KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Torsdagen den 13 december, 2012

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Roy Skjelnes

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examinationen under period 1-2, 2012. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid de två första tentamenstillfällena du deltar vid under läsåret, med start från kursomgångens ordinarie tentamen.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

Del A

1. Betrakta punkterna $A = (2, 2)$ och $B = (6, 4)$ och linjen $(-1, 3) + t(2, -1)$ i planet.
   (a) Det finns exakt en punkt P på linjen så att triangeln ABP är rätvinklig med den räta vinkeln i B. Bestäm P. **(2 p)**
   (b) Det finns även exakt en punkt Q på linjen så att triangeln ABQ är rätvinklig med den räta vinkeln i Q. Bestäm Q. **(2 p)**

2. Betrakta den linjära avbildning $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som ges av matrisen
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Linjen med ekvation $3x + 4y = 0$ avbildas av T på en linje H. Bestäm en ekvation för linjen H. **(3 p)**
   (b) Även linjen med ekvation $3x + 4y = 1$ avbildas på en linje. Bestäm en ekvation för denna linje. **(1 p)**

3. Om $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är två vektorer i rummet så får vi en linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^1$ genom
$$T(\vec{x}) = (\vec{u} \times \vec{x}) \cdot \vec{v},$$
för $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^3$.
   (a) Låt
$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
   och bestäm matrisen för T i detta fall. **(2 p)**
   (b) Bestäm nollrum och bildrum för T om $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är två linjärt oberoende vektorer. **(2 p)**

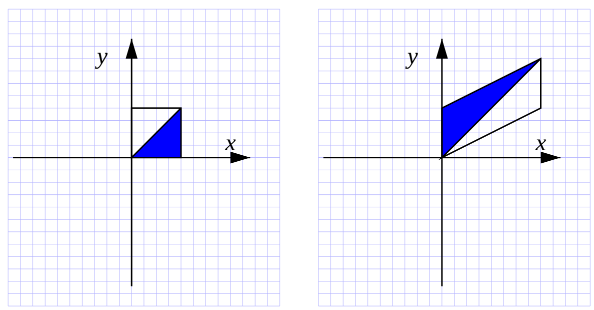
DEL B

4. Låt $\mathfrak{B} = (\vec{e}, \vec{f})$ vara en bas för ett delrum V i $\mathbb{R}^n$. Låt $\vec{u}$ och $\vec{v}$ vara två vektorer i $\mathbb{R}^n$ som uppfyller relationerna

$$\vec{u} + \vec{e} = \vec{v} \quad \text{och} \quad \vec{f} + 2\vec{u} = -3\vec{v}.$$

(a) Bestäm koordinatvektorn till $\vec{v}$ med avseende på basen $\mathfrak{B}$. **(2 p)**
(b) Visa att vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$ också utgör en bas för V. **(2 p)**

5. Avbildningen $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avbildar enhetskvadraten på en parallellogram enligt figuren nedan. Rita ut egenrummen och ange motsvarande egenvektorer. **(4 p)**



FIGUR 1. Enhetskvadraten och dess bild genom avbildningen T.

6. Låt V vara alla vektorer $\begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix}^T$ i $\mathbb{R}^4$ som uppfyller $x = y$ och $x + y = z + w$.
(a) Förklara varför V är ett delrum av $\mathbb{R}^4$. **(1 p)**
(b) Bestäm standardmatrisen för en linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ vars bildrum, $\mathrm{im}(T)$, är V. **(3 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. (a) Låt A vara en inverterbar och diagonaliserbar matris. Visa att alla potenser A^k också är diagonaliserbara, där k är ett godtyckligt heltal. **(2 p)**

   (b) Ge ett exempel på en 2×2-matris A som inte är diagonaliserbar, medan A^2 är diagonaliserbar. **(2 p)**

8. Delrummet W av $\mathbb{R}^4$ spänns upp av vektorerna

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

   Den linjära avbildningen $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ uppfyller att $T(\vec{v}) = \vec{v} + \vec{w}$ och $T(\vec{w}) = 2\vec{w}$, samt att nollrummet, $\ker(T)$, har dimension 2.

   Bestäm egenvärdena till avbildningen T. **(4 p)**

9. De tre punkterna $(6, 5, 5)$, $(5, 4, 1)$ och $(4, 3, 6)$ är tre av de åtta hörnen i en kub. Bestäm volymen av denna kub. **(4 p)**