KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
fredag, 18 oktober 2019

Skrivtid: 08:00-11:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Danijela Damjanović

Tentamen består av sex uppgifter som vardera ger maximalt sex poäng.

Del A på tentamen utgörs av de två första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng.

De två följande uppgifterna utgör del B och de två sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst tre poäng.

DEL A

1. (a) Bestäm en ekvation för det plan Π som innehåller punkterna $(2,0,-1)$, $(4,1,2)$ och $(3,1,0)$. **(3 p)**

(b) Linjen

$$(2,0,-1)+t(1,1,2), \quad t \text{ reellt tal},$$

och normalvektorn till Π bildar två vinklar vars summa är π. Beräkna cosinus av den vinkel som är mindre än $\pi/2$. **(3 p)**

2. För vilka värden på konstanten x är vektorerna $(1,2,3)$, $(3,4,x)$ och $(4,x,6)$ komplana? (Vektorer i $\mathbb{R}^3$ är *komplana* om de ligger i samma plan.) **(6 p)**

Var god vänd!

DEL B

3. Vektorrummet V i $\mathbb{R}^4$ består av lösningarna till ekvationsystemet

$$\begin{cases} x+y+z+2w &= 0 \\ x-y-2z+w &= 0 \\ x+3y+4z+3w &= 0 \end{cases}$$

(a) Bestäm en bas $\mathcal{B}$ för vektorrummet V. **(3 p)**

(b) Bestäm koordinatvektorn för $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & -2 \end{bmatrix}^T$ i basen $\mathcal{B}$. **(3 p)**

4. Vid en mätning har uppmätts mätdata som enligt den teoretiska modellen skulle uppfylla $x_2 = ax_1 + b$ för konstanter a och b. Använd minsta kvadrat-metoden för att bestämma konstanterna a och b om de givna mätdata gavs av följande tabell.

x_1	-2	-1	0	1	2
x_2	3	4	6	7	9

(6 p)

DEL C

5. Låt V vara ett delrum i $\mathbb{R}^3$ med en ortonormerad (=ortonormal) bas $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

(a) Visa att standardmatrisen för den ortogonala projektionen på V ges av AA^T, där A är matrisen med de givna basvektorerna som kolonner. **(3 p)**

(b) Använd detta för att bestämma den ortogonala projektionen i $\mathbb{R}^3$ av vektorn $\vec{u} = (2, -1, 3)$ på delrummet $V = \operatorname{span}\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$. **(3 p)**

6. Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & a \\ 4 & 7 & a(a+1) \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) För vilka värden på a är matrisen A diagonaliserbar? **(4 p)**

(b) Finns det något värde på a sådant att A är ortogonalt diagonaliserbar? **(2 p)**

Motivera ditt svar!