SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Måndag 24 oktober 2022

1. Lös matrisekvationen $XA = X + A$, där $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$. (6 p)

Lösningsförslag

Matrisekvationen kan skrivas om som

$$XA = X + A \quad \Leftrightarrow \quad XA - X = A \quad \Leftrightarrow \quad X(A - I) = A.$$

Matrisen $A - I$ är inverterbar med

$$(A - I)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

och därför har matrisekvationen lösningen

$$X = A(A - I)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Svar: $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

2. Låt N vara lösningsrummet till det homogena linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - 2w = 0 \\ 2x + y - z - w = 0 \\ -x + y + z - w = 0 \end{cases}$$

Bestäm en ortonormal bas för N och ange dimensionen av N. (6 p)

Lösningsförslag

Lös det linjära ekvationssystemet med Gauss-Jordans metod

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Lösningsrummet N är

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{där } s, t \in \mathbb{R}.$$

Detta betyder $\{(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$ är en bas för lösningsrummet N, som därmed har dimension 2. Med Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess kan en ON-bas konstrueras utifrån denna bas,

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{54}}(4, -1, 6, 1) \right\}.$$

Svar: En ON-bas är exempelvis $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{54}}(4, -1, 6, 1) \right\}$. Dimensionen är 2.

3. Låt P vara punkten $(1, 0, 3)$, ℓ linjen $(x, y, z) = (2, 1, 3) + t(1, 0, 1)$, där t är en reell parameter, och π planet $x - 3y + z = 4$.

   a) Bestäm det kortaste avståndet mellan punkten P och linjen ℓ. (3 p)

   b) Bestäm en linje L i parameterform som tillhör planet π och skär linjen ℓ under rät vinkel. (3 p)

Lösningsförslag

a) Linjen ℓ innehåller punkten $Q = (2, 1, 3)$ och är parallell med vektorn $\boldsymbol{u} = (1, 0, 1)$. Det kortaste avståndet mellan punkten P och linjen ℓ ges av

$$\begin{aligned} d &= \left\| \overrightarrow{QP} - \operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}} \overrightarrow{QP} \right\| \\ &= \left\| (-1, -1, 0) - \frac{(-1, -1, 0) \cdot (1, 0, 1)}{1^2 + 0^2 + 1^2}(1, 0, 1) \right\| \\ &= \left\| \tfrac{1}{2}(-1, -2, 1) \right\| \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{6}. \end{aligned}$$

b) För att bestämma den sökta linjen ℓ' i parameterform behövs en punkt R på linjen och en vektor $\boldsymbol{v}$ parallell med linjen.

En punkt på linjen ℓ' är skärningspunkten mellan linjen ℓ och planet π. Den punkten har ett parametervärde t som uppfyller

$$x - 3y + z = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2 + t - 3 \cdot 1 + 3 + t = 2 + 2t = 4 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1.$$

Skärningspunkten är därmed $R = (2, 1, 3) + 1(1, 0, 1) = (3, 1, 4)$.

Linjen ℓ' har en riktning som är vinkelrät mot både planets normal $\boldsymbol{n} = (1, -3, 1)$ och linjen ℓ:s riktningen $\boldsymbol{u} = (1, 0, 1)$. Vektorn $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u} = (-3, 0, 3)$ uppfyller dessa villkor.

Linjen ℓ' kan därför skrivas i parameterformen $(x, y, z) = (3, 1, 4) + s(-3, 0, 3)$.

Svar: a) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ b) Exempelvis $(x, y, z) = (3, 1, 4) + s(-3, 0, 3)$

4. De två linjära avbildningarna $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ och $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & b \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

där a och b är konstanter.

a) För alla värden på a bestäm en bas för värderummet (bildrummet) av S. (3 p)

b) Bestäm vilka värden a och b kan ha för att S och T ska ha samma värderum (bildrum). (3 p)

Lösningsförslag

a) När $\det A = 3 - 3a \neq 0$, dvs. $a \neq 1$, har S hela $\mathbb{R}^3$ som sitt värderum och standardbasen $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ duger som bas.

När $a = 1$ kan en bas för värderummet till S bestämmas genom att radreducera matrisen A till trappstegsform

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och från trappstegsformen avläsa att de två första kolumnvektorerna $\{(1,2,1),(2,3,1)\}$ till matrisen A är en bas för värderummet.

b) När $\det B = -15 + 3b \neq 0$, dvs. $b \neq 5$, har T hela $\mathbb{R}^3$ som sitt värderum. Det betyder att S och T har samma värderum när $a \neq 1$ och $b \neq 5$.

När $b = 5$ har matrisen B lägre rang än 3 och värderummet till T är inte hela $\mathbb{R}^3$. Då är den enda möjligheten för S och T att ha samma värderum om också $\det A = 0$. Det innebär att $a = 1$ och $b = 5$. Uför nu samma radoperationer på matrisen B som gjordes på A,

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Det framgår att de tre kolumnerna i matrisen B alla är linjärkombinationer av de två första kolumnerna i matrisen A,

$$\begin{aligned} (4,7,3) &= 2(1,2,1) + (2,3,1), \\ (1,1,0) &= -(1,2,1) + (2,3,1), \\ (3,5,2) &= (1,2,1) + (2,3,1). \end{aligned}$$

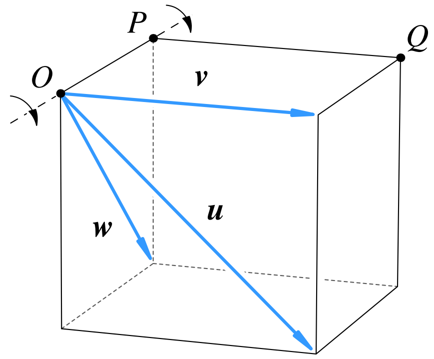
Eftersom kolumnerna i B inte är parallella medför det att kolumnrummet för B har dimension 2 och därmed att kolumnrummen för A och B är lika, dvs. värderummen för S och T är lika.

Svar: a) $a = 1$: Exempelvis $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.
$a \neq 1$: Exempelvis $\{(1,2,1),(2,3,1)\}$.
b) När $a \neq 1$ och $b \neq 5$ eller när $a = 1$ och $b = 5$.

5. I en kub med kantlängd 1, enligt figuren, införs ett koordinatsystem med bas $B = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ och origo i punkten O.

   a) Ange koordinaterna för vektorn $\overrightarrow{OQ}$ i basen B. (2 p)

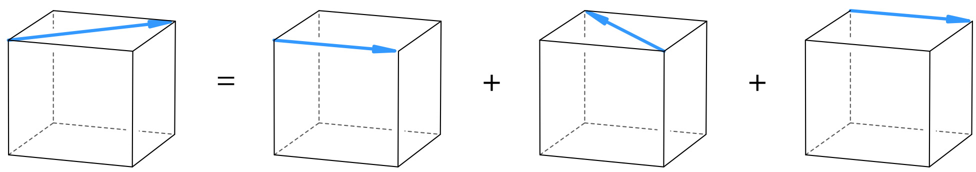
   b) Bestäm matrisen i basen B för en rotation kring axeln OP med vinkeln $\pi/2$ i riktning enligt figuren. (4 p)



Lösningsförslag

METOD 1 (Direkt i basen B)

a) Vektorn $\overrightarrow{OQ}$ kan skrivas som summan av vektorerna $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$.

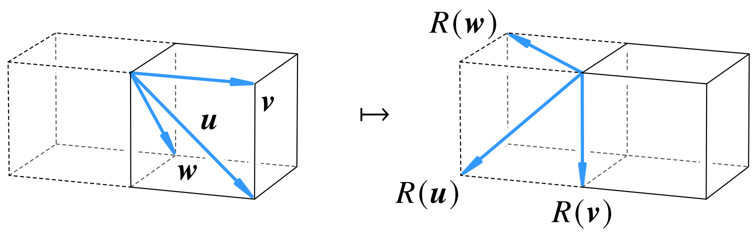


Det betyder att $\overrightarrow{OQ} = \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ och därmed att $(\overrightarrow{OQ})_B = (-1, 2, 1)$.

b) Matrisen i basen B för rotationen kan ställas upp som

$$[R]_B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ (R(\boldsymbol{u}))_B & (R(\boldsymbol{v}))_B & (R(\boldsymbol{w}))_B \\ | & | & | \end{pmatrix},$$

där $R(\boldsymbol{u})$, $R(\boldsymbol{v})$ och $R(\boldsymbol{w})$ är bildvektorerna av $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ resp. $\boldsymbol{w}$ under rotationen.



Från figuren ovan går det att avläsa att bildvektorerna ges av

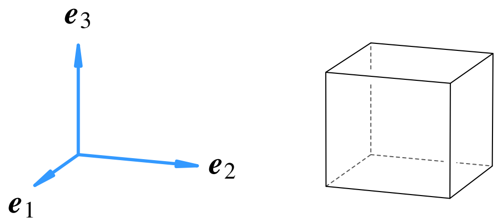
$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{u}) &= -\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v}, \\ R(\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}, \\ R(\boldsymbol{w}) &= \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}. \end{aligned}$$

Därmed är $\big(R(\boldsymbol{u})\big)_B = (1,-2,0)$, $\big(R(\boldsymbol{v})\big)_B = (1,-1,0)$ och $\big(R(\boldsymbol{w})\big)_B = (-1,0,1)$. Matrisen för rotationen blir

$$[R]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

METOD 2 (Basbyte)

Inför en ny ON-bas $B' = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ enligt figuren nedan.



I denna bas har vektorerna $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ koordinaterna $(0,1,-1)$, $(0,1,0)$ resp. $(-1,0,-1)$. Detta betyder att basbytesmatriserna mellan baserna B och B' är

$$P_{B\to B'} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ (\boldsymbol{u})_{B'} & (\boldsymbol{v})_{B'} & (\boldsymbol{w})_{B'} \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad P_{B'\to B} = \big(P_{B\to B'}\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) I basen B' har vektorn $\overrightarrow{OQ}$ koordinaterna $(-1,1,0)$ och därmed har vektorn koordinaterna

$$\big(\overrightarrow{OQ}\big)_B = P_{B'\to B}\big(\overrightarrow{OQ}\big)_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i basen B, dvs. $\big(\overrightarrow{OQ}\big)_B = (-1,2,1)$.

b) I basen B' sker rotationen kring den första koordinataxeln och rotationen avbildar basvektorerna enligt $\boldsymbol{e}_1 \mapsto \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2 \mapsto -\boldsymbol{e}_3$ och $\boldsymbol{e}_3 \mapsto \boldsymbol{e}_2$. Matrisen för rotationen i basen B' blir därför

$$[R]_{B'} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \big(R(\boldsymbol{e}_1)\big)_{B'} & \big(R(\boldsymbol{e}_2)\big)_{B'} & \big(R(\boldsymbol{e}_3)\big)_{B'} \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Med basbyte kan matrisen för rotationen bestämmas i basen B,

$$\begin{aligned} [R]_B &= P_{B'\to B}[R]_{B'}P_{B\to B'} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Svar: a) $(\overrightarrow{OQ})_B = (-1,2,1)$ b) $[R]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. Låt $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ vara två egenvektorer till samma linjära avbildning med egenvärden λ_1 och λ_2 där $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Bevisa att $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ är linjärt oberoende. (6 p)

Lösningsförslag

Se sats 8.2.7 i kursboken (Anton & Busby, *Contemporary Linear Algebra*).