KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2019.03.08

DEL A

1. Denna uppgift behandlar differentialekvationen $y'' - y' - 2y = 12e^{-t}$.
   (a) Bestäm koefficienten A sådan att $y_P(t) = Ate^{-t}$ blir en lösning. **(2 p)**
   (b) Bestäm samtliga lösningar till differentialekvationen. **(2 p)**
   (c) Bestäm lösningarna $y(t)$ till differentialekvationen som uppfyller de bägge villkoren $y(0) = 2$ och $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$. **(2 p)**

Lösning. a) Med $y_p(t) = Ate^{-t}$ blir $y_p'(t) = Ae^{-t} - Ate^{-t}$ och $y_p''(t) = Ate^{-t} - 2Ae^{-t}$. Insatt i differentialekvationen fås

$$Ate^{-t} - 2Ae^{-t} - \left(Ae^{-t} - Ate^{-t}\right) - 2Ate^{-t} = 12e^{-t} \iff -3Ae^{-t} = 12e^{-t},$$

dvs $A = -4$ så $y_p(t) = -4te^{-t}$.

b) Vi löser först motsvarande homogena ekvation $y'' - y' - 2y = 0$. Den karaktäristiska ekvationen $r^2 - r - 2 = 0$ har lösningar $r = -1$ och $r = 2$, så allmän lösning till den homogena ekvationen är $y_h(t) = Ce^{2t} + De^{-t}$. Allmän lösning $y_g(t)$ till den givna ekvationen är då

$$y_g(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ce^{2t} + De^{-t} - 4te^{-t},$$

med konstanter C och D.

c) Eftersom $e^{2t} \to \infty$ medan både $e^{-t} \to 0$ och $te^{-t} \to 0$, när $t \to \infty$, ger villkoret $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ att $C = 0$, så $y(t) = De^{-t} - 4te^{-t}$. Nu ger villkoret $y(0) = 2$ att $D = 2$.

$\square$

2. Bestäm alla primitiva funktioner till den rationella funktionen **(6 p)**

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1}.$$

Lösning. Polynomdivision ger att

$$f(x) = x + 2 + \frac{-3x + 1}{x^2 - 1}.$$

Vi har vidare att

$$\frac{-3x + 1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1},$$

vilket ger ekvationssystemet $A + B = -3$ och $-A + B = 1$. Lösningen är $A = -2$ och $B = -1$. Därmed har vi att

$$f(x) = x + 2 - \frac{2}{(x + 1)} - \frac{1}{(x - 1)}.$$

Primitiva funktioner till f blir därmed

$$\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2\ln|(x + 1)| - \ln|(x - 1)| + c.$$

□

DEL B

3. Funktionen $g(x) = \ln(1+\sin x)$ är definerad på det öppna intervallet $I = (-\pi/2, 3\pi/2)$.
   (a) Skissa funktionsgrafen till funktionen g, och markera alla extremvärden. **(3 p)**
   (b) Ge ett exempel på en kontinuerlig funktion $f(x)$, definierad på I, som inte har extremvärden. **(2 p)**

Lösning. a) Vi får med kedjeregeln att

$$g'(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x}$$

så

$$g'(x) = 0 \iff \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} \text{ (eftersom } -\pi/2 < x < 3\pi/2 \text{) .}$$

Eftersom $1 + \sin x > 0$ på $(-\pi/2, 3\pi/2)$ bestäms tecknet p $g'(x)$ av $\cos x$, så

- $g'(x) > 0$ och $g(x)$ alltså strikt växande på $(-\pi/2, \pi/2)$;
- $g'(x) < 0$ och $g(x)$ alltså strikt avtagande på $(\pi/2, 3\pi/2)$.

Det följer att $x = \pi/2$ är en global maximipunkt med största värde $g(\pi/2) = \ln 2$.

Vi har vidare $\lim_{x\to(-\pi/2)+} = -\infty$, eftersom täljaren går mot -1 och nämnaren mot $0+$, alltså saknas minsta värde. (Även $\lim_{x\to(3\pi/2)-} = -\infty$)

b) Ett exempel är funktionen $f(x) = x$.

$\square$

4. Funktionen $g(x) = \ln(1 + \sin x)$ är definerad på det öppna intervallet $I = (-\pi/2, 3\pi/2)$.
   (a) Bestäm andragradspolynomet $P(x)$ som bäst approximerar funktionen g omkring punkten $x = 0$. **(2 p)**
   (b) Låt t vara ett tal sådant att $0 \le t \le \pi$. Visa att $|\ g(t) - P(t)\ | \le \frac{1}{6}t^3$. **(2 p)**
   (c) Bestäm ett närmevärde till integralen $\int_0^{1/2} g(x)\,dx$ som avviker med mindre än $1/300$ från det exakta värdet. **(3 p)**

Lösning. a) Vi har att $g'(x) = \cos(x)/(1 + \sin(x))$, och andraderivatan ges av

$$g''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right) = \frac{-\sin x\,(1+\sin x) - \cos x \cos x}{(1+\sin x)^2} = \frac{-1}{1+\sin x}.$$

Vi har alltså att $g(0) = \ln(1 + \sin 0) = \ln 1 = 0$, $g'(0) = 1$ och $g''(0) = -1$, så det bäst approximerande 2:a-gradspolynomet $P(x)$ kring $x = 0$ (MacLaurinpolynomet av grad 2) ges av

$$g(x) \approx P(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 = x - \frac{x^2}{2}.$$

b) Vi beräknar tredjederivatan g''':

$$g'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{1+\sin x}\right) = \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}.$$

Feltermen $E(t) = g(t) - P(t)$ i det givna talet t ges då enligt Taylors formel av

$$E(t) = \frac{g'''(s)}{3!}t^3 = \frac{\cos s}{6(1+\sin s)^2}t^3,$$

där s är något tal mellan 0 och t. Eftersom $|\cos s| \le 1$ och $|1 + \sin s| \ge 1$ för alla $0 \le s \le \pi$, gäller att

$$|E(t)| = \frac{|\cos s|}{|6(1+\sin s)^2|}\left|t^3\right| \le \frac{1}{6}t^3.$$

e) Vi har att

$$\int_0^{1/2} g(x)\,dx = \int_0^{1/2} P(x) + E(x)\,dx = \int_0^{1/2} P(x)\,dx + \int_0^{1/2} E(x)\,dx.$$

Vi beräknar

$$\int_0^{1/2} P(x)\,dx = \int_0^{1/2} x - \frac{x^2}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^{1/2} = \frac{5}{48}.$$

Vi har från d) att

$$\left|\int_0^{1/2} E(x)\,dx\right| \le \int_0^{1/2} |E(x)|\,dx \le \frac{1}{6}\int_0^{1/2} x^3\,dx = \frac{1}{6}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{384} < \frac{1}{300}.$$

□

DEL C

5. (a) Visa att för varje heltal $n \geq 1$ har vi att **(6 p)**

$$\int_{\cos(1/n)}^{1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{\sin^2(1/n)}{\cos^2(1)}.$$

(b) Visa att serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\ln(\cos(1/n))$$

är konvergent. **(6 p)**

Lösning. a) Den sökta integralen ger arean $A(n)$ av området under funktionsgrafen till $f(x) = 1/x$ och över x-axeln mellan $\cos(1/n)$ och 1. Funktionen $f(x)$ är avtagende så arean

$$A(n) \leq f(1/n) \cdot (1 - \cos(1/n)) = \frac{(1 - \cos(1/n))}{\cos(1/n)} = \frac{(1 - \cos(1/n))\cos(1/n)}{\cos^2(1/n)}.$$

Vi har att $\cos(1) \leq \cos(1/n) \leq 1$ vilket ger

$$A(n) \leq \frac{(\cos(1/n) - \cos^2(1/n))}{\cos^2(1)} \leq \frac{(1 - \cos^2(1/n)}{\cos^2(1)} = \frac{\sin^2(1/n)}{\cos^2(1)}.$$

b) Definitionen av den naturliga logaritmen ger att

$$-\ln(\cos(1/n)) = \int_{\cos(1/n)}^{1} \frac{1}{t}\, dt.$$

Den sista integralen är ett uttryck för arean $A(n)$ av det område som beskrivs i a), varifrån vi har att $0 \leq A(n) \leq \sin^2(1/n)/\cos^2(1)$.

Vi har att $\sin(x) \leq x$ när $x \geq 0$, så speciellt har vi att $\sin(1/n) \leq 1/n$. Detta ger att

$$A(n) \leq \frac{1}{\cos^2(1)} \frac{1}{n^2}.$$

Serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ är konvergent, och det följer att vår efterfrågade serie är konvergent.

$\square$