TENTAMEN

<table>
<tr><td>Kursnummer:</td><td>HF0024
Matematik för basår II</td></tr>
<tr><td>Moment:</td><td>TENA</td></tr>
<tr><td>Program:</td><td>Tekniskt basår</td></tr>
<tr><td>Rättande lärare:</td><td>Staffan Linnaeus</td></tr>
<tr><td>Examinator:</td><td>Niclas Hjelm</td></tr>
<tr><td>Datum:
Tid:</td><td>2018-12-18
08:00-12:00</td></tr>
<tr><td>Hjälpmedel:</td><td>Formelsamling: ISBN 978-91-27-72279-8 eller ISBN 978-91-27-42245-2 (utan anteckningar).
Inga andra formelsamlingar är tillåtna!
Miniräknare, penna, radergummi, linjal, gradskiva</td></tr>
<tr><td>Omfattning och betygsgränser:</td><td>
<table>
<tr><th>Poäng</th><th>Betyg</th></tr>
<tr><td>11</td><td>Fx</td></tr>
<tr><td>12 – 14</td><td>E</td></tr>
<tr><td>15 – 17</td><td>D</td></tr>
<tr><td>18 – 20</td><td>C</td></tr>
<tr><td>21 – 23</td><td>B</td></tr>
<tr><td>24 – 26</td><td>A</td></tr>
</table>
Till samtliga uppgifter krävs fullständiga lösningar. Lösningarna skall vara tydliga och lätta att följa. Införda beteckningar skall definieras. Uppställda samband skall motiveras.
Skriv helst med blyertspenna!
Svaret ska framgå tydligt och vara förenklat så långt som möjligt. Svara med enhet och lämplig avrundning på tillämpade uppgifter. Svara exakt på övriga uppgifter, om inte annat anges. Lycka till!</td></tr>
</table>

1. För en vinkel v gäller $90° < v < 180°$ och $\sin v = \frac{3}{5}$. Bestäm $\cos v$. **(2p)**

2. Visa att $1 - \sin(2v) \cdot \tan v = \cos(2v)$ **(2p)**

3. Lös ekvationen $\sin\left(2v + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ **(2p)**

4. Bestäm samtliga primitiva funktioner till $f(x) = \cos 2x - \frac{6}{x^3}$ **(2p)**

5. Bestäm derivatan till funktionen $f(x) = \frac{3x+1}{e^{2x}}$ **(2p)**

6. Beräkna $f'(2)$ för funktionen $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x}$ **(2p)**

7. Beräkna $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx$ **(2p)**

8. Om funktionen $f(x)$ vet vi följande:

   i) $f(x)$ är definierad för alla x utom $x = 2$.

   ii) $f(x)$ går mot oändligheten när x går mot 2.

   iii) $f(x)$ går mot 1, då x går mot plus och minus oändligheten.

   iv) $f'(x) > 0$ för $x < 2$, $f'(x) < 0$ för $2 < x < 4$, $f'(4) = 0$, och $f'(x) > 0$ för $x > 4$.

   v) $f(4) = 1/2$.

   Gör följande:

   a) Bestäm eventuella asymptoter till f. **(1p)**

   b) Bestäm alla lokala extrempunkter till f och avgör typ (dvs om max/min/terrass). **(1p)**

   c) Skissa grafen till f. **(1p)**

   Det ska tydligt framgå hur du har använt den givna informationen!

9. I en tank varierar vattendjupet h(t) med tiden enligt $h(t) = 5{,}0 + 2{,}0 sin \frac{\pi(t+5{,}0)}{26}$.
Vattendjupet h mäts i enheten meter, och t anger antal minuter efter klockan 12.00. Bestäm med vilken hastighet vattendjupet minskar då vattendjupet sjunker som snabbast, samt vid vilket klockslag detta inträffar första gången efter kl. 12.00. **(3p)**

10. Bestäm arean av det område som begränsas av kurvorna $y = \frac{1}{x}$ och $y = \frac{5}{2} - x$. **(3p)**

11. En sfärisk ballong blåses upp med luft så att volymen ökar med 10,0 cm^3/s.
Med vilken hastighet ökar ballongens area då dess radie är 5,0 cm? **(3p)**

Lösningsförslag

1. Trigonometriska ettan ger

$$\cos^2 v + \sin^2 v = 1$$
$$\cos^2 v = 1 - \sin^2 v$$
$$\cos v = \pm\sqrt{1 - \sin^2 v}$$

Då $90° < v < 180°$ ligger v i andra kvadranten, där är $\cos v < 0$. Vi förkastar den positiva lösningen och får

$$\cos v = -\sqrt{1 - \sin^2 v}$$
$$\cos v = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}$$
$$\cos v = -\frac{4}{5}$$

Svar: $\cos v = -\frac{4}{5}$

----

2. $$VL = 1 - \sin(2v) \cdot \tan v = 1 - 2\sin v \cos v \frac{\sin v}{\cos v} = 1 - 2\sin^2 v = \cos(2v) = HL$$

3.

$$\sin\left(2v + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$
$$2v + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + n2\pi \quad \text{eller} \quad 2v + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + n2\pi$$
$$2v = -\frac{\pi}{6} + n2\pi \qquad 2v + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + n2\pi$$
$$v = -\frac{\pi}{12} + n\pi \qquad v = \frac{\pi}{4} + n\pi$$

Svar: $v = -\frac{\pi}{12} + n\pi$, $\quad v = \frac{\pi}{4} + n\pi$

4.

$$f(x) = \cos 2x - \frac{6}{x^3} = \cos 2x - 6x^{-3}$$

$$F(x) = \frac{\sin 2x}{2} - \frac{6x^{-2}}{-2} + C = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{3}{x^2} + C$$

Svar: $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{3}{x^2} + C$

5.

$$f(x) = \frac{3x+1}{e^{2x}}$$

$$f'(x) = \frac{3 \cdot e^{2x} - (3x+1)2e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \frac{e^{2x}(3-6x-2)}{(e^{2x})^2} = \frac{1-6x}{e^{2x}}$$

6.

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 6x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+6x}}(2x+6) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x}}$$

$$f'(2) = \frac{2+3}{\sqrt{2^2 + 6 \cdot 2}} = \frac{5}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4}$$

Svar: $f'(2) = \frac{5}{4}$

---

7. $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx = [ln|x| + x]_1^2 = ln2 + 2 - (ln1 - 1) = ln2 - ln1 + 1 =$
$n\frac{2}{1} + 1 = ln2 + 1$

Svar: $ln2 + 1$

8.

a)

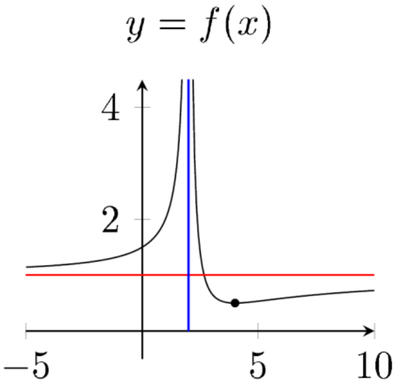
(i) och (ii) medför att $f(x)$ har vertikal asymptot $x = 2$.

(iii) medför att $f(x)$ har horisontell asymptot $y = 1$ då x går mot plus och minus oändligheten.

b)

(iv) ger att $f'(4) = 0$, så $x = 4$ är en kritisk punkt. Eftersom $f'(x) < 0$ för $2 < x < 4$ är f avtagande där, och eftersom $f'(x) > 0$ för $x > 4$ är f växande där. Alltså är $x = 4$ ett lokalt minimum, och därmed en lokal extrempunkt. Eftersom $f'(x) \neq 0$, för $x \neq 4$ har f inga andra lokala extrempunkter.

c)



Horisontell asymptot i rött, vertikal asymptot i blått. Den markerade punkten är den lokala minpunkten $(4, 1/2)$.

9.

$$h(t) = 5{,}0 + 2{,}0 \sin \frac{\pi(t+5)}{26}$$

$$h'(t) = \frac{2\pi}{26} \cos \frac{\pi(t+5)}{26}$$

Minimum för h'(t) fås då cosinustermen är -1. Detta minimivärde är

$$h'_{\min} = \frac{2\pi}{26} \cdot (-1) = -\frac{\pi}{13} \approx -0{,}24 \text{ m/min}$$

Tidpunkter då minimum inträffar ges av ekvationen

$$\cos\frac{\pi(t+5)}{26}=-1$$

$$\frac{\pi(t+5)}{26}=\pi+n\cdot 2\pi$$

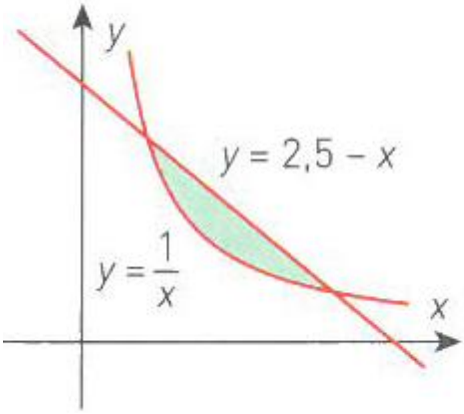
$$t+5=26+n\cdot 52$$

$$t=21+n\cdot 52$$

Svar: Den första tidpunkt då hastigheten är minimal inträffar klockan 12:21, och då minskar vattendjupet med 0,24 m/min

---

10.



(I vänstra halvplanet finns inga skärningspunkter.)

Skärningspunkter ges av

$$\frac{1}{x}=\frac{5}{2}-x$$

$$1=\frac{5}{2}x-x^2$$

$$x^2-\frac{5}{2}x+1=0$$

$$x=\frac{5}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2-1}$$

$$x=\frac{5}{4}\pm\frac{3}{4}$$

$$x_1=\frac{1}{2} \quad x_2=2$$

Vi kan nu ta reda på vilken funktion som är överfunktion, t ex genom att beräkna funktionsvärdena för något x-värde mellan skärningspunkterna:

$$f(x)=\frac{1}{x} \qquad f(1)=\frac{1}{1}=1$$

$$g(x)=\frac{5}{2}-x \qquad g(1)=\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}$$

g(x) är alltså överfunktion. Vi kan nu beräkna arean som följande integral:

$$A=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{5}{2}-x-\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}x^2-\ln|x|\right]_{\frac{1}{2}}^{2}=$$

$$\left(\frac{5}{2}\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 2^2-\ln 2\right)-\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-\ln\frac{1}{2}\right)=$$

$$\frac{15}{8}+\ln\left(\frac{\frac{1}{2}}{2}\right)=\frac{15}{8}+\ln\frac{1}{4}=\frac{15}{8}-\ln 4=\frac{15}{8}-2\ln 2$$

Svar: Den sökta arean är $\frac{15}{8}-2\ln 2$

---

11. Ballongens area $A=4\pi r^2$; $\frac{dA}{dr}=8\pi r$

Derivering med kedjeregeln ger $\frac{dA}{dt}=\frac{dA}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}=8\pi r\cdot\frac{dr}{dt}$; (1) $\frac{dr}{dt}=\frac{\frac{dA}{dt}}{8\pi r}$

Ballongens volym $V=\frac{4\pi r^3}{3}$; $\frac{dV}{dr}=4\pi r^2$

Derivering med kedjeregeln ger $\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}=4\pi r^2\cdot\frac{dr}{dt}$ (2)

Insättning av (1) i (2) ger

$$\frac{dV}{dt}=4\pi r^2\cdot\frac{\frac{dA}{dt}}{8\pi r}=\frac{r}{2}\cdot\frac{dA}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt}=\frac{2}{r}\cdot\frac{dV}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt}\approx\frac{2}{5{,}0}\cdot 10{,}0\approx 4{,}0$$

Svar: Arean ökar med 4,0 cm^2/s

Rättningsmall

Generella riktlinjer för tentamensrättning

Varje beräkningsfel *(Därefter fortsatt rättning enligt nya förutsättningar)*	-1 poäng
Beräkningsfel; allvarliga och/eller leder till förenkling	-2 poäng eller mer
Prövning istället för generell metod	- samtliga poäng
Felaktiga antaganden/ansatser	- samtliga poäng
Lösning svår att följa och/eller Svaret framgår inte tydligt	-1 poäng eller mer
Matematiska symboler används felaktigt/saknas	-1poäng eller mer
Bl.a Om ’=’ saknas (t.ex. ’=>’ används istället)	-1 poäng/tenta
Om ’=’ används felaktigt (t.ex. istället för ’=>’)	-1 poäng/tenta

Teoretiska uppgifter:

Avrundat svar	-1 poäng/tenta

Tillämpade uppgifter:

Enhet saknas/fel	-1 poäng/tenta
Avrundningar i delberäkningar som ger fel svar	-1 poäng/tenta
Svar med felaktigt antal värdesiffror (±1 värdesiffra ok)	-1 poäng/tenta
Andra avrundningsfel	-1 poäng/tenta

Uppgiftsspecifika rättningsanvisningar

1. Utelämnad eller felaktigt resonemang om lösningars giltighet (förkastar inte någon lösning/förkastar fel lösning)	–1p
Svarar med vinkeln v	–1p
2. Förändrar storleken på vänster- och högerled	-2p
3. Varje saknad lösningsfamilj	-1p
Felaktig/saknad period	-1p
4. Integreringsfel	-2p
Integrationskonstant saknas	-1p
5. Deriveringsfel	-2p
Ofullständigt förenklat svar	-1p
6. Deriveringsfel	-2p
Korrekt beräknad $f'(x)$	+1p
7. Integrationsfel	-2p

Svarar inte exakt -1p

ln1 med i svaret -1p

8. Ej korrekt svar eller otillräcklig motivering, -1p per deluppgift

Om kritisk punkt och asymptoter tydligt framgår av grafen (och självklart ligger rätt) är det ok om dessa inte markeras explicit.

9. Bestämmer minsta värdet till h istället för minsta värdet till h’ -3p
Deriveringsfel -2p
Period saknas/ felaktig period -1p
Svararar med fler än ett t-värde eller ett t-värde som inte är det minsta -1p
Svarar ”minskar med… -0,24 m/min” -1p
Svarar t=21 eller ”efter 21 minuter” -1p

10. [Eftersom den ena funktionen inte är definierad då x=0 och dessutom hoppar där, kanske vi borde ge x>0. Man kan ju tänka sig en linje med positiv lutning som skär denna funktion en gång i vänstra halvplanet och en gång i det högra…]

Felaktiga integrationsgränser -3p

Integrationsfel -2p

Integrationsgränserna ej analytiskt bestämda -1p

Förväxlar över- och underfunktion -1p

Förväxlar över- och underfunktion, ger därefter korrekty motivering till teckenbytet (t ex ”i min principskiss kunde jag inte veta vad som var över- respektive underfunktion, men eftersom arean måste vara större än noll vet jag nu att integranden skulle ha bytt tecken…” OK

Motiverar inte över- och underfunktion (genom beräkning eller principiellt korrekt figur) -0p

Belopptecken saknas i ln -0p (denna gång)

Svarar $\frac{15}{8} - \ln 4$ OK

11. Felaktigt samband -3p

Deriveringsfel -2p