KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
onsdag, 9 januari 2019

Skrivtid: 08:00-11:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Danijela Damjanović, Tilman Bauer

Tentamen består av sex uppgifter som vardera ger maximalt sex poäng.

Del A på tentamen utgörs av de två första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De två följande uppgifterna utgör del B och de två sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst tre poäng.

DEL A

1. (a) Bestäm volymen av den parallellepiped P som spänns upp av vektorerna

$$\vec{u} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}.$$

(3 p)

(b) Låt T vara den linjära avbildning som ges av standardmatrisen

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

Bestäm volymen av $T(P)$, där P är parallellepipeden från uppgift (a). **(3 p)**

2. Använd minstakvadratmetoden för att bestämma den räta linje $y = a + bx$ som bäst passar de fem punkterna

$$(x, y) = (1, 5),\ (2, 4),\ (3, 1),\ (4, -1),\ (5, -3).$$

Var god vänd!

DEL B

3. Låt L_1 vara en rät linje i $\mathbb{R}^3$ som definieras av $(x, y, z) = (2, 2, 0) + t(3, 0, 2)$.

(a) Bestäm det plan som innehåller linjen L_1 och punkten $A = (8, 2, 3)$. **(2 p)**

(b) Linjen L_2 definieras av $(x, y, z) = (5, 1, 0) + t(2, 1, 1)$. Bestäm en ekvation för den linje som går genom punkten $A = (8, 2, 3)$ och skär både L_1 och L_2. **(4 p)**

4. Låt V vara det delrum i $\mathbb{R}^4$ som består av alla lösningar $\begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix}^T$ till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x & +2y & -3z & +3w & = 0 \\ x & -y & & -3w & = 0 \end{cases} .$$

(a) Bestäm en ortonormal bas för V. **(3 p)**

(b) Bestäm projektionen av vektorn $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ på V. **(3 p)**

DEL C

5. (a) Visa att egenvektorer som hör till olika egenvärden för en symmetrisk matris är ortogonala. **(3 p)**

(b) Hitta en symmetrisk matris som har egenvärden $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$, där en egenvektor till λ_1 är

$$\vec{v}_1 = [1, 2, 2]^T$$

och en egenvektor till λ_2 är

$$\vec{v}_2 = [2, 1, -2]^T.$$

(3 p)

6. Låt A vara en 3×2-matris och B en 2×3-matris. Antag att $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = 2$.

(a) Visa att (den kvadratiska) matrisen AB aldrig är inverterbar. **(2 p)**

(b) Visa att BA är inverterbar om och endast om den enda vektorn som ligger i både $\operatorname{col}(A)$ och $\operatorname{null}(B)$ är nollvektorn. **(4 p)**