SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
9 april 2021

KTH Teknikvetenskap

Skrivtid: 08:00-11:00
Tillåtna hjälpmedel: inga.
Allt plagiat som vi hittar i inlämnade lösningar kommer att rapporteras.

Examinator: Danijela Damjanović

Tentamen består av sex uppgifter som vardera ger maximalt sex poäng.

Del A på tentamen utgörs av de två första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från uppgift 1 adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på uppgift 1 kan dock som högst bli 6 poäng.

De två följande uppgifterna utgör del B och de två sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

Instruktioner

- **För poäng på en uppgift krävs att** lösningen är väl presenterad och lätt att följa.
- Det innebär att lösningarna ska vara prydligt skrivna med en handstil som är lätt att läsa.
- Det innebär också att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Alla steg i alla beräkningar ska finnas redovisade och vara lätta att följa.
- **Lösningar och svar utan korrekta, utförliga och tydliga motiveringar ger inga poäng.**

---

0. Hederskodex. Se uppgift 0 i Canvas. Hederskodex är obligatorisk och tentamen rättas inte (blir underkänd) om du inte har lämnat in hederskodex.

Del A

1. Låt $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm basbytesmatrisen P som byter från standardbasen $\mathcal{E}$ till basen $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$, dvs bestäm P sådan att $P[\vec{x}]_{\mathcal{E}} = [\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ för alla vektorer $[\vec{x}]$. **(3 p)**

(b) Bestäm koordinaterna för vektorn $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i basen $\{\vec{u}, \vec{v}\}$. **(3 p)**

2. Bestäm parametrarna a och b så att det linjäara ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 9 & 3 \\ -1 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Har exakt en lösning. **(2 p)**

(b) Har oändligt många lösningar. **(2 p)**

(c) Har ingen lösning. **(2 p)**

DEL B

3. Låt H vara planet i $\mathbb{R}^3$ som ges av ekvationen $x + 2y + 2z = 0$. Låt $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara avbildningen som projicerar vektorer ned på planet H.

(a) Bestäm standardmatrisen för avbildningen T. **(3 p)**

(b) Bestäm en bas för $\mathbb{R}^3$ i vilken $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ är matrisen för T. **(3 p)**

4. En liksidig triangel ABC ligger i planet $x - y + 2z = 0$. Triangeln har ett hörn i origo (dvs $A =$ origo), ett till hörn i punkten $B = (1, 1, 0)$, och dess tredje hörn C har positiv x-komponent. Bestäm triangelns tredje hörn C. **(6 p)**

DEL C

5. (a) Låt V_1 och V_2 vara två delrum i $\mathbb{R}^n$. Bevisa att snittet $W = V_1 \cap V_2$ också är ett delrum till $\mathbb{R}^n$. **(2 p)**

(b) Låt $V_1 = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ och $V_2 = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$. Låt $W = V_1 \cap V_2$.

Den linjära avbildningen T definieras som ortogonala projektionen av vektorer i $\mathbb{R}^4$ på delrummet W. Bestäm avbildningens standardmatris $[T]$. **(4 p)**

6. Låt A vara en $n \times n$ matris och A^T dess transponat. Bevisa följande påståenden:

(a) A och $A^T A$ har samma nollrum. **(3 p)**

(b) Om $n \geq 2$ då existerar n ortogonala enhetsvektorer $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ i $\mathbb{R}^n$ sådana att $A\vec{u}_1, A\vec{u}_2 \ldots, A\vec{u}_n$ är också ortogonala . **(3 p)**