SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Måndag 24 oktober 2022

Skrivtid: 08:00–11:00
Tillåtna hjälpmedel: Inga
Examinator: Maria Saprykina

Tentamen består av sex uppgifter som vardera ger maximalt sex poäng. Till antalet erhållna poäng på del A adderas eventuella bonuspoäng, upp till som mest 12 poäng. Poängsumman på del A kan alltså bli högst 12 poäng, bonuspoäng medräknade. Bonuspoängen beräknas automatiskt.

Betygsgränser vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

Del A

1. Lös matrisekvationen $XA = X + A$, där $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$. (6 p)

2. Låt N vara lösningsrummet till det homogena linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - 2w = 0 \\ 2x + y - z - w = 0 \\ -x + y + z - w = 0 \end{cases}$$

Bestäm en ortonormal bas för N och ange dimensionen av N. (6 p)

Del B

3. Låt P vara punkten $(1, 0, 3)$, ℓ linjen $(x, y, z) = (2, 1, 3) + t(1, 0, 1)$, där t är en reell parameter, och π planet $x - 3y + z = 4$.

   a) Bestäm det kortaste avståndet mellan punkten P och linjen ℓ. (3 p)

   b) Bestäm en linje L i parameterform som tillhör planet π och skär linjen ℓ under rät vinkel. (3 p)

4. De två linjära avbildningarna $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ och $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & b \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

där a och b är konstanter.

   a) För alla värden på a bestäm en bas för värderummet (bildrummet) av S. (3 p)

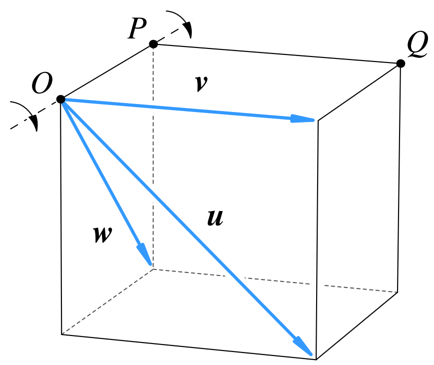
   b) Bestäm vilka värden a och b kan ha för att S och T ska ha samma värderum (bildrum). (3 p)

Del C

5. I en kub med kantlängd 1, enligt figuren, införs ett koordinatsystem med bas $B = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ och origo i punkten O.

   a) Ange koordinaterna för vektorn $\overrightarrow{OQ}$ i basen B. (2 p)

   b) Bestäm matrisen i basen B för en rotation kring axeln OP med vinkeln $\pi/2$ i riktning enligt figuren. (4 p)



6. Låt $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ vara två egenvektorer till samma linjära avbildning med egenvärden λ_1 och λ_2 där $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Bevisa att $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ är linjärt oberoende. (6 p)