KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2020.03.09

DEL A

1. (a) Beräkna $\displaystyle\int_1^e \frac{(1+\ln(x))^2}{x}dx$. **(3 p)**

   (b) Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = x\sin(x)$. **(3 p)**

Lösning. (a) Vi gör variabelsubstitutionen $u = 1 + \ln x$, och får då $du = \frac{1}{x}dx$ och de nya integrationsgränserna $u(1) = 1$ och $u(e) = 2$, vilket ger

$$\int_1^e \frac{(1+\ln(x))^2}{x}dx = \int_1^2 u^2 du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_1^2 = 8/3 - 1/3 = 7/3.$$

(b) De primitiva funktionerna till $f(x)$ ges av $\int x\sin x dx$. Partiell integration ger

$$\int x\sin x dx = \{U = x, dU = dx \text{ och } dV = \sin x dx, V = -\cos x\} =$$

$$= -x\cos x - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + C$$

där C är en godtycklig konstant.

SVAR: (a) $7/3$, (b) De primitiva funktionerna är $\sin x - x\cos x + C$ där C är en konstant.

□

2. (a) Låt L vara tangentlinjen till kurvan $y = \arctan(x^2)$ i den punkt på kurvan som har x-koordinat 1. Bestäm en ekvation för linjen L. **(3 p)**
   (b) Låt $f(x) = e^{-x}$ och låt $P(x)$ vara Taylorpolynomet av grad 1 till f kring $x = 0$. Visa att $0 < f(1/3) - P(1/3) < 1/10$. **(3 p)**

Lösning. (a) Låt $g(x) = \arctan(x^2)$. En ekvation för L ges av $y = g(1) + g'(1)(x - 1)$. Vi har $g(1) = \arctan(1) = \pi/4$ och

$$g'(x) = \frac{1}{1 + (x^2)^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1 + x^4}.$$

Således är

$$y = g(1) + g'(1)(x - 1) = \pi/4 + (x - 1)$$

en ekvation för linjen L.

(b) Vi ser att $f'(x) = -e^{-x}$ och $f''(x) = e^{-x}$. Enligt Taylors formel har vi att

$$f(1/3) - P(1/3) = \frac{f''(c)}{2}(1/3)^2 = \frac{e^{-c}}{18}$$

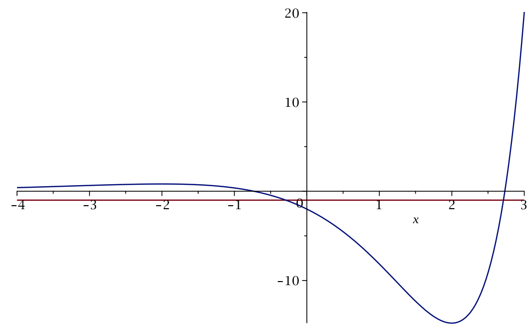
för något tal c sådant att $0 < c < 1/3$. Eftersom funktionen e^{-x} är positiv och avtagande överallt, och eftersom $0 < c$, har vi $0 < e^{-c} < e^0 = 1$, dvs

$$0 < \frac{e^{-c}}{18} < \frac{1}{18} < 1/10.$$

Alltså, $0 < f(1/3) - P(1/3) < 1/10$.

SVAR: (a) $y = \pi/4 + (x - 1)$, (b) se bevis ovan.

$\square$



FIGUR 1. Figur till uppgift 3.

DEL B

3. Låt $f(x) = (x^2 - 2x - 2)e^x$.
   (a) Har funktionen f något största eller minsta värde? Bestäm i förekommande fall dessa. **(4 p)**
   (b) Hur många lösningar har ekvationen $f(x) = -1$? **(2 p)**

Lösning. (a) Vi börjar med att undersöka vad som händer med $f(x)$ då $x \to \pm\infty$. Vi har

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \text{ och } \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Således kan f inte ha något största värde (eftersom $f(x)$ kan anta godtyckligt stora värden).

För att undersöka om f kan ha ett minsta värde gör vi först ett teckenschema för derivatan. Vi har

$$f'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x - 2)e^x = (x^2 - 4)e^x.$$

Eftersom $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, och eftersom $e^x > 0$ för alla x, så ser vi att de kritiska punkterna är $x = 2$ och $x = -2$. Vidare, $f'(x) > 0$ för $x < -2$ och för $x > 2$, och $f'(x) < 0$ för $-2 < x < 2$. Detta betyder att f är strängt växande på intervallen $(-\infty, -2]$ och $[2, \infty)$, och strängt avtagande på intervallet $[-2, 2]$. Vi ser också att $f(-2) = 6e^{-2} > 0$ och $f(2) = -2e^2 < -2$.

Med hjälp av informationen som vi fått från gränsvärdena, teckenschemat samt funktionsvärdena $f(-2), f(2)$ kan vi nu skissa grafen $y = f(x)$ (se figur). Vi noterar speciellt att $f(x) > 0$ för alla $x \leq -2$. Från detta kan vi dra slutsatsen att f har ett minsta värde i punkten $x = 2$, och detta värde är $f(2) = -2e^2$.

b) Eftersom $f(x) > 0$ för alla $x \leq -2$ så finns det inga lösningar till ekvationen i intervallet $(-\infty, -2]$. På intervallet $[-2, 2]$ är funktionen strängt avtagande. Eftersom $f(-2) > 0$ och $f(-2) < -1$, och eftersom f är kontinuerlig, så finns det precis ett tal $t_1 \in (-2, 2)$ sådant att $f(t_1) = -1$. Vidare, eftersom f är strängt växande på intervallet $[-2, \infty)$ och eftersom $f(-2) < -1$ och $f(x) > 0$ för alla $x > 3$ så finns det precis ett tal $t_2 \in (2, \infty)$ sådant att $f(t_2) = -1$. Således har ekvationen precis två lösningar. Se figuren.

SVAR: a) största värde saknas, minsta värde $f(2) = -2e^2$. b) Ekvationen har precis två lösningar. $\square$

4. (a) Avgör om den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2+\sin(x)}{1+x^2}dx$ är konvergent eller divergent. **(4 p)**

(b) Avgör om serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \cos(1/k^2)$ är konvergent eller divergent. **(2 p)**

Lösning. a) Vi har att $0 \le 2+\sin(x) \le 3$ for alla x. Eftersom integranden är icke-negativ så ger jämförelsetestet att den sökta integralen är konvergent om (den större) integralen

$$\int_0^\infty \frac{3}{1+x^2}dx$$

är konvergent. Vi undersöker nu om denna integral är konvergent. Vi har att $\arctan(x)$ är en primitiv funktion till $1/(1+x^2)$, och därmed att

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^N \frac{3}{1+x^2}dx = \lim_{N\to\infty}(3(\arctan(N)-\arctan(0)) = \lim_{N\to\infty} 3\arctan(N) = 3\pi/2,$$

dvs integralen är konvergent. Vi kan därmed dra slutsatsen (enlig ovan) att den givna integralen är konvergent.

b) Ett nödvändigt villkor för konvergens är att seriens termer går mot noll då $k\to\infty$. I vårt fall har vi termerna $a_k = \cos(1/k^2)$. Eftersom $1/k^2 \to 0$ då $k\to\infty$ har vi att $a_k = \cos(1/k^2) \to \cos(0) = 1$ då $k\to\infty$. Alltså, termerna går ej mot noll och därför måste serien vara divergent.

SVAR: a) Integralen är konvergent. b) Serien är divergent. □

DEL C

5. Låt $n \geq 1$ vara ett heltal, och låt P_n vara partitionen av intervallet $[2,3]$ i n stycken delintervall, alla av längd $1/n$. Låt $L(P_n)$ vara Riemann-undersumman (lower sum) av funktionen $f(x) = 3x$ på intervallet $[2,3]$ med avseende på den givna partitionen P_n.
   (a) Bestäm en formel, bara beroende på talet n, för $L(P_n)$. **(4 p)**
   (b) Bestäm gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} L(P_n)$. **(2 p)**

Lösning. Eftersom intervallet $[2,3]$ ska delas in i n stycken delintervall av längd $1/n$ ser vi att P_n är partitionen

$$x_0 = 2,\ x_1 = 2 + 1/n,\ x_2 = 2 + 2/n, \ldots,\ x_n = 2 + n/n = 3.$$

Eftersom vi söker Riemann-undersumman (med avseende på partitionen P_n) så måste vi hitta funktionen f:s minsta värde på vardera delintervall $[x_{i-1}, x_i]$ ($1 \leq i \leq n$). Funktionen $f(x) = 3x$ är strängt växande, så det minsta värdet (på intervallet $[x_{i-1}, x_i]$) antas i den vänstra ändpunkten x_{i-1}. Således har vi

$$L(P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 3(2 + (i-1)/n)\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} 6/n + \sum_{i=1}^{n} 3(i-1)/n^2 =$$

$$= n \cdot (6/n) + \frac{3}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1).$$

Eftersom vi har summationsformeln (aritmetisk summa)

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1) = 0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$$

kan vi alltså skriva

$$L(P_n) = n \cdot (6/n) + \frac{3}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) = 6 + \frac{3}{n^2}\cdot\frac{n^2 - n}{2} = 6 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2n}.$$

b) Från formeln ovan får vi nu

$$\lim_{n\to\infty} L(P_n) = \lim_{n\to\infty}\left(6 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2n}\right) = 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2}.$$

Vi kan notera att detta stämmer bra eftersom Riemannsumman $L(P_n)$ ska approximera integralen

$$\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 3x\, dx = 3\left[x^2/2\right]_2^3 = 3(9/2 - 4/2) = 15/2,$$

och konvergera mot detta värde då $n \to \infty$ (då partitionen P_n blir finare och finare).

$\square$

6. Antag att funktionen f är deriverbar med derivatan $f'(x) = 0$ för alla reella tal x.
   (a) Visa att f är kontinuerlig på hela reella axeln (dvs visa att deriverbarhet medför kontinuitet). **(3 p)**
   (b) Använd differentialkalkylens medelvärdessats för att visa att funktionen f är konstant. **(3 p)**

Lösning. (a) Se bevis av Sats 1, avsnit 2.3, i kursboken.

(b) Se bevis av Sats 13, avsnitt 2.8, i kursboken. Tänk på att kontinuiteten (som visats i del a)) behövs för att man ska kunna tillämpa medelvärdessatsen.

$\square$