SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2019.10.22

DEL A

1. Beräkna **(3+3 p)**

$$\int_{-1}^{1} x^2 \ln(2+x^3)dx \quad \text{och} \quad \int \frac{3}{2+8x^2}dx.$$

Lösning: a) Med hjälp av substitutionen $u = 2 + x^3$, med $du = 3x^2\,dx$ och nya gränser 1 och 3 får vi att

$$\int_{-1}^{1} x^2 \ln(2+x^3)\,dx = \frac{1}{3}\int_1^3 \ln u du.$$

Partiell integration ger

$$\frac{1}{3}\int_1^3 \ln u du = \frac{1}{3}\left([u \ln u]_1^3 - \int_1^3 u\left(\frac{1}{u}\right)du\right) = \ln 3 - \frac{2}{3}.$$

b) Vi har att

$$\int \frac{3\,dx}{2+8x^2} = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{3}{4}\arctan(2x) + C$$

där C är en godtycklig konstant.

Svar: a) $\ln 3 - \frac{2}{3}$ och b) $\frac{3}{4}\arctan(2x) + C$

2. Låt $f(x) = xe^{-x^2}$ vara definierad för $x > 0$.
   (a) Bestäm alla lokala extrempunkter till f och avgör deras karaktär (max/min). **(2 p)**
   (b) Bestäm de intervall på vilka f är strängt växande respektive strängt avtagande. **(2 p)**
   (c) Antar f något största respektive minsta värde? Bestäm i förekommande fall dessa. **(2 p)**

Lösning: Vi ser att f är kontinuerlig för $x > 0$. Vi deriverar och får

$$f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$

vilket existerar för alla $x > 0$. Vi ser att $f'(x) = 0$ omm $x = 1/\sqrt{2}$. Ett teckenstudium av derivatan ger att

$f'(x) > 0$ då $0 < x < 1/\sqrt{2}$, vilket implicerar att f är strängt växande här
$f'(x) < 0$ då $x > 1/\sqrt{2}$, vilket implicerar att f är strängt avtagande här

Av detta följer att f har exakt en lokal extrempunkt, nämligen ett lokalt max i punkten $x = 1/\sqrt{2}$. Det följer också att funktionens största värde är $f(1/\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2e}$. Det följer också att minsta värde saknas.

Svar: a) En lokal maxpunkt i $x = 1/\sqrt{2}$ b) Strängt växande på $(0, 1/\sqrt{2}]$ och strängt avtagande på $[1/\sqrt{2}, \infty)$ c) Största värde $1/\sqrt{2e}$, minsta värde saknas

DEL B

3. Låt $f(x) = \sqrt{x}$ och låt $P(x)$ vara Taylorpolynomet av grad 2 till f kring $x = 1$.
   (a) Bestäm polynomet $P(x)$. **(2 p)**
   (b) Enligt Taylors formel kan resttermen $E(x) = f(x) - P(x)$ skrivas som ett uttryck som innehåller f:s tredjederivata. Vilket är uttrycket? **(1 p)**
   (c) Är det sant att $|\sqrt{3/2} - P(3/2)| < 1/100$? **(3 p)**

Lösning: Vi börjar med att notera att

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}}, \quad f'''(x) = \frac{3}{8x^{5/2}}.$$

a) Det sökta polynomet P ges av

$$P(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2.$$

b) Enligt Taylor formel gäller det att för $x > 0$ så kan $f(x)$ skrivas på formen $f(x) = P(x) + E(x)$, där

$$E(x) = \frac{f'''(s)}{3!}(x-1)^3$$

och där s är något tal mellan 1 och x.

c) Använder vi Taylors formel (med $x = 3/2$) får vi att

$$|f(3/2) - P(3/2)| = \left|\frac{f'''(s)}{3!}(3/2-1)^3\right| \text{ där } 1 < s < 3/2.$$

Eftersom $|f'''(x)| = \frac{3}{8x^{5/2}}$ är avtagande på intervallet $(0, \infty)$ så måste $|f'''(s)| < |f'''(1)| = 3/8$, eftersom vi vet att $1 < s < 3/2$. Således har vi

$$\left|\frac{f'''(s)}{3!}(3/2-1)^3\right| < \frac{3}{8 \cdot 3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{1}{128} < \frac{1}{100} = 0.01.$$

Alltså, det är sant att $|f(3/2) - P(3/2)| < 0.01$.

Svar: a) $P(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2$, b) $E(x) = \frac{f'''(s)}{3!}(x-1)^3$ där s är något tal mellan 1 och x, c) Ja!

4. (a) Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{3}{x^2+3x}dx.$ **(4 p)**

(b) Avgör om serien $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{3}{k^2+3k}$ är konvergent eller divergent. **(2 p)**

Lösning: a) Med partialbråksuppdelning får vi att

$$\frac{3}{x^2+3x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}$$

och det följer då att

$$\int_1^\infty \frac{3}{x^2+3x}\,dx = \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right)\,dx.$$

Eftersom

$$\int_1^R \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right)\,dx = [\ln x - \ln(x+3)]_1^R = [\ln\frac{x}{x+3}]_1^R = \ln\frac{R}{R+3} - \ln\frac{1}{4}$$

som har gränsvärdet $\ln 4$ när R går mot oändligheten får vi att

$$\int_1^\infty \frac{3}{x^2+3x}\,dx = \ln 4.$$

Vi ser alltså att integralen är konvergent.

b) För denna deluppgift använder vi integraltestet som säger att serien $\sum_{k=1}^\infty \frac{3}{k^2+3k}$ har samma konvergensegenskaper som integralen i deluppgift a (eftersom integranden är positiv, kontinuerlig och avtagande på hela integrationsintervallet). Eftersom integralen är konvergent så är serien också konvergent.

Svar: a) $\ln 4$, b) Konvergent.

DEL C

5. (a) Beräkna gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{n} + \frac{2}{n}\sqrt{\frac{2k}{n}} \right)$. **(3 p)**

   (b) Beräkna gränsvärdet **(3 p)**

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} t \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt.$$

Lösning: a) Summan i uppgiften kan ses som en Riemannsumma med n stycken lika stora delintervall, och funktionsvärdena tagna i höger ändpunkt, till integralen

$$\int_0^2 (1+\sqrt{x})\, dx = \left[x + \frac{2}{3}x^{3/2} \right]_0^2 = 2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Eftersom integranden här är kontinuerlig på hela det slutna integrationsintervallet så konvergerar Riemannsummorna mot integralen när delintervallens längd går mot noll, dvs när n går mot oändligheten i det här fallet. Så det sökta gränsvärdet är $2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

b) Det är uppenbart att för $n > 1$ gäller att

$$n \sin \frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} t \sin \frac{1}{t}\, dt \leq (n+1) \sin \frac{1}{n}.$$

Vidare är, eftersom $\sin x \leq x$ för positiva x, $(n+1)\sin\frac{1}{n} \leq \frac{n+1}{n}$ som har gränsvärdet 1 när n går mot oändligheten. Dessutom är $n \sin \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \frac{\sin \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}$ som också har gränsvärdet 1 när n går mot oändligheten. Det följer av instängningslagen att

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} t \sin \frac{1}{t}\, dt = 1.$$

(Observera att integralen $\int_n^{n+1} t \sin \frac{1}{t}\, dt$ inte går att uttrycka med elementära funktioner varför man man måste göra uppskattningar som ovan.)

Svar: a) $2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}$ b) 1

6. (a) Antag att funktionen $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $[0, 1]$ och att $0 \leq f(0) \leq 1$ och $0 \leq f(1) \leq 1$. Visa att det finns (minst) en punkt p i intervallet $[0, 1]$ sådan att $f(p) = p$. **(3 p)**

(b) Antag att funktionen $g(x)$ är deriverbar på hela reella axeln och att $|g'(x)| \leq 1/2$ för alla x. Visa att det finns (minst) en punkt p sådan att $g(p) = p$. **(3 p)**

Lösning: a) Om $f(0) = 0$ eller $f(1) = 1$ så är vi klara. Om så inte skulle vara fallet, så gäller att $h(x) = f(x) - x$ är en kontinuerlig funktion på det slutna begränsade intervallet $[0, 1]$ med $h(0) = f(0) > 0$ och $h(1) = f(1) - 1 < 0$. Det följer då av satsen om mellanliggande värden att det finns någon punkt p mellan 0 och 1 så att $h(p) = 0$. Vilket är detsamma som att $f(p) = p$.

b) Anta att det inte finns någon punkt p så att $g(p) = p$, dvs anta att $g(x) \neq x$ för alla x. Då måste $h(x) = x - g(x)$ vara skild från noll för alla x och eftersom h är kontinuerlig betyder det (enligt satsen om mellanliggande värden) att h antingen är positiv för alla x eller negativ för alla x. Antag att h är positiv för alla x. Det betyder att $x > g(x)$ för alla x. Enligt medelvärdessatsen har vi $g(x) - g(0) = g'(s)x$ för något s mellan 0 och x. Då $|g'(t)| \leq 1/2$ för alla t måste det gälla att $|g(x) - g(0)| \leq |x|/2$ för alla x, dvs $g(x) - g(0) \geq -|x|/2$. Eftersom vi har antagit att $x > g(x)$ får vi

$$x - g(0) > -\frac{|x|}{2},$$

vilket ger

$$x + \frac{|x|}{2} > g(0)$$

för alla x. Detta är omöjligt när $x \to -\infty$, eftersom vänster led då går mot $-\infty$. Slutsats blir att h inte kan vara positiv för alla x. På samma sätt visas att h inte kan vara negativ för alla x. Denna motsägelse visar att det måste finnas en punkt p där $g(p) = p$.

Svar: Se lösningen.