SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Torsdag, 18 April 2019

KTH Teknikvetenskap

Skrivtid: 08:00-11:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Danijela Damjanović, Tilman Bauer

Tentamen består av sex uppgifter som vardera ger maximalt sex poäng.

Del A på tentamen utgörs av de två första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De två följande uppgifterna utgör del B och de två sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst tre poäng.

DEL A

1. Betrakta ekvationssystemet nedan.

$$\begin{cases} x + ay + z = -1 \\ ax + y + az = 1 \\ -2x + (1-2a)y - z = 3 \end{cases}$$

(a) För vilka värden på talet a saknar systemet lösningar? **(2 p)**

(b) Finn ett a sådant att systemet har oändligt många lösningar och bestäm dessa lösningar. **(4 p)**

2. Låt A vara matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Finn en inverterbar matris P och en diagonalmatris D sådana att $P^{-1}AP = D$.

Var god vänd!

DEL B

3. Planet Π i rummet innehåller de tre punkterna

$$(1,0,0),\ (2,3,0),\ (1,3,1).$$

(a) Bestäm en ekvation på formen $ax+by+cz=d$ för planet Π. **(2 p)**

(b) Bestäm en parameterframställning av den linje L som passerar origo och är ortogonal mot planet Π. **(2 p)**

(c) Bestäm skärningspunkten mellan L och Π. **(2 p)**

4. Låt

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

vara matrisen associerad till en avbildning T i basen $\mathcal{B}=\{(1,1,1),(0,2,2),(0,0,3)\}$.

(a) Bestäm dimensionen av kärnan $\ker(T)$ och bildrummet $\operatorname{ran}(T)$. **(2 p)**

(b) Bestäm standardmatrisen för T. **(4 p)**

DEL C

5. Funktionen $f(t)=Ce^{kt}$ beskriver mängden (i gram) av ett radioaktivt ämne vid tidpunkten t (timmar). Mängden $f(t)$ har mätts upp vid några tidpunkter:

- Vid tidpunkten $t=0$ fanns enligt mätningen 1 gram av ämnet
- Vid tidpunkten $t=1$ fanns enligt mätningen 0.8 gram av ämnet
- Vid tidpunkten $t=2$ fanns enligt mätningen 0.5 gram av ämnet

Bestäm konstanterna C och k så att $f(t)=Ce^{kt}$ i minstakvadratmening bäst anpassas till mätdata. **(6 p)**

6. Låt $\vec{v}=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}$ och $\vec{w}=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. Antag att $\vec{v}\neq\vec{0}$ och $\vec{w}\neq\vec{0}$. Betrakta följande matris:

$$A=\vec{v}(\vec{w})^T=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1 & \cdots & b_n\end{bmatrix}$$

(a) Bevisa att A har rang 1 och $\operatorname{col}(A)=\operatorname{span}(\vec{v})$. **(2 p)**

(b) Bevisa att $\vec{v}$ är egenvektor till A med egenvärde $\vec{v}\cdot\vec{w}$. **(1 p)**

(c) Under vilka förutsättningar på $\vec{v}$, $\vec{w}$ är A diagonaliserbar? **(3 p)**