KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen med lösningsförslag
torsdag, 9 januari 2020

1. Bestäm ett andragradspolynom vars funktionskurva passerar genom punkterna

$$(1,3), \quad (2,-2), \quad (3,-5).$$

(6 p)

Tips: ansätt ett andragradspolynom och lös ett linjärt ekvationssystem där koefficienterna är de obekanta.

Lösningsförslag. Låt $p(x) = ax^2 + bx + c$. Eftersom $y = p(x)$ går genom punkten $(1,3)$ är $a1^2 + b1 + c = 3$. Eftersom $y = p(x)$ går genom punkten $(2,-2)$ är $a2^2 + b2 + c = -2$. Eftersom $y = p(x)$ går genom punkten $(3,-5)$ är $a3^2 + b3 + c = -5$. Vi får ekvationssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & 3 \\ 4a & + & 2b & + & c & = & -2 \\ 9a & + & 3b & + & c & = & -5. \end{array}$$

Vi löser systemet med Gausselimination.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 9 & 3 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

Lägg till $-4r1$ till $r2$ och $-9r1$ till $r3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -14 \\ 0 & -6 & -8 & -32 \end{array}\right)$$

Lägg till $\frac{1}{2}r2$ till $r1$ och $-3r2$ till $r3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -4 \\ 0 & -2 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

Lägg till $3r3$ till $r2$ och $\frac{1}{2}r3$ till $r1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

dvs $a = 1,\ b = -8,\ c = 10$. Det sökta polynomet är därför $p(x) = x^2 - 8x + 10$.

2. Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som avbildar en punkt i planet $\mathbb{R}^2$ på sin spegelbild i linjen $x + y = 0$.

(a) Bestäm matrisen A för T i standardbasen för $\mathbb{R}^2$. **(2 p)**
(b) Bestäm två linjärt oberoende egenvektor $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ till A. **(2 p)**
(c) Bestäm matrisen B för T i basen $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. **(2 p)**

Lösningsförslag. (a).

Låt $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ vara linjens riktningsvektor, och $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vara en ortogonalvektor till $\vec{v_1}$. Matrisen A är den enda matrisen som uppfyller: $A\vec{v_1} = \vec{v_1}$ och $A\vec{v_2} = -\vec{v_2}$. Vi kan söka A med obestämda koefficienter:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Koefficienterna i matrisen kan hittas direkt ur sambanden $A\vec{v_1} = \vec{v_1}$ och $A\vec{v_2} = -\vec{v_2}$.

Man kan även förenkla ansatsen (och få samma resultat): eftersom avbildningen är en reflektion, vet vi att matrisen A är ortogonal (dvs. $A^T = A^{-1}$) med determinant -1, alltså $c = b$, $d = -a$, och

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}.$$

Sambandet $A\vec{v_1} = \vec{v_1}$ skrivs som

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ b + a = -1. \end{cases}$$

Detta ger $a = 0$, $b = -1$, och

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

En annan metod är att söka kolumnerna av A som bildera av basvektorerna:

$$c_1(A) = T(\vec{e}_1) = 2\text{proj}_{\ \vec{v_1}}\vec{e}_1 - \vec{e}_1 = -\vec{e}_2$$
$$c_2(A) = T(\vec{e}_2) = 2\text{proj}_{\ \vec{v_1}}\vec{e}_2 - \vec{e}_2 = -\vec{e}_1,$$

som ger samma resultat.

(b). Vi vet att $T\vec{v_1} = \vec{v_1}$ samt att $T\vec{v_2} = -\vec{v_2}$, vilket betyder att $\vec{v_1}$ är en egenvektor med egenvärde 1, och $\vec{v_2}$ är en egenvektor med egenvärde -1.

(c). I basen $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ har egenvektorerna följande koordinater: $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi vill bestämma en matris B sådan att $B\vec{v_1} = \vec{v_1}$ och $B\vec{v_2} = -\vec{v_2}$. Denna blir en diagonalmatris med egenvärden på diagonalen:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Betrakta vektorerna $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, och $\vec{v_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$.

(a) Visa att $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ utgör en bas för $\mathbf{R}^3$. **(2 p)**

(b) Skriv $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ som en linjärkombination av $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$. **(2 p)**

(c) Bestäm den ortogonala projektionen av $\vec{w}$ på planet som spänns upp av $\vec{v_1}$ och $\vec{v_2}$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi behöver visa att de tre vektorerna är linjärt oberoende. Detta kan göras genom att visa att följande determinant ej är noll:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -7 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 7 \cdot 2 = 2$$

där vi använd kofaktorexpansion längs tredje kolumnen.

(b) För att skriva $\vec{w}$ som en linjärkombination $\vec{w} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$ löser vi ekvationssystemet

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -7 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

vilket med bakåtsubstitution ger lösningen $c_3 = 7$, $c_2 = 5$, $c_1 = 18$, dvs

$$\vec{w} = 18\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2 + 7\vec{v}_3.$$

(c) Vi noterar att $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$, det vill säga $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ är ortogonala. Projektionerna av $\vec{w}$ på de två vektorerna är:

$$\operatorname{proj}_{\vec{v}_1} \vec{w} = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1 = \frac{-4}{6}\vec{v}_1 = \frac{-2}{3}\vec{v}_1$$
$$\operatorname{proj}_{\vec{v}_2} \vec{w} = \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}_2\|^2}\vec{v}_2 = \frac{-14}{14}\vec{v}_2 = -\vec{v}_2$$

och eftersom de är ortogonala är projektionen på planet därför:

$$\frac{-2}{3}\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \frac{-2}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -10 \end{bmatrix}$$

4. Låt $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Beräkna A^{1000}. **(6 p)**

Lösningsförslag. Egenvärdena till A fås som lösningar till $\det(A - \lambda I) = 0$ och vi ser efter beräkning att

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff (1-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

så egenvärdena till A är ± 1. Eftersom det finns två linjärt oberoende egenvektorer till egenvärdet 1 (ses efter beräkning) så är A diagonaliserbar. Dvs det finns en 3×3-matris P och en diagonal matris D, med egenvärdena ± 1 på diagonalen, så att $A = PDP^{-1}$. Det följer att $A^{1000} = (PDP^{-1})^{1000} = PD^{1000}P^{-1} = PIP^{-1} = I$. Vi har alltså att $A^{1000} = I$, enhetsmatrisen i format 3×3.

5. (a) Anta att vi vet att $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$ för någon vektor $\vec{u}$. Kan vi ur det dra slutsatsen att $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är lika? Om ja, så varför då? Om nej, så exakt vilka slutsatser kan vi dra om hur $\vec{v}$ och $\vec{w}$ ser ut, och varför? **(3 p)**

(b) Anta att vi vet att $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ för alla vektorer $\vec{u}$. Kan vi ur det dra slutsatsen att $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är lika? Om ja, så varför då? Om nej, så exakt vilka slutsatser kan vi dra om hur $\vec{v}$ och $\vec{w}$ ser ut, och varför? **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) Svar: Nej. Låt $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$.

- Om $\vec{u} = \vec{0}$ så är $\vec{n} = \vec{0}$ för alla $\vec{v}$ och $\vec{w}$ och vi kan inte dra någon slutsats alls.
- Om $\vec{u} \neq \vec{0}$ men $\vec{n} = \vec{0}$, så är $\vec{v}$ och $\vec{w}$ parallella med $\vec{u}$ men vi kan inte dra någon slutsats om deras längd.
- Om $\vec{n} \neq \vec{0}$, så har vi $\vec{u} \times (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{0}$ och vi kan dra slutsatsen att $\vec{v} = \vec{w}$ eller $\vec{u}$ är parallella med $\vec{v} - \vec{w}$ dvs. $\vec{w} = \vec{v} + t\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$.
  För varje $\vec{v}$ finns oändligt många sådana $\vec{w}$.

(b) Svar: Ja. Bevis: Låt $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$. Så har vi $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 0$ för alla $\vec{u}$ dvs. $\vec{v} - \vec{w}$ är ortogonal mot alla vektorerna $\vec{u}$. Endast vektorn som är ortogonal mot alla vektorerna är noll vektorn. Så kan vi dra slutsatsen att $\vec{v} - \vec{w} = 0$ dvs. $\vec{v} = \vec{w}$.

6. Låt A vara en symmetrisk $(n \times n)$-matris. Visa att ekvationen

$$X^3 = A$$

har en lösning. **(6 p)**

Lösningsförslag. Eftersom matrisen A är symmetrisk så är den ortogonalt diagonaliserbar, vilket betyder att

$$A = PDP^T$$

där P är en ortogonal matris och $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ är en diagonal matris.
Låt den diagonala matrisen R vara given av

$$R = \mathrm{diag}((\lambda_1)^{1/3}, (\lambda_2)^{1/3}, \ldots, (\lambda_n)^{1/3}).$$

Observera att detta är definierat oavsett tecken på $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ då tredje-roten $x \mapsto x^{1/3}$ är definierad för alla reella tal x. Matrisen R uppfyller

$$R^3 = D.$$

Sätt $X = PRP^T$. Eftersom $P^TP = I$ gäller då att

$$X^3 = (PRP^T)^3 = PR(P^TP)R(P^TP)RP^T = PR^3P^T = PDP^T = A,$$

så vi har hittat en lösning till ekvationen.