TENTAMEN

Kursnummer:	HF0024 Matematik för basår II
Moment:	TENA
Program:	Tekniskt basår
Rättande lärare:	Niclas Hjelm, Staffan Linnaeus & Jonas Stenholm
Examinator:	Niclas Hjelm
Datum: Tid:	2019-03-11 08:00-12:00
Hjälpmedel:	Formelsamling: ISBN 978-91-27-72279-8 eller ISBN 978-91-27-42245-2 (**utan anteckningar**). **Inga andra formelsamlingar är tillåtna!** Miniräknare, penna, radergummi, linjal, gradskiva
Omfattning och betygsgränser:	see below

Poäng	Betyg
11	Fx
12 – 14	E
15 – 17	D
18 – 20	C
21 – 23	B
24 – 26	A

Till samtliga uppgifter krävs fullständiga lösningar. Lösningarna skall vara tydliga och lätta att följa. Införda beteckningar skall definieras. Uppställda samband skall motiveras.
Skriv helst med blyertspenna!
Svaret ska framgå tydligt och vara förenklat så långt som möjligt. Svara med enhet och lämplig avrundning på tillämpade uppgifter. Svara exakt på övriga uppgifter, om inte annat anges. Lycka till!

1. Bestäm den primitiva $F(x)$ funktion till $f(x) = 6x - 3x^2 + 2$ som uppfyller villkoret $F(1) = 5$ 2p

2. Lös ekvationen $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ 2p

3. Lös ekvationen $\sin^2 x = \frac{1}{4}$ 2p

4. Visa att $\frac{1}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \cos^2 x + \tan^2 x$ 2p

5. Låt $f(x) = 3x \sin 2x$. Bestäm $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ exakt. 2p

6. Beräkna $\int_0^1 \frac{1}{5x+12} dx$ 2p

7. Avgör om tangenten till $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ i punkten (3,2) är parallell med linjen $2x + 4y + 5 = 0$ 2p

8. Derivatan till en funktion $f(x)$ ges av $f'(x) = 2x - \sin x$.
Grafen till funktionen $f(x)$ skär kurvan till $g(x) = x^2$ då $x = \pi$
Bestäm $f(x)$. 2p

9. Bestäm konstanten a så att $f(x) = ax - \ln x$ får sitt minsta värde för $x = 5$. 2p

10. För vilka positiva heltal n gäller $\int_0^1 x^n dx > 0,1$? 2p

11. Volymen av ett klot ökar med 6,0 cm^3/s. Beräkna hur snabbt arean ökar då radien är 4,0 cm. 3p

12. En kvadrat med sidan 1 längdenhet har ett hörn i origo och två sidor utefter de positiva koordinataxlarna i ett koordinatsystem. Kvadratens area delas i två lika stora delar av kurvan $f(x) = ax^2$. Bestäm konstanten a, där $a > 1$. 3p

Lösningsförslag

1.

$$f(x) = 6x - 3x^2 + 2$$
$$F(x) = 3x^2 - x^3 + 2x + C$$
$$F(1) = 5$$
$$F(1) = 3 \cdot 1^2 - 1^3 + 2 \cdot 1 + C$$
$$3 - 1 + 2 + C = 5$$
$$C = 1$$

Svar: $F(x) = 3x^2 - x^3 + 2x + 1$

2.

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$
$$2x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{3} + n2\pi$$
$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + n2\pi \quad \text{eller} \quad 2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + n2\pi$$
$$2x = \frac{\pi}{12} + n2\pi \quad \text{eller} \quad 2x = -\frac{7\pi}{12} + n2\pi$$
$$x = \frac{\pi}{24} + n\pi \quad \text{eller} \quad x = -\frac{7\pi}{24} + n\pi$$

Svar: $x = \frac{\pi}{24} + n\pi$ eller $x = -\frac{7\pi}{24} + n\pi$

3.

$$\sin^2 x = \frac{1}{4}$$
$$\sin x = \pm\frac{1}{2}$$
$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{eller} \quad \sin x = -\frac{1}{2}$$
$$x = \frac{\pi}{6} + n2\pi \quad \text{eller} \quad x = \frac{5\pi}{6} + n2\pi \quad \text{eller} \quad x = -\frac{\pi}{6} + n2\pi \quad \text{eller} \quad x = \frac{7\pi}{6} + n2\pi$$

Den första och den fjärde lösningsfamiljen kan skrivas ihop till:

$$x = \frac{\pi}{6} + n\pi$$

Den andra och den tredje lösningsfamiljen kan skrivas ihop till:

$$x = -\frac{\pi}{6} + n\pi$$

Svar: $x = \frac{\pi}{6} + n\pi$ eller $x = -\frac{\pi}{6} + n\pi$

4.

$$VL=\frac{1}{\cos^2 x}-\sin^2 x=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}-\sin^2 x=\tan^2 x+1-\sin^2 x=\tan^2 x+\cos^2 x=HL$$

Vilket skulle visas!

5.

$$f(x)=3x\sin 2x$$

$$f'(x)=3\sin 2x+3x\cdot 2\cos 2x$$

$$f'(x)=3\sin 2x+6x\cos 2x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\sin\frac{2\pi}{6}+6\cdot\frac{\pi}{6}\cos\frac{2\pi}{6}=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi\cdot\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{2}$$

Svar: $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{2}$

6.

$$\int_0^1 \frac{1}{5x+12}dx=\left[\frac{\ln|5x+12|}{5}\right]_0^1=\left(\frac{\ln(5\cdot 1+12)}{5}\right)-\left(\frac{\ln 12}{5}\right)=\frac{1}{5}\cdot\ln\frac{17}{12}$$

Svar: $\frac{1}{5}\cdot\ln\frac{17}{12}$

7.

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$f'(3)=\frac{-2}{(3-1)^2}=-\frac{1}{2}$$

Lutningen för linjen $2x+4y+5=0$ bestäms nu.

$$4y=-2x-5$$

$$y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$$

Se där! Tangenten till *f(x)* i punkten $x = 3$ har samma lutning som den givna linjen.

Svar: Ja!

8.
$f'(x) = 2x - \sin x$

$f(x) = x^2 + \cos x + C$

$f(\pi) = g(\pi)$ ty grafen till f(x) skär grafen till g(x) då x=π

$g(x) = x^2$

$g(\pi) = \pi^2$ vilket ger

$f(\pi) = \pi^2$

Dessutom får vi:

$f(\pi) = \pi^2 + \cos \pi + C$

Vilket ger oss:

$\pi^2 + (-1) + C = \pi^2$

$C = 1$

Slutligen:

$f(x) = x^2 + \cos x + 1$

Svar: $f(x) = x^2 + \cos x + 1$

9.
$f(x) = ax - \ln x$

$f'(x) = a - \dfrac{1}{x}$

$x = 5$ är x-koordinaten i minimipunkten.

$f'(5) = 0$

$f'(5) = a - \dfrac{1}{5}$

$a - \dfrac{1}{5} = 0$

$a = \dfrac{1}{5}$

Funktionen blir:

$f(x) = \dfrac{x}{5} - \ln x$

Verifierar att $x = 5$ är en minimipunkt om $a = \dfrac{1}{5}$.

$f'(x) = \dfrac{1}{5} - x^{-1}$

$f''(x) = x^{-2}$

$f''(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$f''(5) = \dfrac{1}{25}$

$f''(5) > 0$ Mycket riktigt en minimipunkt!

Svar: $a = \dfrac{1}{5}$

10.

$$\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \left(\frac{1^{n+1}}{n+1}\right) - 0 = \frac{1}{n+1} \quad \text{där } n \neq -1$$

$\int_0^1 x^n dx > 0{,}1$ ger att $\frac{1}{n+1} > 0{,}1$ som leder till $n+1 < \frac{1}{0{,}1} \quad \Rightarrow \quad n+1 < 10 \quad \Rightarrow \quad n < 9$

n=1, 2,...., 8

Svar: n =1, 2,….., 8

11.

Areaändringen söks för ett klot med volymökningen 6,0 cm^3/s vid den tidpunkt då klotets radie är 4,0 cm.

$V_{klot} = \frac{4\pi r^3}{3}$ och $A_{klot} = 4\pi r^2$

Beräknar med hjälp av volymförändringshastigheten förändringshastigheten av radien vid den tidpunkt då radien är 4,0 cm.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$6,0 = 4\pi \cdot 4,0^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{6}{64\pi}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{3}{32\pi}$$

Detta uttryck för radiens förändringshastighet används för att beräkna areans förändringshastighet.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi \cdot 4,0 \cdot \frac{3}{32\pi}$$

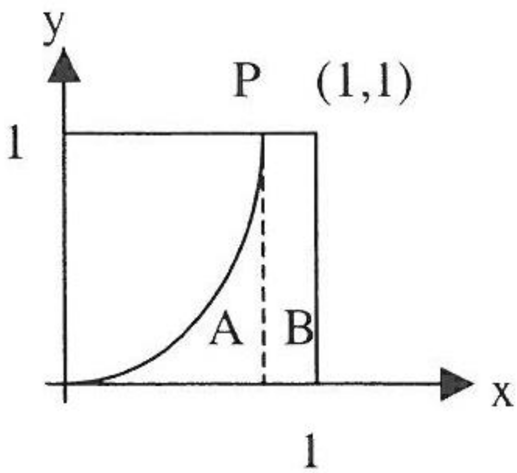
$$\frac{dA}{dt} = 3,0 \text{ cm}^2 / s$$

Svar: Arean ökar med 3,0 cm^2/s vid den aktuella tidpunkten.

12.

Kvadratens area är 1 areaenhet.

Då blir $\text{A+B} = \frac{1}{2}$ a.e.



Koordinaterna för punkten P bestäms.

$f(x) = ax^2$

I punkten P är y-värdet 1.

$1 = ax^2$

$x^2 = \frac{1}{a}$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{a}}$

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{a}}$

Enligt figuren är x-koordinaten positiv.

$x = \frac{1}{\sqrt{a}}$

Arean A beräknas:

$$A = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} ax^2 dx = \left[\frac{ax^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} = \left(\frac{a\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^3}{3}\right) - 0 = \frac{1}{3\sqrt{a}}$$

Arean av rektangeln B beräknas.

$$B = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \cdot 1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{a}}$$

A+B=$\frac{1}{2}$ ger oss

$$\frac{1}{3\sqrt{a}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{2}{3\sqrt{a}} = -\frac{1}{2}$$

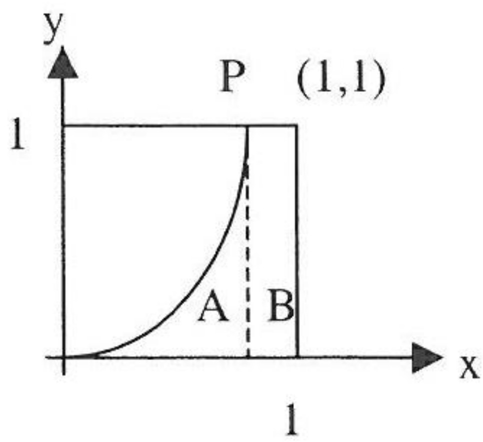
$$\frac{3\sqrt{a}}{2} = \frac{2}{1}$$

$$\sqrt{a} = \frac{4}{3}$$

$$a = \frac{16}{9}$$

Svar: $a = \frac{16}{9}$

Alternativ lösning:
Beräknar arean av det område som innesluts i kvadraten, men inte tillhör A eller B.
Vi kan kalla området C.



Bestämning av skärningspunkten P som i tidigare given lösning.

$$C=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}\left(1-ax^2\right)dx=\left[x-\frac{ax^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}=\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{a\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^3}{3}\right)-0=\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{3}=\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{3\sqrt{a}}=$$

$$=\frac{3}{3\sqrt{a}}-\frac{1}{3\sqrt{a}}=\frac{2}{3\sqrt{a}}$$

$C=\frac{1}{2}$ enligt uppgiftens förutsättningar.

$$\frac{2}{3\sqrt{a}}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{3\sqrt{a}}{2}=\frac{2}{1}$$

$$\sqrt{a}=\frac{4}{3}$$

$$a=\frac{16}{9}$$

Svar: $a=\frac{16}{9}$

Generella riktlinjer för tentamensrättning

A. Varje beräkningsfel	-1 poäng
(Därefter fortsatt rättning enligt nya förutsättningar)	
B. Beräkningsfel; allvarliga och/eller leder till förenkling	-2 poäng eller mer
C. Prövning istället för generell metod	- samtliga poäng
D. Felaktiga antaganden/ansatser	- samtliga poäng
E. Antar numeriska värden	- samtliga poäng
F. Lösning svår att följa och/eller Svaret framgår inte tydligt	-1 poäng eller mer
(Vid flera svar väljs det minst gynnsamma. Svara antingen avrundat eller exakt, se nedan.)	
G. Matematiska symboler används felaktigt/saknas	-1poäng eller mer
Bl.a Om '=' saknas (t.ex. '=>' används istället)	-1 poäng/tenta
Om '=' används felaktigt (t.ex. istället för '=>')	-1 poäng/tenta
<u>Teoretiska uppgifter:</u>	
H. Avrundat svar	-1 poäng/tenta
<u>Tillämpade uppgifter:</u>	
I. Enhet saknas/fel	-1 poäng/tenta
J. Avrundningar i delberäkningar som ger fel svar	-1 poäng/tenta
K. Svar med felaktigt antal värdesiffror (±1 värdesiffra ok)	-1 poäng/tenta
L. Andra avrundningsfel	-1 poäng/tenta
M. Exakt svar	-1 poäng/tenta

Preliminär Rättningsanvisning för uppgifter

1.	Felaktig primitiv funktion/integrationskonstant saknas	- 2p
	Felaktigt värde på konstanten	- 1p
2.	Varje saknad lösningsfamilj	- 1p
	Saknad/felaktig period	- 1p
3.	Varje saknad lösningsfamilj	- 1p
	Saknad/felaktig period	- 1p
	Skriver ej samman lösningarna	ej avdrag
4.	Utgår från likheten och flyttar termer mellan leden	- 2p
5.	Deriveringsfel	- 2p
	Fel vid beräkning då x-värdet sätts in	- 1p
6.	Integreringsfel	- 2p
	Missar absolutbelopp	ej avdrag
	Förenklar inte ln17 – ln12	ej avdrag
7.	Deriveringsfel	- 2p
	Fel lutning på linjen	- 2p
	Svarar bara med – ½ och bedömer inte relation med linjes lutning	- 1p
8.	Integreringsfel/integrationskonstant saknas	- 2p
	Felaktigt bestämd konstant men rätt uppställt	- 1p
9.	Deriveringsfel	- 2p
	Verifierar ej minimum	- 1p
10.	Integreringsfel	- 2p
	Prövning	- 2p
	Felaktig beräkning av villkoret	
	Anger ej $n \neq -1$	OK
11.	Något av sambanden felaktiga	- 2p
	Deriveringsfel	- 2p
12.	Har utifrån ritad figur formulerat en strategi som bör ge lösning (korrekt uppställd integral, korrekt metod för beräkning av rektangelarea). +1p	
	Integreringsfel	- 2p
13.	Förkastar ej skärningspunkt $x = -\frac{1}{\sqrt{a}}$	- 3p