SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen 12 januari 2022

Del A

1. Planet P är parallellt med vektorerna $(0,3,2)$ och $(1,0,-2)$ och går genom punkten $A=(0,-3,1)$. Bestäm avståndet mellan planet P och punkten $B=(-1,4,3)$.

Lösning. En normal till planet P ges av

$$\vec{n} := (0,3,2)\times(1,0,-2) = (-6,2,-3).$$

Givet en punkt $A\in P$, ges avståndet d mellan planet P och punkten B av

$$d = \|proj_{\vec{n}}\vec{AB}\| = \frac{|\vec{n}\cdot(\vec{B}-\vec{A})|}{\|\vec{n}\|} = \frac{(-6,2,-3)\cdot(-1,7,2)}{\|(-6,2,3)\|} = 2.$$

$\square$

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Visa att vektorn $\vec{v}$ är en egenvektor till A, och bestäm motsvarande egenvärde. **(1 p)**

(b) Talen 1 och 2 är egenvärden för matrisen A. Bestäm alla egenvektorer till A som motsvarar dessa egenvärden. **(3 p)**

(c) Bestäm, om det är möjligt, en diagonalmatris D och en basbytesmatris P så att $A = PDP^{-1}$. (Matrisen P^{-1} behöver inte bestämmas.) **(2 p)**

Lösning. (a) Eftersom $A\vec{v} = 3\vec{v}$ så är $\vec{v}$ en egenvektor till A (med egenvärde 3).

(b) För att bestämma alla egenvektorer med egenvärde 1 bestämmer vi nollskilda lösningar till ekvationen $(A - 1 \cdot I)\vec{x} = \vec{0}$. Lösningarna ges av

$$\vec{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ där } (s, t) \neq (0, 0).$$

Observera att vektorerna som står efter s och t i högerledet ovan är linjärt oberoende.

För att bestämma alla egenvektorer med egenvärde 2 bestämmer vi nollskilda lösningar till ekvationen $(A - 2 \cdot I)\vec{x} = \vec{0}$. Lösningarna ges av

$$\vec{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ där } s \neq 0.$$

(c) Eftersom egenvektorer till olika egenvärden är linjärt oberoende och vi har två linjärt oberoende egenvektorer till egenvärdet 1, så får vi en bas till $\mathbb{R}^4$ bestående av egenvektorer till A med hjälp av (a) och (b) ovan. Matrisen P fås genom att sätta dessa som kolonnvektorer i en matris. Matrisen D fås genom att sätta motsvarande egenvärden, i motsvarande ordning, som diagonalelement i en diagonalmatris. Detta innebär att

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\square$

Del B

3. En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definieras av $F(\vec{x}) = \vec{v} \times \vec{x}$ där $\vec{v} = (2, -2, 1)^T$ (här står T för transponat).
   (a) Bestäm standardmatrisen A för avbildningen F; **(2 p)**
   (b) Ange en bas för nollrummet $null(A)$ och en bas för kolonnrummet $Col(A)$ för A; **(3 p)**
   (c) Bestäm alla lösningar till ekvationen $F(\vec{x}) = (0, 2, 2)^T$. **(1 p)**

Lösning. (a) För varje $\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ har vi

$$F(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2z - y \\ -2z + x \\ 2y + 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Standardmatrisen A för avbildningen F är alltså $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Med hjälp av Gauss-metoden, reducerar man A till ett trappstegsform

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} := R.$$

För matrisen R är kolumner nr 1 och 2 linjärt oberoende, samma gäller för matrisen A. vektorerna $(0, 1, 2)$ och $(-1, 0, 2)$ bildar alltså en bas för $Col(A)$. Alla lösningar till $A\vec{x} = \vec{0}$ ges av $\vec{x} = s(2, -2, 1)$. Därför utgörs basen för nollrummet till A av vektorn $(2, -2, 1)$.

(c) Observera att om systemet $A\vec{x} = \vec{v} \times \vec{x} = \vec{b}$ har en lösning $\vec{x}$ endast om $\vec{b}$ är ortogonal mot vektorn $\vec{v}$. Undersöker om $\vec{b} = (0, 2, 2)$ är ortogonal mot $\vec{v}$:

$$\vec{v} \cdot \vec{b} = (2, -2, 1) \cdot (0, 2, 2) = -2 \neq 0,$$

alltså har $A\vec{x} = \vec{b}$ ingen lösning. (Man kan använda andra metoder för att komma till samma slutsats.)

□

4. Låt H vara planet genom origo i $\mathbb{R}^3$ som är ortogonalt mot vektorn

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm en ON-bas för H. Lägg till vektor(er) för att få en ON-bas, $\mathcal{B}$, för $\mathbb{R}^3$. **(2 p)**

(b) Låt R vara den linjära avbildning som ges av rotation med vinkeln $\pi/4$ kring $\vec{v}$ (med andra ord, vektorer roteras med vinkeln $\pi/4$ kring linjen som spänns upp av $\vec{v}$, och rotationen sker moturs om man betraktar H från huvudet av ortsvektorn $\vec{v}$). Bestäm matrisen för R med avseende på ON-basen $\mathcal{B}$ från deluppgift (a). **(2 p)**

(c) Bestäm matrisen för R med avseende på standardbasen för $\mathbb{R}^3$. **(2 p)**

Lösning. (a) Vi börjar med att normera $\vec{v}$: låt

$$\vec{v_1} = \frac{1}{|\vec{v}|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Låt

$$\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v_3} = \vec{v_1} \times \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Då är $\vec{v_2}$ och $\vec{v_3}$ ortogonala mot $\vec{v_1}$, dvs de tillhör H. Dessutom har de norm 1 och är ortogonala mot varandra. Det följer att $\{\vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ är en ON-bas till H, då $\dim H = 2$. Samtidigt, $\mathcal{B} = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ en positivt orienterad ON-bas till $\mathbb{R}^3$.

(b) Enligt definitionen av R är $R(\vec{v_1}) = \vec{v_1}$, $R(\vec{v_2}) = 1/\sqrt{2}\vec{v_2} + 1/\sqrt{2}\vec{v_2}$ och $R(\vec{v_3}) = -1/\sqrt{2}\vec{v_2} + 1/\sqrt{2}\vec{v_3}$. Det följer att matrisen till P i basen $\mathcal{B}$ ges av

$$[P]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

(c) Basbytesmatrisen från $\mathcal{B}$ till standardbasen $\mathcal{E}$ är

$$T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

och eftersom $\mathcal{B}$ är en ON-bas är $T^{-1} = T^t$. Det följer att matrisen till P i standardbasen är

$$[P]_{\mathcal{E}} = T[P]_{\mathcal{B}}T^t = \begin{bmatrix} 1/2 + \sqrt{2}/4 & 1/2 - \sqrt{2}/4 & 1/2 \\ 1/2 - \sqrt{2}/4 & 1/2 + \sqrt{2}/4 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Del C

5. Låt V vara rummet av alla reella 2×2 matriser, och definiera en linjär avbildning $S : V \to V$ genom $S(A) = A - A^T$.
   (a) Bestäm en bas för bildrummet (dvs, värderummet) till S. **(2 p)**
   (b) Bestäm en bas för nollrummet till S. **(4 p)**

Lösning. Om $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ får vi

$$S(A) = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} = (b-c) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Räkningarna ovan ger att bildrummet spänns upp av $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, och en bas ges av $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (en nollskild vektor är automatiskt oberoende.)

(b) Räkningarna ger även att nollrummet består av matriser på formen $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, där $a, b, c \in \mathbb{R}$. Eftersom

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

så spänns nollrummet upp av matriserna

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ger att $a = b = c = 0$ är matriserna dessutom oberoende och bildar därför en bas.

$\square$

6. Det karakteristiska polynomet till en kvadratisk matris A är polynomet
$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$
där λ är variabeln. Om $p(x) = a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0$ är ett polynom och A är en kvadratisk matris, definieras $p(A)$ genom
$$p(A) = a_n A^n + \cdots a_1 A + a_0\, I.$$
Cayley-Hamiltons sats säger att $p_A(A) = 0$ för varje kvadratisk matris A (där högerledet är nollmatrisen av samma storlek som A).
   (a) Bevisa Cayley-Hamiltons sats i specialfallet då A är diagonaliserbar. Tips: Börja med att undersöka $p_A(A)\,\vec{v}$ för lämpliga vektorer $\vec{v}$. **(4 p)**
   (b) Låt A vara en inverterbar $n \times n$-matris. Använd Cayley-Hamiltons sats för att visa att A^{-1} kan skrivas som en linjärkombination av A^{n-1}, $A^{n-2}, \ldots, A$ och I. **(2 p)**

Lösning. (a) Låt A vara en diagonaliserbar $n \times n$-matris. Skriv det karakteristiska polynomet till A som $p_A(\lambda) = a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0$. Eftersom A är diagonaliserbar existerar en bas $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$ till $\mathbf{R}^n$ bestående av egenvektorer till A. Låt $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vara motsvarande egenvärden. Då är de nollställen till det karakteristiska polynomet, dvs $p_A(\lambda_i) = 0$, för $i = 1, \ldots, n$.
För en egenvektor v_i är därför
$$\begin{aligned}
p_A(A)\vec{v_i} &= (a_n A^n + \cdots a_1 A + a_0 I)\,\vec{v_i} \\
&= a_n A^n \vec{v_i} + \cdots a_1 A\vec{v_i} + a_0\vec{v_i} \\
&= a_n A^{n-1}\lambda_i\vec{v_i} + \cdots a_1\lambda_i\vec{v_i} + a_0\vec{v_i} \\
&\ \vdots \\
&= a_n\lambda_i^n\vec{v_i} + \cdots a_1\lambda_i\vec{v_i} + a_0\vec{v_i} \\
&= (a_n\lambda_i^n + \cdots a_1\lambda_i + a_0)\,\vec{v_i} \\
&= p_A(\lambda_i)\vec{v_i} = 0\vec{v_i} = \vec{0}.
\end{aligned}$$
Det följer att $\dim p_A(A) = n$, dvs $p_A(A) = 0$.

(b) Låt igen $p_A(\lambda) = a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0$. Då är enligt Cayley-Hamiltons sats
$$a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0.$$
Detta kan skrivas
$$(a_n A^{n-1} + \cdots + a_1 I)A = -a_0 I$$
Multiplikation med A^{-1} ger
$$a_n A^{n-1} + \cdots + a_1 I = -a_0 A^{-1},$$
dvs $A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(a_n A^{n-1} + \cdots + a_1 I)$, förutsatt att $a_0 \neq 0$. Antag nu att $a_0 = 0$. Det följer att $\lambda = 0$ är en lösning till $\det(A - \lambda I) = 0$, men då är $\det(A) = 0$, vilket är en motsägelse då A är inverterbar.

□