KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen 2012-03-12

DEL A

1. Betrakta ekvationssystemet i de tre obekanta x, y och z, som ges av

$$\begin{cases} x + (1-a)y + 2z = 0 \\ 2x + ay + 3z = 1 \\ x + (2a-1)y + az = a \end{cases}$$

där a är en konstant.

(a) Bestäm lösningsmängden i det fall då $a = 1$. **(2 p)**

(b) Undersök för vilka värden på konstanten a som ekvationssystemet har precis en lösning, oändligt många lösningar, respektive ingen lösning. **(2 p)**

Lösning. (a) Vi sätter in $a = 1$ i ekvationssystemet och får ett ekvationssystem med totalmatris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Med Gauss-Jordans metod kan vi överföra totalmatrisen till reducerad trappstegsform och får då

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 - r_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Vi har två ledande ettor och en fri variabel. Vi inför en parameter t och får lösninsmängden som

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ 1+t \\ t \end{bmatrix},$$

där t är en reell parameter.

(b) I allmänhet får vi totalmatris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-a & 2 & 0 \\ 2 & a & 3 & 1 \\ 1 & 2a-1 & a & a \end{array}\right]$$

och Gausselimination ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-a & 2 & 0 \\ 2 & a & 3 & 1 \\ 1 & 2a-1 & a & a \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-a & 2 & 0 \\ 0 & 3a-2 & -1 & 1 \\ 0 & 3a-2 & a-2 & a \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 - r_2 \end{bmatrix}$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-a & 2 & 0 \\ 0 & 3a-2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 \end{array}\right].$$

Om $a \neq \frac{2}{3}$ och $a \neq 1$ får vi en ledande etta i varje kolonn och systemet har en unik lösning.
Om $a = 1$ får vi oändligt många lösningar enligt del (a).
Om $a = \frac{2}{3}$ får vi ingen ledande etta i andra kolonnen och vi får fortsätta ett steg till och får

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ -r_2 \\ r_3 + \frac{1}{3}r_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{array}\right].$$

Systemet är nu inkonsistent och det saknas lösning.

□

Svar:

(a) Lösningsmängden är $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ 1+t \\ t \end{bmatrix}$, där t är en reell parameter.

(b) När $a = 1$ finns oändligt många lösningar, när $a = \frac{2}{3}$ saknas lösning och annars finns en unik lösning.

2. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den ortogonala projektionen på planet $x - 3y - 5z = 0$.
   (a) Bestäm en bas för nollrummet, $\ker(T)$. **(2 p)**
   (b) Bestäm en bas för bildrummet, $\mathrm{im}(T)$. **(2 p)**

Lösning. (a) De vektorer som tillhör nollrummet $\ker(T)$ är de vektorer som projiceras till nollvektorn under projektionen T. Detta är precis de vektorer som är ortogonala mot planet, dvs parallella med normalvektorn

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Därmed utgör $\vec{n}$ en bas för nollrummet, $\ker(T)$.

(b) Bildrummet till projektionen är alla vektorer i planet med ekvation $x - 3y - 5z = 0$. För att bestämma en bas för detta kan vi se det som nollrummet till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ och eftersom den redan är på reducerad trappstegsform ser vi att lösningsmängden kan skrivas som

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3s + 5t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

där s och t är reella parametrar. Därmed utgör vektorerna

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en bas för bildrummet $\mathrm{im}(T)$.

□

Svar:

(a) En bas för nollrummet $\ker(T)$ ges av normalvektorn $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$.

(b) En bas för bildrummet $\mathrm{im}(T)$ ges av exempelvis vektorerna $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Betrakta matrisen
$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm egenvärdena till matrisen A och förklara varför A är diagonaliserbar. **(2 p)**

(b) Bestäm en matris S sådan att $S^{-1}AS$ är en diagonalmatris. **(2 p)**

Lösning. (a) Egenvärdena till A ges av rötterna till den karaktäristiska ekvationen $\det(A - xI_2) = 0$ och vi beräknar det karaktäristiska polynomet $f_A = \det(A - xI_2)$ till

$$f_A(x) = \det \begin{bmatrix} 5-x & -2 \\ 7 & -4-x \end{bmatrix} = (5-x)(-4-x)-(-2)\cdot 7 = -20+4x-5x+x^2+14 = x^2-x-6.$$

Vi kan använda kvadratkomplettering för att lösa ekvationen $f_A(x) = 0$ och får

$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 = 0 \quad &\iff \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6 = 0 \\ &\iff \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \quad \iff \quad x - \frac{1}{2} = \pm\frac{5}{2} \quad \iff \quad x = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Alltså ges egenvärdena av $\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$ och $\lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2$.
Vi ser att A är diagonliserbar i och med att den är en 2×2-matris som har *två olika* egenvärden.

(b) För att bestämma en matris som diagonaliserar A behöver vi bestämma en bas av egenvektorer till A. För egenvärdet $\lambda_1 = 3$ behöver vi lösa ekvationssystemet med totalmatris

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ 7 & -7 & 0 \end{array}\right]$$

och med Gauss-Jordans metod får vi

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ 7 & -7 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{2}r_1 \\ r_2 - \frac{7}{2}r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Lösningsmängden ges av

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$$

där t är en reell parameter. Vi får en bas för egenrummet av egenvektorn $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$
För egenvärdet $\lambda_1 = -2$ behöver vi lösa ekvationssystemet med totalmatris

$$\left[\begin{array}{cc|c} 7 & -2 & 0 \\ 7 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

och med Gauss-Jordans metod får vi

$$\left[\begin{array}{cc|c} 7 & -2 & 0 \\ 7 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{7}r_1 \\ r_2 - r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Egenvektorerna med egenvärde -2 är alltså nollskilda vektorer på formen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7}t \\ t \end{bmatrix}$$

och om vi väjler $t = 7$ får vi egenvektorn $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 7 \end{smallmatrix}\right]$
Matrisen S som diagonaliserar A kan därmed väljas till

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

och vi får

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Vi kan kontrollera räkningarna genom att utföra matrismultiplikationen och får

$$S^{-1}AS = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -14 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

□

Svar:

(a) Egenvärdena är 3 och -2 och eftersom de är olika är matrisen diagonaliserbar.

(b) En sådan matris är $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$.

DEL B

4. Låt $W \subseteq \mathbb{R}^4$ vara delrummet som ges av ekvationen

$$x - 2y + 3z + w = 0.$$

(a) Bestäm en linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ vars bildrum $\mathrm{im}(T)$ är W. **(3 p)**

(b) Varför finns det ingen linjär avbildning $S\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ vars bildrum $\mathrm{im}(S)$ är W? **(1 p)**

Lösning. (a) För att bildrummet ska vara lika med W ska alla kolonner i matrisen för T ligga i W och det ska finnas några av dem som utgör en bas för W.

Vi kan bestämma en bas för W genom att betrakta det som nollrummet till matrisen $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Vi inför tre parametrar för de tre fria variablerna och får lösningsmängden som

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2r - 3s - t \\ r \\ s \\ t \end{bmatrix} = r \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r, s, t \in \mathbb{R}.$$

Därmed utgör vektorerna

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en bas för W. Vi kan nu välja vår avbildning T sådan att matrisen har dessa tre vektorer som tre av sina kolonner. Den fjärde kolonnen kan väljas godtyckligt i W, exempelvis som nollvektorna.

Alltså ger matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

en sådan avbildning $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$.

(b) Enligt dimensionssatsen har vi

$$\dim \ker(S) + \dim \mathrm{im}(S) = 2$$

och därmed kan inte bildrummet, $\mathrm{im}(S)$ vara lika med W som är tredimensionellt.

$\square$

Svar:

(a) Matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ger en avbildning $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ med $\mathrm{im}(T) = W$.

5. En linje $(x, y, z) = (4 + 3t, 5t, t - 2)$ och ett plan med ekvation $2x + y - 2z - 3 = 0$ är givna. När linjen projiceras på planet fås en ny linje som ligger i planet. Bestäm denna linje. **(4 p)**

Lösning. Linjens riktningsvektor är $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ och planets normalvektor är

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

För att få riktningsvektorn för den sökta linjen projicerar vi $\vec{v}$ på planet och vi kan göra det genom att dra bort projektionen av $\vec{v}$ på $\vec{n}$ från $\vec{v}$.

Alltså får linjen riktningsvektor

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{v} - \operatorname{Proj}_{\vec{n}}(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot (-2)}{2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2)} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{9}{9} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vi kan kontrollera att $\vec{u}$ ligger i planet genom $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = 0$.

För att finna en punkt på linjen konstaterar vi att skärningspunkten mellan linjen och planet ligger på den sökta linjen och vi får fram den genom att sätta in uttrycket $(x, y, z) = (4 + 3t, 5t, t - 2)$ i planets ekvation och lösa ut t. Vi får

$$2(4 + 3t) + 5t - 2(t - 2) - 3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 9 + 9t = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = -1.$$

Alltså ligger punkten $(x, y, z) = (4 + 3 \cdot (-1), 5 \cdot (-1), -1 - 2) = (1, -5, -3)$ i planet.

Projektionen av linjen på planet kan därmed skrivas

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\square$

Svar: Projektionen av linjen på planet ges av $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

6. Låt $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som ges av matrisen

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix},$$

och låt $\mathfrak{B}$ vara basen som ges av vektorerna

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm matrisen för avbildningen T med avseende på basen $\mathfrak{B}$. **(2 p)**

(b) Bestäm koordinatvektorn, $[T(\vec{x})]_{\mathfrak{B}}$, där $\vec{x} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$. **(2 p)**

Lösning. (a) Matrisen

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

omvandlar koordinater från basen $\mathfrak{B}$ till standardbasen. Vi kan därmed beräkna matrisen för T med avseende på basen $\mathfrak{B}$ som $B = S^{-1}AS$.

Vi kan invertera matrisen S genom Gauss-Jordans metod och får

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 - r_2 \\ r_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Alltså har vi

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

och vi får

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vi kan kontrollera räkningarna genom att se att

$$T(\vec{u}_1) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

och

$$T(\vec{u}_2) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Vi kan omvandla koordinaterna för $\vec{x}$ till basen $\mathfrak{B}$ och sedan använda matrisen B, eller först använda matrisen A och sedan omvandla koordinater till basen $\mathfrak{B}$. I det första fallet får vi

$$[\vec{x}]_{\mathfrak{B}} = S^{-1}\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Med matrisen B får vi nu

$$[T(\vec{x})]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 \\ 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

På det andra sättet får vi

$$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \end{bmatrix}$$

och

$$[T(\vec{x})]_{\mathfrak{B}} = S^{-1}T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 10 - 1 \cdot 16 \\ -1 \cdot 10 + 1 \cdot 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

□

Svar:

(a) Matrisen för T med avseende på basen $\mathfrak{B}$ ges av $B = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) $[T(\vec{x})]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$.

DEL C

7. Låt W vara delrummet i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av de två vektorerna

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm en bas för det ortogonala komplementet $W^\perp$. **(2 p)**

(b) Skriv vektorn

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

som en summa $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$, där $\vec{u}$ ligger i W och $\vec{v}$ ligger i $W^\perp$. **(2 p)**

Lösning. (a) Det ortogoala komplementet $W^\perp$ består av alla vektorer som är ortogonala mot både $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$. Det innebär att $W^\perp$ är nollrummet till matrisen med $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$ som rader. Vi bestämmer en bas för detta med Gauss-Jordans metod:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - 2r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 + 2r_2 \\ -r_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Med de två fria variablerna x_3 och x_4 inför vi parametrar s och t, vilket ger lösningarna som

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6s + t \\ 4s \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alltså utgör vektorerna

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en bas för $W^\perp$.

(b) Vi kan välja att antingen projicera antingen på W eller på $W^\perp$. Om vi väljer att projicera på W ordnar vi först en ortogonal bas genom att använda Gram-Schmidts metod. Vi ersätter då $\vec{u}_2$ med

$$\vec{w}_2 = \vec{u}_2 - \mathrm{Proj}_{\vec{u}_1}\vec{u}_2 = \begin{bmatrix}2\\3\\0\\-2\end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix}2\\3\\0\\-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\-2\\-1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\2\\-2\\-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\-2\\-1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1\\2\\-2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\\0\\-2\end{bmatrix} - \frac{10}{10}\begin{bmatrix}1\\2\\-2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\2\\-1\end{bmatrix}$$

Vi kan nu projicera $\vec{x}$ på W genom summan av projektionerna på de båda basvektorerna

$$\mathrm{Proj}_W\vec{x} = \frac{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\-2\\-1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\2\\-2\\-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\-2\\-1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1\\2\\-2\\-1\end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\2\\-1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\1\\2\\-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\2\\-1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\-1\end{bmatrix} = 0\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\-2\\-1\end{bmatrix} + \frac{3}{7}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\-1\end{bmatrix} = \frac{3}{7}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\-1\end{bmatrix}$$

Den del av $\vec{x}$ som ligger i $W^\perp$ är nu

$$\mathrm{Proj}_{W^\perp}\vec{x} = \vec{x} - \mathrm{Proj}_W\vec{x} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{3}{7}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\-1\end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix}4\\4\\1\\10\end{bmatrix}.$$

Med skalärprodukten kan vi kontrollera att $\vec{u} = \mathrm{Proj}_W\vec{x}$ är ortogonal mot basvektorerna i $W^\perp$ och att $\mathrm{Proj}_{W^\perp}\vec{x}$ är ortogonal mot basvektorerna i W.

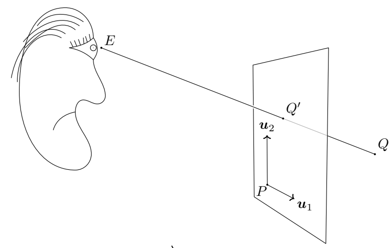
□

Svar:

(a) Vektorerna $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}-6\\4\\1\\0\end{bmatrix}$ och $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ utgör en bas för $W^\perp$.

(b) Vi har $\vec{u} = \frac{3}{7}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\-1\end{bmatrix}$ och $\vec{v} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix}4\\4\\1\\10\end{bmatrix}$.

8. Inom datorgrafiken är ett av de grundläggande problemen att projicera punkter i en tredimensionell scen på en två-dimensionell datorskärm. En vanlig projektionsmetod är att från den punkt Q i scenen som ska projiceras bilda en rät linje till en tänkt betraktare E. Den punkt Q' där linjen skär skärmens plan är projektionspunkten av Q. I skärmens plan införs ett koordinatsystem genom att välja ett origo i punkten P och två basvektorer $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$.



(a) Ange med hjälp av vektorerna $\overrightarrow{OP}$, $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$ ett uttryck för vektorn från origo O (i rummet) till en punkt Q' som har koordinater (s_1, s_2) i skärmens koordinatsystem. **(1 p)**

(b) Använd (a)-delen och linjen genom E och Q för att skriva upp en vektorekvation för punkten Q'. De tre obekanta i ekvationen kommer att vara s_1, s_2 och linjens parameter. **(1 p)**

(c) Visa att punkten Q' har koordinaterna

$$\left(\frac{\overrightarrow{PE}\cdot(\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_2)}{\vec{u}_1\cdot(\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_2)}, \frac{\overrightarrow{PE}\cdot(\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_1)}{\vec{u}_2\cdot(\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_1)}\right)$$

i skärmens koordinatsystem genom att ta skalärprodukten av ekvationen med $\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_1$ respektive $\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_2$. **(2 p)**

Lösning. (a) Att punkten Q' har koordinater (s_1, s_2) i skärmens koordinater betyder att vektorn $\overrightarrow{PQ}$ kan skrivas som $s_1\vec{u}_1 + s_2\vec{u}_2$. Vektorn från origo O till Q' ges därmed av

$$\overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OP} + s_1\vec{u}_1 + s_2\vec{u}_2.$$

(b) Linjen genom E och Q kan skrivas som $\overrightarrow{OE} + t\overrightarrow{EQ}$ för en parameter t och vi får vektorekvationen

$$\overrightarrow{OE} + t\overrightarrow{EQ} = \overrightarrow{OP} + s_1\vec{u}_1 + s_2\vec{u}_2$$

som kan förenklas genom att se att $\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PE}$ och vi får då

$$\overrightarrow{PE} + t\overrightarrow{EQ} = +s_1\vec{u}_1 + s_2\vec{u}_2. \tag{1}$$

(c) Genom att ta skalärprodukten av Ekvation 1 med $\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_1$ får vi

$$(\overrightarrow{PE} + t\overrightarrow{EQ})\cdot(\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_1) = (s_1\vec{u}_1 + s_2\vec{u}_2)\cdot(\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_1).$$

och eftersom $\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_1$ är ortogonal mot både $\overrightarrow{EQ}$ och $\vec{u}_1$ förenklas ekvationen till

$$\overrightarrow{PE}\cdot(\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_1) = s_2\vec{u}_2\cdot(\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_1).$$

Därmed kan vi lösa ut s_2 som

$$s_2 = \frac{\overrightarrow{PE} \cdot (\overrightarrow{EQ} \times \vec{u}_1)}{\vec{u}_2 \cdot (\overrightarrow{EQ} \times \vec{u}_1)}.$$

På motsvarande sätt tar vi skalärprodukten med $\overrightarrow{EQ} \times \vec{u}_2$ och får

$$\overrightarrow{PE} \cdot (\overrightarrow{EQ} \times \vec{u}_2) = s_1 \vec{u}_1 \cdot (\overrightarrow{EQ} \times \vec{u}_2)$$

där vi löser ut s_1 som

$$s_1 = \frac{\overrightarrow{PE} \cdot (\overrightarrow{EQ} \times \vec{u}_2)}{\vec{u}_1 \cdot (\overrightarrow{EQ} \times \vec{u}_2)}.$$

$\square$

Svar:

(a) Vektorn till punkten Q' i skärmens plan kan skrivas $\overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OP} + s_1\vec{u}_1 + s_2\vec{u}_2$.

(b) Ekvationen kan skrivas $\overrightarrow{PE} + t\overrightarrow{EQ} = s_1\vec{u}_1 + s_2\vec{u}_2$.

9. Låt T vara en linjär avbildning från $\mathbb{R}^4$ till $\mathbb{R}^5$ vars nollrum, $\ker(T)$, har dimension 1. Låt V vara ett 3-dimensionellt delrum av $\mathbb{R}^4$. Låt $S\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^5$ vara den avbildning som fås genom att använda avbildningen T bara på vektorer i V. Avgör vilka möjligheter det finns för dimensionen av bildrummet $\operatorname{im}(S)$. **(4 p)**

Lösning. En vektor som ligger i $\ker(S)$ ligger i V och uppfyller $S(\vec{x}) = \vec{0}$, men då gäller också att $T(\vec{x}) = \vec{0}$, eftersom S fås genom att använda T på vektorer i V. Alltså kommer $\ker(S) \subseteq \ker(T)$. Eftersom $\ker(T)$ är endimensionellt kan ett delrum av $\ker(T)$ ha dimension noll eller ett. Dimensionen är noll om V inte innehåller någon nollskild vektor från $\ker(T)$ och ett om $\ker(T)$ ligger helt i V. Båda situationerna kan förekomma och enligt dimensionssatsen får vi att dimensionen för bildrummet $\operatorname{im}(S)$ antingen är $\dim(V) - \dim(\ker(S)) = 3 - 0 = 3$ eller $\dim V - \dim(\ker(S)) = 3 - 1 = 2$. $\square$

Svar: Dimensionen för bildrummet $\operatorname{im}(S)$ kan vara två eller tre.
