ \vec{w}_i,\ i = 1, 2$ enligt uppgiftslydelsen. Då är $\vec{w}_i = P(\vec{z}_i)$ för några vectorer $\vec{z}_1,\ \vec{z}_2$. Vi får $P(\vec{v}) = P(\vec{u_i} + \vec{w}_i) = P(\vec{u_i} + P(\vec{z}_i)) = P(\vec{u_i}) + P(P(\vec{z}_i)) = 0 + P(\vec{z}_i) = \vec{w}_i$, eftersom $\vec{u_i} \in \ker P$ och $P \circ P = P$. Det följer att $\vec{w}_1 = \vec{w}_2$. Därmed är även $\vec{u_1} = \vec{u_2}$.