KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen 2012-06-12

DEL A

1. En triangel i rummet har hörnen i punkterna $P = (-1, 2, 1)$, $Q = (5, 2, 3)$ och $R = (2, 1, -1)$.
   (a) Använd skalärprodukten för att visa att triangeln är rätvinklig. **(2 p)**
   (b) Bestäm arean av triangeln. **(2 p)**

Lösning. (a) Vi beräknar först vektorer som går utefter de tre sidorna:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

och

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Vi beräknar skalärprodukterna mellan dessa tre vektorer och får

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = 6 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) = 14,$$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} = 6 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot (-4) = 10$$

och slutligen

$$\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = (-3) \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + (-4) \cdot (-2) = 0.$$

I det sista fallet blev skalärprodukten noll, vilket visar att sidorna PR och QR är vinkeläta mot varandra. Alltså är triangeln rätvinklig med en rät vinkel vid hörnet R.

(b) Eftersom vinkeln vid R är rät kan vi beräkna arean genom $\frac{1}{2}|\overrightarrow{PR}| \cdot |\overrightarrow{QR}|$. Vi får sidlängderna genom

$$|\overrightarrow{PR}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{26} \quad \text{och} \quad |\overrightarrow{QR}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

och därmed ges arean av

$$\frac{1}{2}\sqrt{26}\sqrt{14} = \sqrt{13 \cdot 7} = \sqrt{91}.$$

Vi kan också beräkna arean genom vektorprodukten och får då

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| &= \left| \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right| = \tfrac{1}{2} \left| \begin{bmatrix} 0 \cdot (-2) - 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 3 - 6 \cdot (-2) \\ 6 \cdot (-1) - 0 \cdot 3 \end{bmatrix} \right| = \\ & \tfrac{1}{2} \left| \begin{bmatrix} 2 \\ 18 \\ -6 \end{bmatrix} \right| = \tfrac{1}{2}\sqrt{2^2 + 18^2 + (-6)^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{364} = \sqrt{91}. \end{aligned}$$

$\square$

Svar:

(a) Vinkeln vid hörnet R är rät eftersom skalärprodukten $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR}$ är noll.

(b) Arean av triangeln är $\sqrt{91}$ areaenheter.

2. (a) Bestäm matrisen som representerar den linjära avbildningen $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ som uppfyller

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(2 p)

(b) Visa att det inte finns någon linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ som uppfyller

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

(2 p)

Lösning. (a) För att bestämma matrisen för T kan vi bestämma bilderna av standardbasvektorerna. Eftersom vi kan skriva

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

så kan vi beräkna dessa bilder som

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) - T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

och

$$T\left(-\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = -T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = -\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Därmed ges matrisen för T av dessa två vektorer som kolonner, dvs av

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Avildningen T är helt bestämd av dess värden på en bas för $\mathbb{R}^2$ och vi har i del (a) sett att de två första kraven ger att matrisen måste vara

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Därmed kan vi beräkna bilden av en godtycklig vektor och får då speciellt att

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot(-2) \\ 0\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Alltså kan inte det tredje villkoret vara uppfyllt samtidigt med de två första.

□

Svar:

(a) Matrisen för T ges av $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

3. Betrakta avbildningen $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ som ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm en bas för nollrummet, $\ker(T)$. **(2 p)**

(b) Bestäm en bas för bildrummet, $\operatorname{im}(T)$. **(2 p)**

Lösning. (a) Nollrummet är detsamma som lösningsmängden till $T(\vec{x}) = \vec{0}$. Vi använder Gausselimination på totalmatrisen för detta linjära ekvationssystem och får

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} -r_1 \\ \frac{1}{2}r_2 \\ r_2 + r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 + r_2 \\ r_2 \\ r_3 - r_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Eftersom det saknas ledande etta i tredje kolonnen inför vi en parameter t och får $x_3 = t$. Vi löser ut x_2 och x_1 ur de två första ekvationerna och får då $x_1 = -2t$ och $x_2 = -t$. Därmed får vi lösningsmängden till

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En bas för detta endimensionella delrum ges av en nollskild vektor i det, dvs exempelvis av vektorn

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Eftersom vi fick ledande ettor i de två första kolonnerna, men inte i den tredje, är de två första kolonnerna två linjärt oberoende vektorer i bildrummet som dessutom spänner upp hela bildrummet. Därför ges en bas för bildrummet $\operatorname{im}(T)$ av de båda vektorerna

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

□

Svar:

(a) En bas för nollrummet ges av vektorn

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) En bas för bildrummet $\mathrm{im}(T)$ ges av vektorerna

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

DEL B

4. Låt $W = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \\ 13 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$.
   (a) Bestäm en ortonormal bas för W. **(2 p)**
   (b) Låt $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ vara den ortogonala projektionen på delrummet W. Bestäm matrisen för avbildningen T. **(2 p)**

Lösning. (a) Vi börjar med att bestämma en bas för W. Det kan vi exempelvis göra genom att genomföra Gausselimination på matrisen med vektorna som kolonner. De kolonner som får ledande ettor motsvarar basvektorer.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 9 & 13 \\ 2 & 9 & 13 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 2r_1 \\ r_4 - r_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 - r_2 \\ r_4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Därigenom ser vi att de båda första vektorerna utgör en bas för W och vi kan använda Gram-Schmidts metod på dem.
Vi börjar med att normera den första och får

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{|\vec{u}_1|}\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2}} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi beräknar sedan nästa vektor från $\vec{u}_2$ genom att dra bort projektionen på $\vec{v}_1$. Vi får

$$\vec{u}_2 - (\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} - 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Vi normerar denna vektor som har längd $\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2 + (-1)^2} = 2$ och får då en ortonormal bas som består av vektorerna

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(b) När vi har en ortogonal bas för ett delrum kan vi projicera på delrummet genom att projicera på basvektorerna och summera. Vi får därför att projektionen av en godtycklig vektor med koordinaterna (x, y, z, w) på W ges av

$$(\vec{x}\cdot\vec{v}_1)\vec{v}_1 + (\vec{x}\cdot\vec{v}_2)\vec{v}_2 = \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \cdot \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \cdot \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} x_1+x_2+x_3+x_4 \\ x_1+x_2+x_3+x_4 \\ x_1+x_2+x_3+x_4 \\ x_1+x_2+x_3+x_4 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} x_1-x_2-x_3+x_4 \\ -x_1+x_2+x_3-x_4 \\ -x_1+x_2+x_3-x_4 \\ x_1-x_2-x_3+x_4 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1+x_4 \\ x_2+x_3 \\ x_2+x_3 \\ x_1+x_4 \end{bmatrix}.$$

Alltså ges matrisen för avbildningen av

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Svar:

(a) En ortonormal bas för W ges av vektorerna

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Matrisen för avbildningen ges av

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Låt $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vara avbildningen som ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ -1 & 7 & 2 \\ 7 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Det finns nollskilda vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$ sådana att

$$T(\vec{u}) = -7\vec{u} \quad \text{och} \quad T(\vec{v}) = 7\vec{v}.$$

(a) Bestäm alla sådana vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$. **(2 p)**

(b) Bestäm en ortogonal bas för $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer till T. **(2 p)**

Lösning. (a) De nollskilda vektorer som uppfyller $T(\vec{u}) = -7\vec{u}$ är egenvektorer med egenvärde -7 och vi får dem genom att lösa det linjära ekvationssystemet med totalmatris $[A + 7I_3|\vec{0}]$. Genom Gausselimination får vi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 9 & -1 & 7 & 0 \\ -1 & 14 & 2 & 0 \\ 7 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} -r_2 \\ r_1 + 9r_2 \\ r_3 + 7r_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -14 & -2 & 0 \\ 0 & 125 & 25 & 0 \\ 0 & 100 & 20 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ \frac{1}{25}r_2 \\ r_3 - \frac{4}{5}r_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -14 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Vi kan sätta den tredje variabeln till en parameter t och löser sedan ut $x_2 = -\frac{1}{5}x_3 = -\frac{1}{5}t$ och $x_1 = 14x_2 + 2x_3 = 2t - \frac{14}{5}t = -\frac{4}{5}t$.
Alla dessa vektorer får vi som

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

där t är en nollskild reell parameter.
På samma sätt gör vi för $T(\vec{v}) = 7\vec{v}$ och vi får

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & -1 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 7 & 2 & -8 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} -r_2 \\ r_1 - 5r_2 \\ r_3 + 7r_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 + 2r_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Vi sätter $x_3 = t$ och får $x_2 = -3x_3 = -3t$ och $x_1 = 2x_3 = 2t$. Vektorerna ges nu av

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

där t är en nollskild parameter.

(b) Eftersom matrisen är symmetrisk finns en ortogonal bas av egenvektorer. Vi har redan två olika egenvärden -7 och 7 med tillhörande ortogonala egenvektorer. För att hitta den tredje egenriktningen kan vi beräkna vektorprodukten av de båda tidigare egenvektorerna och får

$$\begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)\cdot 1 - 5\cdot(-3) \\ 5\cdot 2 - (-4)\cdot 1 \\ (-4)\cdot(-3) - (-1)\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 14 \\ 14 \end{bmatrix} = 14 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi kan också kontrollera att detta är en egenvektor genom

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ -1 & 7 & 2 \\ 7 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 7 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 7 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} = 8 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

□

Svar:

(a) Vi får alla sådana vektorer som

$$\vec{u} = t \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v} = t \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

där t är en nollskild reell parameter.

(b) En ortogonal bas av egenvektorer ges av

$$\begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

6. Efter mätningar leds en student till att bestämma ekvationen, $y = ax^2 + bx + c$, för den parabel som i minsta-kvadratmening bäst anpassar till punkterna $(-2, 5)$, $(-1, 7)$, $(0, 6)$, $(1, 4)$ och $(2, 3)$. Efter räkningar kommer studenten fram till ekvationssystemet med totalmatris

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 34 & 0 & 10 & 43 \\ 0 & 10 & 0 & -7 \\ 10 & 0 & 5 & 25 \end{array}\right].$$

(a) Förklara hur man kommer fram till detta ekvationssystem. **(2 p)**

(b) Kontrollera att $a = -0,5$, $b = -0,7$ och $c = 6$ är en lösning och förklara vilken slutsats vi kan dra för det ursprungliga problemet. **(2 p)**

Lösning. (a) Om alla mätningarna skulle stämma med modellen skulle vi ha följande linjära ekvationssystem uppfyllt:

$$\begin{cases} (-2)^2 \cdot a & + & (-2) \cdot b & + & c & = & 5, \\ (1)^2 \cdot a & + & (-1) \cdot b & + & c & = & 7, \\ 0^2 \cdot a & + & 0 \cdot b & + & c & = & 6, \\ 1^2 \cdot a & + & 1 \cdot b & + & c & = & 4, \\ 2^2 \cdot a & + & 2 \cdot b & + & c & = & 3. \end{cases}$$

Nu ligger inte högerledet i bildrummet till den linjära avbildning $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ som vänsterledet motsvarar. För att minimera skillnaden mellan högerled och vänsterled behöver denna skillnadsvektor vara ortogonal mot bildrummet och vi får normalekvationen $A^T(A\vec{x} - \vec{b}) = \vec{0}$. I vårt fall ges matrisen av

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

och vi får

$$A^TA = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

och högerledet

$$A^Tb = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 \\ -7 \\ 25 \end{bmatrix}.$$

Alltså motsvarar den angivna totalmatrisen normalekvationen som hör till det överbestämda linjära ekvationssystemet.

(b) Vi sätter in de givna värdena på a, b och c i ekvationssystemet som svarar mot den givna totalmatrisen och får

$$\begin{cases} 34\cdot(-0{,}5) & + & 0\cdot(-0{,}7) & + & 10\cdot 6 & = & -17+0+60=43, \\ 0\cdot(-0{,}5) & + & 10\cdot(-0{,}7) & + & 0\cdot 6 & = & 0-7+0=-7, \\ 10\cdot(-0{,}5) & + & 0\cdot(-0{,}7) & + & 5\cdot 6 & = & -5+0+30=25. \end{cases}$$

vilket bekräftar att detta är en lösning till systemet. Detta innebär att parabeln $y = -0{,}5x^2 - 0{,}7x + 6$ anpassar bäst till de givna punkterna i minsta kvadratmening. Det är summan av kvadraterna av avvikelserna i y-led som minimeras.

$\square$

Svar:

(b) Parabeln $y = -0{,}5x^2 - 0{,}7x + 6$ anpassar bäst till de givna punkterna i minsta kvadratmening.

DEL C

7. (a) Låt $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning med egenskapen att sammansättningen $T^2 = T \circ T$ är lika med nollavbildningen. Visa att varje vektor i bildrummet, $\operatorname{im}(T)$, också ligger i nollrummet, $\ker(T)$. **(2 p)**

   (b) För varje reell konstant a, bestäm alla linjära avbildningar $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sådana att $T\left(\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]\right) = \left[\begin{smallmatrix}a\\1\end{smallmatrix}\right]$ och $T^2 = 0$. **(2 p)**

Lösning. (a) Om $\vec{x}$ ligger i bildrummet finns en vektor $\vec{y}$ så att $T(\vec{y}) = \vec{x}$. Om vi nu använder T på resultatet får vi $T \circ T(\vec{y}) = T(T(\vec{y}) = T(\vec{x})$, men eftersom $T^2 = T \circ T$ är nollavbildningen är $T(\vec{x}) = \vec{0}$, dvs $\vec{x}$ ligger i nollrummet till T.

(b) De två vektorerna

$$\vec{u} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix}a\\1\end{bmatrix}$$

är linjärt oberoende för alla val av konstanten a och vi kan därmed använda dem som en bas för $\mathbb{R}^2$. Vi kan bestämma matrisen för T genom att använda den på denna bas. Om A är matrisen för T får vi att

$$A\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$$

eftersom

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}a\\1\end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T\left(\begin{bmatrix}a\\1\end{bmatrix}\right) = T^2\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.$$

Vi kan därmed lösa ut A som

$$A = \begin{bmatrix}a & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}a & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -a\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & -a^2\\1 & -a\end{bmatrix}.$$

□

Svar:

(b) Den enda avbildningen som uppfyller detta ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix}a & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}a & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -a\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & -a^2\\1 & -a\end{bmatrix}.$$

8. Bevisa eller ge motexempel till nedanstående påståenden om kvadratiska matriser.
   (a) Om A^2 är inverterbar så är A inverterbar. **(2 p)**
   (b) Om A^2 är ortogonal så är A ortogonal. **(2 p)**

Lösning. (a) Om A^2 är inverterbar är $\det(A^2) \neq 0$, men eftersom $\det(A^2) = \det(A)^2$, måste även $\det(A) \neq 0$ och därmed är även A inverterbar.

(b) Om A är diagonaliserbar med egenvärden ± 1 är dess kvadrat lika med identitetsmatrisen som är en ortogonal matris. Alla sådana matriser är inte ortogonala. Exempelvis kan vi ta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

som har egenvärdena ± 1, men

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

så A är inte ortogonal.

□

Svar:

(a) Påståendet är sant.

(b) Påståendet är inte sant. Ett motexempel ges av $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

9. Låt $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Låt V vara delrummet i $\mathbb{R}^4$ som ges av ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ \qquad\; x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

(a) Bestäm en bas $\mathfrak{B}$ för V. **(1 p)**

(b) Genom att använda koordinater med avseende på basen $\mathfrak{B}$ kan vi identifiera V med $\mathbb{R}^2$ och får därmed en linjär avbildning $S\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ genom att använda T på de vektorer i $\mathbb{R}^4$ som ligger i V. Bestäm matrisen för S. **(3 p)**

Lösning. (a) Vi kan välja parametrar för de båda sista variablerna som är fria och kan lösa ut de två första ur ekvationerna. Vi får $x_3 = s$, $x_4 = t$, $x_2 = -2s - t$ och $x_1 = 2s + t - s - t = s$. Därmed kan V beskrivas som vektorerna

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och vi har en bas för V som består av vektorerna

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Vi använder nu avbildningen T på basvektorerna för att få fram matrisen för S. Vi får

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

och

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Därmed ges matrisen för S av

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Svar:

(a) En bas för V ges av vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$..

(b) Matrisen för S med avseende på basen $\mathfrak{B}$ från del (a) ges av $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.
