SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
Onsdagen den 3 juni 2020

Skrivtid: 14.00-17.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Kristian Bjerklöv

Tentamen består av tre delar; A, B och C, som vardera ger maximalt 12 poäng. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng, upp till som mest 12 poäng. Poängsumman på del A kan alltså bli högst 12 poäng, bonuspoäng medräknade. Bonuspoängen beräknas automatiskt och antalet bonuspoäng framgår av din resultatsida.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

Var god vänd!

DEL A

1. Beräkna gränsvärdena **(3+3 p)**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x/2} + \ln(x) + 2e^{2x}}{3e^{2x} + x^{100} - 7} \quad \text{och} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x - x\cos(x)}.$$

2. (a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = 1/(x^2 + 5x + 6)$. **(3 p)**

   (b) Bestäm arean av området i planet som begränsas av kurvan $y = xe^{-x}$ och linjerna $y = 0, x = 0$ och $x = 1$. **(3 p)**

DEL B

3. Låt $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}$. **(6 p)**
   - Bestäm alla intervall där f är växande respektive avtagande och bestäm alla lokala extrempunkter.
   - Finn alla asymptoter till kurvan $y = f(x)$.

   Använd informationen ovan för att skissa kurvan $y = f(x)$. Bestäm också eventuella största och minsta värden hos funktionen f.

4. Avgör om följande generaliserade integraler är konvergenta eller divergenta. Beräkna dem om de är konvergenta.

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}dx.$ **(3 p)**

   (b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}dx.$ **(3 p)**

DEL C

5. Visa att **(6 p)**

$$\ln\left(\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}\right) > 1 \quad \text{för alla } 0 < x < 1.$$

6. Antag att funktionen f är definierad på hela reella axeln och att f, f' och f'' är kontinuerliga överallt. Antag vidare att $f(0) = f'(0) = 0$ och att $f''(x) \geq 0$ för alla x. Visa att serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f(1/k)$ är konvergent. **(6 p)**