KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
fredag, 17 april 2020

Skrivtid: 08:00-11:00
Tillåtna hjälpmedel: inga.
Allt plagiat som vi hittar i inlämnade lösningar kommer att rapporteras.

Examinator: Danijela Damjanović

Tentamen består av sex uppgifter som vardera ger maximalt sex poäng.

Del A på tentamen utgörs av de två första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng.

De två följande uppgifterna utgör del B och de två sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

Instruktioner

- **För poäng på en uppgift krävs att** lösningen är väl presenterad och lätt att följa.
- Det innebär att lösningarna ska vara prydligt skrivna med en handstil som är lätt att läsa.
- Det innebär också att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Alla steg i alla beräkningar ska finnas redovisade och vara lätta att följa.
- **Lösningar och svar utan korrekta, utförliga och tydliga motiveringar ger inga poäng.**

DEL A

1. Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm egenvärdena till A. **(3 p)**

(b) Bestäm en ortogonal bas till $\mathbf{R}^3$ bestående av egenvektorer till A. **(3 p)**

2. För vilka värden på a och b har nedanstående system (med obekanta x, y och z) oändligt många lösningar? Lös systemet i detta fall. **(6 p)**

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + 5z = b \\ 3x + 4y + az = 5 \end{cases}$$

DEL B

3. Låt $u = (1, 2, -2)$ och $v = (1, 1, 0)$.

(a) Bestäm en vektor w som uppfyller **alla tre** av följande villkor:

- Vinkeln mellan u och w är $60°$
- Vinkeln mellan v och w är $45°$
- Normen för w är 2.

(4 p)

(Kom ihåg att $\cos 45° = 1/\sqrt{2}$ och $\cos 60° = 1/2$.)

(b) Bestäm volymen av den parallellepiped som spänns upp av de tre vektorerna u, v, och w. **(2 p)**

4. (a) Låt A vara matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(a1) Bestäm en bas för bildrummet $\mathrm{im}(A)$. **(2 p)**

(a2) Bestäm en bas för nollrummet $\ker(A)$. **(2 p)**

(b) Låt B vara en matris med 7 rader och 19 kolumner.

(b1) Vad är det största möjliga värdet för rangen av B? **(1 p)**

(b2) Vad är den minsta möjliga dimensionen av $\ker(B)$? **(1 p)**

DEL C

5. Vi betraktar ekvationen

$$f(n+2) = 5f(n+1) - 6f(n) \qquad (*)$$

där $n \geq 0$ är heltal och $f(n)$ är en obekant funktion.

(a) Beteckna $X(n) = \begin{bmatrix} f(n+1) \\ f(n) \end{bmatrix}$ och skriv ekvationen $(*)$ på matrisformen $X(n+1) = AX(n)$ där A är en matris (vars element är konstanta). **(1 p)**

(b) Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen A. **(2 p)**

(c) Bestäm den lösning till $(*)$ som uppfyller $f(0) = 1$ och $f(1) = 4$. **(3 p)**

6. Antag att 2×2 matrisen A har det karakteristiska polynomet $p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$.
Visa att $A - A^2$ är invertebar och bestäm egenvärdena till dess invers. **(6 p)**