SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
Fredagen den 11 juni 2021

Skrivtid: 14.00-17.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Kristian Bjerklöv

Tentamen består av sex uppgifter, som vardera ger maximalt 6 poäng. Till antalet erhållna poäng från Uppgift 1 adderas dina bonuspoäng, upp till som mest 6 poäng. Poängsumman på Uppgift 1 kan alltså bli högst 6 poäng, bonuspoäng medräknade. Bonuspoängen beräknas automatiskt och antalet bonuspoäng framgår av din resultatsida.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

Var god vänd!

DEL A

1. (a) Finn en lösning till differentialekvationen $y''(x) + 2y'(x) = 12\cos(2x) + 4\sin(2x)$ som är på formen $y(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$ där A och B är konstanter. **(2 p)**

   (b) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y''(x)+2y'(x) = 12\cos(2x)+4\sin(2x)$ som uppfyller $y(0) = 0$ och $y'(0) = 4$. **(4 p)**

2. Beräkna arean av området som begränsas av kurvan $y = \dfrac{1}{4+x^2} + \dfrac{x}{x^2+3x+2}$ samt linjerna $y = 0, x = 0$ och $x = 2$. Förenkla ditt svar. **(6 p)**

DEL B

3. Låt $f(x) = e^{x-\frac{x^2}{2}}$.

   (a) Bestäm de punkter på kurvan $y = f(x)$ där tangenten är horisontell. **(2 p)**

   (b) Avgör om det finns någon punkt på kurvan $y = f(x)$ där lutningen är maximal. Bestäm en sådan punkt om en sådan punkt finns, annars förklara varför det inte finns någon. **(4 p)**

4. (a) Låt $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$. Visa med hjälp av derivata att funktionen f är avtagande på intervallet $(1, \infty)$. **(2 p)**

   (b) Använd lämpliga integraluppskattningar för att visa att **(4 p)**

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \leq \frac{1}{\ln 2}.$$

DEL C

5. Funktionen f är en oändligt deriverbar funktion, definierad i någon öppen omgivning I till $x = e$, och bestämd av villkoren

$$\begin{cases} e^{f(x)} - x\left(f(x)\right)^2 = 0 \\ f(e) = 1 \end{cases}$$

   Bestäm andra ordningens Taylorpolynom till f kring punkten $x = e$. **(6 p)**

6. (a) Antag att funktionen g är kontinuerlig överallt (men vi antar inte att g är deriverbar). Låt $f(x) = xg(x)$. Visa att funktionen f är deriverbar i punkten $x = 0$ och bestäm $f'(0)$. **(3 p)**

   (b) Antag att funktionen $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uppfyller $|h(x) - h(y)| \leq |x - y|^2$ för alla reella tal x, y. Visa att h är konstant. **(3 p)**