SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
Måndagen den 10 januari 2022

Skrivtid: 8:00-11:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Kristian Bjerklöv

Tentamen består av sex uppgifter, som vardera ger maximalt 6 poäng. Till antalet erhållna poäng från Uppgift 1 adderas dina bonuspoäng, upp till som mest 6 poäng. Poängsumman på Uppgift 1 kan alltså bli högst 6 poäng, bonuspoäng medräknade. Bonuspoängen beräknas automatiskt och antalet bonuspoäng framgår av din resultatsida.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

Var god vänd!

DEL A

1. Bestäm den lösning $y(x)$ till differentialekvationen
$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 6$$
som uppfyller villkoren $y(0) = 0$ och $\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{e^{3x}} = 0$. **(6 p)**

2. Låt
$$f(x) = \frac{1}{(2+x)^2},\ 1 \le x \le 3.$$
Bestäm den punkt $(a, f(a)), 1 \le a \le 3$, på grafen $y = f(x)$ som gör arean av rektangeln med hörn i punkterna $(0,0), (a,0), (a, f(a))$ och $(0, f(a))$ minimal. **(6 p)**

DEL B

3. Bestäm värdet på konstanten a så att **(6 p)**
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+x} = \int_1^\infty axe^{-x}\, dx.$$

4. Låt $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+\sin t)\, dt$.
   (a) Bestäm Taylorpolynomet av ordning 2 till f kring $x = 0$ och använd polynomet för att approximera värdet $f(1/2)$. **(3 p)**
   (b) Avgör om felet i approximationen i uppgift (a) är mindre än $1/10$. **(3 p)**

DEL C

5. Bestäm alla värden på konstanten $b > 0$ för vilka det gäller att ekvationen $e^{2x} = bx$ har precis en lösning. **(6 p)**

6. Visa att **(6 p)**
$$\sum_{n=2}^\infty \frac{\ln n}{n^2} \le \frac{2+3\ln 2}{4}.$$