SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
Fredagen 8 mars, 2019

Skrivtid: 8.00-11.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Roy Skjelnes

Tentamen består av tre delar; A, B och C, som vardera ger maximalt 12 poäng. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng, upp till som mest 12 poäng. Poängsumman på del A kan alltså bli högst 12 poäng, bonuspoäng medräknade. Bonuspoängen beräknas automatiskt och antalet bonuspoäng framgår av din resultatsida.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Denna uppgift behandlar differentialekvationen $y'' - y' - 2y = 12e^{-t}$.
   (a) Bestäm koefficienten A sådan att $y_P(t) = Ate^{-t}$ blir en lösning. **(2 p)**
   (b) Bestäm samtliga lösningar till differentialekvationen. **(2 p)**
   (c) Bestäm lösningarna $y(t)$ till differentialekvationen som uppfyller de bägge villkoren $y(0) = 2$ och $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$. **(2 p)**

2. Bestäm alla primitiva funktioner till den rationella funktionen **(6 p)**

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1}.$$

DEL B

3. Funktionen $g(x) = \ln(1 + \sin x)$ är definerad på det öppna intervallet $I = (-\pi/2, 3\pi/2)$.
   (a) Skissa funktionsgrafen till funktionen g, och markera alla extremvärden. **(3 p)**
   (b) Ge ett exempel på en kontinuerlig funktion $f(x)$, definierad på I, som inte har extremvärden. **(2 p)**

4. Funktionen $g(x) = \ln(1 + \sin x)$ är definerad på det öppna intervallet $I = (-\pi/2, 3\pi/2)$.
   (a) Bestäm andragradspolynomet $P(x)$ som bäst approximerar funktionen g omkring punkten $x = 0$. **(2 p)**
   (b) Låt t vara ett tal sådant att $0 \leq t \leq \pi$. Visa att $|\ g(t) - P(t)\ | \leq \frac{1}{6}t^3$. **(2 p)**
   (c) Bestäm ett närmevärde till integralen $\int_0^{1/2} g(x)\, dx$ som avviker med mindre än $1/300$ från det exakta värdet. **(3 p)**

DEL C

5. (a) Visa att för varje heltal $n \geq 1$ har vi att **(6 p)**

$$\int_{\cos(1/n)}^{1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{\sin^2(1/n)}{\cos^2(1)}.$$

   (b) Visa att serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\ln(\cos(1/n))$$

   är konvergent. **(6 p)**