KTH Teknikvetenskap

# SF1624 Algebra och geometri
# Tentamen
# Måndagen den 13 januari, 2014

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Roy Skjelnes

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

| Betyg | A | B | C | D | E | Fx |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Total poäng | 27 | 24 | 21 | 18 | 16 | 15 |
| varav från del C | 6 | 3 | – | – | – | – |

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

*Var god vänd!*

## Del A

1. Vi har parallellogrammen $T$ med hörn $A = (1,1,1)$, $B = (2,3,0)$, $C = (3,2,4)$ och $D = (4,4,3)$.
   (a) Bestäm arean av parallellogrammen $T$. **(2 p)**
   (b) Bestäm en ekvation för planet som innehåller $T$. **(2 p)**

2. För varje tal $a$ har vi följande ekvationssystem i tre okända $x, y$ och $z$.

$$(*) \quad \begin{cases} (a-2)x + 4y + 2z &= 1 \\ ay + z &= 2 \\ ax + 2y + z &= 3 \end{cases}$$

   Vi kan också skriva ekvationssystemet som en matrisekvation $AX = B$, där $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.
   (a) Bestäm matrisen $A$. **(1 p)**
   (b) Bestäm determinanten till $A$. **(1 p)**
   (c) Bestäm för vilka tal $a$ ekvationssystemet $(*)$ har en unik lösning. **(1 p)**
   (d) Välj ett värde på $a$ där systemet har en unik lösning och bestäm denna lösning. **(1 p)**

3. Avbildningen $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix}.$$

   Med linjen $L$ menas alla vektorer på formen $L = \{(2+4t, 2+3t)\}$, godtyckliga tal $t$.
   (a) Avgör om punkten $P = (2,3)$ är i bildrummet för $T$. **(1 p)**
   (b) Bestäm nollrummet för $T$. **(1 p)**
   (c) Vad avbildas linjen $L$ på genom avbildningen $T$? **(2 p)**

## DEL B

4. Vi har ekvationssystemet i fyra okända $x, y, z, w$,

$$\begin{cases} x - 2z - w &= 0 \\ x + y - 4z - 3w &= 0 \end{cases}$$

Lösningsmängden till ekvationssystemet är ett delrum $V \subseteq \mathbb{R}^4$.

(a) Bestäm en ortonormal bas $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ för $V$. **(2 p)**

(b) Verifiera att $\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{u})\vec{u} + (\vec{x} \cdot \vec{v})\vec{v}$ med $\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$. **(1 p)**

(c) Bestäm projektionen av vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ på delrummet $V$. **(1 p)**

5. Det linjära ekvationssysemet

$$\begin{cases} x & & = 16 \\ & 3y & = 3 \\ -3x + & 2y & = -4 \\ x + & y & = -4 \\ 2x + & y & = 9 \end{cases}$$

i de två variablerna $x$ och $y$ är överbestämt och har ingen lösning. Det går att använda *minsta kvadratmetoden* för att finna de bästa tänkbara värdena på $x$ och $y$.

(a) Ställ upp normalekvationen för systemet och bestäm minsta kvadratlösningen. **(3 p)**

(b) Vad är det som är minimerat i minsta kvadratlösningen? **(1 p)**

6. Låt $H \subseteq \mathbb{R}^3$ vara ett givet plan genom origo och låt $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som ges av ortogonal projektion på planet $H$.

(a) Använd en normalvektor till planet $H$ för att ge ett uttryck för $T(\vec{x})$, där $\vec{x}$ är en godtycklig vektor. **(1 p)**

(b) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till $T$. **(2 p)**

(c) Låt $\mathcal{B}$ vara en godtycklig ON-bas för $\mathbb{R}^3$, och låt $A$ vara matrisrepresentationen för $T$. Förklara varför $A$ är en symmetrisk matris. **(1 p)**

*Var god vänd!*

## DEL C

7. Vektorerna
$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
ger en bas $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ för vektorrummet $V$ i $\mathbb{R}^4$. Övergångsmatrisen från basen $\mathcal{B}$ till basen $\mathcal{C}$ ges av matrisen
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$
Bestäm vektorerna i $\mathbb{R}^4$ som utgör basen $\mathcal{C}$. **(4 p)**

8. Låt $ABCD$ vara parallellogrammen med diagonalerna $AC$ och $BD$. Punkten $E$ ligger mitt på sträckan $AB$ och punkten $F$ delar sträckan $CD$ i förhållandet $1 : 4$ , alltså $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FD}$. Sträckorna $AF$ och $DE$ skär varandra i punkten P. Använd vektorberäkningar för att bestämma i vilket förhållandet sträckan $AF$ delas av punkten $P$. **(4 p)**

9. Låt $V_n$ vara vektorrummet av $n \times n$-matriser, där $n \geq 2$ är ett fixt heltal. Vi har en linjär avbildning $T\colon V_n \longrightarrow \mathbb{R}^3$, som skickar en matris $X$ till
$$T(X) = (r(X), c(X), d(X)),$$
där $r(X)$ är summan av elementen i de två första raderna i $X$, $c(X)$ är summan av elementen i de två sista kolonnerna i $X$, och $d(X)$ är summan av diagonalelementen. Bestäm dimensionen till nollrummet av $T$. **(4 p)**