KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2018.10.23

Del A

1. Låt $f(x) = \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$, med $x \neq 1$.

   (a) Bestäm gränsvärdet $\lim_{x\to 1+}(f(x))$. **(2 p)**

   (b) Avgör om gränsvärdet $\lim_{x\to 1}(f(x))$ existerar. **(2 p)**

   (c) För vilka x gäller det att $f(x) < 1$. **(2 p)**

Lösning. Eftersom $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ kan vi skriva om f på formen

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 1 \\ -(x+1), & x < -1. \end{cases}$$

a) Från utrycket ovan ser vi att $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$.

b) Vi ser att $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -2$. Eftersom höger- och vänstergränsvärdena är olika så existerar inte gränsvärdet $\lim_{x\to 1} f(x)$.

c) Vi undersöker först för vilka $x > 1$ som $f(x) < 1$. Eftersom $f(x) = x+1$ för $x > 1$, ser vi att $f(x) > 2$ för alla $x > 1$, dvs det finns inga $x > 1$ för vilka $f(x) < 1$.

Nu undersöker vi för vilka $x < 1$ som $f(x) < 1$. Eftersom $f(x) = -(x+1)$ för $x < 1$ kan detta skrivas $-(x+1) < 1$, dvs $x > -2$. Vi ser alltså att $f(x) < 1$ för alla $-2 < x < 1$ (kom ihg att vi antog att $x < 1$).

Från denna analys följer att $f(x) < 1$ för $-2 < x < 1$.

$\square$

2. Beräkna nedanstående integraler.

   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}dx.$ **(3 p)**

   (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx.$ **(3 p)**

Lösning. Vi använder variabelsubstitution. Låt $u = \sin(x)$. Då är $du = \cos(x)dx$. Om $x = 0$ så är $u = 0$; om $x = \pi/2$ så är $u = 1$. Detta ger

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}du = [\arctan(u)]_0^1 = \pi/4.$$

b) Polynomdivision ger $x^2/(1+x^2) = 1 - 1/(1+x^2)$. Allstå har vi att

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = [x - \arctan(x)]_0^1 =$$
$$= 1 - \arctan(1) = 1 - \pi/4.$$

□

DEL B

3. En modell för en population $P(t)$ ges av integralekvationen

$$P'(t) = 2P(t) - 2\int_0^t P(s)\,ds - e^{2t},$$

där t är tiden.

(a) Deriverar man integralekvationen erhåller man en andra ordningens ordinär differential ekvation (ODE). Bestäm denna ODE. **(2 p)**

(b) Bestäm $P(t)$ om startpopulationen $P(0) = 10$. **(4 p)**

Lösning. a) Genom att derivera ekvationen m.a.p. t fås $P''(t) = 2P'(t) - 2P(t) - 2e^{2t}$, som kan skrivas på formen

$$P''(t) - 2P'(t) + 2P(t) = -2e^{2t}. \tag{1}$$

(Här har vi utnyttjat analysens huvudsats för att derivera $\int_0^t P(s)ds$.)

b) Vi har givet $P(0) = 10$. Insatt i den givna integralekvationen ger detta att $P'(0) = 20 - 0 - 1 = 19$. Vi söker nu den lösning till (1) som uppfyller dessa begynnelsevillkor.

Först löser vi den motsvarande homogena ekvationen $P''(t) - 2P'(t) + 2P(t) = 0$. Denna ekvation har den karakteristiska ekvationen $r^2 - 2r + 2 = 0$, som har rötterna $r = 1 \pm i$. Således ges den allmänna lösningen till den homogena ekvationen av $P_h(t) = e^t(A\cos t + B\sin(t))$.

Vi söker nu en partikulärlösning till (1). Vi gör ansatsen $P_p(t) = ce^{2t}$, där vi ska försöka bestämma konstanten c. Insättning i ekvationen (1) ger villkoret

$$-2e^{2t} = P_p''(t) - 2P_p'(t) + 2P_p(t) = (4c - 2(2c) + 2c)e^{2t}.$$

Vi ser att $c = -1$ uppfyller detta. Således, $P_p(t) = -e^{2t}$ är en partikulärlösning.

Nu vet vi att den allmänna lösningen till (1) är

$$P(t) = P_h(t) + P_p(t) = e^t(A\cos t + B\sin(t)) - e^{2t}.$$

Vi använder nu begynnelsevillkoren för att bestämma konstanterna A och B. Eftersom $P'(t) = e^t(A\cos t + B\sin(t)) + e^t(-A\sin(t) + B\cos(t)) - 2e^{2t}$ får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} 10 = P(0) = A - 1 \\ 19 = P'(0) = A + B - 2. \end{cases}$$

Detta ger $A = 11$ och $B = 10$. Således är

$$P(t) = e^t(11\cos t + 10\sin(t)) - e^{2t}.$$

den sökta lösningen.

□

4. Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ är definierad för alla positiva reella tal.
   (a) Bestäm Taylorpolynomet $P(x)$ av grad 2 till f kring punkten $x = 4$. **(2 p)**
   (b) Bestäm ett närmevärde till $\sqrt{5}$ som avviker högst $1/200$ från det faktiska värdet. **(4 p)**

Lösning. a). Vi har att $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$, vilket ger $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ och att $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$. Detta ger att $f(4) = 2$, $f'(4) = \frac{1}{4}$ och att $f''(4) = -\frac{1}{32}$. Taylorpolynomet av grad 2 till $f(x)$ kring punkten $x = 4$ blir då

$$\begin{aligned} P(x) &= f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f''(4)}{2}(x-4)^2 \\ &= 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2. \end{aligned}$$

b). Vi approximerar $f(5) = \sqrt{5}$ med $P(5)$. Alltså har vi att

$$f(5) = \sqrt{5} \approx P(5) = 2 + \frac{1}{4}(5-4) - \frac{1}{64}(5-4)^2 = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} = \frac{143}{64}.$$

Låt R vara felet vid approximationen i b-delen. Enligt Taylors formel gäller

$$R = \frac{f'''(c)}{3!}(5-4)^3$$

för något tal $4 < c < 5$. Från $f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}$ får vi att

$$R = \frac{1}{3!} \cdot \frac{3}{8}c^{-5/2}(5-4)^3 = \frac{1}{16c^{5/2}}$$

Eftersom $4 < c < 5$ och därmed att $\frac{1}{5} < \frac{1}{c} < \frac{1}{4}$ har vi

$$|R| = |\frac{1}{16c^{5/2}}| < \frac{1}{16 \cdot 4^{5/2}} = \frac{1}{16 \cdot 32} = \frac{1}{512} < \frac{1}{200}.$$

$\square$

DEL C

5. Visa att $\ln(n!) > 1 + n(\ln(n) - 1)$ för alla $n \geq 2$. **(6 p)**

Lösning. Vi kan skriva

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln k = \sum_{k=2}^{n} \ln k.$$

Eftersom $\ln x$ är en strängt växande funktion på intervallet $x > 0$ så gäller för varje heltal $k \geq 2$ att $\ln k > \ln x$ för alla $x \in [k-1, k)$, vilket medför att $\ln(k) > \int_{k-1}^{k} \ln x dx$. Således har vi att

$$\sum_{k=2}^{n} \ln k > \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln x dx = \int_{1}^{n} \ln x dx = \{\text{partiell integration}\} =$$
$$= [x \ln(x) - x]_1^n = n \ln(n) - n - (-1) = 1 + n(\ln(n) - 1).$$

□

6. Antag att funktionen $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är två gånger deriverbar och att $\phi''(x)$ är kontinuerlig överallt. Visa att om $\phi''(x) > x^2$ för alla x, och om $\phi(0) = -1$, så finns det ett tal $c > 0$ sådant att $\phi(c) = 0$. **(6 p)**

   Lösning. För $x > 0$ har vi
$$\phi'(x) - \phi'(0) = \int_0^x \phi''(t)dt > \int_0^x t^2 dt = x^3/3,$$
   dvs
$$\phi'(x) > \phi'(0) + x^3/3.$$
   Vidare
$$\phi(x) - \phi(0) = \int_0^x \phi'(t)dt > \int_0^x (\phi'(0) + t^3/3)dt = \phi'(0)x + x^4/12.$$
   Använder vi att $\phi(0) = -1$ får vi alltså
$$\phi(x) > -1 + \phi'(0)x + x^4/12.$$
   Således har vi att $\phi(x) \to \infty$ då $x \to \infty$. Speciellt finns det ett $x_0 > 0$ så att $\phi(x_0) > 0$. Eftersom $\phi(0) = -1$ och ϕ är kontinuerlig (eftersom ϕ' existerar) så följer det från satsen om mellanliggande värden att det måste finnas ett $c \in (0, x_0)$ sådant att $\phi(c) = 0$.

   $\square$