KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen 16 oktober 2012
SF1624

Skrivtid: 14:00-19:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Roy Skjelnes

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examinationen under period 2, 2010 och period 3, 2011. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Planet H ges av ekvationen $3x + 2y + z = 0$, och planet W ges på parameterform som

$$\begin{bmatrix} 2t \\ 4s \\ t + 2s \end{bmatrix},$$

där s och t är reella parametrar.

(a) Bestäm en ekvation vars lösningsmängd är W. **(2 p)**

(b) Bestäm en parameterframställning för skärningen av H och W. **(2 p)**

2. (a) Bestäm en 2×2-matris A sådan att både bildrummet $\mathrm{im}(A)$ och nollrummet $\ker(A)$ är lika med

$$\mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(3 p)

(b) Använd matrisen från del (a) och bestäm nollrummet $\ker(A^2)$. **(1 p)**

3. Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

och basen $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ som ges av

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Visa att vektorerna $A\vec{u}$, $A\vec{v}$ och $A\vec{w}$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$. **(3 p)**

(b) Förklara varför $A\vec{u}_1$, $A\vec{u}_2$ och $A\vec{u}_3A$ utgör en bas för varje bas $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ för $\mathbb{R}^3$. **(1 p)**

DEL B

4. Bestäm en ekvation för det plan som innehåler både punkten $(1,2,0)$ och linjen som ges av följande ekvationssystem:
$$\begin{cases} 2x - y + 2z = -1, \\ -x - y + z = 1. \end{cases}$$
(4 p)

5. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning så att:
$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
   (a) Bestäm egenvärden och egenrum till T. **(3 p)**
   (b) Avgör om standardmatrisen för T är diagonaliserbar. **(1 p)**

6. Vid sampling av en ljudsignal uppmäts under en kort tidsperiod 1024 mätvärden som sparas som en vektor i $\mathbb{R}^N$, med $N = 1024$. Vid digital ljudbehandling kan sedan denna vektor transformeras i filter. Ett sådant filter ges av
$$y_i = x_i + 2x_{i-1} + x_{i-2}, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$
där vi för enkelhets skull skriver $x_0 = x_{-1} = 0$ för att hantera fallen $i = 1$ och $i = 2$.
   (a) Visa att detta filter svarar mot en linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$. **(2 p)**
   (b) Visa att avbildningen T är inverterbar. **(2 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. (a) Visa att 1 och -1 är de enda möjliga egenvärdena till ortogonala matriser. **(2 p)**
   (b) Visa att det för varje ortogonal 5×5-matris A måste finnas en nollskild vektor $\vec{v}$ som uppfyller antingen likheten $A\vec{v} = \vec{v}$ eller $A\vec{v} = -\vec{v}$. **(2 p)**

8. De komplexa talen kan betraktas som vektorer i $\mathbb{R}^2$ genom korrespondensen
$$x + yi \longleftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$
   (a) Fixera ett komplext tal $z = a + bi$. Visa att multiplikation med talet z svarar mot den linjära avbildningen $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ som har standardmatris
$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$
(2 p)
   (b) Förklara varför matrisen är inverterbar om z är nollskilt. **(1 p)**
   (c) Bestäm matrisen till den linjära avbildning som svarar mot multiplikation med talet $\frac{1}{4-3i}$. **(1 p)**

9. Vi vet att de tre vektorerna $\vec{u}, \vec{v}$ och $\vec{w}$ ligger i samma plan i $\mathbb{R}^3$. Bestäm vinkeln mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$ om vi vet att
$$|\vec{v}| = 1, \quad |\vec{w}| = 2, \quad \vec{v} \cdot \vec{u} = 2, \quad \vec{w} \cdot \vec{u} = 4$$
och att vinkeln mellan $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är $\frac{\pi}{3}$. (Vinkeln $0 \leq \alpha \leq \pi$ mellan två noll-skilda vektorer $\vec{x}$ och $\vec{y}$ definieras av sambandet $|\vec{x}||\vec{y}|\cos(\alpha) = \vec{x}\vec{y}$.) **(4 p)**