SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2021.01.07

DEL A

1. (a) Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$. **(3 p)**

   (b) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \arctan x$. **(3 p)**

Lösning. (a) Vi gör variabelsubstitutionen $u = \cos x$ och får då $du = -\sin x dx$ och de nya integrationsgränserna $u(0) = 1$ och $u(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, vilket ger

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = -\int_1^{1/\sqrt{2}} \frac{du}{u^2} = \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u}\right]_{1/\sqrt{2}}^1 = \sqrt{2} - 1.$$

(b) Eftersom $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, och eftersom x är en primitiv funktion till 1, ger partiell integration att

$$\int \arctan x\,dx = \int 1\cdot \arctan x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + C.$$

Således är t ex $F(x) = x\arctan x - \dfrac{\ln(1+x^2)}{2}$ en primitiv funktion till f.

Svar: (a) $\sqrt{2} - 1$, (b) T ex $F(x) = x\arctan x - \dfrac{\ln(1+x^2)}{2}$.

$\square$

2. Låt $f(x) = \ln(1 + x^2)$.
   (a) Bestäm definitionsmängden till f och beräkna $f'(x)$. **(2 p)**
   (b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till f kring $x = 0$. **(2 p)**
   (c) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2}$. **(2 p)**

Lösning. (a) Vi vet att $\ln t$ är definierad för alla $t > 0$. Eftersom $1 + x^2 \geq 1 > 0$ för alla reella tal x så är alltså $f(x) = \ln(1 + x^2)$ definierad för alla reella tal x. Vidare, derivering ger

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

(b) Det sökta Taylorpolynomet ges av $P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$. Eftersom

$$f''(x) = \frac{2(1 + x^2) - 2x(2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2}$$

får vi nu att

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = \ln 1 + 0 \cdot x + \frac{2}{2}x^2 = x^2.$$

(c) Från (b) ovan får vi att $\ln(1 + x^2) = x^2 + O(x^3)$ då $x \to 0$. Detta ger att

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2} \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + O(x^3)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + O(x)}{1} = 1.$$

Man kan också använda l'Hôpitals regel för att beräkna gränsvärdet..

$\square$

Del B

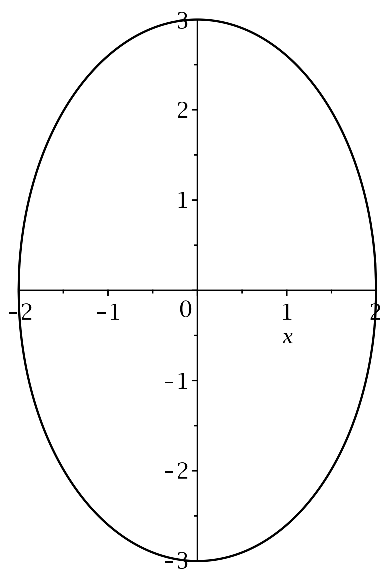
3. (a) Parametrisera kurvan $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Skissera också kurvan. **(2 p)**

(b) Hur stor area kan en rektangel ha om dess hörn ska ligga på kurvan i (a) och ha sidor parallella med koordinataxlarna? **(4 p)**

Lösning. (a) En parametrisering är

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 3\sin t \end{cases}$$

där t löper från 0 till 2π. Kurvan ser ut så här:



(b) Rektangeln blir symmetrisk så det räcker att räkna på den del av arean som ligger i första kvadranten och ta denna area gånger 4. Då försöker vi optimera arean av en rektangel med hörnen i $(0,0)$, $(x,0)$, $(y,0)$ och (x,y) där dessutom $x^2/4 + y^2/9 = 1$. Det sista kravet betyder (obs att vi är i första kvadranten)

$$y = 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}.$$

Arean i första kvadranten blir därför

$$xy = 3x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

där x kan ligga mellan 0 och 2. Vi ska alltså maximera funktionen

$$f(x) = 3x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \text{ då } x \in [0, 2].$$

Funktionen är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet så max existerar garanterat. Det kan antas i en kritisk punkt, en singulär punkt eller en randpunkt. I randpunkterna 0 och 2 har funktionen värdet 0. Vi deriverar och får

$$f'(x) = 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + 3x\frac{-2x/4}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} = 3\frac{1 - \frac{x^2}{2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}.$$

Vi ser att f är deriverbar på $(0, 2)$ och derivatan har ett enda nollställe i detta intervall, närmare bestämt $x = \sqrt{2}$. Det följer att detta måste vara vår maxpunkt och att största värdet av f är $f(\sqrt{2}) = 3$. Eftersom detta är en fjärdedel av den sökta maxarean får vi denna till 12.

Svar: 12

□

4. Låt $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$.
   (a) Gör ett teckenschema för derivatan och bestäm alla lokala extrempunkter. Skissera kurvan $y = f(x)$ med hjälp av teckenschemat och med hjälp av relevanta gränsvärden. **(3 p)**
   (b) Avgör vilken eller vilka av följande generaliserade integraler som är konvergenta: $\int_0^1 f(x)\,dx$, $\int_1^\infty f(x)\,dx$. Beräkna dem om de är konvergenta. **(3 p)**

Lösning. (a) Vi ser att f är definierad för alla $x > 0$ och att

$$f'(x) = \frac{(1/x)x^2 - (\ln x)(2x)}{x^4} = \frac{x - 2x(\ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3} \text{ för } x > 0.$$

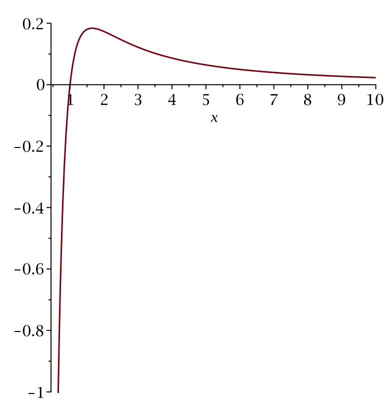
Från detta följer att $f'(x) = 0$ precis då $2\ln x = 1$, dvs då $x = e^{1/2}$. Vi får följande teckenschema för derivatan: $f'(x) > 0$ för $0 < x < e^{1/2}$, och $f'(x) < 0$ för $x > e^{1/2}$. Således är $x = e^{1/2}$ ett lokalt maximum (det är också ett globalt maximum). För att skissa kurvan tittar vi på följande gränsvärden:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$$

och

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0.$$

Vi får följande skiss:



(b) Vi börjar med att söka en primitiv funktion till $f(x)$. Partiell integration ger

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\left(\frac{1}{x}\right)\ln x - \int \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x}\right)\,dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right) + C.$$

Här utnyttjade vi att derivatan av $\ln x$ är $1/x$ och att $-1/x$ är en primitiv funktion till $1/x^2$.

Detta ger nu att

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[-\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right)\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(-1 + \frac{1+\ln\varepsilon}{\varepsilon}\right) = -\infty.$$

Således är denna integral divergent.

Vidare,

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\left[-\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)\right]_1^R = \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{\ln R}{R}-\frac{1}{R}+1\right) = 1.$$

Integralen är alltså konvergent, och värdet är 1.

$\square$

DEL C

5. Låt funktionen f vara definierad för alla reella tal x genom

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{om } x \neq 0 \\ 0, & \text{om } x = 0 \end{cases}$$

(a) I vilka punkter är f kontinuerlig? **(2 p)**
(b) I vilka punkter är f deriverbar? **(2 p)**
(c) Bestäm värdemängden till f. **(2 p)**

Lösning. (a) Eftersom f ges av ett elementärt uttryck i intervallet $(0, \infty)$ så följer att f är kontinuerlig i alla punkter av detta intervall. Eftersom f ges av ett elementärt uttryck i intervallet $(-\infty, 0)$ så följer att f är kontinuerlig i alla punkter av detta intervall. Eftersom $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, ty $\lim_{x\to 0}(-1/x^2) = -\infty$ och $\lim_{t\to-\infty} e^t = 0$, följer att f är kontinuerlig i 0. Alltså är f kontinuerlig på hela reella axeln.

(b) Låt $x \neq 0$. Då är $f'(x) = e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3}$, så vi ser att f är åtminstone är deriverbar för alla $x \neq 0$. I punkten 0 får vi använda derivatans definition. Vi ser att

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h}.$$

Vi noterar att

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{e^{-1/h^2}}{h} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t^2}}{1/t} = \lim_{t\to\infty} te^{-t^2} = 0$$

och

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{e^{-1/h^2}}{h} = \lim_{t\to-\infty} \frac{e^{-t^2}}{1/t} = \lim_{t\to-\infty} te^{-t^2} = 0.$$

Således är $\lim_{h\to 0} \dfrac{e^{-1/h^2}}{h} = 0$, så f är deriverbar också i 0 och $f'(0) = 0$. Alltså är f deriverbar på hela reella axeln.

(c) Vi ser att $f'(x) > 0$ på intervallet $x > 0$ så f är strängt växande här. Vi ser att $f'(x) < 0$ på intervallet $x < 0$ så f är strängt avtagande här. Vidare är $f'(0) = 0$ enligt ovan. Därför måste f ta sitt minsta värde i punkten $x = 0$ och detta minsta värde är 0. Vidare följer av ovanstående att f inte kan ha något största värde, men eftersom $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ och f är kontinuerlig och växande resp avtagande enligt ovan, så följer att värdemängden är $[0, 1)$

Svar: (a) Alla x
(b) Alla x
(c) $[0, 1)$

□

6. Visa att det för varje konstant $c > 0$ gäller att **(6 p)**

$$\frac{\pi}{2\sqrt{c}} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+c} \le \frac{\pi}{2\sqrt{c}} + \frac{1}{c}$$

Lösning. Tag ett $c > 0$ och låt $f(x) = \dfrac{1}{x^2+c}$. Vi noterar att f är positiv och kontinuerlig och att f är avtagande på intervallet $[0, \infty)$. Vi har

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+c} = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{dx}{x^2+c} = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{dx}{c(1+(x/\sqrt{c})^2)} = \lim_{R\to\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{c}} \arctan(x/\sqrt{c})\right]_0^R =$$
$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{c}} \arctan(R/\sqrt{c}) = \frac{\pi}{2\sqrt{c}}.$$

Eftersom denna generaliserade integral är konvergent följer det från Cauchys integralkriterium att serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+c}$$

är konvergent.

Eftersom f är positiv och avtagande på $[0, \infty)$ gäller att för varje heltal $n \ge 0$ har vi $f(n+1) \le f(x) \le f(n)$ för alla $n \le x \le n+1$. Detta ger (rita en figur)

$$f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(x)\, dx \le f(n) \tag{1}$$

för alla $n \ge 0$. Använder vi nu denna olikhet fås

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2+c} \le \int_0^N \frac{dx}{x^2+c} < \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+c} = \frac{\pi}{2\sqrt{c}}$$

för alla $N \ge 1$. Eftersom detta gäller för varje $N \ge 1$ måste vi ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+c} \le \frac{\pi}{2\sqrt{c}}$$

och därmed

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+c} = \frac{1}{c} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+c} \le \frac{1}{c} + \frac{\pi}{2\sqrt{c}}.$$

Olikheten (1) ger också

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+c} > \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2+c} \ge \int_0^{N+1} \frac{dx}{x^2+c}$$

för alla $N \ge 1$. Eftersom detta gäller för varje $N \ge 1$ måste vi ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+c} \ge \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+c} = \frac{\pi}{2\sqrt{c}}.$$

Således har vi visat att

$$\frac{\pi}{2\sqrt{c}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+c} \leq \frac{\pi}{2\sqrt{c}} + \frac{1}{c}.$$

□