KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Tisdagen den 20 maj, 2014

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Roy Skjelnes

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Planet P innehåller punkterna $(1, 1, 0), (0, 3, 1)$ och $(2, 2, 2)$.
   (a) Bestäm en ekvation, på formen $ax + by + cz + d = 0$, för planet P. **(2 p)**
   (b) Bestäm en ekvation för det plan som är ortogonalt mot P och som innehåller linjen $(x, y, z) = (t + 1, 2t, 1 - t)$. **(2 p)**

2. För varje givet tal a har vi följande ekvationssystem i tre okända x, y och z:

$$\begin{cases} 2x + 9y + 4z & = & 3 \\ -2x + 7y + 2z & = & 1 \\ 2x + y + (a^2 - 1)z & = & 1 \end{cases}$$

   (a) Avgör om $(1, 1, 1)$ är med i lösningsmängden när $a = 0$. **(1 p)**
   (b) Bestäm lösningsmängden när $a = 2$. **(1 p)**
   (c) Bestäm för vilka värden på a som ekvationssystemet har en unik lösning, saknar lösning, respektive har oändligt många lösningar. **(2 p)**

3. Diagonalisera matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},$$

   och beräkna sedan A^{17}. **(4 p)**

DEL B

4. I $\mathbb{R}^4$ har vi följande vektorer

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{u}_5 = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Delrummet $V = \mathrm{Span}\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}\}$ har dimension tre.

(a) Bestäm en bas för V. **(1 p)**

(b) Avgör om $V^\perp = \mathrm{Span}\{\vec{u}_5\}$. **(2 p)**

(c) Skriv V som lösningsmängden till ett linjärt ekvationssystem. **(1 p)**

5. Vid en laboration får två studenter följande mätvärden

t (ms)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x (mm)	0	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3

Mätutrustningen är inte speciellt tillförlitlig och för att få ut det mest av mätningarna bestämmer sig studenterna för att använda minsta kvadratmetoden för att få reda på vilket linjärt samband $x = at + b$ som bäst passar de gjorda mätningarna. Den ena studenten hävdar att man skulle tjäna på att göra en substitution som leder till att man istället skriver sambandet som $x = a(t - 5\text{ ms}) + b$.

(a) Utför de räkningar som behövs för att bestämma det linjära sambandet, antingen med eller utan substitutionen. **(3 p)**

(b) Förklara varför det ena sättet leder till en lättare beräkning. **(1 p)**

6. Låt L vara en linje genom origo i planet. Låt $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som speglar planet i linjen L. Vi låter N vara linjen som är ortogonal mot L och som går genom origo. Låt $\vec{u}$ vara en riktningsvektor för L, och $\vec{n}$ en riktningsvektor för N.

(a) Vad är $T(\vec{u})$, och vad är $T(\vec{n})$? **(1 p)**

(b) Bestäm egenvektorer och egenvärden till avbildningen T. **(1 p)**

(c) Skriv $T(3\vec{u} + 4\vec{n})$ som en linjärkombination av $\vec{u}$ och $\vec{n}$. **(2 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Bestäm alla linjära avbildningar $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som uppfyller följande två krav: **(4 p)**
   (a) Vektorerna
   $$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
   utgör en bas för nollrummet för T.
   (b) Bildrummet för T är linjen med riktningsvektor $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

8. På Algebramuseet finns en projektionsmaskin. Om man stoppar in en vektor $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^3$ och trycker på en knapp så matar maskinen ut den ortogonala projektionen av $\vec{v}$ på ett (fixerat) tvådimensionellt delrum W till $\mathbb{R}^3$.

   Maskinen börjar bli gammal och håller bara för två knapptryckningar till. Tyvärr går den inte att reparera så museets chefsingenjör vill i stället bygga en ny maskin med exakt samma funktion. Problemet är att hon inte vet vilket delrum W maskinen är byggd för.

   Chefsingenjören är visserligen väldigt bra på linjär algebra, men räcker två knapptryckningar för att hon säkert ska kunna lista ut vad W är innan maskinen går sönder?
   (4 p)

9. Låt A vara en symmetrisk 4×4-matris som har följande två egenskaper:
   (a) Rangen till matrisen A är 2.
   (b) Vektorerna
   $$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
   är egenvektorer med egenvärdet 2.

   Bestäm alla egenvektorer till A. **(4 p)**