SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
Måndagen den 9:e januari 2017

Skrivtid: 08:00–13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Roy Skjelnes

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del A på tentamen utgörs av de första tre uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng, upp till som mest 12 poäng. Poängsumman på del A kan alltså bli högst 12 poäng, bonuspoäng medräknade. Bonuspoängen beräknas automatiskt och antalet bonuspoäng framgår av din resultatsida.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de sista tre uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. (a) Visa att $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$ är en primitiv funktion till $f(x) = 1/\sqrt{x^2 + a^2}$ för varje val av konstanten C. **(2 p)**

   (b) Beräkna integralen
   $$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16}}$$
   och förenkla svaret så långt som möjligt. **(2 p)**

2. (a) Bestäm integralen $\displaystyle\int_0^{1/2} \arcsin x \, dx$. **(2 p)**

   (b) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \{a_n\}$ när $a_n = \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{2}{3^i}$. **(2 p)**

3. Funktionen f ges av $f(x) = -6 + |x + 3| + |4 - 2x|$. Bestäm alla reella tal x som löser olikheten $f(x) < 0$. (Tips: Skissa grafen.) **(4 p)**

DEL B

4. Positionen $y(t)$ av en viss partikel i ett kraftfält vid tiden t uppfyller differentialekvationen
$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0.$$
   (a) Om man vet att $y(t) = 3e^{-3t} + 6e^{2t}$, vilka värden har då a och b? **(2 p)**
   (b) Lös differentialekvationen när $a = -5$ och $b = 6$ med initialvillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 4$. **(2 p)**

5. Låt $f(x) = \arctan(x^2)$.
   (a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 1 till $f(x)$ omkring $x = 1$. **(2 p)**
   (b) Visa att $|\frac{\pi}{4} + \frac{1}{10} - f(1.1)| < 1/50$. **(2 p)**

6. Ellipsen E med halvaxlarna $a > 0$ och $b > 0$ ges av ekvationen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Bestäm den största möjliga area en rektangel kan ha om den har sina hörn på ellipsen E, och där rektangelns sidor är parallella med halvaxlarna. **(4 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Låt f vara en funktion på ett intervall $I = [a, b]$. Antag att f är kontinuerlig, växande samt positiv på intervallet I. För varje x i I, låt $A(x)$ vara arean mellan funktionsgrafen och x-axeln till f på intervallet $[a, x]$. Visa fundamentalsatsen som säger att funktionen A är deriverbar och att $A'(x) = f(x)$. **(4 p)**

8. Funktionen f ges av **(4 p)**

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} + \frac{4}{5}\arctan x.$$

Bestäm det största öppna intervall som innehåller punkten $x = 1$, där f är inverterbar.

9. (a) Avgör om det finns något tal $R > 0$ sådant att **(2 p)**

$$\int_1^R \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx > 100.$$

(b) Avgör om det finns något tal $R > 0$ sådant att **(2 p)**

$$\sum_{n=1}^{R} \frac{1}{\sqrt{n^2 + \frac{1}{2}}} > 100.$$