SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2021.06.11

DEL A

1. (a) Finn en lösning till differentialekvationen $y''(x) + 2y'(x) = 12\cos(2x) + 4\sin(2x)$ som är på formen $y(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$ där A och B är konstanter. **(2 p)**

   (b) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y''(x)+2y'(x) = 12\cos(2x)+4\sin(2x)$ som uppfyller $y(0) = 0$ och $y'(0) = 4$. **(4 p)**

Lösning. a) Vi söker en partikulärlösning y_p till den givna ekvationen. Vi gör ansatsen

$$y_p(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x).$$

Då är

$$y_p'(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) \text{ och } y_p''(x) = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x).$$

Insatt i den givna ekvationen fås

$$\begin{aligned}
&y_p''(x) + 2y_p'(x) = 12\cos(2x) + 4\sin(2x) \iff \\
&-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) + 2\left(-2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)\right) = 12\cos(2x) + 4\sin(2x) \iff \\
&(-4A + 4B)\cos(2x) + (-4A - 4B)\sin(2x) = 12\cos(2x) + 4\sin(2x).
\end{aligned}$$

Följaktligen är y_p en lösning till den givna ekvationen om konstanterna a och b väljs så att

$$\begin{cases} -4A + 4B = 12 \\ -4A - 4B = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -2 \\ B = 1 \end{cases}$$

så $y_p(x) = -2\cos(2x) + \sin(2x)$.

b) Vi börjar med att söka den allmänna lösningen y_h till motsvarande homogena ekvation, med hjälp av den karaktäristiska ekvationen

$$r^2 + 2r = 0$$

som har rötter $r = 0$ och $r = -2$. Alltså är

$$y_h(x) = a + be^{-2x},$$

där a och b är godtyckliga reella konstanter.

Allmän lösning y till den givna differentialekvationen är

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = a + be^{-2x} - 2\cos(2x) + \sin(2x).$$

Begynnelsevillkoren bestämmer nu a och b.

$$y'(x) = -2be^{-2x} + 4\sin(2x) + 2\cos(2x),$$

och villkoret $y'(0) = 4$ ger

$$-2b + 2 = 4 \iff b = -1.$$

Så

$$y(x) = a - e^{-2x} - 2\cos(2x) + \sin(2x)$$

och villkoret $y(0) = 0$ ger slutligen

$$a - 3 = 0 \iff a = 3.$$

SVAR: $y(x) = 3 - e^{-2x} - 2\cos(2x) + \sin(2x)$.

$\square$

2. Beräkna arean av området som begränsas av kurvan $y = \frac{1}{4+x^2} + \frac{x}{x^2+3x+2}$ samt linjerna $y = 0, x = 0$ och $x = 2$. Förenkla ditt svar. **(6 p)**

Lösning. Eftersom $\frac{1}{4+x^2} + \frac{x}{x^2+3x+2} > 0$ för $x \geq 0$ så ges arean av det begränsade området av

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{4+x^2} + \frac{x}{x^2+3x+2} \right) dx = \int_0^2 \frac{dx}{4+x^2} + \int_0^2 \frac{x}{x^2+3x+2}\, dx.$$

Vi beräknar det två integralerna separat.

Först,

$$\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{4} \int_0^2 \frac{dx}{1+(x/2)^2} = \left[\frac{1}{2} \arctan(x/2) \right]_0^2 = \frac{1}{2} \arctan 1 = \frac{\pi}{8}.$$

För att beräkna den andra integralen utför vi först partialbråksuppdelning. Eftersom $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$ så gör vi ansatsen

$$\frac{x}{x^2+3x+2} = \frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}.$$

Vi multiplicerar med $(x+1)(x+2)$ och får då

$$x = A(x+2) + B(x+1) = (A+B)x + (2A+B).$$

Genom att identifiera koefficienter får vi villkoren $A + B = 1$ och $2A + B = 0$ vilket ger $A = -1$ och $B = 2$. Således har vi

$$\frac{x}{x^2+3x+2} = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

Den sökta intergalen ges alltså av

$$\int_0^2 \left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1} \right) dx = [2 \ln |x+2| - \ln |x+1|]_0^2 =$$

$$= 2 \ln 4 - \ln 3 - 2 \ln 2 = \ln(16/12) = \ln(4/3).$$

Slutsats: arean av det sökta området ges av $\pi/8 + \ln(4/3)$ (a.e.)

SVAR: $\pi/8 + \ln(4/3)$ (a.e.) $\square$

DEL B

3. Låt $f(x) = e^{x-\frac{x^2}{2}}$.
   (a) Bestäm de punkter på kurvan $y = f(x)$ där tangenten är horisontell. **(2 p)**
   (b) Avgör om det finns någon punkt på kurvan $y = f(x)$ där lutningen är maximal. Bestäm en sådan punkt om en sådan punkt finns, annars förklara varför det inte finns någon. **(4 p)**

Lösning. a) Tangenten är horisontell precis i de punkter $(p, f(p))$ på kurvan där $f'(p) = 0$. Vi löser därför ekvationen $f'(x) = 0$ för att hitta dessa punkter. Eftersom

$$f'(x) = (1-x)e^{x-x^2/2},$$

och eftersom $e^{x-x^2/2} \neq 0$ för alla x så har vi $f'(x) = 0$ precis då $(1-x) = 0$, dvs precis då $x = 1$. Således finns det en punkt på kurvan där tangenten är horisontell, nämligen punkten

$$(1, e^{1/2}).$$

b) För att undersöka om det finns någon punkt på kurvan där lutningen är maximal måste vi undersöka om $f'(x)$ har några globala extremvärden. Vi låter $g(x) = f'(x)$ och gör ett teckenschema för derivatan av $g(x)$ för att hitta lokala extrempunkter. Eftersom

$$g'(x) = -e^{x-x^2/2} + (1-x)^2 e^{x-x^2/2} = (-1 + (1-x)^2)e^{x-x^2/2} = x(x-2)e^{x-x^2/2}$$

så ser vi (eftersom $e^{x-x^2/2} > 0$ för alla x) att g har de kritiska punkterna $x = 0$ och $x = 2$. Vi får också följande teckentabell för g': $g'(x) < 0$ för $0 < x < 2$; och $g'(x) > 0$ för $x < 0$ och för $x > 2$.

Från teckentabellen ser vi att g har ett lokalt max i punkten $x = 0$ och ett lokalt min i punkten $x = 2$. Eftersom $g(0) = f'(0) = 1$ och $g(2) = -1$, och eftersom

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0 \text{ och } \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$$

så följder det att $g(x)$ har ett globalt max i punkten $x = 0$ och ett globalt min i punkten $x = 2$.

Således finns det två punkter på kurvan där lutningen är maximal: i punkten $(0, 1)$ (där vi har maximal lutning uppåt) och i punkten $(2, 1)$ (där vi har maximal lutning nedåt).

□

4. (a) Låt $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$. Visa med hjälp av derivata att funktionen f är avtagande på intervallet $(1, \infty)$. **(2 p)**

(b) Använd lämpliga integraluppskattningar för att visa att **(4 p)**

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \leq \frac{1}{\ln 2}.$$

Lösning. a) Derivering ger

$$f'(x) = -\frac{1}{(x(\ln x)^2)^2}\frac{d}{dx}\left(x(\ln x)^2\right) = -\frac{1}{(x(\ln x)^2)^2}\left((\ln x)^2 + 2x(\ln x)\frac{1}{x}\right) =$$
$$= -\frac{1}{(x(\ln x)^2)^2}\left((\ln x)^2 + 2(\ln x)\right) < 0$$

för alla $x > 1$ (eftersom $\ln x > 0$ för alla $x > 1$). Eftersom derivatan är negativ på hela intervallet $(1, \infty)$ så är funktionen f avtagande där.

b) Eftersom funktionen f är avtagande på intervallet $(1, \infty)$ så följer det att vi för varje heltal $k \geq 3$ har

$$f(k) \leq f(x) \text{ för alla } k - 1 \leq x \leq k.$$

(Rita en figur!) Detta betyder att vi för alla heltal $k \geq 3$ har

$$f(k) = f(k) \cdot 1 \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\, dx.$$

Således får vi

$$\sum_{k=3}^{\infty} f(k) \leq \int_2^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_2^R \frac{dx}{x(\ln x)^2}.$$

För att beräkna integralen ovan låter vi $u = \ln x$. Då har vi $du = dx/x$, och vi får de nya gränserna $\ln 2$ och $\ln R$. Detta ger

$$\lim_{R\to\infty} \int_2^R \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{du}{u^2} = \lim_{R\to\infty} \left[-1/u\right]_{\ln 2}^{\ln R} =$$
$$= \lim_{R\to\infty} (-1/\ln R + 1/\ln 2) = 1/\ln 2.$$

□

DEL C

5. Funktionen f är en oändligt deriverbar funktion, definierad i någon öppen omgivning I till $x = e$, och bestämd av villkoren

$$\begin{cases} e^{f(x)} - x\left(f(x)\right)^2 = 0 \\ f(e) = 1 \end{cases}$$

Bestäm andra ordningens Taylorpolynom till f kring punkten $x = e$. **(6 p)**

Lösning. Eftersom funktonen f är deriverbar på det öppna intervallet $I \ni e$, kan vi derivera ekvationen

$$e^{f(x)} - x\left(f(x)\right)^2 = 0$$

implicit m a p x. Vi gör det två gånger eftersom vi vill kunna bestämma både första- och andra-derivatan av f i punkten $x = e$.

$$\frac{d}{dx}\left\{e^{f(x)} - x\left(f(x)\right)^2\right\} = \frac{d}{dx}(0)$$
$$\Longrightarrow$$
$$e^{f(x)}f'(x) - \left(f(x)\right)^2 - 2xf(x)f'(x) = 0$$
$$\Longrightarrow$$
$$\frac{d}{dx}\left\{e^{f(x)}f'(x) - \left(f(x)\right)^2 - 2xf(x)f'(x)\right\} = \frac{d}{dx}(0)$$
$$\Longrightarrow$$
$$e^{f(x)}\left(f'(x)\right)^2 + e^{f(x)}f''(x) - 2f(x)f'(x) - 2f(x)f'(x) - 2x\left(f'(x)\right)^2 - 2xf(x)f''(x) = 0$$
$$\Longrightarrow$$
$$e^{f(x)}\left(f'(x)\right)^2 + e^{f(x)}f''(x) - 4f(x)f'(x) - 2x\left(f'(x)\right)^2 - 2xf(x)f''(x) = 0$$

Insättning av $x = e$ och $f(e) = 1$ i den andra av de ovanstående ekvationerna ger

$$e^1 f'(e) - (1)^2 - 2e \cdot 1 \cdot f'(e) = 0 \iff -ef'(e) - 1 = 0 \iff f'(e) = -\frac{1}{e}$$

Insättning av $x = e$, $f(e) = 1$ och $f'(e) = -\frac{1}{e}$ i den sista av de ovanstående ekvationerna ger

$$e^1\left(-\frac{1}{e}\right)^2 + e^1 f''(e) - 4\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{e}\right) - 2e\left(-\frac{1}{e}\right)^2 - 2e\cdot 1\cdot f''(e) = 0$$
$$\iff$$
$$\frac{1}{e} + ef''(e) + \frac{4}{e} - \frac{2}{e} - 2ef''(e) = 0$$
$$\iff$$
$$\frac{3}{e} = ef''(e) \iff f''(e) = \frac{3}{e^2}.$$

Andra ordningens Taylorpolynom $P(x)$ till $f(x)$ kring $x = e$ är då

$$P(x) = f(e) + f'(e)(x-e) + \frac{f''(e)}{2}(x-e)^2 = 1 - \frac{1}{e}(x-e) + \frac{3}{2e^2}(x-e)^2.$$

SVAR: $P(x) = 1 - \frac{1}{e}(x-e) + \frac{3}{2e^2}(x-e)^2$

□

6. (a) Antag att funktionen g är kontinuerlig överallt (men vi antar inte att g är deriverbar). Låt $f(x) = xg(x)$. Visa att funktionen f är deriverbar i punkten $x = 0$ och bestäm $f'(0)$. **(3 p)**

   (b) Antag att funktionen $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uppfyller $|h(x) - h(y)| \leq |x - y|^2$ för alla reella tal x, y. Visa att h är konstant. **(3 p)**

Lösning. a) Enligt derivatans defintion är

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

Utnyttjar vi nu att $f(x) = xg(x)$ får vi

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{hg(h))}{h} = \lim_{h \to 0} g(h) = g(0)$$

där vi i sista steget utnyttjar att g är kontinuerlig.

b) Vi fixerar först ett $y \in \mathbb{R}$. Enligt derivatans defintion har vi

$$h'(y) = \lim_{x \to y} \frac{h(x) - h(y)}{x - y}.$$

Om vi använder antagandet får vi för alla $x \neq y$ att

$$\left| \frac{h(x) - h(y)}{x - y} \right| \leq \frac{|x - y|^2}{|x - y|} = |x - y|.$$

Eftersom $|x - y| \to 0$ då $x \to y$ följer det från instängningssatsen att

$$\lim_{x \to y} \frac{h(x) - h(y)}{x - y} = 0.$$

Då detta gäller för varje y har vi alltså att $h'(y) = 0$ för alla $y \in \mathbb{R}$. Således måste h vara en konstant.

$\square$