KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2017.10.24

DEL A

1. (a) Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = \cos^3(x)\sin(x) + 2$. **(3 p)**
   (b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2, omkring $x = 1$, till $\ln(1 + \frac{1}{2}x^2)$. **(3 p)**
   (c) Ange definitionsmängden och värdemängden till funktionen $f(x) = \arcsin(x)$. Bestäm slutligen $\arcsin(\sin(\frac{3\pi}{4}))$. **(3 p)**
   (d) Skissera funktionsgrafen till $f(x) = \sqrt{\sin^2(x-1)}$. **(3 p)**

Lösning. a). Vi beräknar

$$I = \int (\cos^3(x)\sin(x) + 2)\,dx = \int \cos^3(x)\sin(x)\,dx + \int 2\,dx.$$

Den första integralen beräknar vi med hjälp av substitutionen

$\cos(x) = v$ och därmed $-\sin(x)dx = dv$. Vi har

$$I_1 = \int \cos^3(x)\sin(x)\,dx = \int -v^3\,dv = -\frac{v^4}{4} + C_1 = -\frac{\cos^4(x)}{4} + C_1.$$

Den andra integralen är

$$I_2 = \int 2\,dx = 2x + C_2.$$

Därmed, om vi betecknar $C_1 + C_2 = C$, får vi

$$I = I_1 + I_2 = -\frac{\cos^4(x)}{4} + 2x + C.$$

b). Taylorpolynomet av ordning 2 omkring $x = 1$ till $g(x) = \ln(1 + \frac{1}{2}x^2)$ ges av

$$T(x) = g(1) + \frac{g'(1)}{1!}(x-1) + \frac{g''(1)}{2!}(x-1)^2.$$

Vi beräknar att

$$g'(x) = \frac{x}{1 + \frac{1}{2}x^2} \quad \text{och} \quad g''(x) = \frac{(1 + \frac{1}{2}x^2) - x \cdot x}{(1 + \frac{1}{2}x^2)^2}.$$

Detta ger att $g(1) = \ln(3/2), g'(1) = \frac{2}{3}$ och att $g''(1) = \frac{2}{9}$. Härav

$$T(x) = \ln(3/2) + \frac{2}{3}(x-1) + \frac{1}{9} \cdot (x-1)^2.$$

c). Definitionsmängden til sinus är det slutna intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, värdemängden är det slutna intervallet $[-1, 1]$. För inversfunktionen $\arcsin$ gäller det motsatta. Vi har att $\sin(\frac{3\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4})$. Därmed är $\arcsin(\sin(\frac{3\pi}{4})) = \frac{\pi}{4}$.

d.) Notera att $\sqrt{f^2(x)} = |f(x)|$. $\square$

DEL B

2. (a) Ge ett exempel på en funktion definierad på ett slutet och begränsat intervall som inte antar ett största värde. **(2 p)**

   (b) Visa att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} e^x & \text{om } x \neq \frac{1}{2}, \\ \sqrt{e} & \text{om } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

   är kontinuerlig i punkten $x = \frac{1}{2}$. **(2 p)**

   (c) Avgör om funktionen $f(x)$ antar ett största och ett minsta värde på det slutna intervallet $[0, 1]$. **(2 p)**

Lösning. a). En funktion som är kontinuerlig på ett slutet och begränsat intervall antar alltid ett största (och ett minsta) värde. Därför söker vi ett exempel bland diskontinuerliga funktioner. Följande funktion

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{om } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{om } 1 \leq x < 0 \end{cases}$$

ï definerad på ett slutet och begränsat intervall men inte antar ett största värde. (Rita grafen och notera att (1,1) inte tillhör funktionens graf.)

b). Först beräknar vi

$$\lim_{x\to 1/2} \frac{\sin(x-1/2)}{x-1/2}) = \{\text{l' Hospitals regel}\} = \lim_{x\to 1/2} \frac{\cos(x-1/2)}{1}) = 1.$$

Därför är

$$\lim_{x\to 1/2} f(x) = \lim_{x\to 1/2} \frac{\sin(x-1/2)}{x-1/2} e^x = 1 \cdot e^{1/2} = \sqrt{e}.$$

Eftersom

$$\lim_{x\to 1/2} f(x) = f(1/2)$$

är funktionen (enligt definitionen) kontinuerlig i punkten $x = 1/2$.

c). Vi har visat ovan att funktionen är kontinuerlig i punkten $x = 1/2$. Om $x \neq 1/2$ då är nämnaren i uttrycket $\neq 0$ och funktionen är därmed kontinuerlig i punkten $x \neq 1/2$ (som produkt och kvoten och av kontinuerliga funktioner, där nm̈naren är $\neq 0$). Med andra ord är funktionen kontinuerlig i det slutna och begränsade intervallet $[0, 1]$. Därför, enligt en sats om kontinuerliga funktioner, antar $f(x)$ ett största och ett minsta värde på intervallet $[0, 1]$. $\square$

3. (a) Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = e^{3x}\sin(2x)$. **(4 p)**
   (b) En kurva parametriseras med $x(t) = \cos^3(t)$ och $y(t) = \sin^3(t)$, där t genomlöper intervallet $[0, \pi/2]$. Bestäm längden av kurvan. **(2 p)**

Lösning. a). Vi ska bestämma integralen

$$I = \int e^{3x}\sin(2x)\,dx.$$

Med upprepad användning av partiell integration får vi

$$\begin{aligned} I &= \int e^{3x}\sin(2x)\,dx \\ &= \frac{1}{3}e^{3x}\sin(2x)\,dx - \frac{2}{3}\int e^{3x}\cos(2x)\,dx \\ &= \frac{1}{3}e^{3x}\sin(2x)\,dx - \frac{2}{9}e^{3x}\cos(2x) - \frac{4}{9}\int e^{3x}\sin(2x)\,dx \end{aligned}$$

där den sista integralen är exakt den integral I vi vill bestämma. Med andra ord har vi att

$$I = e^{3x}\left(\frac{1}{3}\sin(2x) - \frac{2}{9}\cos(2x)\right) - \frac{4}{9}I.$$

Ur detta kan vi lösa ut I och vi får att

$$I = e^{3x}\left(\frac{3}{13}\sin(2x) - \frac{2}{13}\cos(2x)\right) + C$$

där C är en godtycklig konstant.

b) Längden av kurvan är

$$s = \int_0^{\pi}\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

Vi förenklar integranden

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{(-3\cos^2(t)\sin(t))^2 + (3\sin^2(t)\cos(t))^2}$$

$$= \sqrt{9\cos^4(t)\sin^2(t) + 9\sin^4(t)\cos^2(t)} = \sqrt{9\cos^2(t)\sin^2(t)(\cos^2(t) + \sin^2(t)}$$

$$= \sqrt{9\cos^2(t)\sin^2(t)}$$

(Notera att $\sin(t) \geq 0$ och $\cos(t) \geq 0$ för $0 \leq x \leq \pi/2$.)

$$= 3\cos(t)\sin(t).$$

Därför har vi att

$$s = \int_0^{\pi/2} 3\cos(t)\sin(t)dt = \left[3\frac{\sin^2(t)}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{3}{2}.$$

□

DEL C

4. Visa att $I(p) = \int\limits_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^p}\,dx$ divergerar för $0 < p \leq 1$. **(6 p)**

Lösning. Vi visar först divergensen då $p = 1$. Vi har att

$$I(1) = \int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^R = \infty,$$

och integralen divergerar. För $p \in (0,1)$ är det uppenbart att $\frac{x}{(1+x^2)^p} \geq \frac{x}{1+x^2}$ för alla x i integrationsintervallet. Det följer nu att $I(p)$ divergerar för alla p sådana att $0 < p \leq 1$.

$\square$

5. Visa olikheten
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k}+1)} \geq \ln(\frac{n}{4})$$
för alla $n \geq 1$. (Tips: Summan är en översumma för en integral). **(6 p)**

Lösning. Funktionen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$ är kontinuerlig, positiv och avtagande för $x \geq 1$. För att bevisa olikheten använder vi Riemannsummor till $\int_1^{n+1} f(x)dx$. Vi betraktar integralens översumma i intervallet $[1, n+1]$ med indelningspunkterna $1, 2, ..., n, n+1$. Eftersom $f(x)$ är avtagande, är $f(k)$ funktionens största värde i delintervallet $[k, k+1]$. Därför har vi att
$$1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) + \cdots + 1 \cdot f(n) \geq \int_1^{n+1} f(x)dx$$
(rita en figur) d.v.s.
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k}+1)} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}dx \qquad (*)$$
Först beräknar vi integralen $\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}dx$ med hjälp av substitutionen $\sqrt{x}+1 = v$ som ger $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dv$ eller $\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2dv$. Vi har
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}dx = \int \frac{2}{v}dv = 2\ln|v| + C = \ln(v^2) + C = \ln(\sqrt{x}+1)^2 + C.$$
Därför är
$$\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}dx = \ln(\sqrt{n+1}+1)^2 - \ln(4) = \ln\frac{(\sqrt{n+1}+1)^2}{4}.$$
Enligt (*) har vi
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k}+1)} \geq \ln\frac{(\sqrt{n+1}+1)^2}{4}. \qquad (**)$$
Eftersom $\frac{(\sqrt{n+1}+1)^2}{4} = \frac{n+1+2\sqrt{n+1}+1)}{4} \geq \frac{n}{4}$ och därmed att $\ln\frac{(\sqrt{n+1}+1)^2}{4} \geq \ln(\frac{n}{4})$, har vi slutligen (från (**)) att
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k}+1)} \geq \ln(\frac{n}{4}).$$
□