KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Extra tentamen
Torsdagen 29 augusti, 2013

Skrivtid: 14:00-19:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Roy Skjelnes

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examination. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2, och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 bonuspoäng på motsvarande uppgift, och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid två tenamtenstillfällen under läsåret.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Låt L vara linjen genom $A = (3,5,5)$ och $B = (4,5,7)$. Planet Π ges av ekvationen $x + y + z - 7 = 0$.
   (a) Bestäm skärningen Q mellan linjen L och planet Π. **(1 p)**
   (b) Bestäm projecktionen av $(1,1,1)$ ned på linjen L. **(1 p)**
   (c) Bestäm vektorn $\vec{u}$ som bestäms av ekvationen
   $$\vec{QA} = \vec{u} + \vec{n},$$
   där $\vec{n}$ är någon normalvektor till Π, och vinkelrät med $\vec{u}$. **(2 p)**

2. Vektorrummet $W \subseteq \mathbf{R}^4$ spänns upp av vektorerna
   $$\vec{a} = \begin{bmatrix}1\\1\\2\\1\end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix}2\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix}3\\1\\3\\2\end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{d} = \begin{bmatrix}0\\2\\3\\1\end{bmatrix}$$
   (a) Bestäm en bas β för W. **(2 p)**
   (b) Bestäm koordinatmatrisen för $\vec{w} = \begin{bmatrix}2 & 4 & 7 & 3\end{bmatrix}^{Tr}$ med avseende på basen β. **(2 p)**

3. Avbildningen $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ ges av matrisen
   $$A = \frac{1}{41}\begin{bmatrix}-9 & 40\\40 & 9\end{bmatrix}.$$
   Avbildningen T är en spegling om en linje L. Bestäm denna linje L. **(4 p)**

DEL B

4. Använd minsta kvadratmetoden för att bestämma en ekvation för det plan H i rummet, som ligger närmast punkterna
$$(-1,-1,3), \quad (-1,1,5), \quad (0,0,4), \quad (1,-1,4) \quad \text{och} \quad (1,1,3).$$
Du kan anta att ekvationen för planet H är på formen $ax + by + z + d = 0$. **(4 p)**

5. Avbildningen $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ges av matrisen
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$
(a) Visa att linjen $L = \{(2t, 4t, 6t)\}$ (godyckliga tal t) är ett egenrum. **(1 p)**
(b) Bestäm samtliga egenrum till avbildningen T. **(3 p)**

6. (a) Lösningsmängden $V \subset \mathbf{R}^2$ till ekvationen $xy = 0$ ger två linjer i planet. Avgör om V är ett vektorrum. **(2 p)**
(b) Mängden $W \subseteq \mathbf{R}^2$ är alla talpar på formen $W = \{(n, n)\}$, där n genomlöper heltalen $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Avgör om W är ett vektorrum. **(2 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Låt W vara delrummet i $\mathbf{R}^4$ som spänns upp av vektorerna

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Bestäm ett (linjärt) ekvationssystem vars lösningsmängd är W. **(4 p)**

8. (a) Bestäm en (3×3)-matris med ett tre-dimensionellt egenrum, men enbart med ett egenvärde. **(1 p)**

   (b) Bestäm en (3×3)-matris med enbart ett egenvärde, och med egenrum av dimension två. **(3 p)**

9. Låt $T\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ vara en linjär avbildning. Låt A vara matrisen som representerar T med avseende på en fixerad bas β. Determinanten till avbildningen T definieras som determinanten till matrisen A. Visa att detta är väldefinierad, dvs. att determinanten är oberoende av val av bas. **(4 p)**