KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen 2013-01-07

DEL A

1. Betrakta det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & az & = & 1 \\ 3x & + & 4y & + & 6z & = & b \end{cases}$$

i de tre obekanta x, y och z.

(a) Undersök för vilka värden på konstanterna a, b som ekvationssystemet har precis en lösning, oändligt många lösningar, respektive ingen lösning. **(2 p)**

(b) Bestäm alla lösningar till systemet i de fall det har oändligt många lösningar. **(2 p)**

Lösningsförslag. a) Totalmatrisen till ekvationssystemet är

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & a & 1 \\ 3 & 4 & 6 & b \end{bmatrix}.$$

Vi bestämmer lösningsmängden vid Gauss-Jordan elimination. Vi tar och adderar -1 rad 1 till rad2. Sedan adderar vi -3 rad 1 till rad 3. Och slutligen så byter vi plats på raderna 2 och 3. Och med dessa nya rader; vi adderar -1 rad2 till rad 3, och har då matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & a-2 & 1-b \end{bmatrix}$$

Nu ser vi att om $a \neq 2$, då kan vi dela rad 3 med $a-2$, och erhåller en unik lösning, för alla värden av b. Om $a = 2$, och $b \neq 1$, då ser vi av den nedersta raden att vi har inga lösningar. Om $a = 2$ och $b = 1$ då har vi oändligt många lösningar.

b) Vi är interesserad i ekvationssystemet

$$\begin{cases} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ 3x & + & 4y & + & 6x & = & 1 \end{cases}$$

Av beräkningarna ovan ger detta, efter Gauss-Jordan, matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösningsmängden ges av $z = t$, $y = 1$ och $x = -1 - 2t$.

Svar.

(a) Unik lösning $a \neq 2$, ingen lösning $a = 2$ och $b \neq 1$. Oändligt många lösningar $a = 2, b = 1$.

(b) Linjen $(-1 - 2t, 1, t)$ godtyckliga tal t.

2. Alla delrum i $\mathbb{R}^n$ kan ses både som nollrum och som bildrum till linjära avbildningar. Det finns i allmänhet många linjära avbildningar som ger samma nollrum och samma bildrum. Låt W vara det delrum i $\mathbb{R}^3$ som ges av ekvationen $x + 4y - 3z = 0$.
   (a) Bestäm matriserna för två olika avbildningar $S_1, S_2\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ som har W som nollrum. **(3 p)**
   (b) Bestäm en 3×3-matris, på reducerad trappstegsform, som har W som nollrum. **(1 p)**

Lösningsförslag. Planet W ges av ekvationen $x + 4y - 3z = 0$. Vi söker avbildningar $S_1, S_2\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ som har W som nollrum. Orthogonala projektionen ned på normallinjen till W är ett exempel. Vi skall ge matrisrepresentationer för dessa avbildningar, och det räcker då att ge två olika (3×3)-matriser som har W som nollrum. Matriserna

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

är olika. Nollrummen till båda matriserna är precis W, och matrisen A_2 är även på reducerad trappstegsform.

Svar.
(a) -
(b) -

3. Bestäm alla värden av parametern a så att matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

är diagonaliserbar. **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi börjar med att bestämma det karakteristiska polynomet $c(A)$ till matrisen A. Vi har att

$$c(A) = (\lambda - 2)(\lambda - 3) - a = \lambda^2 - 5\lambda + 6 - a.$$

Nollställerna till polynomet $c(A)$, vilket ger egenvärden, är det nästa vi bestämmer. Vi har att $c(A) = 0 = (\lambda - \frac{5}{2})^2 + 6 - a - \frac{25}{4}$, vilket ger

$$\lambda = \frac{5}{2} \pm \sqrt{a + \frac{1}{4}}.$$

Av detta ser vi att om $a < -\frac{1}{4}$ då har $c(A)$ inga reella rötter, men komplexa sådana. Då kan inte matrisen vara diagonaliserbar. Om $a > -\frac{1}{4}$ då har $c(A)$ två olika, reella rötter. Och då vet vi att matrisen är diagonaliserbar. Vi kollar explicit specialfallet med en dubbelrot, dvs $a = -\frac{1}{4}$. Med $a = -\frac{1}{4}$ har vi det dubbla egenvärdet $\frac{5}{2}$, och vi vill vet om egenrummet har dimension två eller bara dimension ett. Insätter vi in egenvärdet $\lambda = \frac{5}{2}$ i matrisen, så ges egenrummet som nollrummet till matrisen

$$\frac{5}{2}I - A = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} - 2 & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{5}{2} - 3 \end{bmatrix}$$

Detta är inte nollmatrisen, vilket betyder att egenrummet har dimension 1, och att matrisen inte är diagonaliserbar.

Svar.

(a) Diagonaliserbar med $a > -\frac{1}{4}$.

DEL B

4. Bestäm standardmatrisen för den linjär avbildning $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vars matris med avseende till basen $\mathfrak{B} = \left(\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}\right]\right)$ är

$$\begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

(4 p)

Lösningsförslag. Matrisen $A = \begin{bmatrix} -1 & 11 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$ representerar avbildningen $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ med avseende på basen $\mathfrak{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ där

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Detta betyder att första kolumnen i matrisen A är koordinatmatrisen till vektorn $[T(\vec{u})]_{\mathfrak{B}}$, och andra kolumnen är vektorn $[T(\vec{v})]_{\mathfrak{B}}$. Det vill säga

$$T(\vec{u}) = -\vec{u} + 2\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

och att

$$T(\vec{v}) = 11\vec{u} - 8\vec{v} == \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \end{bmatrix}.$$

Vidare så vill vi uttrycka standardbasen $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ i basen $\mathfrak{B}$. Vi har att

$$\vec{e}_1 = \vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} \quad \text{och} \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{2}\vec{v}.$$

Detta ger nu att

$$T(\vec{e}_1) = T(\vec{u}) - \frac{1}{2}T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 11 \\ -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -13 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Och på liknande sätt erhåller vi att $T(\vec{e}_2) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 11 \\ -5 \end{bmatrix}$. Standardmatrisen för avbildningen blir då

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -13 & 11 \\ 11 & -5 \end{bmatrix}.$$

Svar.

(a) Standardmatrisen är $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -13 & 11 \\ 11 & -5 \end{bmatrix}$.

5. Vid en mätning av två storheter har vi fått följande mätvärden

I (mA)	0	2	4	6
U (mV)	1	7	8	10

Två forskare tvistar om det finns ett linjärt samband $U = RI$, eller om det krävs en konstantterm för att förklara sambandet, $U = RI + U_0$.

(a) Ställ upp de två minsta-kvadratproblem som fås från de givna mätdata för att bestämma de okända parametrarna i de två modellerna. **(2 p)**

(b) Lös minsta-kvadratproblemen och formulera adekvata slutsatser. **(1 p)**

(c) Förklara varför minsta-kvadratavvikelsen säkerligen är mindre i det andra fallet. **(1 p)**

Lösningsförslag. a) Den första modellen ger ett ekvationssystem med fyra ekvationer och en okänd x, medan den andra modellen ger ett ekvationssystem med fyra ekvationer och två okända x och a. Om vi låter

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix},$$

då ges den första modellen av matrisekvationen $A_1 \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = B$, och den andra modellen ges av matrisekvationen

$$A_2 \begin{bmatrix} x \\ a \end{bmatrix} = B.$$

Dessa båda ekvationssystem är inkonsistenta. Minsta-kvadratproblemet ges av de konsistenta ekvationssystemen

$$A_1^T A_1 \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = A_1^T \quad \text{och} \quad A_2^T A_2 \begin{bmatrix} x \\ a \end{bmatrix} = A_2^T B.$$

Skriver vi ut dessa matrisprodukt, får vi

$$56x = 106 \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 56 & 12 \\ 12 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

b) Lösningen till den första modellen ges av $x = \frac{53}{28}$. Lösningen till den andra modellen ges av

$$\begin{bmatrix} x \\ a \end{bmatrix} = \frac{1}{80} \begin{bmatrix} 4 & -12 \\ -12 & 56 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 106 \\ 26 \end{bmatrix} = \frac{1}{80} \begin{bmatrix} 8(53 - 3 \cdot 13) \\ 8(2 \cdot 91 - 3 \cdot 53) \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 14 \\ 23 \end{bmatrix}.$$

Vilket ger den bästa, i minsta-kvadrat meningen, approximationen till problem, med given modell.

c) I den andra modellen har vi två okända, vilket ger mera flexibilitet, och följdaktligen mindre avvik, att anpassa modellen (linjen) till mätdata (punkt i planet).

Svar.

(a) -

(b) -

(c) -

6. Låt ℓ vara linjen $(1,0,1)+t(2,1,-1)$ och m vara linjen $(0,1,2)+t(1,2,1)$.
   (a) Det finns många plan i $\mathbb{R}^3$ som varken skär ℓ eller m. Alla dessa är parallella. Bestäm en normalvektor till dem. **(1 p)**
   (b) Bestäm en ekvation för det plan i $\mathbb{R}^3$ som varken skär ℓ eller m och som har samma avstånd till ℓ som till m. **(3 p)**

Lösningsförslag. a) En riktningsvektor för linjen ℓ är vektorn $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, och speciellt är linjen $\ell' = t\vec{u}$, tal t, parallell med linjen ℓ. Vektorn $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en riktningsvektor för linjen m. Planet genom origo, som innehåller vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$ har normalvektor

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Plan med normalvektor $\vec{n}$ vill vara parallella med linjerna ℓ och m. Av dessa plan vill ett ändlig antal (en eller två) innehålla linjen ℓ eller m.

b) Planet vi söker ges av ekvationen

$$x - y + z + d = 0,$$

där talet d kvarstår att bestämma. Vi vet att linjerna ℓ och m är parallella med planet. Speciellt har vi att avståndet mellan planet och linjen ℓ är lika med avståndet $d(\ell)$ mellan planet och vilken som helst punkt på linjen ℓ, tex $(1,0,1)$. Avståndet är alltså

$$d(\ell) = \frac{|1 - 0 + d|}{\sqrt{3}}.$$

Och på samma sätt har vi att avståndet från planet till linjen m ges som avståndet $d(m)$ från planet till punkten $(0,1,2)$. Vi har

$$d(m) = \frac{|0 - 1 + 2 + d|}{\sqrt{3}}.$$

Talet d bestäms av sambandet $|2+d| = |1+d|$. Detta ger antingen att $2+d = 1+d$, vilket inte har någon lösning. Eller att $2+d = -1-d$, vilket har lösningen $d = -\frac{3}{2}$. En ekvation till det sökta planet är $2x - 2y + 2z - 3 = 0$.

Svar.

(a) Normalvektor är $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) En ekvation till planet är $2x - 2y + 2z - 3 = 0$.

DEL C

7. Låt A vara en symmetrisk 3×3-matris. Antag att 1 är ett egenvärde till A, och att alla vektorer $\vec{v}$ som ligger i planet $x - y + 2z = 0$ uppfyller $A\vec{v} = 2\vec{v}$. Bestäm
$$A \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$
(4 p)

Lösningsförslag. Vi använder följande två egenskaper för symmetriska matriser(se kapitel 8 i kursboken):
(E1.) Varje symmetrisk matris kan diagonaliseras.
(E2.) Egenvektorer för en symmetrisk matris som hör till olika egenvärden är ortogonala.
Först väljer vi två linjärt oberoende egenvektorer som ligger i planet $x - y + 2z = 0$ och hör till egenvärdet 2. Vi kan t ex välja
$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Enligt antagandet hör vektorerna $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ till egenvärdet 2. Enligt (E1.) är en egenvektor $\vec{v}_3$ som hör till egenvärdet 1 ortogonal mot alla vektorer som hör till egenvärdet 2. Därför kan vi välja
$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
Om vi betecknar
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ och } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
har vi
$$P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$
Härav
$$A = PDP^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 11 & 1 & -2 \\ 1 & 11 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Sluligen

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Svar.

(a) Den sökta vektorn är $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

8. Den linjära avbildningen $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bestäms av

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \quad T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}.$$

Delrummet W av $\mathbb{R}^3$ ges av ekvationen $3x + 4y - 5z = 0$. Vi får en *inducerad* linjär avbildning $T_W\colon W \to \mathbb{R}^3$ som skickar $\vec{w}$ i W till $T(\vec{w})$. Bestäm en matris för T_W med avseende på någon bas för W. **(4 p)**

Lösningsförslag. För att bestämma vilka vektorer som ligger i *W* löser vi ekvationen $3x + 4y - 5z = 0$ och får $x = -\frac{4}{3}y + \frac{5}{3}z$. Om vi betecknar fria variabler $y = 3s$ och $z = 3t$ får vi

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{4}{3}s + \frac{5}{3}t\\s\\t\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\0\\1\end{pmatrix}$$

Vi kan bilda en bas för *W* med t ex

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix} \text{ och } \vec{b}_2 = \begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}.$$

Notera att avbildningen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har matrisen

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 0 & -1\\3 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Bilderna av $\vec{b}_1$ och $\vec{b}_2$ bestämmer vi med hjälp av matrisen A:

$$T(\vec{b}_1) = A\vec{b}_1 = \begin{pmatrix}-1\\-8\\-9\end{pmatrix}$$

$$T(\vec{b}_2) = A\vec{b}_2 = \begin{pmatrix}8\\7\\15\end{pmatrix}$$

Vektorerna $T(\vec{b}_1)$ och $T(\vec{b}_2)$ bildar kolonner i den sökta matrisen för avbildningen T_w . Alltså

$$\begin{bmatrix}-1 & 8\\-8 & 7\\-9 & 15\end{bmatrix}$$

är matrisen för avbildningen T_w i basen $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$

Svar.

(a) -

9. Låt

$$U = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{och} \quad V = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Låt vidare W vara det delrum i $\mathbb{R}^5$ som består av alla vektorer som ligger i både U och V. Bestäm en bas för W. **(4 p)**

Lösningsförslag. Om en vektor $\vec{v}$ ligger i både U och V då finns det skalärer x, y, z och w sådana att

$$\vec{v} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Detta leder till systemet

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x+y & = & -2z+w \\ 0 & = & 0 \\ x+2y & = & z-w \\ 0 & = & 0 \\ 2x+y & = & z \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{cccccc} x & +y & +2z & -w & = 0 \\ & & & 0 & = 0 \\ x & +2y & -z & +w & = 0 \\ & & & 0 & = 0 \\ 2x & +y & -z & & = 0 \end{array} \right.$$

$$\sim \left\{ \begin{array}{cccccc} x & +y & +2z & -w & = 0 \\ & y & -3z & +2w & = 0 \\ & -y & -5z & +2w & = 0 \\ & & & 0 & = 0 \\ & & & 0 & = 0 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{cccccc} x & +y & +2z & -w & = 0 \\ & y & -3z & +2w & = 0 \\ & & -8z & +4w & = 0 \\ & & & 0 & = 0 \\ & & & 0 & = 0 \end{array} \right.$$

Systemet har oändligt många lösningar: $x = t, y = -t, z = t, w = 2t$. Varje vektor $\vec{v}$ som ligger i både U och V har följande form:

$$\vec{v} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alltså $V_3 = \mathrm{span}(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$

Därför är vektorn $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ en basvektor till W.

Svar.

(a) En bas utgörs av vektorn $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.