KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen med lösningsförslag
Wednesday, 9 January 2019

DEL A

1. (a) Bestäm volymen av den parallellepiped P som spänns upp av vektorerna

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(3 p)

(b) Låt T vara den linjära avbildning som ges av standardmatrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bestäm volymen av $T(P)$, där P är parallellepipeden från uppgift (a). **(3 p)**

Lösningsförslag. (a) Volymen ges av trippelprodukten

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 3$$

(Alternativ lösning: volymen ges av determinanten av den matris som har de tre vektorerna $\vec{u}$, $\vec{v}$ och $\vec{w}$ som kolonner. Den determinanten är 3.)

(b) Avbildningsskalan hos den linjära avbildningen T ges av determinanten av matrisen A. Eftersom $\det A = 2$, så måste volymen av $T(P)$ vara $2 \cdot 3 = 6$.

2. Använd minstakvadratmetoden för att bestämma den räta linje $y = a + bx$ som bäst passar de fem punkterna

$$(x, y) = (1, 5),\ (2, 4),\ (3, 1),\ (4, -1),\ (5, -3).$$

Lösningsförslag. Vi skulle vilja att koefficienterna a, b uppfyllde det linjära systemet

$$M\mathbf{v} = \mathbf{y}$$

där

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Detta system är dock överbestämt och har ingen lösning. För att få den i minstakvadratmening bästa approximationen till en lösning så löser vi istället systemet

$$M^T M\mathbf{v} = M^T\mathbf{y}.$$

Här är

$$M^TM = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix}, \quad M^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

så

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 11 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 75 \\ -21 \end{bmatrix}.$$

Den räta linje som bäst passar de fem punkterna är alltså

$$y = \frac{1}{10}(75 - 21x).$$

Var god vänd!

DEL B

3. Låt L_1 vara en rät linje i $\mathbb{R}^3$ som definieras av $(x,y,z) = (2,2,0) + t(3,0,2)$.

(a) Bestäm det plan som innehåller linjen L_1 och punkten $A = (8,2,3)$. **(2 p)**

(b) Linjen L_2 definieras av $(x,y,z) = (5,1,0) + t(2,1,1)$. Bestäm en ekvation för den linje som går genom punkten $A = (8,2,3)$ och skär både L_1 och L_2. **(4 p)**

Lösningsförslag.

(a) Planet är bestämt genom punkten $(2,2,0)$, första riktningsvektor $(3,0,2)$ och andra riktningsvektor

$$(8,2,3) - (2,2,0) = (6,0,3).$$

Planet ges därmed genom

$$(x,y,z) = (2,2,0) + r(3,0,2) + s(6,0,3).$$

Vi kan också bestämma en ekvation till detta plan. Kryssprodukten

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

är en normalvektor till planet. Därför ges planets ekvation av $y = a$, där a bestäms genom insättning av punkten $(2,2,0)$ som $a = 2$.

(b) För att linjen ska skära L_1 och innehålla punkten A så måste den ligga i det plan som bestämdes i (a). Om linjen dessutom ska skära L_2 så måste den gå genom skärningspunkten P av L_2 och planet. Med normalekvationen $y = 2$ ser vi att P ges av $(5,1,0) + 1(2,1,1) = (7,2,1)$. Den sökta linjen går alltså genom A och P och ges av

$$(8,2,3) + s[(7,2,1) - (8,2,3)] = (8,2,3) + s(-1,0,-2).$$

4. Låt V vara det delrum i $\mathbb{R}^4$ som består av alla lösningar $\begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix}^T$ till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x \ +2y \ -3z \ +3w = 0 \\ x \ -y \ -3w = 0 \end{cases}.$$

(a) Bestäm en ortonormal bas för V. **(3 p)**

(b) Bestäm projektionen av vektorn $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ på V. **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) Radoperationer överför ekvationssystemet till

$$\begin{cases} x \ -z \ -w = 0 \\ y \ -z \ +2w = 0 \end{cases},$$

och vi ser att lösningarna ges av

$$\begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} s+t & s-2t & s & t \end{bmatrix}^T = s\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T + t\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Delrummet V har alltså en bas som består av de två vektorerna

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Med Gram-Schmidts procedur omvandlar vi denna bas till en ortonormal bas. Vi sätter först

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

och

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_2 &= \mathbf{w}_2 - \operatorname{proj}_{\mathbf{w}_1}\mathbf{w}_2\\ &= \mathbf{w}_2 - \frac{\mathbf{w}_2\cdot\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1\\ &= \begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & 1\end{bmatrix}^T - \frac{-1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T\\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}4 & -5 & 1 & 3\end{bmatrix}^T.\end{aligned}$$

Då är $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ en ortogonal bas för V. Vi normaliserar dessa vektorer till

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T,$$

och

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{51}}\begin{bmatrix}4 & -5 & 1 & 3\end{bmatrix}^T.$$

En ortonormal bas för V är $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$.

(b) Eftersom $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$ är en ortonormal bas för V så ges den ortogonala projektionen på V av

$$\operatorname{proj}_V \mathbf{x} = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1 + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{q}_2)\mathbf{q}_2.$$

Projektionen av $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$ på V är alltså

$$\begin{aligned}\operatorname{proj}_V \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T &= (\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\cdot\mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1 + (\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\cdot\mathbf{q}_2)\mathbf{q}_2\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{q}_1 + \frac{-2}{\sqrt{51}}\mathbf{q}_2\\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T - \frac{2}{51}\begin{bmatrix}4 & -5 & 1 & 3\end{bmatrix}^T\\ &= \frac{1}{17}\begin{bmatrix}3 & 9 & 5 & -2\end{bmatrix}^T.\end{aligned}$$

DEL C

5. (a) Visa att egenvektorer som hör till olika egenvärden för en symmetrisk matris är ortogonala. **(3 p)**

(b) Hitta en symmetrisk matris som har egenvärden $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$, där en egenvektor till λ_1 är

$$\vec{v}_1 = [1, 2, 2]^T$$

och en egenvektor till λ_2 är

$$\vec{v}_2 = [2, 1, -2]^T.$$

(3 p)

Lösningsförslag. (a) Låt A vara en symmetrisk matris och låt $A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$ och $A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2$, där $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Då gäller att

$$\lambda_1\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = (\lambda_1\vec{v}_1)^T\vec{v}_2 = (A\vec{v}_1)^T\vec{v}_2 = \vec{v}_1^T A\vec{v}_2 = \vec{v}_1\cdot(\lambda_2\vec{v}_2) = \lambda_2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2$$

Detta betyder att $(\lambda_1-\lambda_2)\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = 0$, och eftersom $\lambda_1 \neq \lambda_2$ så följer att $\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = 0$ och vektorerna är ortogonala.

(b) Kalla den sökta matrisen för A. Eftersom egenvektorer hörande till olika egenvärden är ortogonala spänns egenrummet hörande till egenvärdet 3 upp av

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Om vi normerar de tre vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ får vi en ortogonal bas som diagonaliserar A. Basbytesmatrisen, matrisen med dessa normerade vektorer som kolonner, blir ortogonal:

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Om D är den diagonalmatris som har egenvärdena på diagonalen gäller nu att $A = PDP^T$, det vill säga:

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4/3 & 4/3 \\ -4/3 & 5/3 & 0 \\ 4/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Vi kan alltså ta $A = \begin{pmatrix} 1 & -4/3 & 4/3 \\ -4/3 & 5/3 & 0 \\ 4/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

6. Låt A vara en 3×2-matris och B en 2×3-matris. Antag att $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = 2$.

(a) Visa att (den kvadratiska) matrisen AB aldrig är inverterbar. **(2 p)**

(b) Visa att BA är inverterbar om och endast om den enda vektorn som ligger i både $\operatorname{col}(A)$ och $\operatorname{null}(B)$ är nollvektorn. **(4 p)**

Lösningsförslag.

(a) Enligt rangsatsen är $\dim(\operatorname{null}(B)) = 3 - \operatorname{rank}(B) = 3 - 2 = 1$. Det finns alltså en vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ så att $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Då är också $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$, så AB kan inte vara inverterbar.

(b) Antag att den enda vektorn som ligger i både $\operatorname{col}(A)$ och $\operatorname{null}(B)$ är nollvektorn. Vi ska med hjälp av detta antagande visa att den kvadratiska matrisen BA är inverterbar. Antag därför att $BA\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Då är $A\mathbf{x}$ en vektor som ligger både i $\operatorname{col}(A)$ och i $\operatorname{null}(B)$. Enligt antagande är $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, så $\mathbf{x}$ ligger i $\operatorname{null}(A)$. Rangsatsen säger oss att $\dim(\operatorname{null}(A)) = 2 - \operatorname{rank}(A) = 2 - 2 = 0$, så $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi drar slutsatsen att BA är inverterbar.

Antag nu att matrisen BA är inverterbar. Med detta antagande ska vi visa att den enda vektorn som ligger i både $\operatorname{col}(A)$ och $\operatorname{null}(B)$ är nollvektorn. Antag därför att vektorn $\mathbf{y}$ ligger i $\operatorname{col}(A)$ och i $\operatorname{null}(B)$. Då är $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ för någon vektor $\mathbf{x}$ och $B\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Alltså är $BA\mathbf{x} = \mathbf{0}$, och eftersom BA är inverterbar så är $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi drar slutsatsen att $\mathbf{y} = A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.