SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen 25 oktober 2021

DEL A

1. För vilka värden på parametrarna p och q har ekvationssystemet (med avseende på x, y och z)
$$\begin{cases} 3x - p\,y + z &= 1 \\ p\,x + y + z &= 3 \\ 3x + y + 2z &= q \end{cases}$$
a) en entydig lösning; b) oändligt många lösningar; c) ingen lösning? **(2+2+2 p)**

Lösning. Låt $A = \begin{bmatrix} 3 & -p & 1 \\ p & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Då är $\det(A) = 2p^2 - 2p = 2p(p-1)$. Systemet har exakt en lösning om $p \neq 0$ och $p \neq 1$.

Fall 1: p=0. Om vi substituerar p=0 i systemet får vi
$$\begin{cases} 3x \quad + z &= 1 \\ \quad y + z &= 3 \\ 3x \quad + y + 2z &= q \end{cases} \Leftrightarrow \;(-E1 + E3)$$
$$\begin{cases} 3x + z = 1 \\ y + z = 3 \\ y + z = q - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \;(-E2 + E3)\; \begin{cases} 3x + z = 1 \\ y + z = 3 \\ 0 = q - 4 \end{cases}$$
Härav ser vi att p=0 och q=4 ger oändligt många lösningar; medan p=0 och $q \neq 4$ ger ett system som saknar lösning.

Fall 2: p=1. Om vi substituerar p=1 i systemet får vi
$$\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ 3x + y + 2z = q \end{cases} \overset{E2}{\Leftrightarrow}\; E1 \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3x - y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = q \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{matrix}(-3E1 + E2) \\ (-3E1 + E3)\end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 3 \\ \quad - 4y - 2z = -8 \\ \quad - 2y - z = q - 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\tfrac{E2}{2}) \begin{cases} x+y+z=3 \\ \quad -2y-z=-4 \\ \quad -2y-z=q-9 \end{cases} \Leftrightarrow \quad -E2+E3 \begin{cases} x+y+z=3 \\ \quad -2y-z=-4 \\ \qquad 0=q-5 \end{cases}$$

Härav följer att p=1 och q=5 ger oändligt många lösningar; medan p=1 och $q \neq 5$ ger ett system som saknar lösning.

Svar: a) Systemet har exakt en lösning om $p \neq 0$ och $p \neq 1$.

b) Systemet har oändligt många lösningar om p=0 och q=4 eller p=1 och q=5.

c) Systemet har ingen lösning om p=0 och $q \neq 4$ eller p=1 och $q \neq 5$.

$\square$

2. Bestäm konstanterna a, b och c så att parabeln

$$y = ax^2 + bx + c$$

utgör den bästa approximationen (enligt minstakvadratmetoden) till följande punkter: $(-1,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$, $(2,2)$. **(6 p)**

Lösning. Om vi sätter in de givna punkterna i parabelns ekvation, får vi systemet

$$\begin{array}{rcrcrcr} a & - & b & + & c & = & 1 \\ & & & & c & = & -1 \\ a & + & b & + & c & = & 0 \\ 4a & + & 2b & + & c & = & 2 \end{array}$$

vilket kan skrivas på matrisform som

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vi använder minstakvadratmetoden till systemet $A\vec{w} = \vec{v}$ där $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Beräknar:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^T \vec{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ekvationen $A^T A\vec{w} = A^T\vec{v}$ tar form

$$\begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \vec{w} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vi får lösningen $\vec{w} = [1, -3/5, -7/10]^T$. Alltså den parabeln som ger den bästa minstakvadrat-approximationen till de givna punkterna har konstanterna $a = 1$, $b = -3/5$, $c = -7/10$.

□

DEL B

3. Låt $W = \text{col}(A)$ vara kolonnrummet *(column space)* till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Avgör om vektorn $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ligger i W. **(2 p)**

b) Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ på W. **(4 p)**

Lösning. $a)$. Vektorn $\vec{u}$ ligger i rummet W om det finns minst en vektor $\vec{x}$ sådan att $A\vec{x} = \vec{u}$. Vi löser systemet

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -10 & -5 & -5 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ovanstående visar att systemet $A\vec{x} = \vec{u}$ är lösbart och därmed ligger vektorn $\vec{u}$ i rummet W.

$b)$. Från $a)$-delen ser vi att första och tredje kolonnvekorn bildar en bas till W. Låt $\vec{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\vec{f}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Först använder vi Gram-Schmids metod för att bestämma en ortogonal bas till W.

Vi har $\vec{w}_1 = \vec{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ och

$\vec{w}_2 = \vec{f}_2 - \frac{\vec{f}_2 \cdot \vec{w}_1}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{5}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/6 \\ -5/6 \\ 1 \\ -4/6 \end{bmatrix}$.

För att förenkla beräkning använder vi $\vec{b}_1 = \vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ och

$\vec{b}_2 = 6\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 13 \\ -5 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$ som också bildar en ortogonalbas. Enligt projektionsformel har vi

$$proj_W(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1}\vec{b}_1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{b}_2}{\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2}\vec{b}_2$$

$$= \frac{6}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{-12}{246}\begin{bmatrix} 13 \\ -5 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{-2}{41}\begin{bmatrix} 13 \\ -5 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{41}\begin{bmatrix} 15 \\ 51 \\ -12 \\ 90 \end{bmatrix}$$

$\square$

4. En kvadrat med sidlängden 1 har ett hörn i origo, ett hörn i $(1, 1, 0)$ och ligger i ett plan som är parallellt med vektorn $(1, 2, 2)$. Bestäm koordinaterna för de övriga två hörnen.

(6 p)

Lösning. Kvadraten ligger i ett plan som går genom origo (eftersom den har ett hörn i origo). Hörhet $(1, 1, 0)$ har avstånd $\sqrt{2}$ från origo, och linjesegmentet från origo till $(1, 1, 0)$ är därför en diagonal av kvadraten.

Planet som kvadraten ligger i innehåller alltså vektorn $\vec{u} = (1, 1, 0)$. Dessutom är det parallellt med vektorn $\vec{v} = (1, 2, 2)$. Planets normal ges av $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (2, -2, 1)$. Planets ekvation är $2x - 2y + z = 0$.

Två andra hörn, H_1 och H_2 ligger i samma plan på avstånd $\sqrt{2}/2$ från mittpunkten av diagonalen, dvs punkten $\vec{P} = (1/2, 1/2, 0)$. Vektorerna $P\vec{H}_1$ och $P\vec{H}_2$ är vinkelrätta mot både $\vec{n}$ och $\vec{u}$ och är därför parallella med vektorn $\vec{u} \times \vec{n} = (1, -1, -4)$. Enhetsvektorn i denna riktning är $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{18}}(1, -1, -4) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1, -1, -4)$. Vi har alltså hörnen:

$$\begin{aligned} H_{1,2} =& \vec{P} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e} = (1/2, 1/2, 0) \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{3\sqrt{2}}(1, -1, -4) \\ =& (1/2, 1/2, 0) \pm (1/6, -1/6, -4/6). \end{aligned}$$

This gives

$$H_1 = (2/3, 1/3, -2/3), \quad H_2 = (1/3, 2/3, 2/3).$$

□

DEL C

5. Låt $\mathcal{P}$ vara vektorrummet av alla reella polynom av grad högst 2.
   (a) Bestäm en bas för $\mathcal{P}$ och bestäm dimensionen av $\mathcal{P}$. **(2 p)**
   (b) Visa att deriveringsoperatorn $\frac{d}{dx} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ är en linjär avbildning. **(2 p)**
   (c) Bestäm alla egenvärden till $\frac{d}{dx}$. **(2 p)**

Lösning. (a) Polynomen av grad högst två kan skrivas $a+bx+cx^2$ för reella konstanter a, b, c. Vi ser alltså att de tre polynomen 1, x och x^2 spänner upp $\mathcal{P}$. De är dessutom linjärt oberoende eftersom evkvationen $c_0 1 + c_1 x + c_2 x^2 = 0$ (för alla x) bara har den triviala lösningen $c_0 = c_1 = c_2 = 0$. Alltså är $\{1, x, x^2\}$ en bas för $\mathcal{P}$ vars dimension därför är 3.

(b) Det är uppenbart att derivering av ett polynom av grad högst två resulterar i ett polynom av grad högst två. Med hjälp av kända deriveringsregler får vi för alla polynom $p, q \in \mathcal{P}$ och konstanter $k \in \mathbb{R}$ att

$$\frac{d}{dx}(p+q) = \frac{d}{dx}p + \frac{d}{dx}q \quad \text{och} \quad \frac{d}{dx}(kp) = k\frac{d}{dx}p$$

vilket betyder att $\frac{d}{dx}$ är en linjär avbildning från $\mathcal{P}$ till $\mathcal{P}$.

(c) Vi söker reella λ och polynom p av grad högst två så att $\frac{d}{dx}p = \lambda p$. Eftersom derivering resulterar i ett polyom av lägre grad kan denna ekvation inte vara uppfylld för något polynom av grad 1 eller 2. Det återstår polynomen av grad noll, dvs konstanter. För varje sådant polynom, $p(x) = k$ fås att $\frac{d}{dx}p = 0 = 0p$. Så 0 är ett egenvärde med egenpolynom alla konstanta polynom. Och enligt ovan finns inga andra egenvärden. 0 är alltså enda egenvärdet.

□

6. Låt $\vec{v}_1$,...,$\vec{v}_k$ vara k vektorer i $\mathbb{R}^n$. Matrisen M definieras genom

$$M = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_k \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_k \\ \vdots & & & \vdots \\ \vec{v}_k \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_k \cdot \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_k \cdot \vec{v}_k \end{bmatrix},$$

där $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j$ betecknar skalärprodukten mellan $\vec{v}_i$ och $\vec{v}_j$.
Bevisa att $\det(M) = 0$ om och endast om vektorerna $\vec{v}_1$,...,$\vec{v}_k$ är linjärt beroende.

(6 p)

Lösning. Beteckna med A den $n \times k$ matris vars kolonner är vektorerna $\vec{v}_1$,...,$\vec{v}_k$. Då är

$$M = A^T A.$$

Observera att A inte behöver vara en kvadratisk matris och att $\det(A)$ definieras inte om $k \neq n$. Men $M = A^T A$ är en $k \times k$ kvadratisk matris.

i) Låt $\vec{v}_1$,...,$\vec{v}_k$ vara linjärt beroende vektorer i $\mathbb{R}^n$. Då har systemet

$$x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_k\vec{v}_k = \vec{0}, \quad \text{d.v.s.,} \quad A\vec{x} = \vec{0},$$

icke triviala lösningar. Med andra ord, finns det en nollskild vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^k$ sådan att

$$A\vec{u} = \vec{0}. \tag{1}$$

Om vi, från vänster, multiplicerar (1) med A^T får vi $A^T A\vec{u} = \vec{0}$, dvs

$$M\vec{u} = \vec{0} \tag{2}$$

för en nollskild vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^k$. Alltså har det kvadratiska systemet (2) icke triviala lösningar. Detta implicerar att det$(M) = 0$.

ii) Anta nu att det$(M) = 0$. Då har systemet $M\vec{x} = \vec{0}$ icke triviala lösningar. Alltså finns det en nollskild vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^k$ sådan att $M\vec{u} = \vec{0}$. Då är också $\vec{u}^T M\vec{u} = 0$. Därför gäller

$$0 = \vec{u}^T M\vec{u} = \vec{u}^T A^T A\vec{u} = (A\vec{u})^T A\vec{u} = (A\vec{u}) \cdot (A\vec{u}) = |A\vec{u}|^2.$$

Härav får vi att $A\vec{u} = \vec{0}$ för en nollskild vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^k$, dvs

$$u_1\vec{v}_1 + \cdots + u_k\vec{v}_k = \vec{0},$$

där minst ett av talen $u_1, ..., u_k$ är $\neq 0$. Med andra ord är $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ linjärt beroende vektorer. Därmed har vi bevisat påståendet.

□