SF1624 Algebra och geometri
Tentamen med lösningsförslag
Torsdag, 18 april 2019

KTH Teknikvetenskap

1. Betrakta ekvationssystemet nedan.

$$\begin{cases} x & + & ay & + & z & = & -1 \\ ax & + & y & + & az & = & 1 \\ -2x & + & (1-2a)y & - & z & = & 3 \end{cases}$$

(a) För vilka värden på talet a saknar systemet lösningar? **(2 p)**

(b) Finn ett a sådant att systemet har oändligt många lösningar och bestäm dessa lösningar. **(4 p)**

Lösningsförslag. Ekvationssystemet har den utökade matrisen

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & -1 \\ a & 1 & a & 1 \\ -2 & 1-2a & -1 & 3 \end{array}\right].$$

Genom Gausselimination får man:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & -1 \\ a & 1 & a & 1 \\ -2 & 1-2a & -1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[r3 \leftarrow r3+2r1]{r2 \leftarrow r2 - a \cdot r1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & -1 \\ 0 & 1-a^2 & 0 & 1+a \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Om $a \neq -1$ så kan man dela andra raden med $1+a$ och får

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & -1 \\ 0 & 1-a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Andra raden säger alltså att $(1-a)y = 1$. Om $a = 1$ så saknar denna ekvation lösning. Om däremot $a \neq 1, -1$ så är $y = \frac{1}{1-a}$ och därmed $z = 1 - y = 1 - \frac{1}{1-a}$ och $x = -1 - ay - z$ en entydig lösning. Det återstår att kontrollera fallet $a = -1$. Matrisen lyder i detta fall:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Vi ser att lösningsmängden i fallet $a = -1$ är

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2t \\ 1-t \\ t \end{bmatrix} \text{ för } t \text{ godtyckligt tal} \right\}$$

2. Låt A vara matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Finn en inverterbar matris P och en diagonalmatris D sådana att $P^{-1}AP = D$.

Lösningsförslag. En 3×3-matris är diagonaliserbar om och endast om den har en uppsättning av 3 stycken linjärt oberoende egenvektorer. Vi bildar då en matris P vars kolonner består av tre linjärt oberoende egenvektorer. Tillhörande diagonalmatrisen D har på diagonalen motsvarande egenvärden. Då gäller $P^{-1}AP = D$.

Först löser vi den karakteristiska ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$, dvs

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Vi utvecklar efter andra kolonnen och får

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Härav $(2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$ eller $(2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$. Alltså har vi två distinkta egenvärden $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 2$ (λ_2 är en dubbelrot i ovanstående ekvation). Tillhörande egenvektorer får vi genom att lösa ekvationen $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ dvs

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

i) För $\lambda = 1$ har vi

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Gausselimination ger följande lösningar

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

som är egenvektorer för alla $t \neq 0$. Motsvarande egenrum är $E_1 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

ii) För $\lambda = 2$ har vi

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Gausselimination ger

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Motsvarande egenrum är $E_2 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Notera att egenvektorer från olika egenrum är linjärt oberoende. Alltså har matrisen tre linjärt oberoende egenvektorer $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och därmed är diagonaliserbar.

Vi använder tre linjärt oberoende egenvektorer och bildar matrisen $P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (som är inverterbar eftersom kolonnerna är linjärt oberoende vektorer). Med motsvarande egenvärden bildar vi $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Då gäller $P^{-1}AP = D$.

3. Planet Π i rummet innehåller de tre punkterna

$$(1, 0, 0),\ (2, 3, 0),\ (1, 3, 1).$$

(a) Bestäm en ekvation på formen $ax + by + cz = d$ för planet Π. **(2 p)**

(b) Bestäm en parameterframställning av den linje L som passerar origo och är ortogonal mot planet Π. **(2 p)**

(c) Bestäm skärningspunkten mellan L och Π. **(2 p)**

Lösningsförslag. Som normalvektor till planet kan vi ta

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Planets ekvation blir

$$3x - y + 3z = 3.$$

Den sökta linjens ekvation blir

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Den sökta skärningspunkten fås genom att sätta in linjens parameterform i planets ekvation:

$$3 \cdot 3t + t + 3 \cdot 3t = 3,$$

alltså $t = \frac{3}{19}$ och skärningspunkten är därmed

$$\frac{3}{19} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

4. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

vara matrisen associerad till en avbildning T i basen $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (0, 2, 2), (0, 0, 3)\}$.

(a) Bestäm dimensionen av kärnan $\ker(T)$ och bildrummet $\operatorname{ran}(T)$. **(2 p)**

(b) Bestäm standardmatrisen för T. **(4 p)**

Lösningsförslag.

(a) Först bestämmer vi rangen till matrisen A med hjälp av elementära radoperationer. Vi byter plats på rad 1 och rad 3 och får

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Två ledande ettor i matrisens trappform visar att $\operatorname{rang}(A) = 2$. Därmed är dimensionen av avbildningens bildrum $\dim(\operatorname{ran}(T)) = \operatorname{rang}(A) = 2$.

Enligt dimensionssatsen (3×3 matris) gäller $\dim(\ker(A)) + \operatorname{rang}(A) = 3$ och alltså

$$\dim(\ker(T)) = \dim(\ker(A)) = 3 - \operatorname{rang}(A) = 1.$$

(b) Låt P beteckna basbytesmatris från basen $\mathcal{B}$ till standardbasen. Dess kolonner är basvektorernas koordinater:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Låt S beteckna avbildningens matris i standardbasen. Enligt sats 8.1.3 i kursboken gäller då

$$S = PAP^{-1}.$$

Vi beräknar inversen genom att utföra elementära radoperationen på matrisen $[P|I]$ tills vi får $[I|P^{-1}]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -r1+r2 \\ -r1+r3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -r2+r3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (1/2) \\ (1/3) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right]$$

Alltså är

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Slutligen är:

$$S = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & -2/3 & 11/3 \end{bmatrix}.$$

5. Funktionen $f(t) = Ce^{kt}$ beskriver mängden (i gram) av ett radioaktivt ämne vid tidpunkten t (timmar). Mängden $f(t)$ har mätts upp vid några tidpunkter:

- Vid tidpunkten $t = 0$ fanns enligt mätningen 1 gram av ämnet
- Vid tidpunkten $t = 1$ fanns enligt mätningen 0.8 gram av ämnet
- Vid tidpunkten $t = 2$ fanns enligt mätningen 0.5 gram av ämnet

Bestäm konstanterna C och k så att $f(t) = Ce^{kt}$ i minstakvadratmening bäst anpassas till mätdata. **(6 p)**

Lösningsförslag. För en exakt lösning måste systemet

$$\begin{cases} Ce^{0k} = 1 \\ Ce^{1k} = 0.8 \\ Ce^{2k} = 0.5 \end{cases}$$

lösas. Detta system är överbestämt och dessutom inte linjärt. Genom att ta logaritmen kan vi göra det linjärt. Om vi sätter $c = \ln C$ så blir systemet:

$$\begin{cases} c + 0k = \ln 1 = 0 \\ c + 1k = \ln 0.8 \\ c + 2k = \ln 0.5. \end{cases}$$

Nu är systemet linjärt, men fortfarande överbestämt, så vi använder oss av minstakvadratmetoden. Ekvationen vi ska lösa är

$$A\begin{bmatrix} c \\ k \end{bmatrix} = \vec{b} \quad \text{där } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{och } \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ln 0.8 \\ \ln 0.5 \end{bmatrix}.$$

Enligt minstakvadratmetoden ska vi istället lösa

$$A^T A \begin{bmatrix} c \\ k \end{bmatrix} = A^T \vec{b}.$$

Vi beräknar $A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ och $A^T \vec{b} = \begin{bmatrix} \ln 0.4 \\ \ln 0.2 \end{bmatrix}$. Gausseliminering ger nu

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & \ln 0.4 \\ 3 & 5 & \ln 0.2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & \ln 0.4 \\ 0 & 2 & \ln \frac{0.2}{0.4} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{1}{3}\ln 0.4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\ln 0.5 \end{array}\right]$$

som har lösningen $k = \frac{1}{2}\ln 0.5$ och $c = \frac{1}{3}\ln 0.4 - \frac{1}{2}\ln 0.5$. Slutligen är

$$C = e^c = \frac{\sqrt[3]{0.4}}{\sqrt{0.5}} = \frac{2^{5/6}}{5^{1/3}}$$

6. Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. Antag att $\vec{v} \neq \vec{0}$ och $\vec{w} \neq \vec{0}$. Betrakta följande matris:

$$A = \vec{v}(\vec{w})^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

(a) Bevisa att A har rang 1 och $\operatorname{col}(A) = \operatorname{span}(\vec{v})$. **(2 p)**

(b) Bevisa att $\vec{v}$ är egenvektor till A med egenvärde $\vec{v} \cdot \vec{w}$. **(1 p)**

(c) Under vilka förutsättningar på $\vec{v}$, $\vec{w}$ är A diagonaliserbar? **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) Från

$$A = \vec{v}(\vec{w})^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{bmatrix}$$

ser vi att kolonnerna i matrisen A är $b_1\vec{v}$, $b_2\vec{v}$, $\ldots$,$b_n\vec{v}$. Eftersom $\vec{w} \neq \vec{0}$ är minst en av $b_k \neq 0$ och därför är kolonnrummet $\operatorname{col}(A) = \operatorname{span}(\vec{v})$. Eftersom $\vec{v} \neq \vec{0}$ är $\operatorname{rang}(A) = 1$.

(b) Enligt definitionen av matrisen A har vi

$$A\vec{v} = \left(\vec{v}\vec{w}^T\right)\vec{v} = \vec{v}\left(\vec{w}^T\vec{v}\right) = \vec{v}\,(\vec{w} \cdot \vec{v})$$

Eftersom skalärprodukten $\vec{w} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{w}$ är ett tal λ, har vi $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Med andra ord har vi bevisat att $\vec{v}$ är en egenvektor till A med egenvärde $\lambda = \vec{v} \cdot \vec{w}$.

(c) Om $n = 1$ har matrisen A endast ett element och är därmed diagonaliserbar. Vi antar därför att $n > 1$. Från (a)-delen vet vi att $\operatorname{rang}(A) = 1 < n$ och alltså är $\det(A) = 0$. Det betyder att 0 är ett egenvärde till A. Den geometriska multipliciteten av $\lambda = 0$ är

$$\dim(E_0) = \dim\big(\ker(A - 0I)\big) = \dim\big(\ker(A)\big) = n - \operatorname{rang}(A) = n - 1$$

enligt dimensionssatsen. Enligt (b)-delen är även skalärprodukten $\vec{v}\cdot\vec{w}$ ett egenvärde till A. Matrisen är diagonaliserbar om och endast om summan av de geometriska multipliciteterna av alla egenvärden är n. Vi betraktar två fall: $\vec{v} \cdot \vec{w} \neq 0$ och $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

Fall 1: $\vec{v} \cdot \vec{w} \neq 0$. I detta fall har vi två olika egenvärden: $\lambda = 0$ med geometrisk multiplicitet $n-1$ och $\lambda = \vec{v} \cdot \vec{w} \neq 0$ med geometrisk multiplicitet ≥ 1 (och därmed 1). Eftersom $n = (n-1) + 1$ så är A diagonaliserbar.

Fall 2: $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$. Vi kommer att visa att det bara finns ett enda egenvärde, $\lambda = 0$. Vi har redan sett att dess geometriska multiplicitet är $n-1$. Den algebraiska multipliciteten för ett egenvärde är större än eller lika med egenvärdets geometriska multiplicitet. Därför är $\lambda = 0$ en rot till det karakteristiska polynomet med multiplicitet $\geq n-1$. Låt $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_{n-1} = 0, \lambda_n$ vara rötterna till $\det(A - \lambda I)$. Vi ska visa att även $\lambda_n = 0$.

Enligt sats 4.4.12 i kursboken gäller att summan av egenvärdena är spåret:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1} + \lambda_n = \operatorname{tr}(A).$$

Men spåret är $\operatorname{tr}(A) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ och alltså är $\lambda_n = 0$. Därmed har vi visat att den algebraiska multipliciteten för egenvärdet $\lambda = 0$ är lika med n medan egenvärdets geometriska multiplicitet är $n-1$. Härav följer att matrisen inte är diagonaliserbar i det här fallet.

Slutsats: Matrisen är diagonaliserbar om och endast $\vec{v} \cdot \vec{w} \neq 0$, eller med andra ord, om och endast om $\vec{v}$ och $\vec{w}$ inte är ortogonala. (Notera att slutsatsen gäller även om $n = 1$ eftersom $\vec{v} \neq 0$ och $\vec{w} \neq 0$.)