KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen med lösningsförslag
9 april 2021

1. Låt $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm basbytesmatrisen P som byter från standardbasen $\mathcal{E}$ till basen $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$, dvs bestäm P sådan att $P[\vec{x}]_{\mathcal{E}} = [\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ för alla vektorer $[\vec{x}]$. **(3 p)**

(b) Bestäm koordinaterna för vektorn $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i basen $\{\vec{u}, \vec{v}\}$. **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) Basbytesmatrisen som byter från basen $\mathcal{B}$ till standardbasen $\mathcal{E}$ ges av

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

så $P = T^{-1}$. Vi får

$$P = T^{-1} = \frac{1}{\det T} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

(b) Koordinaterna för vektorn $\vec{w}$ i basen B är

$$[\vec{w}]_{\mathcal{B}} = P[\vec{w}]_E = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}.$$

2. Bestäm parametrarna a och b så att det linjäara ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 9 & 3 \\ -1 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Har exakt en lösning. **(2 p)**

(b) Har oändligt många lösningar. **(2 p)**

(c) Har ingen lösning. **(2 p)**

Lösningsförslag.

Radreducering av det linjära ekvationssystemet ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 3 & b \\ -1 & 0 & a & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b-2 \\ 0 & 4 & a+2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b-2 \\ 0 & 0 & a+6 & -4b+10 \end{array}\right].$$

Vi ser från trappstegsformen att:

(a) Om $a \neq -6$ så har systemet en unik lösning oberoende av valet av b.

(b) Om $a = -6$ och $b = \dfrac{5}{2}$ så har har systemet oäandligt många lösningar.

(c) Om $a = -6$ och $b \neq \dfrac{5}{2}$ så har systemet ingen lösning.

3. Låt H vara planet i $\mathbb{R}^3$ som ges av ekvationen $x + 2y + 2z = 0$. Låt $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara avbildningen som projicerar vektorer ned på planet H.

(a) Bestäm standardmatrisen för avbildningen T. **(3 p)**

(b) Bestäm en bas för $\mathbb{R}^3$ i vilken $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ är matrisen för T. **(3 p)**

Lösningsförslag. a) Standardmatrisen får vi om vi bestämmer hur avbildningen T verkar på standardbasen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Låt N vara linjen $N = \mathrm{Span}(\vec{n})$, där $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$. Linjen N är normal till planet H, och vi har att $T(\vec{x}) = \vec{x} - \mathrm{proj}_N(\vec{x})$. Vi har vidare att $\mathrm{proj}_N(\vec{e}_i)$ är $\frac{1}{9}\vec{n}$ om $i = 1$, och $\frac{2}{9}\vec{n}$ om $i = 2, 3$. Detta ger att

$$\vec{e}_1 - \mathrm{proj}_N(\vec{e}_1) = \frac{1}{9}\big((9,0,0) - (1,2,2)\big) = \frac{1}{9}(8,-2,-2)$$

$$\vec{e}_2 - \mathrm{proj}_N(\vec{e}_2) = \frac{1}{9}\big((0,9,0) - (2,4,4)\big) = \frac{1}{9}(-2,5,-4)$$

$$\vec{e}_3 - \mathrm{proj}_N(\vec{e}_3) = \frac{1}{9}\big((0,0,9) - (2,4,4)\big) = \frac{1}{9}(-2,-4,5).$$

Detta ger oss att standardmatrisen är

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

b) Vi ser att $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ är två linjärt oberoende vektorer som är parallella med planet och $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ är en normalvektor till planet. Tar man dessa tre vektorer som basvektorer för $\mathbf{R}^3$ blir matrisen för den linjära avbildningen den önskade. Detta därför att de första två vektorerna inte förändras under projektionen och den sista vektorn avbildas på nollvektorn under projektionen.

4. En liksidig triangel ABC ligger i planet $x - y + 2z = 0$. Triangeln har ett hörn i origo (dvs $A =$ origo), ett till hörn i punkten $B = (1,1,0)$, och dess tredje hörn C har positiv x-komponent. Bestäm triangelns tredje hörn C. **(6 p)**

Lösningsförslag.

Låt $\vec{b}_1$ vara vektorn från origo till hörnet $(1,1,0)$. Då är $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. En normalvektor till planet är $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Låt $\vec{b}_2 = \vec{b}_1 \times \vec{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Då är $\vec{b}_2$ parallell med planet och ortogonal mot $\vec{b}_1$. Eftersom sidlängden i den liksidiga triangeln är $\|\vec{b}_1\| = \sqrt{2}$ så ges vektorn från origo till det tredje hörnet av

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\frac{1}{\|\vec{b}_1\|}\vec{b}_1 \pm \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\frac{1}{\|\vec{b}_2\|}\vec{b}_2 \\
&= \sqrt{2}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \pm \sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Eftersom x-komponenten för det tredje hörnet är positiv är koordinaterna för det tredje hörnet $\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$.

5. (a) Låt V_1 och V_2 vara två delrum i $\mathbb{R}^n$. Bevisa att snittet $W = V_1 \cap V_2$ också är ett delrum till $\mathbb{R}^n$. **(2 p)**

(b) Låt $V_1 = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ och $V_2 = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$. Låt $W = V_1 \cap V_2$.

Den linjära avbildningen T definieras som ortogonala projektionen av vektorer i $\mathbb{R}^4$ på delrummet W. Bestäm avbildningens standardmatris $[T]$. **(4 p)**

Lösningsförslag.

(a) i) Enligt antagande är V_1 och V_2 underrum till $\mathbb{R}^n$. Därför ligger $\vec{0}$ i båda underrumen. Detta medför att $\vec{0} \in W$. (Med andra ord: W är en icke-tom delmängd till $\mathbb{R}^n$.)
ii) Låt $\vec{u}, \vec{v} \in W$ och $a, b \in R$. Då gäller $\vec{u}, \vec{v} \in V_1$ och $\vec{u}, \vec{v} \in V_2$. Eftersom V_1 och V_2 är underrum till R^n har vi $a\vec{u} + b\vec{v} \in V_1$ och $a\vec{u} + b\vec{v} \in V_2$. Därför $a\vec{u} + b\vec{v} \in V_1 \cap V_2 = W$.
i) och ii) visar att W är ett underrum till R^n.

(b) Först ska vi bestämma underrummet $W = V_1 \cap V_2$. Om en vektor $\vec{u}$ ligger i $W = V_1 \cap V_2$ så finns det reella tal x, y, z och w sådana att

$$\vec{u} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och

$$\vec{u} = z\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Därmed är

$$x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

som ger systemet

$$\begin{cases} x+3y \qquad\quad -w &= 0 \\ \quad 2y-z-3w &= 0 \\ x+2y &= 0 \\ \quad y-z-2w &= 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+3y \qquad\quad -w &= 0 \\ \quad 2y-z-3w &= 0 \\ -y \qquad\quad +w &= 0 \\ \quad y-z-2w &= 0 \end{cases}$$

Det följer att $x=-2t$, $y=t$, $z=-t$, $w=t$, och därför är

$$\vec{u} = x\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}3\\2\\2\\1\end{bmatrix} = -2t\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}3\\2\\2\\1\end{bmatrix} = t\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Alternativt:

$$\vec{u} = z\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix} + w\begin{bmatrix}1\\3\\0\\2\end{bmatrix} = -t\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\3\\0\\2\end{bmatrix} = t\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Därför är

$$W = \text{span}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}\right).$$

Eftersom matrisen till den ortogonala projektionen på delrummet span$(\vec{v})$ ges av $\frac{1}{|\vec{v}\|^2}\vec{v}\vec{v}^T$ så är

$$[T] = \frac{1}{1^2+2^2+0^2+1^2}\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 4 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 4\end{bmatrix}.$$

6. Låt A vara en $m \times n$ matris och A^Tdess transponat. Bevisa följande påståenden:

(a) A och A^TA har samma nollrum. **(3 p)**

(b) Om $n \geq 2$ då existerar n ortogonala enhetsvektorer $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ i $\mathbb{R}^n$ sådana att $A\vec{u}_1, A\vec{u}_2 \ldots, A\vec{u}_n$ är också ortogonala . **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi ska visa att varje lösning till ekvationen $A\vec{x} = \vec{0}$ är också en lösning till $A^TA\vec{x} = \vec{0}$ och omvänt. Anta att $\vec{v}$ är en lösning till ekvationen $A\vec{x} = \vec{0}$. Då är $\vec{v}$ också en lösning till $A^TA\vec{x} = \vec{0}$ eftersom $A^TA\vec{v} = A^T(A\vec{v}) = A^T(\vec{0}) = \vec{0}$.
Omvänt, om en vektor $\vec{v}$ är en lösning till $A^TA\vec{x} = \vec{0}$ så är $\vec{v}$ ortogonal mot alla rader i matrisen A^TA. Eftersom A^TA är symmetrisk (eftersom $(A^TA)^T = A^TA$) så är $\vec{v}$ också ortogonal mot alla kolonner i matrisen A^TA och därmed till kolonnrummet till A^TA. Notera att vektorn $A^TA\vec{v}$ ligger i kolonrummet till A^TA och därmed är $\vec{v}$ ortogonal mot $A^TA\vec{v}$. Därför $\vec{v}\cdot(A^TA\vec{v}) = 0$. Vi skriver skalärprodukten på matrisform och får $\vec{v}^T(A^TA\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{v}^TA^T)(A\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow (A\vec{v})^T(A\vec{v}) = 0$, eller $(A\vec{v})\cdot(A\vec{v}) = 0$. Härav $A\vec{v} = 0$ och därmed är påståendet (a) bevisat.

(b) Enligt spektralsatsen finns det en ortonormerad bas $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ i R^n, som består av egenvektorer till symmetriska matrisen A^TA. Vi ska visa att $A\vec{e}_1, A\vec{e}_2 \ldots, A\vec{e}_n$ är ortogonala. Om $\vec{e}_i$ och $\vec{e}_j$ är två olika ortonormerade vektorer i basen B så är $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ som vi använder för att visa att $(A\vec{e}_i)\cdot(A\vec{e}_j) = 0$.

Vi har
$(A\vec{e}_i) \cdot (A\vec{e}_j) = (A\vec{e}_i)^T(A\vec{e}_j) = \vec{e}_i^T A^T A\vec{e}_j = \vec{e}_i^T \lambda_j \vec{e}_j = \lambda_j(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = 0.$
Alltså är $(A\vec{e}_i) \cdot (A\vec{e}_j) = 0.$
Vi har visat att$A\vec{e}_1, A\vec{e}_2 \ldots, A\vec{e}_n$ är ortogonala vektorer.
Därmed har vi funnit n ortogonala enhetsvektorer $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ i R^n,
sådana att $A\vec{e}_1, A\vec{e}_2 \ldots, A\vec{e}_n$ är också ortogonala.