KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen 2013-06-04

DEL A

1. De tre punkterna $A = (1, 0, 1)$, $B = (4, 2, -1)$ och $C = (5, 1, 4)$ bildar en triangel i rummet. Med *höjden*, h, mot sidan AB menas avståndet från punkten C till linjen genom A och B.
   (a) Bestäm höjden h. (*Ledning*: Dela upp $\overrightarrow{AC}$ i en komposant som är parallell med $\overrightarrow{AB}$ och en som är vinkelrät mot $\overrightarrow{AB}$.) **(2 p)**
   (b) Använd resultatet från del (a) för att bestämma arean av triangeln. **(1 p)**
   (c) Beräkna arean av triangeln även med hjälp av vektorprodukten av $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$. **(1 p)**

Lösningsförslag. a) Vi vill dela upp $\vec{AC} = \text{proj}_{\vec{AB}}(\vec{AC}) + \vec{AC}^{\perp}$ och använder att (se t.ex. geometrihäftet Prop 4.5)

$$\text{proj}_{\vec{AB}}(\vec{AC}) = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{AB}}{\vec{AB} \cdot \vec{AB}} \vec{AB}.$$

Vi har $\vec{AB} = B - A = (3, 2, -2)$ och $\vec{AC} = C - A = (4, 1, 3)$ så $\text{proj}_{\vec{AB}}(\vec{AC}) = \frac{8}{17}(3, 2, -2)$. Då följer att $\vec{AC}^{\perp} = \vec{AC} - \text{proj}_{\vec{AB}}(\vec{AC}) = \frac{1}{17}(44, 1, 67)$. Höjden h i triangeln är precis längden på vektorn $\vec{AC}^{\perp}$, det vill säga $h = ||\vec{AC}^{\perp}|| = \frac{1}{17}\sqrt{44^2 + 1^2 + 67^2} = \frac{1}{17}\sqrt{6426} = \frac{3}{17}\sqrt{714}$.

b) Arean är basen gånger höjden genom två

$$\frac{h \cdot ||\vec{AB}||}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{17}\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2 + (-2)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{42}.$$

c) Längden på kryssprodukten (vektorprodukten) av två vektorer ger arean av det uppspända parallellogrammet. Triangeln är hälften av detta parallellogram. Arean av triangeln är alltså $\frac{1}{2}||\vec{AB} \times \vec{AC}|| = \frac{1}{2}||\left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\right)|| = \frac{1}{2}||(8, 17, -5)|| = \frac{1}{2}\sqrt{378} = \frac{3}{2}\sqrt{42}$,

vilket bekräftar areaberäkningen i b).

Svar.

(a) Höjden är $\frac{1}{17}\sqrt{6426}$.

(b) Arean är $\frac{3}{2}\sqrt{42}$.

(c) -

2. Låt $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ vara en linjär avbildning sådan att:

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\0\\2\\0\end{bmatrix}$$

(a) Bestäm $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)$. **(2 p)**

(b) Bestäm en bas för nollrummet $\ker(T)$. **(2 p)**

Lösningsförslag. a) Låt M_T vara matrisen för den linjära avbildningen T. Uppgiften ger då att

$$M_T \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Med någon av metoderna vi lärt oss beräknar vi $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\1 & 0 & -1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}$. Vi multiplicerar med denna invers från höger i båda leden och får

$$M_T = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\1 & 0 & -1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\\3 & -2 & -1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Specielt har vi att $T(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix})$ är

$$M_T \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y\\0\\3x-2y-z\\0\end{bmatrix}.$$

b) Vi söker alla vektorer sådan att $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}y\\0\\3x-2y-z\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$. Detta ger att $y = 0$, och sedan att $z = 3x$. Vektorer av formen $\begin{bmatrix}x\\0\\3x\end{bmatrix}$ utgör nollrummet till avbildningen. En bas får vi vid att sätta $x = 1$.

Svar.

(a) Vi har $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ 0 \\ 3x - 2y - z \\ 0 \end{bmatrix}$.

(b) Vi har att en bas för $\ker(T)$ är $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

3. (a) Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(3 p)

(b) Förklara varför matrisen $B = \frac{1}{19}A$ har samma egenvektorer som matrisen A.

(1 p)

Lösningsförslag. a) Vi behöver lösa $0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2)$. Egenvärdena är alltså $\lambda = -1$ och $\lambda = 2$. Med bokens beteckningar får vi

$$E_{-1} = \ker(A + I) = \ker \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \text{och}$$

$$E_2 = \ker(A - 2I) = \ker \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

b) Om v_A är en egenvektor till A så betyder det att $Av_A = \lambda v_A$ för något λ. Men då är $Bv_A = \frac{1}{19}Av_A = \frac{1}{19}\lambda v_A$ och därför är v_A en egenvektor även för B. Om v_B är en egenvektor för B kan samma resonemang visa att den också är en egenvektor för A.

Alternativt kan man säga att en egenvektor beskriver en riktning i rummet som lämnas oförändrad av den linjära avbildningen som ges av A. Att multiplicera med skalären $\frac{1}{19}$ påverkar inte vilka riktningar som är oförändrade och därför har A och B samma egenvektorer.

Svar.

(a) Egenvektorer är $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(b) -

DEL B

4. Låt $W = \mathrm{im}(A)$ vara bildrummet till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & -4 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & -4 & -4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en ortonormal bas för W. **(4 p)**

Lösningsförslag. 4. Vi börjar med att medelst elementära radoperationer göra om A till radreducerad form. Vi tar och adderar - 1 rad 1 till andra raden, och 2 rad 1 till tredje och fjärde raden. Detta ger

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Vi ser nu att att rad 3 och rad 4 är en skalärmultippel av rad 2. Den reducerade trappstegsmatrisen blir

$$\mathrm{rref}(A) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rangen är två, vilket också är dimensionen till W. Kolumn ett och kolumn tre i matrisen A är linjärt oberoende, och därför en bas för W. Vi använder Gram-Schmidt för att producera en orthonormal bas. Vi låter

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1, -1, 2, 2)$$

som är en vektor av längd ett. Vi fortsätter med att beräkna $v_2 = (1, 2, 1, 0) - \mathrm{Proj}_{u_1}(1, 2, 1, 0)$. Projektionen av vektorn $(1, 2, 1, 0)$ ned på linjen som spänns upp av u_1 är

$$\mathrm{Proj}_{u_1}(1, 2, 1, 0) = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1 - 2 + 2 + 0)u_1 = \frac{-1}{10}(-1, -1, 2, 2).$$

Detta ger att

$$v_2 = (1, 2, 1, 0) + \frac{1}{10}(-1, -1, 2, 2) = \frac{1}{10}(9, 19, 12, 2).$$

Nu är $\{u_1, v_2\}$ en orthogonal bas. Vektor u_1 har längd ett, och vektorn $u_2 = \frac{1}{|v_2|}v_2$ har också längd 1. Vi har att

$$9^2 + 19^2 + 12^2 + 2^2 = 81 + 361 + 144 + 4 = 590.$$

Detta ger att vektorn v_2 har längd $\frac{\sqrt{590}}{10}$. Den sökta vektorn

$$u_2 = \frac{10}{\sqrt{590}}\frac{1}{10}(9, 19, 12, 2).$$

Svar.

(a) En ortonormal bas ges av

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{590}} \begin{bmatrix} 9 \\ 19 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

.

5. Låt $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara speglingen i linjen $3x + 4y = 0$.
   (a) Bestäm matrisen för T. **(2 p)**
   (b) Rita upp hur parallellogrammen med hörn i $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,1)$ och $(1,3)$ avbildas genom avbildningen. **(2 p)**

Lösningsförslag. a) Linjen går genom origo och i riktning av vektorn $\vec{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$. Vi vill spegla en vektor $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ i denna linje. Då gäller att $\text{ref}_{\vec{u}}(\vec{x}) = 2\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{x}) - \vec{x}$. Vi använder $\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{x}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{x}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u} = \frac{4x_1-3x_2}{25}\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ och får

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \text{ref}_{\vec{u}}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \frac{8x_1 - 6x_2}{25}\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 7x_1 - 24x_2 \\ -24x_1 - 7x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

b) Vi har från formeln i a) att $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} -17 \\ -31 \end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} -48 \\ -14 \end{bmatrix}$ och $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -13 \\ -9 \end{bmatrix}$.

Svar.

(a) Matrisen för speglingen T är $\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{bmatrix}$.

(b) -

6. Vektorerna $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & -1\end{bmatrix}^T$ och $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}^T$ bildar en bas $\mathfrak{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ för delrummet W i $\mathbb{R}^4$. Matrisen
$$S = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$
är övergångsmatrisen som omvandlar koordinater med avseende på basen $\mathfrak{B}$ till koordinater med avseende på basen $\mathfrak{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Bestäm vektorerna $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$. **(4 p)**

Lösningsförslag. I basen $\mathfrak{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ har basvektorn $\vec{u}_1$ koordinater 1 och 0 (för $\vec{u}_1 = 1\vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2$) som vi skriver som koordinat-kolonnvekor $[\vec{u}_1]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$.

Enligt antagandet omvandlar matrisen $S = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ koordinater i basen $\mathfrak{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ till koordinater i basen $\mathfrak{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Med andra ord får vi koordinater i basen $\mathfrak{C}$ för basvektorn $\vec{u}_1$ enligt följande
$$[\vec{u}_1]_{\mathfrak{C}} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} \text{ (=kolonn 1 i matrisen S).}$$

Alltså
$$1\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 = \vec{u}_1 \text{ (ekv 1) .}$$
På samma sätt får vi
$$2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 = \vec{u}_2 \text{ (ekv 2) .}$$
Från ekvationssystemet bestämmer vi $\vec{v}_1$och $\vec{v}_2$:
T. ex. -3ekv1 +2 ekv2 ger
$$\vec{v}_1 = -3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 = -3\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 0\\ -1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ -6\\ -2\\ 5\end{bmatrix}$$
På liknande sätt 2ekv1 - ekv2 ger
$$\vec{v}_2 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = 2\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 0\\ -1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 4\\ 1\\ -3\end{bmatrix}$$
.

Svar.

(a) Vi har vektorerna $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}-1\\ -6\\ -2\\ 5\end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\ 4\\ 1\\ -3\end{bmatrix}$

DEL C

7. Låt V vara mängden av alla 7×7-matriser. Betrakta V som $\mathbb{R}^{49}$ genom att ställa kolonnerna i matriserna under varandra.
   (a) Visa att avbildningen $T\colon V \to V$ som skickar en matris A till $A + A^T$ är en linjär avbildning. **(2 p)**
   (b) Visa att de nollskilda symmetriska matriserna är egenvektorer för T. **(2 p)**

Lösningsförslag. a) Vi kollar de två villkoren på linearitet, se Theorem 2.1.3 i läroboken. Låt A och B vara matriser och $k \in \mathbb{R}$
i) $T(A+B) = (A+B)+(A+B)^T = A+B+A^T+B^T = A+A^T+B+B^T = T(A)+T(B)$ och
ii) $T(kA) = kA + (kA)^T = kA + kA^T = k(A + A^T) = kT(A)$.
T är alltså en linjär avbildning.

b) Matrisen A är en egenvektor till T om $T(A) = \lambda A$, något $\lambda \in \mathbb{R}$. Om A är en symmetrisk matris så är $A = A^T$ och vi får $T(A) = A + A^T = 2A$. Alltså är varje nollskild symmetrisk matris en egenvektor till T.

Svar.
(a) -
(b) -

8. Låt $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ vara en bas för $\mathbb{R}^n$. Vi säger att $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ är en *dual bas* för $\mathbb{R}^n$ om

$$\vec{u}_i \cdot \vec{v}_j = \begin{cases} 0, & \text{om } i \neq j, \\ 1, & \text{om } i = j. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Visa att villkoren (1) innebär att $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ faktiskt utgör en bas för $\mathbb{R}^n$. **(2 p)**

(b) Låt $n = 3$ och bestäm en dual bas $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ om

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(2 p)

Lösningsförslag. a) Om $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ inte är en bas för $\mathbb{R}^n$ så finns det en linjär relation mellan dem, dvs vi kan skriva $\sum_{j=1}^n k_j \vec{v_j} = 0$, $k_j \in \mathbb{R}^n$ där inte alla k_j är noll. Välj en koordinat i så att $k_i \neq 0$ och multiplicera med $\vec{u_i}$ på båda sidor. Villkoret $\vec{v_i} \cdot \vec{u_j} = 0$, för $i \neq j$ i uppgiften gör då att all termer i högerledet försvinner utom k_i, så att $0 = k_i$, vilket är en motsägelse och alltså måste $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ vara en bas för $\mathbb{R}^n$.

b) Om vi låter V vara matrisen som har $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ och $\vec{v_3}$ som radvektorer och U vara matrisen som har $\vec{u_1}, \vec{u_2}$ och $\vec{u_3}$ som kolumnvektorer så är villkoret för en dual bas samma som $VU = I$ eller $V = U^{-1}$. Vi bestämmer nu inversen till $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ och får $U^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Raderna i denna matris är alltså vektorerna $\vec{v_i}$.

Svar.

(a) -

(b) En dual basen är $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

9. Visa att det för 2×2-matriser A gäller att om $A^k = 0$, för något heltal $k > 2$, så är också $A^2 = 0$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi betraktar dimensionen av $\text{im}(A)$. Om bildrummet har dimension 2, så avbildas bara origo på origo och samtliga andra punkter ´´överlever´´avbildningen. Det gör att upprepade avbildningar med A, dvs A^k alla kommer också att ha bildrum av dimension 2. En motsägelse mot förutsättningarna $A^k = 0$ i uppgiften. Om bildrummet har dimension 0, så måste A vara nollmatrisen och då är förstås A^2 också det. Om bildrummet av A är endimensionellt, $\text{im}(A) = \text{span}\left\{\vec{v}\right\}$ för en nollskild vektor $\vec{v}$, så delar vi in i två fall.
I) Vektorn $\vec{v}$ är en egenvektor till A, så att $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Då är $A^2\vec{v} = A\lambda\vec{v} = \lambda^2\vec{v}$ och per induktion $A^k\vec{v} = \lambda^k\vec{v}$, så $A^k \neq 0$ för alla k.
II) Vektorn $\vec{v}$ är inte en egenvektor till A. Då avbildar A vektorn $\vec{v}$ på ett lägredimensionellt delrum av $\text{im}(A)$ vilket måste vara origo. Det betyder att $A\vec{v} = 0$. För en godtycklig vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ så gäller att $A\vec{u} = k_u\vec{v}$ för något $k_u \in \mathbb{R}$ eftersom vi antagit att $\dim(\text{im}(A)) = 1$. Tillsammans får vi att $A^2\vec{u} = Ak_u\vec{v} = k_uA\vec{v} = k_u0 = 0$, så A^2 är nollmatrisen.

Alternativt. Vi visar först fallet när matrisen A är diagonaliserbar, $PAP^{-1} = D$ en diagonalmatris. Av antagendet $A^k = 0$ följer det att $D^k = 0$, vilket igen medför att diagonalelmenten i D är alla noll. Detta ger att $A = 0$, och specielt att $A^2 = 0$.

Vi antar nu att A inte är diagonaliserbar. Vi har att $A^k = 0$, vilket ger att $\det(A) = 0$, och följdaktligen är inte rangen till A maximal. Detta betyder att det finns åtminstonde en icke-noll vektor $\vec{e}$ i nollrummet till avbildningen $T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som matrisen A representerar. Låt $\vec{e}$ vara ett element i en bas $(\vec{e}, \vec{f})$ för $\mathbb{R}^2$. Matrisrepresentationen av T med avseende på basen $(\vec{e}, \vec{f})$ kommer att ha formen

$$B = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}.$$

Om koefficienten $b \neq 0$ då har matrisen B, och då också matrisen A, två olika egenvärden. I det fallet är A diagonaliserbar, vilket vi redan har behandlat ovan. Därmed har vi att koefficient $b = 0$ i matrisen B, och matrisen B är övretriangulär. Vi ser att $B^2 = 0$. Om P är övergångsmatrisen från basen $(\vec{e}, \vec{f})$ till standardbasen har vi relationen $P^{-1}AP = B$. Det följer nu att $A^2 = 0$.

Svar.
(a)
(b)