SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2021.10.21

DEL A

1. (a) Bestäm alla funktioner $f(x)$ sådana att $f'(x) = e^x\sqrt{1+e^x}$. **(3 p)**

   (b) Beräkna $\displaystyle\int_1^2 x^2 \ln x\, dx$. **(3 p)**

Lösning. (a) De sökta funktionerna ges av $f(x) = \int e^x\sqrt{1+e^x}\, dx$. Vi gör variabelsubstitutionen $u = 1 + e^x$ och får då $du = e^x dx$, vilket ger

$$\int e^x\sqrt{1+e^x}\, dx = \int \sqrt{u}\, du = \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{3}(1+e^x)^{3/2} + C.$$

Alltså, funktionerna ges av

$$f(x) = \frac{2}{3}(1+e^x)^{3/2} + C,$$

där C är en godtycklig konstant.

(b) Partiell integration ger (eftersom $\frac{d}{dx}(\ln x) = 1/x$, och $x^3/3$ är en primitiv till x^2)

$$\int_1^2 x^2 \ln x\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\, dx = \frac{8}{3}\ln 2 - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^2 = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}.$$

Svar: a) $f(x) = \frac{2}{3}(1+e^x)^{3/2} + C$, där C är en godtycklig konstant; b) $\frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}$ □

2. (a) Låt $f(x) = \sqrt{1+x}$. Bestäm Taylorpolynomet av grad 1 till f kring $x = 0$, och använd detta polynom för att approximera talet $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. **(3 p)**

   (b) Avgör om felet i approximationen i del (a) är mindre än $1/20$. **(3 p)**

Lösning. (a) Det sökta Taylorpolynomet ges av

$$p(x) = f(0) + f'(0)x.$$

Vi ser att $f(0) = 1$, och eftersom $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$, får vi $f'(0) = 1/2$. Således är

$$p(x) = 1 + x/2.$$

Använder vi detta polynom för att approximera talet $\sqrt{3/2}$ får vi

$$\sqrt{3/2} = f(1/2) \approx p(1/2) = 1 + 1/4 = 5/4.$$

(b) Felet ges av

$$|f(1/2) - p(1/2)| = \left| \frac{f''(s)}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right| = \frac{|f''(s)|}{8}.$$

där $0 < s < 1/2$. Eftersom $f''(x) = -\dfrac{1}{4(1+x)^{3/2}}$, och eftersom $|f''(x)| = \frac{1}{4(1+x)^{3/2}}$ är avtagande på intervallet $x > 0$, så har vi

$$|f''(s)| \leq |f''(0)| = 1/4.$$

Detta ger

$$|f(1/2) - p(1/2)| = \frac{|f''(s)|}{8} \leq \frac{1}{4 \cdot 8} = \frac{1}{32} < 1/20.$$

Således, felet i appoximationen är mindre är $1/20$.

Svar: a) Det sökta polynomet är $p(x) = 1 + x/2$, och $\sqrt{3/2} \approx p(1/2) = 1 + 1/4 = 5/4$;
b) Felet är mindre än $1/20$. □

DEL B

3. Bestäm värdemängden till funktionen f som ges av **(6 p)**

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}.$$

Svara också på frågan: hur många lösningar har ekvationen $f(x) = 1$?

Lösning. Eftersom $1 + x^2 > 0$ för alla x så ser vi att funktionen f är definierad och kontinuerlig för alla x. Vi kan också notera att f är en jämn funktion.

För att undersöka hur funktionen f beter sig, och om den har eventuella största eller minsta värden, börjar vi med att undersöka derivatan och dess teckenväxlingar. Vi har

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{1+x^2} \cdot (1+x^2) - \ln(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^2} = -\frac{2x(\ln(1+x^2)-1)}{(1+x^2)^2}.$$

Eftersom nämnaren alltid är skild från 0 så ges de kritiska punkterna av ekvationen $2x(\ln(1+x^2)-1) = 0$, vilket ger $x = 0$ eller $\ln(1+x^2) = 1$. Den sista ekvationen har lösningarna $\pm\sqrt{e-1}$. Således har vi de kritiska punkterna $x = 0$ och $\pm\sqrt{e-1}$.

Vi får följande teckentabell för derivatan: $f'(x) > 0$ för $x < -\sqrt{e-1}$ och för $0 < x < \sqrt{e-1}$; och $f'(x) < 0$ för $-\sqrt{e-1} < x < 0$ och för $x > \sqrt{e-1}$. Detta betyder att funktionen f är strängt växande på intervallen $(-\infty, \sqrt{e-1}$ och $[0, \sqrt{e-1}]$, och strängt avtagande på intervallen $[-\sqrt{e-1}, 0]$ och $[\sqrt{e-1}, \infty)$.

Vidare har vi gränsvärdena

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \text{ och } \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

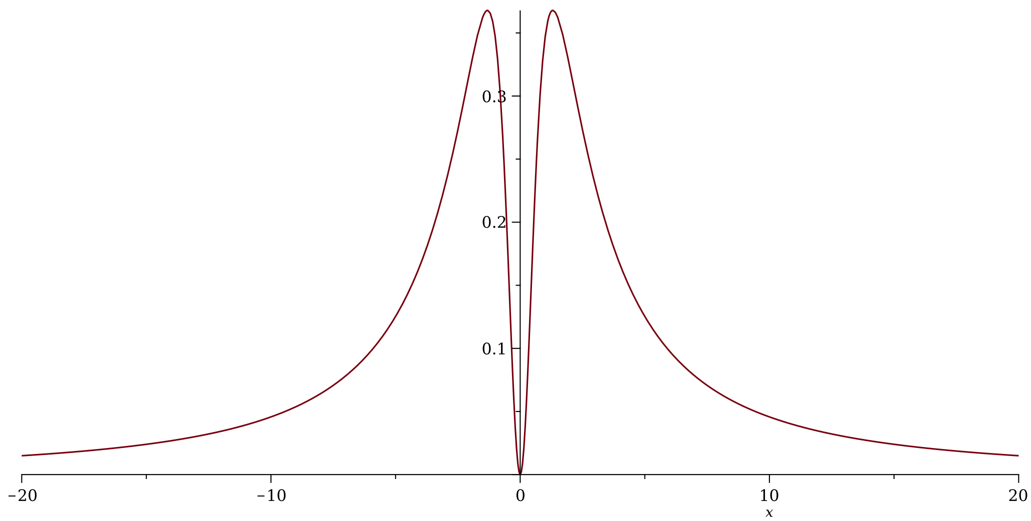
Från tabellen ovan ser vi att f har ett lokalt minimum i $x = 0$, och lokala maxima i $x = \pm\sqrt{e-1}$. Vi noterar också att $f(0) = 0$, och $f(\pm\sqrt{e-1}) = 1/e$.

Med hjälp av informationen ovan kan vi skissa kurvan (se Figur).

Vi ser att f har minsta värde 0 och största värde $1/e$. Eftersom f är kontinuerlig överallt betyder detta att värdemängden är $[0, 1/e]$.

Eftersom $1/e < 1$ så betyder det att ekvationen $f(x) = 1$ saknar lösningar.

Svar: Värdemängden är $[0, 1/e]$; och ekvationen $f(x) = 1$ saknar lösningar. $\square$



FIGUR 1. Kurvan y=f(x) i uppgift 3.

4. Betrakta differentialekvationen $y''(x) - y(x) = 2e^{-x}$.
   (a) Visa att det finns en lösning y_p till ekvationen på formen $y_p(x) = axe^{-x}$, där a är någon konstant. **(2 p)**
   (b) Avgör om det finns en lösning y till ekvationen sådan att $\int_0^\infty y(x)\,dx = 1$. Bestäm en sådan lösning om en sådan lösning finns, annars förklara varför det inte finns någon. **(4 p)**

Lösning. (a) Vi gör ansatsen $y_p(x) = axe^{-x}$. Vi har då $y_p'(x) = a(1-x)e^{-x}$ och $y_p''(x) = a(x-2)e^{-x}$. Insättning i ekvationen ger följande villkor på konstanten a:

$$2e^{-x} \overset{\text{vill vi ha}}{=} y_p''(x) - y_p(x) = a(x-2)e^{-x} - axe^{-x} = -2ae^{-x} \text{ för alla } x.$$

Vi ser att detta är uppfyllt om $a = -1$. Således är

$$y_p(x) = -xe^{-x}$$

en lösning till differentialekvationen.

(b) Den homogena ekvationen $y''(x) - y(x) = 0$ har den karakteristiska ekvationen $r^2 - 1 = 0$, vilket ger $r = \pm 1$. Således är $y_h(x) = Ae^x + Be^{-x}$ den allmänna lösningen till den homogena ekvationen.

I del (a) har vi sett att $y_p(x) = -xe^{-x}$ är en partikulärlösning till den givna differentialekvationen. Sålede ges den allmänna lösningen till ekvationen av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^x + Be^{-x} - xe^{-x}$$

där A och B är konstanter.

Vi ska nu se om det finns någon lösning $y(x)$ som uppfyller $\int_0^\infty y(x)\,dx = 1$. Vi har

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^R = \lim_{R\to\infty}(1-e^{-R}) = 1$$

och, genom att integrera partiellt,

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R xe^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left([-xe^{-x}]_0^R - \int_0^R(-e^x)\,dx\right) =$$
$$= \lim_{R\to\infty}\left(-Re^{-r} + (1-e^{-R})\right) = 1.$$

Vi noterar också att intergalen $\int_0^\infty e^x\,dx$ är divergent, så för att $\int_0^\infty y(x)\,dx$ ska vara konvergent måste vi sätta $A = 0$.

Alltså, om vi väljer $A = 0$ har vi lösningarna

$$y(x) = Be^{-x} - xe^{-x}$$

Integrerar vi detta över intervallet $x \geq 0$ får vi, enligt beräkningarna ovan, att

$$\int_0^\infty y(x)\,dx = B\int_0^\infty e^{-x}\,dx - \int_0^\infty xe^{-x}\,dx = B - 1.$$

Således, om vi väljer $B = 2$ uppfylls villkoret i uppgiften.

Svar: Lösningen $y(x) = 2e^{-x} - xe^{-x}$ uppfyller villkoret $\int_0^\infty y(x)\,dx = 1$.

$\square$

DEL C

5. Visa olikheten **(6 p)**

$$\int_{-1}^{x} e^{t^2}\,dt > \frac{e^{x^2}}{2x} \text{ för alla } x \geq 1.$$

Lösning. Låt

$$f(x) = \int_{-1}^{x} e^{t^2}\,dt - \frac{e^{x^2}}{2x}.$$

För att lösa uppgiften behöver vi visa att $f(x) > 0$ för alla $x \geq 1$.

Vi undersöker derivatan. Genom att använda integralkalkylens fundametalsats för att derivera den första termen får vi

$$f'(x) = e^{x^2} - \frac{2xe^{x^2}(2x) - 2e^{x^2}}{4x^2} = \frac{e^{x^2}}{2x^2}.$$

Vi ser att $f'(x) > 0$ för alla $x > 0$. Från detta kan vi dra slutsatsen att f är strängt växande på intervallet $[1, \infty)$, dvs vi har

$$f(x) \geq f(1) \text{ för alla } x \geq 1.$$

Om vi kan visa att $f(1) > 0$ är vi färdiga.

Eftersom $e^{t^2} \geq 1$ för alla t, och eftersom $e < 4$ har vi

$$f(1) = \int_{-1}^{1} e^{t^2}\,dt - \frac{e}{2} \geq \int_{-1}^{1} 1\,dt - \frac{e}{2} = 2 - \frac{e}{2} > 0.$$

Således har vi visat att $f(x) \geq f(1) > 0$ för alla $x \geq 1$. $\square$

6. (a) Avgör om det finns någon funktion f, som är kontinuerlig i hela $\mathbb{R}$, sådan att **(3 p)**

$$f(x) = \arctan \frac{1}{x^2} \quad \text{för } x \neq 0.$$

(b) Avgör om det finns någon funktion f, som är deriverbar i hela $\mathbb{R}$, sådan att **(3 p)**

$$f(x) = \arctan \frac{1}{x^2} \quad \text{för } x \neq 0.$$

Lösning. Functionen $\arctan(t)$ är kontinuerlig och deriverbar överallt, och functionen $1/x^2$ är kontinuerlig och deriverbar för alla $x \neq 0$. Således är $f(x) = \arctan(1/x^2)$ kontinuerlig och deriverbar för alla $x \neq 0$.

Vi ska nu se om vi kan definera f i $x = 0$ så att f blir kontinuerlig och deriverbar också i denna punkt.

(a) Eftersom $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ och $\lim\limits_{t\to\infty} \arctan(t) = \pi/2$ så följer det att

$$\lim_{x\to 0} \arctan \frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Alltså, om vi låter

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

så blir f kontinuerlig också i punkten $x = 0$.

(b) Vi ska nu undersöka om f, definierad som ovan, är deriverbar också i punkten $x = 0$. Vi behöver alltså undersöka om följande gränsvärde existerar (derivatans defition):

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\arctan(1/h^2) - \pi/2}{h}.$$

Eftersom detta är på formen $[0/0]$ kan vi använda L'Hôpitals regel. Vi får

$$\lim_{h\to 0} \frac{\arctan(1/h^2) - \pi/2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-2}{h^3\left(1+\frac{1}{h^4}\right)}}{1} = \lim_{h\to 0} \left(-\frac{2h}{h^4+1} \right) = 0.$$

Således är f deriverbar också i punkten $x = 0$.

Svar: Om vi låter

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

så är f kontinuerlig och deriverbar överallt. Således är svaret "Ja" i både (a) och (b). $\square$