SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2017-01-09

DEL A

1. (a) Visa att $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$ är en primitiv funktion till $f(x) = 1/\sqrt{x^2 + a^2}$ för varje val av konstanten C. **(2 p)**

   (b) Beräkna integralen
$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16}}$$
   och förenkla svaret så långt som möjligt. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi ska visa att $F'(x) = f(x)$. Vi deriverar och får att
$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + a^2}} \cdot 2x\right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} = f(x). \end{aligned}$$

(b) Vi beräknar integralen med hjälp av den primitiva funktionen (med $a = 4$ och $C = 0$) och förenklar svaret:
$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16}} = \left[\ln(x + \sqrt{x^2 + 16})\right]_0^3 = \ln 8 - \ln 4 = \ln 2.$$

Svar.

(a) Se lösning.

(b) $\ln 2$.

2. (a) Bestäm integralen $\displaystyle\int_0^{1/2} \arcsin x\, dx.$ **(2 p)**

(b) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{a_n\}$ när $\displaystyle a_n = \sum_{i=2}^{n} \frac{2}{3^i}.$ **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi använder partiell integration och får att

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \arcsin x\, dx &= \Big[x \arcsin x\Big]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\ &= \frac{\pi}{12} + \Big[\sqrt{1-x^2}\Big]_0^{1/2} \\ &= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.\end{aligned}$$

(b) Den geometriska serien $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i}$ konvergerar mot $\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$. Detta ger att $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2}{3^i} = 3$. Den sökta summan blir då

$$3 - \frac{2}{3^0} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Alternativ lösning: Vi noterar att a_n är en geometrisk summa:

$$a_n = \frac{2}{9} \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{3^i} = \frac{2}{9} \frac{1 - \frac{1}{3^{n-1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1 - \frac{1}{3^{n-1}}}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^n}.$$

Vi ser att den andra termen i uttrycket för a_n går mot 0. Alltså är $\lim\{a_n\} = \frac{1}{3}$.

Svar.

(a) $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$

(b) $\frac{1}{3}$

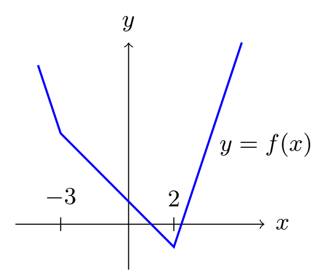
3. Funktionen f ges av $f(x) = -6 + |x+3| + |4-2x|$. Bestäm alla reella tal x som löser olikheten $f(x) < 0$. (Tips: Skissa grafen.) **(4 p)**

Lösningsförslag. Från absolutbeloppets definition följer att $|x+3| = x+3$ om $x+3 \geq 0$ och $|x+3| = -(x+3)$ om $x+3 \leq 0$ och likadant för $|4-2x|$. De intressanta värdena på x ges alltså av $x+3=0$ och $4-2x=0$, dvs $x=-3$ och $x=2$, och vi har att

$$\begin{aligned} f(x) &= -6-(x+3)+(4-2x) = -3x-5, && \text{om} \quad x \leq -3 \leq 2, \\ f(x) &= -6+(x+3)+(4-2x) = -x+1, && \text{om} \quad -3 \leq x \leq 2, \\ f(x) &= -6+(x+3)-(4-2x) = 3x-7, && \text{om} \quad -3 \leq 2 \leq x. \end{aligned}$$

Sammanfattningsvis

$$f(x) = \begin{cases} -3x-5, & \text{då } x \leq -3, \\ -x+1, & \text{då } -3 < x \leq 2, \\ 3x-7, & \text{då } x > 2. \end{cases}$$



Ur figuren ser vi att grafen skär x-axeln i två av intervallen. Skärningspunkterna är:

(a) $-x+1=0 \iff x=1$
(b) $3x-7=0 \iff x=\frac{7}{3}$

Olikheten $f(x) < 0$ är alltså uppfylld exakt då $1 < x < \frac{7}{3}$.

Svar. $f(x) < 0$ då $x \in \left(1, \frac{7}{3}\right)$

DEL B

4. Positionen $y(t)$ av en viss partikel i ett kraftfält vid tiden t uppfyller differentialekvationen

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0.$$

(a) Om man vet att $y(t) = 3e^{-3t} + 6e^{2t}$, vilka värden har då a och b? **(2 p)**

(b) Lös differentialekvationen när $a = -5$ och $b = 6$ med initialvillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 4$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Med $y(t) = 3e^{-3t} + 6e^{2t}$ som lösning till differentialekvationen måste $r = -3$ och $r = 2$ uppfylla den karaktäristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0$. I sådant fall är

$$r^2 + ar + b = (r + 3)(r - 2) = r^2 + r - 6,$$

vilket betyder att $a = 1$ och $b = -6$.

(b) Med $a = -5$ och $b = 6$ så är den karakteristiska ekvationen

$$r^2 - 5r + 6 = (r - 2)(r - 3) = 0$$

vilken har lösningarna $r = 2$ och $r = 3$. Lösningarna till differentialekvationen är därför på formen $y(t) = Ce^{2t} + De^{3t}$. Initialvillkoren används till att bestämma konstanterna. Värdet $y(0) = 1$ ger att $C + D = 1$ och $y'(0) = 4$ ger att $2C + 3D = 4$. Insätter vi $C = 1 - D$ i ekvationen $2C + 3D = 4$ får vi att $D = 2$, och att $C = -1$. Positionen ges av därmed av

$$y(t) = -e^{2t} + 2e^{3t}.$$

Svar.

(a) $a = 1$ och $b = -6$.

(b) $y(t) = -e^{2t} + 2e^{3t}$.

5. Låt $f(x) = \arctan(x^2)$.
   (a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 1 till $f(x)$ omkring $x = 1$. **(2 p)**
   (b) Visa att $|\frac{\pi}{4} + \frac{1}{10} - f(1.1)| < 1/50$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Med $f(x) = \arctan x^2$ gäller att

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}, \quad \text{och} \quad f''(x) = \frac{-6x^4+2}{(1+x^4)^2}.$$

I punkten $x = 1$ har vi att

$$f(1) = \frac{\pi}{4}, \quad f'(1) = 1,$$

och första gradens Taylorpolynom till f kring $x = 1$ blir

$$P_1(x) = \frac{\pi}{4} + 1 \cdot (x-1).$$

(b) Den approximation vi får av $f(1.1)$ med hjälp av detta är

$$f(1.1) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{10} \ (\approx 0.885)\,.$$

Felet i approximationen ges av

$$\left|E_2(1.1)\right| = \left|\frac{f''(c)}{2} \cdot (1.1-1)^2\right| = \left|\frac{-6c^4+2}{2(1+c^4)^2}\right| \cdot 10^{-2},$$

för något c mellan 1 och 1.1. Vi gör följande uppskattningar. I den första olikheten uppskattar vi nämnaren med $1 + c^4 \geq 2$, vilket gäller då $c \geq 1$. I den andra olikheten uppskattar vi täljaren med $c^4 < 2$ vilket gäller då $c \leq 11/10$ ger att $c^2 \leq 121/100 < \sqrt{2}$, och slutligen att $c^4 < 2$. Detta ger

$$\left|E_2(1.1)\right| = \frac{3c^4-1}{(1+c^4)^2} \cdot 10^{-2} < \frac{3c^4-1}{4} \cdot 10^{-2} < \frac{5}{4} \cdot 10^{-2} < \frac{1}{50}.$$

Svar.

(a) $P_1(x) = \frac{\pi}{4} + 1 \cdot (x-1)$

(b) Se lösning.

6. Ellipsen E med halvaxlarna $a > 0$ och $b > 0$ ges av ekvationen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Bestäm den största möjliga area en rektangel kan ha om den har sina hörn på ellipsen E, och där rektangelns sidor är parallella med halvaxlarna. **(4 p)**

Lösningsförslag. Koordinaterna på ellipsen E kan skrivas som $x = a\cos(t), y = b\sin(t)$, med $t \in [0, 2\pi]$. Arean av rektangel med ett hörn i punkten (x, y) i första kvadrant blir då

$$A(t) = 4xy = 4ab\cos(t)\sin(t) = 2ab\sin(2t).$$

Av symmetri så bestäms rektangeln av sitt hörn i första kvadrant, och vi behöver bara betrakta funktionen $A(t)$ med $0 \leq t \leq \pi/2$. Funktionen uppnår sitt största värde när $\sin(2t) = 1$, det vill säga när $t = \pi/4$. Den största arean är $2ab$.

Alternativ lösning: Ellipsen E ges av ekvationen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Origo är centrum och halvaxlarna ligger på koordinataxlarna. Väljer vi en punkt på ellipsen i första kvadranten så bestämmer detta en rektangel av den typ det frågas efter i uppgiften. Och alla sådana rektanglar genereras på detta sätt. Punkten vi väljer har koordinater

$$(x, y) = \left(x, b\sqrt{1 - x^2/a^2}\right).$$

Arean av rektangeln ges av

$$A(x) = 4xb\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad 0 \leq x \leq a.$$

Vi ska hitta största värdet av funktionen A. Eftersom A är kontinuerlig och definitionsintervallet är slutet och begränsat vet vi att det finns ett största värde, som måste antas i en ändpunkt, en kritisk punkt eller i en singulär punkt. Ändpunkterna kan uteslutas, ty $A(0) = A(a) = 0$ vilket inte kan vara maximum eftersom A tar positiva värden. Vi deriverar och får

$$A'(x) = 4b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - \frac{4x^2 b}{a^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \frac{4b(a^2 - 2x^2)}{a^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}.$$

Vi ser att A är deriverbar för alla x mellan 0 och a så vi kan utesluta singulära punkter. Maximum måste därmed antas i en kritisk punkt. Vi hittar sådana;

$$A'(x) = 0 \iff x = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Eftersom detta är den enda kritiska punkten måste den vara vår maxpunkt. Största värdet på arean är alltså

$$A(a/\sqrt{2}) = 2ab.$$

Svar. $2ab$

DEL C

7. Låt f vara en funktion på ett intervall $I = [a, b]$. Antag att f är kontinuerlig, växande samt positiv på intervallet I. För varje x i I, låt $A(x)$ vara arean mellan funktionsgrafen och x-axeln till f på intervallet $[a, x]$. Visa fundamentalsatsen som säger att funktionen A är deriverbar och att $A'(x) = f(x)$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Derivatans definition ger att

$$A'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

Vi betraktar fallet med $h > 0$. Vi har att $A(x + h) - A(x)$ är arean under funktionsgrafen till f, över intervallet $[x, x + h]$. Då funktionen f är växande har vi att

$$f(x)h \leq A(x + h) - A(x) \leq f(x + h)h,$$

vilket ger

$$f(x) \leq \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \leq f(x + h),$$

för alla $h > 0$. När vi nu tar gränsen erhåller vi att

$$f(x) \leq \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \leq \lim_{h\to 0} f(x + h) = f(x).$$

I den högre identiteten använder vi att funktionen f är kontinuerlig. Ett liknande argument för $h < 0$ ger att funktionen A är deriverbar, och att derivatan $A'(x) = f(x)$.

Alternativ lösning: Enligt integralkalkylens medelvärdessats är

$$A(x + h) - A(x) = f(c)h$$

för något $c \in [x, x + h]$ som beror på h (detta använder enbart att f är kontinuerlig). När $h \to 0$, så $c \to x$. Av kontinuitet följer att

$$A'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f\big(c(h)\big)h}{h} = \lim_{c\to x} f(c) = f(x).$$

8. Funktionen f ges av **(4 p)**

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} + \frac{4}{5}\arctan x.$$

Bestäm det största öppna intervall som innehåller punkten $x = 1$, där f är inverterbar.

Lösningsförslag. Vi deriverar och får att

$$f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{5}\cdot\frac{9-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Vi ser att derivatan existerar för alla x och att $f'(x) = 0 \iff x = \pm 3$. Teckenstudium av derivatan ger:

- Om $x < -3$ så är $f'(x) < 0$ och funktionen f är strängt avtagande.
- Om $-3 < x < 3$ så är $f'(x) > 0$ och funktionen f är strängt växande.
- Om $x > 3$ så är $f'(x) < 0$ och funktionen f är strängt avtagande.

x		-3		3	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Punkten $x = 1$ ligger mellan -3 och 3 där f är strängt växande. Det följer att det största öppna intervall som innehåller $x = 1$, och där funktionen f är inverterbar är intervallet $(-3, 3)$.

9. (a) Avgör om det finns något tal $R > 0$ sådant att **(2 p)**

$$\int_1^R \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx > 100.$$

(b) Avgör om det finns något tal $R > 0$ sådant att **(2 p)**

$$\sum_{n=1}^{R} \frac{1}{\sqrt{n^2+\frac{1}{2}}} > 100.$$

Lösningsförslag.

(a) För alla x gäller att $0 \leq \dfrac{\sin^2 x}{x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$. Eftersom

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^R = 1$$

följer det att integralen

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$$

är konvergent och att dess värde är högst 1. Eftersom

$$\int_1^R \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$$

är en växande funktion av R (integranden är positiv) så följer att det inte kan finnas något R som gör integralen större än 1, och speciellt ej större än 100.

(b) För alla $n \geq 1$ gäller att

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+\frac{1}{2}}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{n}.$$

Det följer att

$$\sum_{n=1}^{R} \frac{1}{\sqrt{n^2+\frac{1}{2}}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{R}\frac{1}{n}.$$

Eftersom den senare summan är obegränsad då $R \to \infty$ (den harmoniska serien) så följer det att det finns ett tal $R > 0$ som gör att

$$\sum_{n=1}^{R} \frac{1}{\sqrt{n^2+\frac{1}{2}}} > 100.$$

Svar. (a) Nej (b) Ja