SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
Tisdagen den 22 oktober 2019

Skrivtid: 8.00-11.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Kristian Bjerklöv

Tentamen består av tre delar; A, B och C, som vardera ger maximalt 12 poäng. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng, upp till som mest 12 poäng. Poängsumman på del A kan alltså bli högst 12 poäng, bonuspoäng medräknade. Bonuspoängen beräknas automatiskt och antalet bonuspoäng framgår av din resultatsida.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

Var god vänd!

DEL A

1. Beräkna **(3+3 p)**

$$\int_{-1}^{1} x^2 \ln(2+x^3)dx \quad \text{och} \quad \int \frac{3}{2+8x^2}dx.$$

2. Låt $f(x) = xe^{-x^2}$ vara definierad för $x > 0$.
   (a) Bestäm alla lokala extrempunkter till f och avgör deras karaktär (max/min). **(2 p)**
   (b) Bestäm de intervall på vilka f är strängt växande respektive strängt avtagande. **(2 p)**
   (c) Antar f något största respektive minsta värde? Bestäm i förekommande fall dessa. **(2 p)**

DEL B

3. Låt $f(x) = \sqrt{x}$ och låt $P(x)$ vara Taylorpolynomet av grad 2 till f kring $x = 1$.
   (a) Bestäm polynomet $P(x)$. **(2 p)**
   (b) Enligt Taylors formel kan resttermen $E(x) = f(x) - P(x)$ skrivas som ett uttryck som innehåller f:s tredjederivata. Vilket är uttrycket? **(1 p)**
   (c) Är det sant att $|\sqrt{3/2} - P(3/2)| < 1/100$? **(3 p)**

4. (a) Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{3}{x^2+3x}dx$. **(4 p)**
   (b) Avgör om serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k^2+3k}$ är konvergent eller divergent. **(2 p)**

DEL C

5. (a) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{n} + \frac{2}{n}\sqrt{\frac{2k}{n}}\right)$. **(3 p)**
   (b) Beräkna gränsvärdet **(3 p)**

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} t \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt.$$

6. (a) Antag att funktionen $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $[0,1]$ och att $0 \le f(0) \le 1$ och $0 \le f(1) \le 1$. Visa att det finns (minst) en punkt p i intervallet $[0,1]$ sådan att $f(p) = p$. **(3 p)**
   (b) Antag att funktionen $g(x)$ är deriverbar på hela reella axeln och att $|g'(x)| \le 1/2$ för alla x. Visa att det finns (minst) en punkt p sådan att $g(p) = p$. **(3 p)**