SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
Tisdagen 25 oktober

Skrivtid: 8:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Roy Skjelnes

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del A på tentamen utgörs av de första tre uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng, upp till som mest 12 poäng. Poängsumman på del A kan alltså bli högst 12 poäng, bonuspoäng medräknade. Bonuspoängen beräknas automatiskt och antalet bonuspoäng framgår av din resultatsida.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de sista tre uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

Del A

1. (a) Bestäm Taylor polynomet av grad 2 till $\ln(1+x)$ omkring $x = 0$. **(2 p)**
   (b) Bestäm ett närmevärde för $\ln(6/5)$ som inte avviker mer än $3/1000$. **(2 p)**

2. (a) Bestäm alla primitiva funktioner till $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$. (Tips: Substituera $u = \sqrt{x}$.) **(2 p)**
   (b) Bestäm gränsvärdet **(2 p)**

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x) - 2 + x^2}{x^4}.$$

3. Låt L vara tangentlinjen i punkten $(1, e)$ till kurvan $y = xe^{x^2}$. Bestäm skärningspunkten mellan L och x-axeln. **(4 p)**

DEL B

4. Vi betraktar en LRC-krets med en spänningskälla, en spole med induktansen 1 henry, ett motstånd med resistansen 15 ohm och en kondensator med kapacitansen $1/50$ farad. Strömmen i genom kretsen uppfyller differentialekvationen
$$i''(t) + 15i'(t) + 50i(t) = 0.$$
Lös differentialekvationen och bestäm strömmen vid tiden t om $i(0) = 0$ ampere och $i'(0) = 1$ ampere/sekund. **(4 p)**

5. (a) Skissa kurvan $y = \cos x - 2x$. **(2 p)**
   (b) Använd lösningen av uppgift (a) för att visa att ekvationen $\cos x = 2x$ har exakt en lösning. **(1 p)**
   (c) Ange ett intervall av längd högst $\frac{1}{2}$ som innehåller lösningen av ekvationen $\cos x = 2x$. (Längden av ett intervall $[a, b]$ är $|b - a|$.) **(1 p)**

6. Vi betraktar funktionen
$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
definerad på intervallet $-1 \leq x \leq 1$.
   (a) Skriv upp integralen som ger längden av funktionsgrafen $y = f(x)$. **(2 p)**
   (b) Beräkna längden av denna kurva. **(2 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. (a) Definiera vad det betyder för en funktion f att vara kontinuerlig i a. **(1 p)**
   (b) Definiera vad det betyder för en funktion f att vara deriverbar i a. **(1 p)**
   (c) Bestäm talen a och b så att funktionen f som ges av

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ ax + b & x > 1 \end{cases}$$

   blir både kontinuerlig och deriverbar i punkten $x = 1$. **(2 p)**

8. Låt funktionen f vara definierad genom

$$f(t) = \begin{cases} \cos^2 t, & 0 \leq t \leq 1 \\ t^2 + 1 & t > 1 \end{cases}$$

   Beräkna för varje tal $x \geq 0$ integralen **(4 p)**

$$\int_0^x f(t)\, dt.$$

9. Beräkna gränsvärdet **(4 p)**

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n+k}{n^4} \right)^{1/3}$$