KTH Teknikvetenskap

SF1624, Algebra och Geometri
Lösningsförslag till extra tentamen

DEL A

1. Låt L vara linjen genom $A = (3, 5, 5)$ och $B = (4, 5, 7)$. Planet Π ges av ekvationen $x + y + z - 7 = 0$.
   (a) Bestäm skärningen Q mellan linjen L och planet Π. **(1 p)**
   (b) Bestäm projecktionen av $(1, 1, 1)$ ned på linjen L. **(1 p)**
   (c) Bestäm vektorn $\vec{u}$ som bestäms av ekvationen
   $$\vec{QA} = \vec{u} + \vec{n},$$
   där $\vec{n}$ är någon normalvektor till Π, och vinkelrät med $\vec{u}$. **(2 p)**

Lösningsförslag. a) Vi har att linjen $L = A + t(\vec{BA})$, vilket ger $L = (3, 5, 5) + t(1, 0, 2)$, där t genomlöper de reella talen, och där $\vec{v} = (1, 0, 2)$ är en riktningsvektor för linjen. Insätter vi linjens koordinater i planets Π sin ekvation erhåller vi

$$0 = x + y + z - 7 = (3 + t) + (5) + (5 + 2t) - 7 = 6 + 3t.$$

Detta ger att $t = -2$, och skärningspunkten $Q = (3 - 2, 5, 5 - 4) = (1, 5, 1)$.

b) Linjen L har riktningsvektor $\vec{v} = (1, 0, 2)$, och detta ger att projektionen av $(1, 1, 1)$ ned på linjen L ges som

$$\text{proj}_L(1, 1, 1) = \frac{(1, 1, 1) \cdot (1, 0, 2)}{||(1, 0, 2)||^2}(1, 0, 2) = \frac{3}{5}(1, 0, 2).$$

c) Vi har att $(1, 1, 1)$ är en normalvektor till planet Π, och därför finns det ett tal t_0 sådan att ekvationen

$$\vec{QA} = \vec{u} + \vec{n} = \vec{u} + t_0(1, 1, 1).$$

Tar vi nu skalärprodukten med $(1, 1, 1)$ så blir ekvationen ovan

$$\vec{QA} \cdot (1, 1, 1) = t_0||(1, 1, 1)||^2.$$

Vi har vidare att $\vec{QA} = (1, 5, 1) - (3, 5, 5,) = (-2, 0, -4)$. Detta ger nu att

$$t_0 = \frac{-2 + 0 - 4}{3} = -2.$$

Nu som vi har bestämd t_0, har vi också ett uttryck för $\vec{u}$,

$$\vec{u} = \vec{QA} - \vec{n} = (-2, 0, -4) - -2(1, 1, 1) = (0, 2, -2).$$

2. Vektorrummet $W \subseteq \mathbf{R}^4$ spänns upp av vektorerna

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm en bas β för W. **(2 p)**

(b) Bestäm koordinatmatrisen för $\vec{w} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 & 3 \end{bmatrix}^{Tr}$ med avseende på basen β. **(2 p)**

Lösningsförslag. a) Vi har att $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$, och att $2\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}$. Vidare är det klart, av koordinat två att vektorn $\vec{a}$ och vektorn $\vec{b}$ är linjärt oberoende, och därför en bas β för W.

b) Vi vill skriva $\vec{w} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 & 3 \end{bmatrix}^{Tr}$ som en summa $s\vec{a} + t\vec{b}$. Detta ger ett ekvationssystem i två okända s och t, vilket har lösning $s = 4$ och $t = -1$. Detta ger att koordinatmatrisen

$$[\vec{w}]_\beta = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

3. Avbildningen $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ ges av matrisen
$$A = \frac{1}{41}\begin{bmatrix} -9 & 40 \\ 40 & 9 \end{bmatrix}.$$
Avbildningen T är en spegling om en linje L. Bestäm denna linje L. **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi har att matrisen A representerar en spegling, och specielt vet vi att $\lambda = 1$ är ett egenvärd. Speglingslinjen är egenrummet tillhörande egenvärdet $\lambda = 1$. Vi söker lösningarna till ekvationen $AX = X$, eventuelt $(I - A)X = 0$. Vi bestämmer $I - A$ som
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{41}\begin{bmatrix} -9 & 40 \\ 40 & 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{41}\begin{bmatrix} 41+9 & -40 \\ -40 & 41-9 \end{bmatrix}.$$
Andra raden i matrisen $I - A$ försvinner vid Gauss-Jordan elimination, vilket betyder att vi söker $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ sådana att
$$\frac{1}{41}\begin{bmatrix} 5 \cdot 10 & -4 \cdot 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.$$
Med andra ord, den sökta speglinslinjen ges av ekvationen $5x - 4y = 0$.

DEL B

4. Använd minsta kvadratmetoden för att bestämma en ekvation för det plan H i rummet, som ligger närmast punkterna

$$(-1,-1,3), \quad (-1,1,5), \quad (0,0,4), \quad (1,-1,4) \quad \text{och} \quad (1,1,3).$$

Du kan anta att ekvationen för planet H är på formen $ax + by + z + d = 0$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Om vi låter A vara matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

då söker vi lösningarna till ekvationssystemet i okända a, b och d som beskrivs av matrisekvationen

$$A \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ -4 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Systemet är inkonsistent, och vi vill använda minsta kvadratmetoden för att bestämma en punkt (a, b, d) i $\mathbf{R}^3$ som avbildas med A på den punkt som ligger närmast $B = (-3, -5, -4, -4, -3)^{tr}$. Vi beräknar

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad A^T B = -\begin{bmatrix} -8+7 \\ -7+8 \\ 19 \end{bmatrix}.$$

Vi söker därmed lösningarna till ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -19 \end{bmatrix}.$$

Detta ger $a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{4}$ och $d = -\frac{19}{5}$.

5. Avbildningen $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

(a) Visa att linjen $L = \{(2t, 4t, 6t)\}$ (godyckliga tal t) är ett egenrum. **(1 p)**

(b) Bestäm samtliga egenrum till avbildningen T. **(3 p)**

Lösningsförslag. a) Vi utför matrismultiplikationen

$$A \cdot \begin{bmatrix} 2t \\ 4t \\ 6t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ 2t - 6t \\ 4t + 8t - 18t \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{bmatrix} 2t \\ 4t \\ 6t \end{bmatrix}.$$

Detta visar att linjen L är ett egenrum, tillhörande egenvärdet $\lambda = -1$.

b) Vi börjar med att bestämma det karakteristiska polynomet till A. Vi har att

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 1 \\ -2 & -2 & \lambda+3 \end{bmatrix}\right) = (\lambda+1)(\lambda(\lambda+3)+2).$$

Vi har att $\lambda(\lambda+3)+2 = \lambda^2+3\lambda+2 = (\lambda+1)(\lambda+2)$. Detta ger att det karakteristiska polynomet till A är $(\lambda+1)^2(\lambda+2)$.

Egenrummet tillhörande egenvärdet $\lambda = -1$ ges som nollrummet til matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Det vill säga planet som ges av ekvationen $x + y - z = 0$.

Egenrummet tillhörande egenvärdet $\lambda = -2$ är linjen som ges som nollrummet till matrisen

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Efter Gauss-Jordan elimination ser vi att detta är linjen $(0, t, 2t)$, godtyckliga tal t.

6. (a) Lösningsmängden $V \subset \mathbf{R}^2$ till ekvationen $xy = 0$ ger två linjer i planet. Avgör om V är ett vektorrum. **(2 p)**

   (b) Mängden $W \subseteq \mathbf{R}^2$ är alla talpar på formen $W = \{(n, n)\}$, där n genomlöper heltalen $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Avgör om W är ett vektorrum. **(2 p)**

Lösningsförslag. a) Nej, denna mängd är ej sluten under sum. Vi har, t.ex, att $P = (1, 0)$ och $Q = (0, 1)$ båda satisfierar ekvationen $xy = 0$, vilket betyder att P och Q är med i mängden V. Men $P + Q = (1, 1)$ satisfierar inte ekvationen $xy = 0$, och är då inte med i V.

b) Nej, denna mängd är ej sluten under skalärprodukt. Vi har att, t.ex, $R = (1, 1)$ är med i mängden W. Men $\frac{1}{2}R = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ är inte med i W.

DEL C

7. Låt W vara delrummet i $\mathbf{R}^4$ som spänns upp av vektorerna

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Bestäm ett (linjärt) ekvationssystem vars lösningsmängd är W. **(4 p)**

Lösningsförslag. Då $\vec{u}$ och $\vec{v}$ spänner upp W så följer det att lösningsmängden till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - 2z - w & = 0 \\ 2x + 3y - 2w & = 0 \end{cases}$$

är det ortogonala komplementet $W^\perp$. Vi bestämmer en bas för $W^\perp$ med Gauss-Jordan elimination. Den reducerade trappstegsmatrisen blir

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har att $W^\perp$ är mängden

$$W^\perp = \{ \begin{bmatrix} -6s + t \\ 4s \\ s \\ t \end{bmatrix} \text{godtyckliga tal} s, t \}.$$

En bas för $W^\perp$ ges av vektorerna $w_1 = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{tr}$ och $w_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{tr}$. Nu följer det, av samma argument, att lösningsmängden till ekvationssystemet

$$\begin{cases} -6x + 4y + z & = 0 \\ x + w & = 0 \end{cases}$$

är ortogonala komplementet $(W^\perp)^\perp = W$.

8. (a) Bestäm en (3×3)-matris med ett tre-dimensionellt egenrum, men enbart med ett egenvärde. **(1 p)**
   (b) Bestäm en (3×3)-matris med enbart ett egenvärde, och med egenrum av dimension två. **(3 p)**

Lösningsförslag. a) Identitetsmatrisen är ett exempel på en matris som har ett enda egenvärde, och där varje vektor är en egenvektor.

b) Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Denna matris är övretriangulär vilket ger att det karakteristiska polynomet är $(\lambda - 1)^3$. Det följer att matrisen bara har ett egenvärde, och att detta egenvärdet har algebraisk multiplicitet tre. Vi ser vidare att vektorer på formen $\begin{bmatrix} x & y & 0 \end{bmatrix}^{tr}$ är egenvektorer. Detta betyder att egenrummet, tillhörande det enda egenvärdet $\lambda = 1$, har åtminstonde dimension två. Vi måste visa att egenrummet inte har dimension tre. För att visa detta är det nog att hitta en vektor som inte är en egenvektor. Vektorn $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{Tr}$ skickas av A till vektorn $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, och är därmed inte en egenvektor.

9. Låt $T\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ vara en linjär avbildning. Låt A vara matrisen som representerar T med avseende på en fixerad bas β. Determinanten till avbildningen T definieras som determinanten till matrisen A. Visa att detta är väldefinierad, dvs. att determinanten är oberoende av val av bas. **(4 p)**

Lösningsförslag. Låt B vara matrisrepresentationen av T med avseende på en bas γ. Vi skall visa att $\det(B) = \det(A)$. Låt P vara övergångsmatrisen från basen β till basen γ. Vi har då sambandet $A = P^{-1}BP$. Determinanten respekterar produkt, vilket ger

$$\det(A) = \det(P^{-1}BP) = \det(P^{-1})\det(B)\det(P).$$

Vi har vidare att $\det(P^{-1}) = \frac{1}{\det(P)}$, och påståendet är visat.