KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2019.01.07

DEL A

1. Bestäm alla primitiva funktioner till
   (a) $f(x) = x^2 e^{1-x^3}$, **(3 p)**
   (b) $g(x) = \arctan(x)$. **(3 p)**

Lösning. För att lösa den första uppgiften gör vi substitutionen $u = 1 - x^3$, vilket ger $\frac{-1}{3}\, du = x^2\, dx$, så

$$\int x^2 e^{1-x^3}\, dx = -\frac{1}{3} \int e^u\, du = -\frac{1}{3} e^u + C = -\frac{1}{3} e^{1-x^3} + C.$$

Den andra uppgiften löser vi med partiell integration $\arctan(x) = 1 \cdot \arctan(x)$:

$$\int \arctan(x)\, dx = x \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$\square$

2. Bestäm punkterna på kurvan $y = x^2$ som ligger närmast punkten $(0, 3)$. **(6 p)**

Lösning. Punkterna på kurvan $y = x^2$ är på formen (t, t^2), och avståndet (i kvadrat) till punkten $(0, 3)$ ges av $d(t) = t^2 + (3 - t^2)^2$. Derivering ger

$$d'(t) = 2t + 2(3 - t^2)(-2t) = 2t(1 - 2(3 - t^2)).$$

Extremvärden ges av $d'(t) = 0$ vilket betyder att $t = 0$, eller

$$1 = 2(3 - t^2) \Leftrightarrow 2t^2 = 5.$$

Detta ger att $t = \pm\sqrt{5/2}$. Vi har att $d(0) = 9$, medan

$$d(\sqrt{5/2}) = \frac{5}{2} + (3 - \frac{5}{2})^2 = \frac{5}{2} + \frac{1}{4} = \frac{11}{4}.$$

Vi har att $\frac{11}{4} < 9$, och dom sökta punkterna är

$$(-\sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}) \quad \text{och} \quad (\sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}).$$

$\square$

DEL B

3. Funktionen f ges av
$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 14.$$
För vilka reella värden y har ekvationen $f(x) = y$ precis två olika lösningar? **(4 p)**

Lösning. Vi löser uppgiften genom att skissa grafen. Vi vill se för vilka värden på a som den horisontella linjen $y = a$ skär grafen $y = f(x)$ i precis två olika punkter (detta betyder förstås att $f(x) = a$ har precis två lösningar).

Vi har
$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x - 2)(x + 1).$$
Alltså har f precis två kritiska punkter, $x = 2$ och $x = -1$.

Från uttrycket för $f'(x)$ ser vi att $f'(x) > 0$ på intervallen $(-\infty, -1)$ och $(2, \infty)$; och $f'(x) < 0$ på intervallet $(-2, 1)$. Således är f strängt växande på intervallen $(-\infty, -1]$ och $[2, \infty)$; och strängt avtagande på $[-2, 1]$. Vidare, eftersom vi kan skriva $f(x) = x^3(2 - 3/x - 12/x^2 + 14/x^3)$ för $x \neq 0$, ser vi att $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ och $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Med hjälp av informationen ovan kan vi skissa grafen $y = f(x)$. Vi noterar att $f(-1) = 21$ och $f(2) = -6$. Från grafen ser vi nu att det endast är för $y = 21$ och $y = -6$ som ekvationen $f(x) = y$ har precis två lösningar (se de två horisontella linjerna $y = 21$ och $y = -6$ i figuren).

□

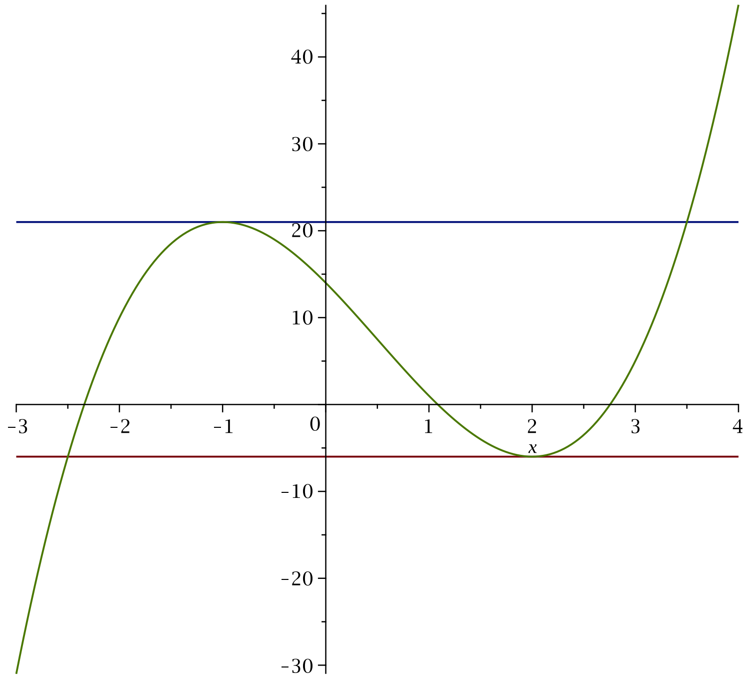

FIGURE 1. Figur till uppgift 3.

4. Avgör om serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin(n)}{n^2+\sqrt{n}}$$

är konvergent eller divergent. **(3 p)**

Lösning. Alla summander i serien är positiva. Vi har att $2+\sin(n) \leq 3$ for alla n. Detta ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin(n)}{n^2+\sqrt{n}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+\sqrt{n}} \leq 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Serien längst till höger är konvergent, och det följer att den sökta serien är konvergent. $\square$

5. Avgör om $|\ln(3/2) - \frac{3}{8}|$ är större eller mindre än 0.05. **(5 p)**

Lösning. Vi beräknar Taylorpolynomet till $\ln(1+x)$ omkring $x = 0$. Derivatorna till $f(x) = \ln(1+x)$ är $f'(x) = 1/(1+x)$, $f''(x) = -1/(1+x)^2$ och $f'''(x) = 2/(1+x)^3$. Taylorpolynomet av grad 2 är

$$P(x) = 0 + 1 \cdot x - \frac{1}{2}x^2.$$

Vi har att $P(1/2) = 1/2 - 1/8 = 3/8$. Feltärmen $E(x) = \ln(1+x) - P(x)$ har vi som

$$E(x) = \frac{2}{(1+c)^3 \cdot 3!}x^3 \quad 0 < c < x.$$

Speciellt har vi att

$$E(1/2) = \frac{2}{(1+c)^3 \cdot 3!}\frac{1}{8} = \frac{1}{24(1+c)^3} < \frac{1}{24} < \frac{1}{20} = \frac{5}{100}.$$

Detta betyder att $|\ln(3/2) - \frac{3}{8}|$ är mindre än 0.05. $\square$

DEL C

6. Vi har funktionen

$$F(x) = \begin{cases} x^2\cos(1/x) & \text{när} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{när} \quad x = 0. \end{cases}$$

Visa att $F''(0)$ inte existerar. **(5 p)**

Lösning. Enligt derivatans defintion är

$$F'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(0+h)-F(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\cos(1/h)-0}{h} = \lim_{h\to 0} h\cos(1/h) = 0,$$

där den sista likheten följer av instängningssatsen och olikheterna $-h \leq h\cos(1/h) \leq h$ som gäller för alla $h \neq 0$. För $x \neq 0$ är

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx}\left(x^2\cos(1/x)\right) = 2x\cos(1/x) + x^2\left(-\sin(1/x)\right)\left(-1/x^2\right) \\ &= 2x\cos(1/x) + \sin(1/x). \end{aligned}$$

Differenskvoten av förstaderivatan i origo är, eftersom $F'(0) = 0$ enligt (a), alltså

$$\frac{F'(0+h)-F'(0)}{h} = \frac{2h\cos(1/h)+\sin(1/h)-0}{h} = 2\cos(1/h) + \frac{\sin(1/h)}{h}.$$

Detta uttryck saknar gränsvärde då $h \to 0$. Detta kan vi se, t.ex, på följande sätt. För varje heltal n låter vi $h(n) = \frac{2}{(4n+1)\pi}$. Då gäller att

$$\lim_{n\to\infty}(2\cos(1/h) + \frac{\sin(1/h)}{h}) \to +\infty,$$

och med $h(n) = \frac{2}{(4n+3)\pi}$ erhåller vi att

$$\lim_{n\to\infty}(2\cos(1/h) + \frac{\sin(1/h)}{h}) \to -\infty.$$

$\square$

7. Kurvan C parametriseras av

$$r(t) = \left(\frac{\cos t}{t^2}, \frac{\sin t}{t^2}\right) \quad \text{där} \quad \frac{\pi}{2} \leq t < \infty.$$

Visa att kurvan C har ändlig längd. **(7 p)**

Lösning. Till varje heltal N låter vi $r_N(t)$ vara kurvan parametriserad $(x(t), y(t))$ som ovan, men där $\frac{\pi}{2} \leq t \leq N$. Kurvan $r_N(t)$ har båglängden

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{N} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

Vi börjar med att studera denna. Vi har att

$$x'(t) = -\sin(t)t^{-2} - \cos(t)2t^{-3} \quad \text{och} \quad y'(t) = \cos(t)t^{-2} - \sin(t)2t^{-3}.$$

Detta ger att uttrycket $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ blir

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\big(\frac{-1}{t^2}(\sin(t) + 2\cos(t)t^{-1})\big)^2 + \big(\frac{1}{t^2}(\cos(t) - 2\sin(t)t^{-1})\big)^2} \\
=&\sqrt{\frac{1}{t^4}\big(\sin^2(t) + 4\cos^2(t)t^{-2} + \cos^2(t) + 4\sin^2(t)t^{-2}\big)} \\
=&\frac{1}{t^2}\sqrt{1 + 4t^{-2}}.
\end{aligned}$$

Bågländen till kurvan $r_N(t)$ är alltså$\int_{\pi/2}^{N} \frac{1}{t^2}\sqrt{1+4t^{-2}}\, dt$. Vi estimerar denna. Vi har att $\frac{4}{\pi^2} \geq \frac{1}{t^2}$ för $t \geq \frac{\pi}{2}$, vilket i sin tur ger att

$$c = \sqrt{\frac{\pi^2 + 16}{\pi^2}} \geq \sqrt{1 + 4t^{-2}} \geq 0.$$

Detta ger nu att

$$\int_{\pi/2}^{N} \frac{1}{t^2}\sqrt{1 + 4t^{-2}}\, dt \leq \int_{\pi/2}^{N} \frac{1}{t^2} c\, dt = c(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{N}).$$

Båglängden till den sökta kurvan är per konstruktion

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\pi/2}^{N} \frac{1}{t^2}\sqrt{1 + 4t^{-2}}\, dt \leq \lim_{N\to\infty} \big(c(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{N}\big) = \frac{2}{\pi}c = \frac{2}{\pi^2}\sqrt{\pi^2 + 16}.$$

Med andra ord är båglängden ändlig.

$\square$