KTH VETENSKAP OCH KONST

KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
torsdag, 9 januari 2020

Skrivtid: 08:00-11:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Danijela Damjanović

Tentamen består av sex uppgifter som vardera ger maximalt sex poäng.

Del A på tentamen utgörs av de två första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng.

De två följande uppgifterna utgör del B och de två sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst tre poäng.

Del A

1. Bestäm ett andragradspolynom vars funktionskurva passerar genom punkterna

$$(1,3), \quad (2,-2), \quad (3,-5).$$

(6 p)

Tips: ansätt ett andragradspolynom och lös ett linjärt ekvationssystem där koefficienterna är de obekanta.

2. Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som avbildar en punkt i planet $\mathbb{R}^2$ på sin spegelbild i linjen $x + y = 0$.

(a) Bestäm matrisen A för T i standardbasen för $\mathbb{R}^2$. **(2 p)**

(b) Bestäm två linjärt oberoende egenvektor $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ till A. **(2 p)**

(c) Bestäm matrisen B för T i basen $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. **(2 p)**

Var god vänd!

Del B

3. Betrakta vektorerna $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, och $\vec{v_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$.

(a) Visa att $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ utgör en bas för $\mathbf{R}^3$. **(2 p)**

(b) Skriv $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ som en linjärkombination av $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$. **(2 p)**

(c) Bestäm den ortogonala projektionen av $\vec{w}$ på planet som spänns upp av $\vec{v_1}$ och $\vec{v_2}$. **(2 p)**

4. Låt $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Beräkna A^{1000}. **(6 p)**

Del C

5. (a) Anta att vi vet att $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$ för någon vektor $\vec{u}$. Kan vi ur det dra slutsatsen att $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är lika? Om ja, så varför då? Om nej, så exakt vilka slutsatser kan vi dra om hur $\vec{v}$ och $\vec{w}$ ser ut, och varför? **(3 p)**

(b) Anta att vi vet att $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ för alla vektorer $\vec{u}$. Kan vi ur det dra slutsatsen att $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är lika? Om ja, så varför då? Om nej, så exakt vilka slutsatser kan vi dra om hur $\vec{v}$ och $\vec{w}$ ser ut, och varför? **(3 p)**

6. Låt A vara en symmetrisk $(n \times n)$-matris. Visa att ekvationen

$$X^3 = A$$

har en lösning. **(6 p)**