KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen med lösningsförslag
fredag, 17 april 2020

1. Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm egenvärdena till A. **(3 p)**
(b) Bestäm en ortogonal bas till $\mathbf{R}^3$ bestående av egenvektorer till A. **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) Den karaktäristiska ekvationen till A är:

$$0 = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 1) - 1(\lambda - 2) = \lambda \cdot (\lambda - 2)^2.$$

Alltså är egenvärdena $\lambda = 0$ (multiplicitet 1), och $\lambda = 2$ (multiplicitet 2).

(b) Till egenvärdet $\lambda = 0$ har vi egenvektorn $\vec{v}_1 = (1, 0, -1)$. Till egenvärdet $\lambda = 2$ har vi egenvärdesekvationen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

vilket har lösningarna $x = t$, $y = s$, $z = t$ där $s, t \in \mathbf{R}$. Två ortogonala egenvektorer är $\vec{v}_2 = (0, 1, 0)$ och $\vec{v}_3 = (1, 0, 1)$. Egenvektorer till $\lambda = 0$ och $\lambda = 2$ är ortogonala eftersom A är symmetrisk. Vi har alltså en *ortogonal* bas av egenvektorer:

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Vill vi göra den *ortonormal* behöver vi skala $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_3$ med $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. För vilka värden på a och b har nedanstående system (med obekanta x, y och z) oändligt många lösningar? Lös systemet i detta fall. **(6 p)**

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + 5z = b \\ 3x + 4y + az = 5 \end{cases}$$

Lösningsförslag. Vi skriver systemet i matrixform: $AX = B$, där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & a \end{bmatrix} \textit{ och } B = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 5 \end{bmatrix}$$

Om rangen till matrisen A är lika med 3 då kommer systemet att ha en unik lösning oavsett värdet på b. Vi ska därför titta på fallen där $rang(A) < 3$ vilket betyder att $det(A) = a - 7 = 0$.

Första slutsatsen är därför att $a = 7$. Via Gauseliminering av matrisen $[A|B]$, med $a = 7$ kommer vi fram till:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & b \\ 3 & 4 & 7 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b-2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b-2 \\ 0 & 0 & 0 & 4-b \end{bmatrix}$$

Man ser att systemet är lösbart bara om $b = 4$.

Vi sätter $a = 7, b = 4$ och bestämmer lösningarna till systemet:

$$\begin{cases} x + y + 2z = & 1 \\ 2x + 3y + 5z = & 4 \\ 3x + 4y + 7z = & 5 \end{cases}$$

Från Gausseliminering ovan, genom att sätta $z = t$ kommer man fram till en endimensionella lösningsmängd: linjen med parametrisk ekvation: $\{(x, y, z) = (-1 - t, 2 - t, t) \; t \in \mathbf{R}\}$.

3. Låt $u = (1, 2, -2)$ och $v = (1, 1, 0)$.

(a) Bestäm en vektor w som uppfyller **alla tre** av följande villkor:
- Vinkeln mellan u och w är $60°$
- Vinkeln mellan v och w är $45°$
- Normen för w är 2.

(4 p)

(Kom ihåg att $\cos 45° = 1/\sqrt{2}$ och $\cos 60° = 1/2$.)

(b) Bestäm volymen av den parallellepiped som spänns upp av de tre vektorerna u, v, och w. **(2 p)**

Lösningsförslag.

Vektorn w ska uppfylla de tre villkoren

- $u \cdot w = \|u\|\|w\| \cos 60°$
- $v \cdot w = \|v\|\|w\| \cos 45°$
- $\|w\| = 2$.

Eftersom $\|u\| = 3$ och $\|v\| = \sqrt{2}$ betyder det att $w = (w^1, w^2, w^3)$ ska uppfylla

- $(1, 2, -2) \cdot (w^1, w^2, w^3) = 3 \cdot 2 \cdot (1/2)$
- $(1, 1, 0) \cdot (w^1, w^2, w^3) = \sqrt{2} \cdot 2 \cdot (1/\sqrt{2})$
- $\|w\| = 2$.

eller

- $w^1 + 2w^2 - 2w^3 = 3$
- $w^1 + w^2 = 2$
- $\|w\| = 2$.

Lösningen till de två första ekvationerna är alla vektorer

$$w = (w^1, w^2, w^3) = (1 - 2t, 1 + 2t, t)$$

där t är något tal. För att den tredje ekvationen också ska vara uppfylld behöver vi att

$$2^2 = (w^1)^2 + (w^2)^2 + (w^3)^2 = (1 - 2t)^2 + (1 + 2t)^2 + (t)^2 = 2 + 9t^2$$

eller $t = \pm\sqrt{2}/3$. De vektorer w som uppfyller de tre villkoren är alltså

$$w = \left(1 - 2\sqrt{2}/3, 1 + 2\sqrt{2}/3, \sqrt{2}/3\right) \quad \text{och} \quad w = \left(1 + 2\sqrt{2}/3, 1 - 2\sqrt{2}/3, \sqrt{2}/3\right)$$

Volymen ges av determinanten...

4. (a) Låt A vara matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(a1) Bestäm en bas för bildrummet $\mathrm{im}(A)$. **(2 p)**

(a2) Bestäm en bas för nollrummet $\ker(A)$. **(2 p)**

(b) Låt B vara en matris med 7 rader och 19 kolumner.

(b1) Vad är det största möjliga värdet för rangen av B? **(1 p)**

(b2) Vad är den minsta möjliga dimensionen av $\ker(B)$? **(1 p)**

Lösningsförslag. $(a1)$. Vi börjar med att reducera matrisen till trappstegsformen med hjälp av Gausselimination. Vi får:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observera att elementära radoperationer ändrar inte koefficienterna i eventuella linjära relationer mellan kolumnerna. Därför spänns bildrummet av kolumner som har samma nummer som pivotkolimnerna. Dessa är $(2,\ 1,\ 0)^{tr}$ och $(1,\ 2,\ 1)^{tr}$. Alltså utgör de en bas för bildrummet $\mathrm{im}(A)$.

$(a2)$. Nollrummet $\ker(A)$ består av alla vektorer x som uppfyller $Ax = 0$. Systemet $\tilde{A}x = 0$ har samma lösningsmängd som $Ax = 0$. Alla lösningar har form

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-3s \\ s \\ -2t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

for $s,\, t \in \mathbb{R}$. Detta betyder att vektorerna $(1, 0, -2, 1)^{tr}$ och $(-3, 1, 0, 0)^{tr}$, som är linjärt oberoende, utgör en bas för nollrummet.

$(b1)$. Matrisen B definierar en avbildning från $\mathbb{R}^{19}$ till $\mathbb{R}^7$. Den största möjliga värdet av rank B är 7.

$(b2)$. Enligt Rank Satsen, rank B + ker $B = 19$. Den minsta möjliga värdet av ker B är därför $19-7 = 12$. Detta är även den minsta möjliga antal parametrar i lösningsmängden till ekvationen $B\vec{X} = \vec{0}$.

5. Vi betraktar ekvationen

$$f(n+2) = 5f(n+1) - 6f(n) \qquad (*)$$

där $n \geq 0$ är heltal och $f(n)$ är en obekant funktion.

(a) Beteckna $X(n) = \begin{bmatrix} f(n+1) \\ f(n) \end{bmatrix}$ och skriv ekvationen $(*)$ på matrisformen $X(n+1) = AX(n)$ där A är en matris (vars element är konstanta). **(1 p)**

(b) Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen A. **(2 p)**

(c) Bestäm den lösning till $(*)$ som uppfyller $f(0) = 1$ och $f(1) = 4$. **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a)

$$X(n+1) = \begin{bmatrix} f(n+2) \\ f(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5f(n+1) - 6f(n) \\ f(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(n+1) \\ f(n) \end{bmatrix} = AX(n)$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) $\det(A-\lambda I) = -\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$. Det följer att egenvärdena är $\lambda = 2, 3$.
Egenrummet till $\lambda = 2$ motsvarar lösningsmänden till systemet

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d.v.s. linjen $Span(2,1)$. Det följer att $\vec{v} = (2,1)$ är en egenvektor.
Egenrummet till $\lambda = 3$ motsvarar lösningsmänden till systemet

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d.v.s. linjen $Span(3,1)$. Det följer att $\vec{v} = (3,1)$ är en egenvektor.

(c) Matrisen A kan diagoliseras som:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

och därför är

$$A^n = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Man kan utveckla formeln till:

$$A^n = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2^n & 3\cdot 2^n \\ 3^n & 2\cdot 3^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3\cdot 2^{n+1} - 2\cdot 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3\cdot 2^n - 2\cdot 3^n \end{bmatrix}$$

Observera att om $f(0) = 1$ och $f(1) = 4$ gäller att:

$$X(n) = A^n X(0) \text{ och att } X(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Det följer att:

$$X(n) = \begin{bmatrix} f(n+1) \\ f(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3\cdot 2^{n+1} - 2\cdot 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3\cdot 2^n - 2\cdot 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2^{n+1} + 2\cdot 3^{n+1} \\ -2^n + 2\cdot 3^n \end{bmatrix}$$

Slutsatsen är att $f(n) = -2^n + 2\cdot 3^n$.

6. Antag att 2×2 matrisen A har det karakteristiska polynomet $p(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2)$.
Visa att $A - A^2$ är invertebar och bestäm egenvärdena till dess invers. **(6 p)**

Lösningsförslag. Det karaktäristiska polynomet till A är $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, så λ är ett egenvärde till A om och endast om $p(\lambda) = 0$. Eftersom $p(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2)$, så har A egenvärdena $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = -2$. Låt $\vec{b}_1$ vara en vektor med egenvärde λ_1, och låt $\vec{b}_2$ vara en vektor med egenvärde λ_2. Eftersom $\lambda_1 \neq \lambda_2$, så är $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ linjärt oberoende, och därmed en bas för $\mathbb{R}^2$. Låt $S = (A - A^2)$. För $i = 1,\ 2$ gäller

$$S\vec{b}_i = A\vec{b}_i - A^2\vec{b}_i = \lambda_i\vec{b}_i - A(\lambda_i\vec{b}_i) = \lambda_i\vec{b}_i - \lambda_i A(\vec{b}_i) = \lambda_i\vec{b}_i - \lambda_i^2\vec{b}_i = (\lambda_i - \lambda_i^2)\vec{b}_i,$$

så $S\vec{b}_1 = -2\vec{b}_1$ och $S\vec{b}_2 = -6\vec{b}_2$.
$-2\vec{b}_1$ och $-6\vec{b}_2$ är linjärt oberoende eftersom $\vec{b}_1$ och $\vec{b}_2$ är linjärt oberoende, så bildrummet till S har dimension 2, och därför är S inverterbar.
Eftersom $S\vec{b}_i = (\lambda_i - \lambda_i^2)\vec{b}_i$, så är

$$S^{-1}((\lambda_i - \lambda_i^2)\vec{b}_i) = \vec{b}_i = \frac{1}{\lambda_i - \lambda_i^2}(\lambda_i - \lambda_i^2)\vec{b}_i,$$

dvs $\frac{1}{\lambda_i - \lambda_i^2}$ är ett egenvärde till S^{-1}. Därför är $-\frac{1}{2}$ och $-\frac{1}{6}$ egenvärden till S^{-1}. S^{-1} har inga andra egenvärden eftersom graden av det karaktäristiska polynomet till S^{-1} är 2.