KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2016.10.25

DEL A

1. (a) Bestäm Taylor polynomet av grad 2 till $\ln(1+x)$ omkring $x = 0$. **(2 p)**
   (b) Bestäm ett närmevärde för $\ln(6/5)$ som inte avviker mer än $3/1000$. **(2 p)**

Lösning. Om $f(x) = \ln(1+x)$ gäller det att $f'(x) = 1/(1+x)$, $f''(x) = -1/(1+x)^2$ och $f'''(x) = 2/(1+x)^3$. Därför ger Taylors formel att för x nära 0 gäller att

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{\frac{2}{(1+c)^3}}{3!}x^3$$

för något c mellan 0 och x.

Detta ger att Taylor polynomet av grad 2 till $\ln(1+x)$, runt $x = 0$, är $x - \frac{x^2}{2}$. Med $x = 1/5$ får vi approximationen

$$\ln 6/5 \approx \frac{1}{5} - \frac{1}{2 \cdot 25} = \frac{10}{50} - \frac{1}{50} = \frac{9}{50}$$

med ett fel som är

$$\frac{\frac{2}{(1+c)^3}}{3!}(\frac{2}{10})^3 \leq \frac{8}{3 \cdot 10^3} \leq 3 \cdot 10^{-3}.$$

$\square$

2. (a) Bestäm alla primitiva funktioner till $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$. (Tips: Substituera $u = \sqrt{x}$.) **(2 p)**

(b) Bestäm gränsvärdet **(2 p)**

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x) - 2 + x^2}{x^4}.$$

Lösning. (a) Vi använder substitutionen $u = \sqrt{x}$, med $du = dx/2\sqrt{x}$, och får:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx &= \int \frac{2u}{u+1}\,du \\ &= 2\int 1 - \frac{1}{u+1} \\ &= 2u - 2\ln(u+1) + C \\ &= 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + C\end{aligned}$$

där C är en godtycklig konstant.

(b) Taylorpolynomet till $\cos(x)$ är som bekant

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + E(x),$$

där rest $E(x)$ har grad ≥ 6. Detta ger att

$$2\cos(x) - 2 + x^2 = \frac{x^4}{12} + 2E(x),$$

vilket ger att den sökta gränsen blir

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x) - 2 + x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{12} + 2\frac{E(x)}{x^4}\right) = \frac{1}{12}.$$

$\square$

3. Låt L vara tangentlinjen i punkten $(1, e)$ till kurvan $y = xe^{x^2}$. Bestäm skärningspunkten mellan L och x-axeln. **(4 p)**

Lösning. Låt $f(x) = xe^{x^2}$. Då är $f'(x) = e^{x^2} + xe^{x^2}2x = (1 + 2x^2)e^{x^2}$. Vi har att $f'(1) = 3e$, och den sökta tangentlinjens ekvation blir

$$y - e = 3e(x - 1).$$

Skärningen med x-axeln fås när $y = 0$, det vill säga när $-e = 3e(x - 1)$. Detta inträffar med $x = 2/3$.

$\square$

Del B

4. Vi betraktar en LRC-krets med en spänningskälla, en spole med induktansen 1 henry, ett motstånd med resistansen 15 ohm och en kondensator med kapacitansen $1/50$ farad. Strömmen i genom kretsen uppfyller differentialekvationen

$$i''(t) + 15i'(t) + 50i(t) = 0.$$

Lös differentialekvationen och bestäm strömmen vid tiden t om $i(0) = 0$ ampere och $i'(0) = 1$ ampere/sekund. **(4 p)**

Lösning. Den karaktäristiska ekvationen $r^2 + 15r + 50 = 0$ har lösningarna $r = -5$ och $r = -10$, så lösningarna till differentialekvationen är

$$i(t) = Ae^{-5t} + Be^{-10t},$$

där A och B är godtyckliga konstanter. Villkoret $i(0) = 0$ ger $A + B = 0$ och $i'(0) = 1$ ger $-5A - 10B = 1$. Med hjälp av dessa ekvationer kan vi bestämma att konstanterna blir $A = 1/5$ och $B = -1/5$.

Strömmen vid tidpunkten t ges alltså av

$$i(t) = \frac{1}{5}e^{-5t} - \frac{1}{5}e^{-10t} \quad \text{ampere.}$$

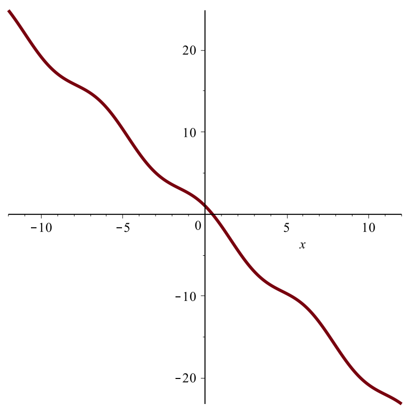
□

5. (a) Skissa kurvan $y = \cos x - 2x$. **(2 p)**
(b) Använd lösningen av uppgift (a) för att visa att ekvationen $\cos x = 2x$ har exakt en lösning. **(1 p)**
(c) Ange ett intervall av längd högst $\frac{1}{2}$ som innehåller lösningen av ekvationen $\cos x = 2x$. (Längden av ett intervall $[a, b]$ är $|b - a|$.) **(1 p)**

Lösning. (a) Låt $f(x) = \cos x - 2x$. Vi ser att f är definierad och kontinuerlig för alla x. Vi deriverar och får att $f'(x) = -\sin x - 2$. Eftersom sinusfunktionen bara tar värden i intervallet $[-1, 1]$ har vi att $f'(x) < 0$ för alla x. Funktionen f är därmed strängt avtagande på hela reella axeln. Eftersom vidare $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ och $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ och $f(0) = 1$ så kan vi nu skissa kurvan (se nedan).

(b) Med $f(x) = \cos x - 2x$ som ovan gäller att $\cos x = 2x \Leftrightarrow f(x) = 0$. Eftersom f är strängt avtagande kan det finnas högst ett x sådant att $f(x) = 0$. Eftersom $f(0) = 1$ och $f(1) = \cos 1 - 2 < 0$ och f är kontinuerlig följer av satsen om mellanliggande värden att det finns minst ett x sådant att $f(x) = 0$. Sammanfattningsvis har vi alltså visat att det finns exakt en lösning till ekvationen $\cos x = 2x$

(c) Vi har att $f(0) = 1$, ett positivt tal, och vi har att $f(1/2) = \cos(1/2) - 1 \leq 0$, ett negativt tal. Lösningen till ekvationen $\cos(x) = 2x$ ligger i intervallet $[0, \frac{1}{2}]$, som är ett intervall av längd $\frac{1}{2}$.



□

6. Vi betraktar funktionen
$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
definerad på intervallet $-1 \leq x \leq 1$.

(a) Skriv upp integralen som ger längden av funktionsgrafen $y = f(x)$. **(2 p)**

(b) Beräkna längden av denna kurva. **(2 p)**

Lösning. (a) Längden L av kurvan $y = f(x)$ på intervallet $a \leq x \leq b$ ges av
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$
I vårt fall är $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ och
$$1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{(e^x)^2 - 2 + (e^{-x})^2}{4} = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2.$$
Integralen som ger längden blir
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2}\, dx.$$
(b) Vi beräknar integralen,
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2}\, dx &= \int_{-1}^{1} \frac{e^x + e^{-x}}{2}\, dx \\ &= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]_{-1}^{1} \\ &= e - \frac{1}{e}\end{aligned}$$
□

Del C

7. (a) Definiera vad det betyder för en funktion f att vara kontinuerlig i a. **(1 p)**
   (b) Definiera vad det betyder för en funktion f att vara deriverbar i a. **(1 p)**
   (c) Bestäm talen a och b så att funktionen f som ges av

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ ax + b & x > 1 \end{cases}$$

blir både kontinuerlig och deriverbar i punkten $x = 1$. **(2 p)**

Lösning. (a) Funktionen f är kontinuerlig i a om f är definierad i a och f har ett gränsvärde när $x \to a$, och att gränsvärdet

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

(b) Funktionen f är deriverbar i a om f är definierad i en omgivning av a och gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existerar.

(c) För att f ska vara kontinuerlig i $x = 1$ krävs att gränsvärdet och funktionsvärdet är lika. Vi ser att $f(1) = 1$ vilket också är vänstra gräsvärdet (dvs för $x \leq 1$). Högra gränsvärdet är

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (ax + b) = a + b.$$

Kontinuitet av f kräver alltså att $a + b = 1$. För deriverbarhet krävs dessutom att

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

existerar. Om vi låter $h \to 0^-$ får vi

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2.$$

Om vi låter $h \to 0^+$ får vi

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{a(1+h) + b - a \cdot 1 - b}{h} = a.$$

Funktionen blir kontinuerlig och deriverbar om vi väljer $a = 2$ och $b = -1$.

□

8. Låt funktionen f vara definierad genom

$$f(t) = \begin{cases} \cos^2 t, & 0 \leq t \leq 1 \\ t^2 + 1 & t > 1 \end{cases}$$

Beräkna för varje tal $x \geq 0$ integralen **(4 p)**

$$\int_0^x f(t)\,dt.$$

Lösning. Om $x \in [0, 1]$ får vi att

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \cos^2 t\,dt = \int_0^x \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}.$$

Om $x > 1$ har vi att

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t)\,dt &= \int_0^1 \cos^2 t\,dt + \int_1^x (t^2 + 1)dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sin 2}{4} + \frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{3} - 1 \\ &= \frac{\sin 2}{4} + \frac{x^3}{3} + x - \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

□

9. Beräkna gränsvärdet **(4 p)**

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+k}{n^4}\right)^{1/3}$$

Lösning. Vi observerar att

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+k}{n^4}\right)^{1/3}=\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/3}\cdot\frac{1}{n}$$

är en Riemannsumma med n lika stora delintervall till integralen

$$\int_0^1 (1+x)^{1/3}\,dx.$$

Eftersom integranden är kontinuerlig på hela integrationsintervallet, inklusive ändpunkterna, såkonvergerar följden av Riemannsummor när $n\to\infty$ mot integralen. Vi har att

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+k}{n^4}\right)^{1/3}=\int_0^1(1+x)^{1/3}\,dx=\left[\frac{3}{4}(1+x)^{4/3}\right]_0^1=\frac{3}{4}(2^{4/3}-1)$$

$\square$