SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
Måndagen den 9 mars 2020

Skrivtid: 8.00-11.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Kristian Bjerklöv

Tentamen består av tre delar: A, B och C, som vardera ger maximalt 12 poäng. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng, upp till som mest 12 poäng. Poängsumman på del A kan alltså bli högst 12 poäng, bonuspoäng medräknade. Bonuspoängen beräknas automatiskt och antalet bonuspoäng framgår av din resultatsida.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

Var god vänd!

DEL A

1. (a) Beräkna $\displaystyle\int_1^e \frac{(1+\ln(x))^2}{x}\,dx$. **(3 p)**

   (b) Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = x\sin(x)$. **(3 p)**

2. (a) Låt L vara tangentlinjen till kurvan $y = \arctan(x^2)$ i den punkt på kurvan som har x-koordinat 1. Bestäm en ekvation för linjen L. **(3 p)**

   (b) Låt $f(x) = e^{-x}$ och låt $P(x)$ vara Taylorpolynomet av grad 1 till f kring $x = 0$. Visa att $0 < f(1/3) - P(1/3) < 1/10$. **(3 p)**

DEL B

3. Låt $f(x) = (x^2 - 2x - 2)e^x$.

   (a) Har funktionen f något största eller minsta värde? Bestäm i förekommande fall dessa. **(4 p)**

   (b) Hur många lösningar har ekvationen $f(x) = -1$? **(2 p)**

4. (a) Avgör om den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2+\sin(x)}{1+x^2}\,dx$ är konvergent eller divergent. **(4 p)**

   (b) Avgör om serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \cos(1/k^2)$ är konvergent eller divergent. **(2 p)**

DEL C

5. Låt $n \geq 1$ vara ett heltal, och låt P_n vara partitionen av intervallet $[2,3]$ i n stycken delintervall, alla av längd $1/n$. Låt $L(P_n)$ vara Riemann-undersumman (lower sum) av funktionen $f(x) = 3x$ på intervallet $[2,3]$ med avseende på den givna partitionen P_n.

   (a) Bestäm en formel, bara beroende på talet n, för $L(P_n)$. **(4 p)**

   (b) Bestäm gränsvärdet $\displaystyle\lim_{n\to\infty} L(P_n)$. **(2 p)**

6. Antag att funktionen f är deriverbar med derivatan $f'(x) = 0$ för alla reella tal x.

   (a) Visa att f är kontinuerlig på hela reella axeln (dvs visa att deriverbarhet medför kontinuitet). **(3 p)**

   (b) Använd differentialkalkylens medelvärdessats för att visa att funktionen f är konstant. **(3 p)**