SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2021.03.11

DEL A

1. Beräkna följande integraler: **(3+3 p)**

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} \quad \text{och} \quad \int \frac{dx}{x^2-4}.$$

Lösning. (a) Vi gör variabelsubstitutionen $u = \ln x$ och får då $du = dx/x$ och de nya integrationsgränserna $u(e) = 1$ och $u(e^2) = 2$, vilket ger

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \int_1^2 \frac{du}{u} = [\ln |u|]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

(b) Vi partialbråksuppdelar integranden. Eftersom $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ så söker vi en uppdelning på formen

$$\frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2}.$$

Multiplicerar vi upp nämnaren $(x+2)(x-2)$ fås

$$1 = A(x-2) + B(x+2)$$

vilket kan skrivas

$$1 = (A+B)x + (2B - 2A).$$

Identifierar vi respektive koefficienter på båda sidor fås ekvationssystemet

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2B - 2A = 1. \end{cases}$$

Detta system har lösningen $A = -1/4, B = 1/4$. Således har vi

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right).$$

Integration ger nu att

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\left(\ln|x-2| - \ln|x+2|\right) + C = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{|x-2|}{|x+2|}\right) + C.$$

Svar: (a) $\ln 2$, (b) $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{|x-2|}{|x+2|}\right)+C$. $\square$

2. Låt $f(x) = \sqrt{1-x}$, $0 \leq x \leq 1$. Bestäm den punkt (x_0, y_0) på grafen $y = f(x)$ som gör rektangeln med hörn i punkterna $(0,0), (x_0, 0), (x_0, y_0)$ och $(0, y_0)$ maximal. Glöm inte att föklara varför arean blir maximal i punkten. **(6 p)**

Lösning. Om (x_0, y_0) är en punkt på kurvan så är $0 \leq x_0 \leq 1$, $y_0 = \sqrt{1-x_0}$, och arean A av rektangeln ges av

$$A = x_0 y_0 = x_0\sqrt{1-x_0}.$$

Vi söker således det största värdet av funktionen

$$A(x) = x\sqrt{1-x}$$

på intervallet $[0,1]$. Eftersom funktionen A är kontinuerlig på det slutna och begränsade intervallet $[0,1]$ så vet vi att största (och minsta) värde finns, och måste antas i en ändpunkt till intervallet, en singulär punkt eller en kritisk punkt.

Vi söker kristiska punkter. Vi har

$$A'(x) = \sqrt{1-x} - x\frac{1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2(1-x)-x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}.$$

Notera att $A'(x)$ existerar för alla $0 < x < 1$ (så singulära punkter saknas här) och att $x = 2/3$ är den enda kritiska punkten. Således måste A:s största värde på intervallet $[0,1]$ antas i någon av pukterna $x = 0, x = 2/3$ och $x = 1$. Eftersom $A(0) = A(1) = 0$ och $A(2/3) > 0$ har vi alltså att A antar sitt största värde för $x = 2/3$. Detta betyder att $(2/3, f(2/3)) = (2/3, 1/\sqrt{3})$ är den sökta punkten.

Svar: $(2/3, 1/\sqrt{3})$.

$\square$

Del B

3. Avgör om det finns någon lösning $y(t)$ till differentialekvationen $y''(t)+2y'(t)+5y(t) = 0$ som uppfyller att
$$\lim_{t\to 0} \frac{y(t)}{t} = 1.$$
Bestäm en sådan lösning om en sådan lösning finns, annars förklara varför det inte finns någon. **(6 p)**

Lösning. Vi löser differentialekvationen. Karaktäristiska ekvationen $r^2 + 2r + 5 = 0$ har lösning $r = -1 \pm 2i$ så diffekvationen har allmän lösning $y(t) = e^{-t}(A\cos 2t + B\sin 2t)$, för godtyckliga konstanter A och B.

Första kravet för att denna funktion $y(t)$ ska uppfylla att
$$\lim_{t\to 0} \frac{y(t)}{t} = 1$$
är att konstanten $A = 0$ ty annars saknas gränsvärdet helt. Vidare gäller (med l'Hopitals regel) att
$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{-t}B\sin 2t}{t} = [0/0] = \lim_{t\to 0} \frac{-e^{-t}B\sin t + e^{-t}2B\cos 2t}{1} = 2B.$$
Vi ser att gränsvärdet blir 1 om vi väljer $B = 1/2$

Vi får alltså att $y(t) = \dfrac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$ är en lösning till diffekvationen med de efterfrågade egenskaperna.

$\square$

Svar: $y(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$ uppfyller villkoren.

4. Bestäm de punkter på kurvan $y = e^{x^2+2x}$ i vilka tangenten till kurvan går genom punkten $(1, 0)$. (Notera att punkten $(1, 0)$ inte ligger på kurvan.) **(6 p)**

Lösning. Låt $f(x) = e^{x^2+2x}$. Vi har då $f'(x) = (2x + 2)e^{x^2+2x}$. Om $(a, f(a))$ är en punkt på kurvan så ges tangenten till kurvan i denna punkt av

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Denna linje går igenom punkten $(1, 0)$ om och endast om vi har

$$0 = f(a) + f'(a)(1 - a).$$

Stoppar vi in uttrycken för f och f' får vi ekvationen

$$0 = (1 + (2a + 2)(1 - a))e^{a^2+2a},$$

vilket kan skrivas (eftersom $e^{a^2+2a} \neq 0$)

$$3 - 2a^2 = 0.$$

Denna ekvation har lösningarna $a = \pm\sqrt{3}/\sqrt{2}$.

Således, i punkterna $(\sqrt{3}/\sqrt{2}, f(\sqrt{3}/\sqrt{2}))$ och $(-\sqrt{3}/\sqrt{2}, f(-\sqrt{3}/\sqrt{2}))$ går tangenten till kurvan genom punkten $(1, 0)$.

Svar: I punkterna $(\sqrt{3}/\sqrt{2}, f(\sqrt{3}/\sqrt{2}))$ och $(-\sqrt{3}/\sqrt{2}, f(-\sqrt{3}/\sqrt{2}))$. $\square$

DEL C

5. Betrakta integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2}{2x^2+\sin x+1}\,dx$
   (a) Visa att integralen är konvergent. **(2 p)**
   (b) Bestäm ett närmevärde till integralen där felet inte är större än $\frac{1}{8}$. **(4 p)**

Lösning. Vi börjar med att observera att $0 \leq \sin x + 1 \leq 2$ för alla x.

a) Vi har att
$$0 \leq \frac{2}{2x^2+\sin x+1} \leq \frac{2}{2x^2} = \frac{1}{x^2},$$
och eftersom den generaliserade integralen $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ är konvergent så är också integralen $\int_1^\infty \frac{2}{2x^2+\sin x+1}\,dx$ konvergent, enligt jämförelsesatsen för generaliserade integraler med positiv integrand.

b) Låt
$$I = \int_1^\infty \frac{2}{2x^2+\sin x+1}\,dx.$$
Observera att
$$\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{2}{2x^2+\sin x+1} \leq \frac{1}{x^2}$$
för alla x. Därför är
$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} \leq I \leq \int \frac{dx}{x^2}.$$
Eftersom
$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} [\arctan x]_1^R = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} > \frac{3}{4}$$
och
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right] = 1$$
är
$$\frac{3}{4} \leq I \leq 1.$$
Sätt nu $\hat{I} = 7/8$ som ett approximativt värde till I. Då får från olikheterna ovan att
$$-1/8 = 3/4 - 7/8 \leq I - \hat{I} \leq 1 - 7/8 = 1/8.$$
Alltså, $I \approx 7/8$, där felet inte är större än $1/8$.

Svar: (a) Se bevis ovan; (b) T ex $7/8$. □

6. För varje heltal $n \geq 1$, låt

$$A_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\left(\frac{1}{n^2}\right)} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^{\left(\frac{2}{n^2}\right)} \cdot \left(\frac{3}{n}\right)^{\left(\frac{3}{n^2}\right)} \cdots \left(\frac{n}{n}\right)^{\left(\frac{n}{n^2}\right)}.$$

Bestäm $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$. **(6 p)**

Lösning. Först logaritmerar vi A_n och beräknar $\lim\limits_{n\to\infty} (\ln(A_n))$:

$$\ln(A_n) = \tfrac{1}{n^2}\ln(\tfrac{1}{n}) + \tfrac{2}{n^2}\ln(\tfrac{2}{n}) \cdots + \tfrac{n}{n^2}\ln(\tfrac{n}{n}) = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{k}{n^2}\ln(\tfrac{k}{n}) = \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tfrac{k}{n}\ln(\tfrac{k}{n}).$$

Uttrycket $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\ln(\frac{k}{n})$ ser formellt ut som en Riemannsumma för funktionen $y = x\ln x$ över intervallet [0,1], men problemet är att $x\ln x$ inte är definierat för x=0.

Notera att

$\lim\limits_{x\to 0^+} (x\ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (\frac{\ln x}{1/x}) =$ (L'Hôpital, $[\infty/\infty]$)= $\lim\limits_{x\to 0^+} (\frac{1/x}{-1/x^2}) = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0.$

Därför är funktionen

$f(x) = \begin{cases} x\ln x, & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{om } x = 0 \end{cases}$

kontinuerlig och därmed integrerbar på intervallet [0,1].

Uttrycket $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\ln(\frac{k}{n})$ är nu en Riemannsumma $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1})$ för integralen $\int\limits_0^1 f(x)dx$ med $x_k = \frac{k}{n}$, och $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$, $k = 1, ..., n$. Detta medför att

$\lim\limits_{n\to\infty} (\ln(A_n)) = \int\limits_0^1 x\ln x dx =$(partiell integration)= $\left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = -\frac{1}{4}.$

Slutligen, eftersom e^x är en kontinuerlig funktion, har vi

$$\lim_{n\to\infty} (A_n) = \lim_{n\to\infty} (e^{\ln(A_n)}) = e^{-1/4}$$

Svar. $e^{-1/4}$.

□