KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 208.03.12

DEL A

1. Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = \dfrac{(\ln(x))^3}{x}$. **(4 p)**

   Lösning. De primitiva funktionerna till $f(x)$ ges av
$$\int \frac{(\ln x)^3}{x} dx.$$
   Låt $u = \ln x$. Då har vi $du = dx/x$, så vi kan skriva
$$\int \frac{(\ln x)^3}{x} dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{(\ln x)^4}{4} + C.$$
   $\square$

2. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2, omkring $x = 1$, till $g(x) = e^{-x^2}$. **(4 p)**

   Lösning. Det sökta Taylorpolynomet ges av
$$p(x) = g(1) + g'(1)(x-1) + \frac{g''(1)}{2}(x-2)^2.$$
   Vi har $g'(x) = -2xe^{-x^2}$ och $g''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$, vilket ger
$$p(x) = e^{-1} - 2e^{-1}(x-1) + e^{-1}(x-1)^2.$$
   $\square$

3. Ge definitionen av derivatan till en funktion φ i en punkt x. **(4 p)**

   Lösning. Se kursbok. $\square$

DEL B

4. Visa att ekvationen $x^7 + 3x^5 - \frac{3}{2x} + 2 = 0$ har en unik lösning i det öppna intervallet $(0, 1)$. **(4 p)**

Lösning. Låt $f(x) = x^7 + 3x^5 - 3/(2x) + 2$. Derivering ger

$$f'(x) = 7x^2 + 15x^4 + 3/(2x^2).$$

Vi noterar att $f'(x) > 0$ för alla $x > 0$ (eftersom samtliga termer är positiva). Således är f (strängt) växande på intervallet $(0, 1)$, och kan därför högst ha ett nollställe där. Vidare noterar vi att $f(1) = 1 + 3 - 3/2 + 2 = 9/2 > 0$, och $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. Eftersom f är kontinuerlig på intervallet $x > 0$ så följer det från satsen om mellanliggande värden att det måste finnas ett x_0 i $(0, 1)$ sådant att $f(x_0) = 0$. Vi kan alltså dra slutsatsen att f har precis ett nollställe på $(0, 1)$.

$\square$

5. Bestäm integralen $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx$. **(4 p)**

Lösning. Med hjälp av substitutionen

$$u = x+1, du = dx, u(0) = 1, u(1) = 2,$$

fås

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx &= \int_1^2 (u-1)\sqrt{u}\,du = \int_1^2 u^{3/2} - u^{1/2}\,du = \left[\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^2 \\ &= \left(\frac{2}{5}2^{5/2} - \frac{2}{3}2^{3/2}\right) - \left(\frac{2}{5}1^{5/2} - \frac{2}{3}1^{3/2}\right) = \ldots = \frac{4}{15}\left(1+\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

$\square$

6. Funktionen $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ är definierad på det öppna intervallet $(-2, 2)$. Visa att $f(x)$ har en invers. **(4 p)**

Lösning. För att visa att f har en invers räcker det att visa att f är strängt avtagande på $(-2, 2)$ (för då gäller att $f(x_1) \neq f(x_2)$ om $x_1 \neq x_2$, dvs f är injektiv och har således en invers). Vi har

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 4) - x^3(2x)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}.$$

Vi noterar att $f'(x) < 0$ för alla x i $(-2, 2)$ (derivatans tecken ges av tecknet på $x^2 - 12$), förutom då $x = 0$, då vi har $f'(0) = 0$. Eftersom $f'(x) < 0$ för alla x i $(-2, 2)$, förutom i (den isolerade) punkten $x = 0$, följer det från ett resultat i kursboken (avsnittet om växande och avtagande funktioner) att f är (strängt) avtagande på $(-2, 2)$. Således har f en invers.

$\square$

DEL C

7. För varje heltal $N > 0$ låter vi $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\sqrt{n}}$. Serien konvergerar mot ett tal S. Vi vill approximera talet S med S_N. Bestäm något tal N sådan att att felet i approximationen är mindre än $1/100$. **(6 p)**

Lösning. Definiera $E_N := S - S_N$ för heltal $N > 1$. Eftersom vi har en positiv serie är det klart $E_N > 0$. Vi visar nu att $N = 40000$ är det minsta heltal för vilket $E_N < 1/100$.

$$E_N = S - S_N = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$
$$< \int_N^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_N^A \frac{1}{x^{3/2}}\,dx = \lim_{A\to\infty} \left[-2\frac{1}{x^{1/2}}\right]_N^A = \frac{2}{\sqrt{N}}.$$

Om $N \geq 40000$ är alltså $E_N < \frac{2}{\sqrt{N}} \leq \frac{2}{\sqrt{40000}} = \frac{1}{100}$.

Å andra sidan är

$$E_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} > \int_{N+1}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = \lim_{A\to\infty} \left[-2\frac{1}{x^{1/2}}\right]_{N+1}^A = \frac{2}{\sqrt{N+1}},$$

så för $N < 40000$, dvs $N \leq 39999$, är $E_N > \frac{2}{\sqrt{N+1}} \geq \frac{2}{\sqrt{39999+1}} = \frac{1}{100}$.

Olikheten mellan serien och den generaliserade integralerna i resonemangen ovan framgår om man ritar en figur och jämför arean av området mellan kurvan $y = 1/(x\sqrt{x})$ med summan av arean av rektanglarna R_n, $n \geq N+1$, med bas 1 och höjd $1/n(\sqrt{n})$.

$\square$

8. För varje heltal $n > 0$ definierar vi intervallet $I_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$. Låt φ vara en kontinuerlig funktion, definierad för alla tal x. Vi låter φ_n vara det största värdet funktionen φ har på intervallet I_n. Visa att gränsen
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n$$
existerar, och bestäm detta värdet. **(6 p)**

Lösning. För varje n vill funktionen φ vara kontinuerlig på intervallet I_n, och därför finns det x_n i I_n sådan att $\varphi(x_n) = \varphi_n$ är det största värdet på I_n. Vi har att sekvensen (x_n) har gräns $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Vi söker gränsen
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n).$$
Funktionen φ är kontinuerlig, vilket betyder att
$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_n) = \varphi(0).$$
Detta betyder att gränsen existerar, och är lika med $\varphi(0)$. $\square$