KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Måndagen den 12 mars, 2012

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examinationen under period 2, 2011 och period 3, 2012. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Betrakta ekvationssystemet i de tre obekanta x, y och z, som ges av
$$\begin{cases} x + (1-a)y + 2z = 0 \\ 2x + ay + 3z = 1 \\ x + (2a-1)y + az = a \end{cases}$$
där a är en konstant.
   (a) Bestäm lösningsmängden i det fall då $a = 1$. **(2 p)**
   (b) Undersök för vilka värden på konstanten a som ekvationssystemet har precis en lösning, oändligt många lösningar, respektive ingen lösning. **(2 p)**

2. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den ortogonala projektionen på planet $x - 3y - 5z = 0$.
   (a) Bestäm en bas för nollrummet, $\ker(T)$. **(2 p)**
   (b) Bestäm en bas för bildrummet, $\operatorname{im}(T)$. **(2 p)**

3. Betrakta matrisen
$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}.$$
   (a) Bestäm egenvärdena till matrisen A och förklara varför A är diagonaliserbar. **(2 p)**
   (b) Bestäm en matris S sådan att $S^{-1}AS$ är en diagonalmatris. **(2 p)**

DEL B

4. Låt $W \subseteq \mathbb{R}^4$ vara delrummet som ges av ekvationen
$$x - 2y + 3z + w = 0.$$
(a) Bestäm en linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ vars bildrum $\operatorname{im}(T)$ är W. **(3 p)**
(b) Varför finns det ingen linjär avbildning $S\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ vars bildrum $\operatorname{im}(S)$ är W? **(1 p)**

5. En linje $(x, y, z) = (4 + 3t, 5t, t - 2)$ och ett plan med ekvation $2x + y - 2z - 3 = 0$ är givna. När linjen projiceras på planet fås en ny linje som ligger i planet. Bestäm denna linje. **(4 p)**

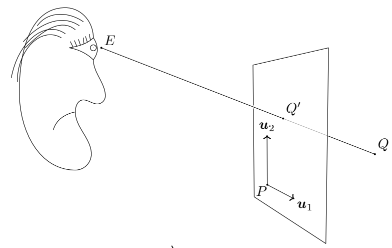
6. Låt $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som ges av matrisen
$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix},$$
och låt $\mathfrak{B}$ vara basen som ges av vektorerna
$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$
(a) Bestäm matrisen för avbildningen T med avseende på basen $\mathfrak{B}$. **(2 p)**
(b) Bestäm koordinatvektorn, $[T(\vec{x})]_{\mathfrak{B}}$, där $\vec{x} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$. **(2 p)**

DEL C

7. Låt W vara delrummet i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av de två vektorerna
$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$
(a) Bestäm en bas för det ortogonala komplementet $W^{\perp}$. **(2 p)**
(b) Skriv vektorn
$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
som en summa $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$, där $\vec{u}$ ligger i W och $\vec{v}$ ligger i $W^{\perp}$. **(2 p)**

Var god vänd!

8. Inom datorgrafiken är ett av de grundläggande problemen att projicera punkter i en tredimensionell scen på en två-dimensionell datorskärm. En vanlig projektionsmetod är att från den punkt Q i scenen som ska projiceras bilda en rät linje till en tänkt betraktare E. Den punkt Q' där linjen skär skärmens plan är projektionspunkten av Q. I skärmens plan införs ett koordinatsystem genom att välja ett origo i punkten P och två basvektorer $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$.



   (a) Ange med hjälp av vektorerna $\overrightarrow{OP}$, $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$ ett uttryck för vektorn från origo O (i rummet) till en punkt Q' som har koordinater (s_1, s_2) i skärmens koordinatsystem. **(1 p)**

   (b) Använd (a)-delen och linjen genom E och Q för att skriva upp en vektorekvation för punkten Q'. De tre obekanta i ekvationen kommer att vara s_1, s_2 och linjens parameter. **(1 p)**

   (c) Visa att punkten Q' har koordinaterna
$$\left(\frac{\overrightarrow{PE}\cdot(\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_2)}{\vec{u}_1\cdot(\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_2)}, \frac{\overrightarrow{PE}\cdot(\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_1)}{\vec{u}_2\cdot(\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_1)}\right)$$
   i skärmens koordinatsystem genom att ta skalärprodukten av ekvationen med $\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_1$ respektive $\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_2$. **(2 p)**

9. Låt T vara en linjär avbildning från $\mathbb{R}^4$ till $\mathbb{R}^5$ vars nollrum, $\ker(T)$, har dimension 1. Låt V vara ett 3-dimensionellt delrum av $\mathbb{R}^4$. Låt $S\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^5$ vara den avbildning som fås genom att använda avbildningen T bara på vektorer i V. Avgör vilka möjligheter det finns för dimensionen av bildrummet $\operatorname{im}(S)$. **(4 p)**