KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
Måndagen den 10 mars, 2014

Skrivtid: 8:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Bengt Ek, Maria Saprykina

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Resultatet på del A, som omfattar de tre första uppgifterna, kan höjas av resultat från den löpande examinationen (seminarierna) under kursen. Poängen från seminarierna läggs till poängen på del A på skrivningen, dock så att den totala poängen på del A blir högst 12p.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C. För de högsta betygen, A och B, krävs vissa poäng på del C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Bestäm värdemängden till funktionen
$$f(x) = 2\arctan x + \ln(1+x^2),\ \text{där}\ -\sqrt{3} \le x < 1.$$
För att ge full poäng skall svaret inte innehålla "$\arctan$" (men "$\ln$" går bra).

2. Beräkna integralen
$$\int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx.$$
För att ge full poäng skall svaret inte innehålla namn på trigonometriska funktioner.

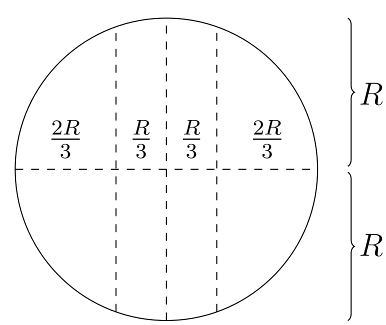
3. Beräkna två Riemannsummor R_1 och R_2 för integralen
$$\int_0^6 \frac{1}{x^3+1}\,dx,$$
båda med integrationsintervallet indelat i tre lika långa delar och sådana att R_1 säkert är mindre och R_2 säkert är större än integralens värde.
Svaret får ges som en summa av rationella tal (kvoter av heltal).

DEL B

4. a. (2p) Hur många lösningar har ekvationen $x^3 - 3x = 3$?
b. (2p) Bestäm ett närmevärde till varje lösning genom att först välja ett grovt (men inte för grovt) närmevärde x_0 och sedan göra en iteration med Newton-Raphsons metod (dvs, approximera med lämplig tangentlinje i x_0). *Tips: eftersom ni inte har miniräknare kan det vara lämpligt att välja det grova närmevärdet x_0 som ett heltal.*

5. Man vill approximera funktionen $f(x) = \sin(2x)$ med Maclaurinpolynom.
a. (2p) Bestäm ett närmevärde till $f(0.1)$ med ett fel vars absolutbelopp är mindre än 0.01.
b. (2p) Finn ett polynom $p(x)$ som för alla x med $|x| \le \frac{\pi}{8}$ uppfyller $|p(x) - f(x)| < 10^{-4}$.

6. Adam delar en sfärformad apelsin med radien R i åtta delar genom att skära fyra snitt enligt figuren härintill.
Är bitarna lika stora? Om inte, vilka är störst?



DEL C

7. a. (2p) Definiera vad det innebär att funktionen $f(x)$ är deriverbar i $x = a$.
   b. (2p) Verifiera att funktionen
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{om } x \neq 0 \\ 0 & \text{om } x = 0 \end{cases}$$
   är deriverbar för $x = 0$ och beräkna med hjälp av derivatans definition $f'(0)$.

8. Vi betraktar differentialekvationen
$$xy'' + 2y' - xy = xe^x, \quad x > 0.$$
   a. (2p) Finn alla funktioner $y(x)$ som uppfyller ekvationen (för $x > 0$, förstås), t.ex. genom att införa den nya beroende variabeln $z(x) = x\,y(x)$.
   b. (2p) Finn alla lösningar som uppfyller
$$\lim_{x \to 0^+} y(x) = 0.$$

9. Låt
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx.$$
   a. (1p) Visa att $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,dx$.
   b. (1p) Visa att $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))\,dx$.
   c. (2p) Använd a. och b. för att beräkna I.