Authentisierung und Verschlüsselung [WIP]

Sommersemester 2023

mail@nilslambertz.de
nilslambertz

Alle Angaben ohne Gewähr. Keine Garantie auf Vollständigkeit oder Richtigkeit.

mail@nilslambertz.de
nilslambertz

1 Einführung

1.1 Ziel von Kryptographischen Verfahren

Kryptographische Verfahren sollen **Authentizität** (Dokument wurde von einer bestimmten Person signiert) und **Integrität** (Dokument wurde nicht verändert) sicherstellen.

1.2 Informelle Definition von Signaturen

- **asymmetrische** Verfahren
- Schlüsselpaar (pk, sk)
- Nachricht m wird mit sk signiert und erzeugt Signatur σ
- Mit pk kann überprüft werden, ob eine Signatur σ gültig für eine Nachricht m ist

1.3 Digitale Signaturen

1.3.1 Definition

Ein digitales Signaturverfahren für einen Nachrichtenraum $\mathcal{M}$ ist ein Tupel $\Sigma = (Gen, Sign, Vfy)$ von probabilistischen Polyzeit (PPT) Algorithmen:

- $Gen(1^k) \rightarrow (pk, sk)$
- $Sign(sk, m) \rightarrow \sigma,\ m \in \mathcal{M}$
- $Vfy(pk, m, \sigma) \in \{0, 1\}$

1.3.2 Correctness

Correctness ("Das Verfahren funktioniert"): $\forall (pk, sk) \leftarrow Gen(1^k) \forall m \in \mathcal{M} : Vfy(pk, m, Sign(sk, m)) = 1$

1.4 Sicherheitsdefinitionen

Sicherheit besteht aus einem **Angreifermodell** (was kann der Angreifer tun, welche Angriffsmöglichkeiten stehen zur Verfügung) und einem **Angreiferziel** (was muss der Angreifer tun, um das Verfahren zu brechen).

1.4.1 Angreifermodelle

1. no-message attack (NMA)
   - Angreifer erhält nur pk
2. **non-adaptive chosen-message attack (naCMA)**
   - Angreifer wählt $m_1, \ldots, m_q$
   - Angreifer erhält **danach** pk und Signaturen $\sigma_1, \ldots, \sigma_q$
3. **(adaptive) chosen-message attack (CMA)**
   - Angreifer erhält pk
   - Angreifer wählt dann (adaptiv) $m_1, \ldots, m_q$ und erhält Signaturen $\sigma_1, \ldots, \sigma_q$
   - Adaptiv: Angreifer darf Wahl von m_i abhängig von vorherigen σ_j $(j < i)$ und pk machen

1.4.2 Angreiferziele

1. Universal Unforgeability (UUF)
   - Nachricht m wird zufällig gewählt
   - Angreifer muss m signieren

mail@nilslambertz.de
nilslambertz

2. **Existential Unforgeablility (EUF)**
   - Angreifer kann Nachricht m beliebig wählen und diese signieren

In den **Sicherheitsdefinitionen** werden **Angreiferziel** und **Angreifermodell** kombiniert, z.B.

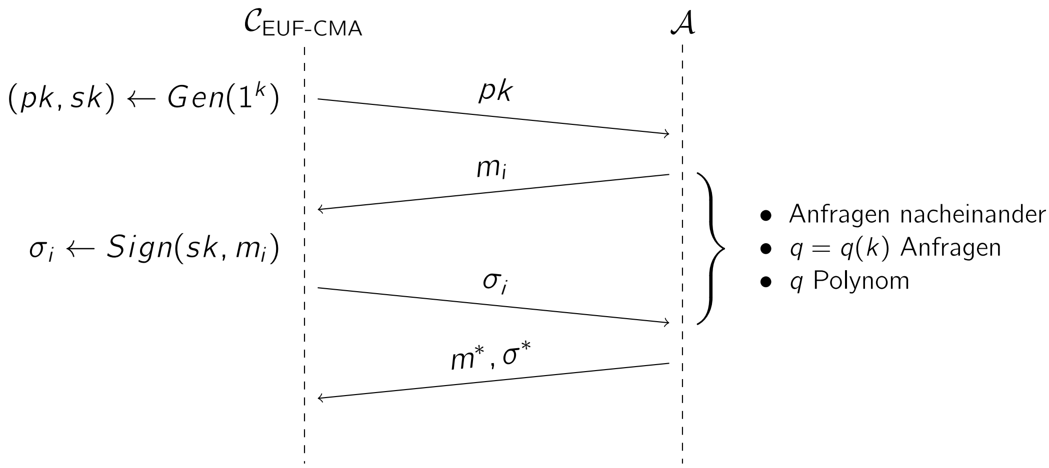
- EUF-CMA
- EUF-naCMA

1.5 EUF-CMA-Sicherheitsexperiment

Bei Sicherheitsexperimenten spielt ein Angreifer $\mathcal{A}$ gegen einen Challenger $\mathcal{C}$. $\mathcal{A}$ gewinnt, falls er die Sicherheit des Verfahrens bricht.

$\mathcal{A}$ muss dabei mit einer nicht vernachlässigbaren Wahrscheinlichkeit eine gültige Signatur erzeugen können, ohne den Schlüssel sk zu kennen.

1.5.1 Visualisierung: EUF-CMA-Sicherheitsexperiment



$$Vfy(pk, m^*, \sigma^*) = 1? \\ \wedge \\ m^* \notin \{m_1, \ldots, m_q\}?$$

$\mathcal{A}$ gewinnt, falls $Vfy(pk, m^*, \sigma^*) = 1$ **und** $m^* \notin \{m_1, \ldots, m_q\}$

1.5.2 Definition: Vernachlässigbarkeit

Eine Funktion $negl : \mathbb{N} \to [0, 1]$ ist *vernachlässigbar*, wenn

$$\forall c \in \mathbb{N} \exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k \geq k_0 : negl(k) < \frac{1}{k^c}$$

1.5.3 Definition: EUF-CMA

Ein digitales Signaturverfahren $\Sigma = (Gen, Sign, Vfy)$ ist *EUF-CMA-sicher*, wenn für alle PPT $\mathcal{A}$ gilt, dass

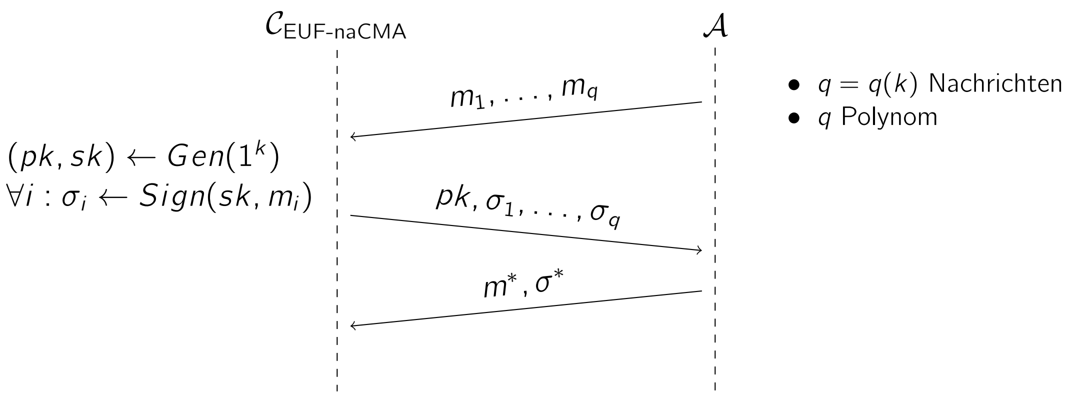
$$\begin{aligned} &\Pr[\mathcal{A} \text{ gewinnt EUF-CMA-Experiment}] \\ &= \Pr[\mathcal{A}^{\mathcal{C}_{\text{EUF-CMA}}}(pk) = (m^*, \sigma^*) : Vfy(pk, m^*, \sigma^*) = 1 \wedge m^* \notin \{m_1, \ldots, m_q\}] \\ &\leq negl(k) \end{aligned}$$

für eine im Sicherheitsparameter k vernachlässigbare Funktion $negl$.

mail@nilslambertz.de
nilslambertz

1.6 EUF-naCMA-Sicherheitsexperiment

1.6.1 Visualisierung: EUF-naCMA-Sicherheitsexperiment



$$Vfy(pk, m^*, \sigma^*) = 1?$$
$$\wedge$$
$$m^* \notin \{m_1, \ldots, m_q\}?$$

$\mathcal{A}$ gewinnt, falls $Vfy(pk, m^*, \sigma^*) = 1$ **und** $m^* \notin \{m_1, \ldots, m_q\}$

1.6.2 Definition: EUF-naCMA

Ein digitales Signaturverfahren $\Sigma = (Gen, Sign, Vfy)$ ist *EUF-naCMA-sicher*, wenn für alle PPT $\mathcal{A}$ gilt, dass

$$\begin{aligned}
&\Pr[\mathcal{A} \text{ gewinnt EUF-naCMA-Experiment}] \\
&= \Pr[\mathcal{A}^{\mathcal{C}_{\text{EUF-naCMA}}} = (m^*, \sigma^*) : Vfy(pk, m^*, \sigma^*) = 1 \wedge m^* \notin \{m_1, \ldots, m_q\}] \\
&\leq negl(k)
\end{aligned}$$

für eine im Sicherheitsparameter k vernachlässigbare Funktion $negl$.

1.7 Einmalsignaturen

- Ziel: Signaturen, die viele Nachrichten signieren können
- Vorstufe: Signaturen, die nur **eine** Nachricht **sicher** signieren können (**Einmalsignaturen**)
- für jeden *public key* sollte nur eine einzige Signatur ausgestellt werden, sonst evtl. unsicher

1.7.1 Sicherheitsbegriffe für Einmalsignaturen

Analog zum vorherigen Kapitel definieren wir **EUF-1-CMA** und **EUF-1-naCMA** für Einmalsignaturen.

1.7.2 Beziehungen zwischen Sicherheitsdefinitionen

$$\begin{array}{ccc}
\text{EUF-naCMA} & \Leftarrow & \text{EUF-CMA} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\text{EUF-1-naCMA} & \Leftarrow & \text{EUF-1-CMA}
\end{array}$$

Beweis im Skript.

mail@nilslambertz.de
nilslambertz

1.8 Perfekte Sicherheit

In den Definitionen, z.B. bei EUF-CMA finden sich zwei Einschränkungen, die im folgenden erläutert werden:

1.8.1 Warum müssen wir uns auf PPT-Angreifer beschränken?

Durch Brute-Force könnte ein unbeschränkter Angreifer alle Signaturen durchprobieren und so valide Signaturen für beliebige Nachrichten finden, wodurch er beim Sicherheitsexperiment immer gewinnen würde.

1.8.2 Warum muss die Erfolgswahrscheinlichkeit des Angreifers nur vernachlässigbar sein?

Die Erfolgswahrscheinlichkeit kann nicht 0 sein, da der Angreifer durch zufälliges Raten eine gültige Signatur für eine beliebige Nachricht finden könnte, wodurch er das Sicherheitsexperiment gewinnt.

1.9 Erweiterung des Nachrichtenraumes

Wir konstruieren fast immer Signaturen mit “kleinem” Nachrichtenraum, z.B.

- $\mathbb{Z}_p = \{0, \ldots, p-1\}$, p prim
- $\{0,1\}^{q(k)}$, q Polynom, k Sicherheitsparameter

Unser Ziel ist es jedoch, beliebige Nachrichten, z.B. $\{0,1\}^*$, zu signieren.

1.9.1 Hashfunktionen

Eine kryptographische Hashfunktion $H = (Gen_H, Eval_H)$ ist ein Tupel aus zwei PPT-Algorithmen:

- $Gen_H(1^k)$ berechnet t, sodass t eine Funktion
$$H_t : \{0,1\}^* \to \mathcal{M}_t$$
spezifiziert
- $Eval_H(1^k, t, x)$ berechnet $H_t(x)$

1.9.2 Kollisionsresistenz

Eine Hashfunktion $H = (Gen_H, Eval_H)$ ist **kollisionsresistent**, falls für alle $t \leftarrow Gen_H(1^k)$ und für alle PPT $\mathcal{A}$ gilt, dass

$$\Pr[\mathcal{A}(1^k, t) = (x, x') : H_t(x) = H_t(x') \land x \neq x'] \leq negl(k)$$

für eine im Sicherheitsparameter k vernachlässigbare Funktion $negl$.

1.9.3 Signatur mit unbeschränktem Nachrichtenraum (Hash-then-Sign)

Wir wollen nun Signaturen mit unbeschränktem Nachrichtenraum konstruieren. Gegeben:

- $\Sigma' = (Gen', Sign', Vfy')$ mit Nachrichtenraum $\mathcal{M}$
- kollisionsresistente Hashfunktion $H : \{0,1\}^* \to \mathcal{M}$

Konstruiere $\Sigma = (Gen, Sign, Vfy)$ mit Nachrichtenraum $\{0,1\}^*$:

- $Gen(1^k)$ berechnet $(pk, sk) \leftarrow Gen'(1^k)$
- $Sign(sk, m)$ berechnet $\sigma \leftarrow Sign'(sk, H(m))$
- $Vfy(pk, m, \sigma)$ gibt $Vfy'(pk, H(m), \sigma)$ aus

mail@nilslambertz.de
nilslambertz

2 q-mal Signaturen

2.1 Von EUF-naCMA-Sicherheit zu EUF-CMA-Sicherheit

Gegeben

- ein EUF-naCMA-sicheres Signaturverfahren Σ' und
- ein EUF-1-naCMA-sicheres Einmalsignaturverfahren $\Sigma^{(1)}$

können wir mittels **Transformation** ein **EUF-CMA**-sicheres Signaturverfahren Σ konstruieren.

2.1.1 Transformation

Gegeben:

- EUF-naCMA-sicheres Signaturverfahren $\Sigma' = (Gen', Sign', Vfy')$
- EUF-1-naCMA-sicheres Signaturverfahren $\Sigma^{(1)} = (Gen^{(1)}, Sign^{(1)}, Vfy^{(1)})$

Konstruiere nun $\Sigma = (Gen, Sign, Vfy)$ wie folgt:

- $Gen(1^k)$:

$$(pk, sk) := (pk', sk') \leftarrow Gen'(1^k)$$

- $Sign(sk, m)$:

$$\begin{aligned}(pk^{(1)}, sk^{(1)}) &\leftarrow Gen^{(1)}(1^k)\\ \sigma' &\leftarrow Sign'(sk, pk^{(1)})\\ \sigma^{(1)} &\leftarrow Sign^{(1)}(sk^{(1)}, m)\\ \sigma &:= (pk^{(1)}, \sigma^{(1)}, \sigma')\end{aligned}$$

- $Vfy(pk, m, \sigma)$ gibt 1 aus, wenn

$$Vfy'(pk, pk^{(1)}, \sigma') = 1 \wedge Vfy^{(1)}(pk^{(1)}, m, \sigma^{(1)}) = 1$$

  sonst 0

Es wird also für jede Signatur ein neues Einmalschlüsselpaar erzeugt.

2.2 Mehrmal-Signaturverfahren aus Einmalsignaturverfahren

Einmalsignaturverfahren sind effizient und einfach zu konstruieren, daher würden wir gerne eine Variation dieser verwenden, um mehrfach signieren zu können (q-mal-Signaturverfahren).

2.2.1 Naiver Ansatz: q Schlüsselpaare

Der naive Ansatz ist, q Schlüsselpaare zu verwenden und einen Zähler $st \in \{1, \dots, q\}$ als Zustand zu verwenden, der auch im Secret Key und in der Signatur vorkommt:

- $Gen(1^k)$:

$$\begin{aligned}&(pk_i, sk_i) \leftarrow Gen^{(1)}(1^k) \text{ für alle } i \in \{1, \dots, q\}\\ &pk := (pk_1, \dots, pk_q)\\ &sk := (sk_1, \dots, sk_q, st = 1)\end{aligned}$$

mail@nilslambertz.de
nilslambertz

- $Sign(sk, m)$:

$$\begin{aligned} &i := st \\ &\sigma_i \leftarrow Sign^{(1)}(sk_i, m) \\ &\sigma \leftarrow (\sigma_i, i) \\ &st := st + 1 \end{aligned}$$

- $Vfy(pk, m, \sigma = (\sigma_i, i))$:

$$Vfy^{(1)}(pk_i, m, \sigma_i) \stackrel{?}{=} 1$$

Eigenschaften bezogen auf Signaturanzahl (q):

- $|pk| \in \Theta(q)$
- $|sk| \in \Theta(q)$
- $|\sigma| \in \Theta(1)$

2.2.2 Zwischenschritt: Hashfunktion verwenden

Ein weiterer möglicher Ansatz ist die verwendung einer Hashfunktion

- H Hashfunktion
- $Gen(1^k)$:

$$\begin{aligned} &(pk_i, sk_i) \leftarrow Gen^{(1)}(1^k) \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, q\} \\ &pk := H(pk_1, \ldots, pk_q) \\ &sk := (sk_1, \ldots, sk_q, pk_1, \ldots, pk_q, st = 1) \end{aligned}$$

- $Sign(sk, m)$:

$$\begin{aligned} &i := st \\ &\sigma_i \leftarrow Sign^{(1)}(sk_i, m) \\ &\sigma \leftarrow (\sigma_i, i, pk_1, \ldots, pk_q) \\ &st := st + 1 \end{aligned}$$

- $Vfy(pk, m, \sigma = (\sigma_i, i))$:

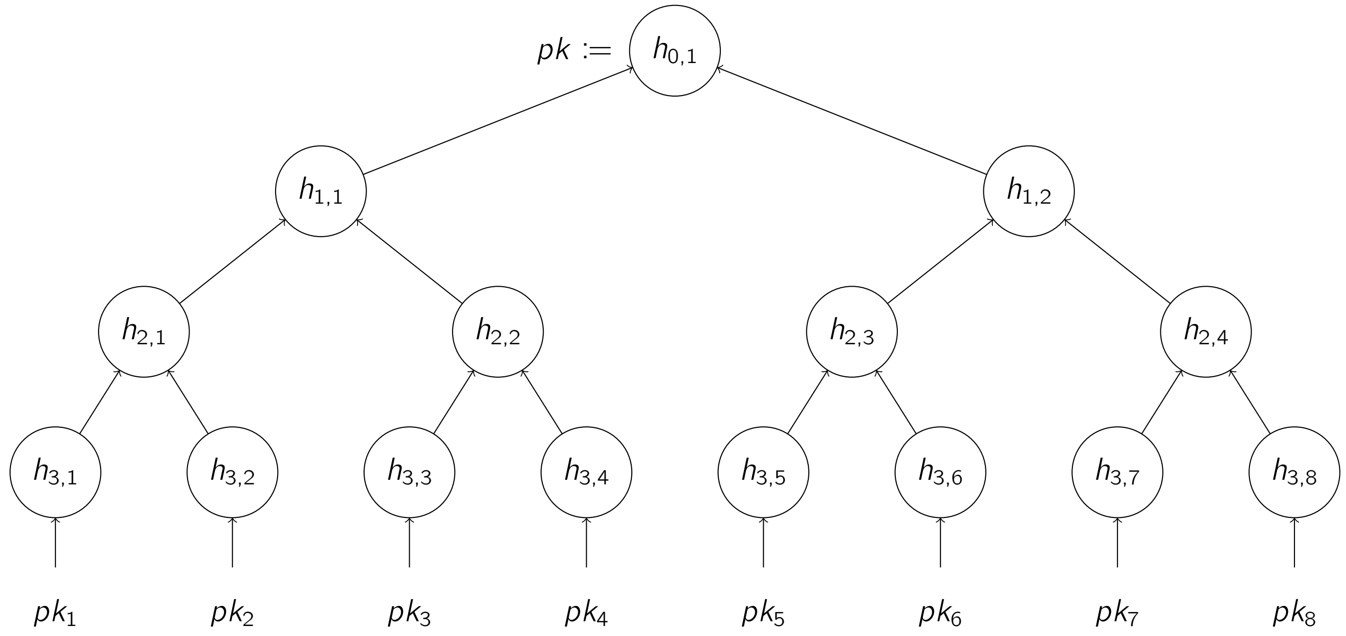
$$Vfy^{(1)}(pk_i, m, \sigma_i) \stackrel{?}{=} 1 \text{ und } H(pk_1, \ldots, pk_q) \stackrel{?}{=} pk$$

Eigenschaften bezogen auf Signaturanzahl (q):

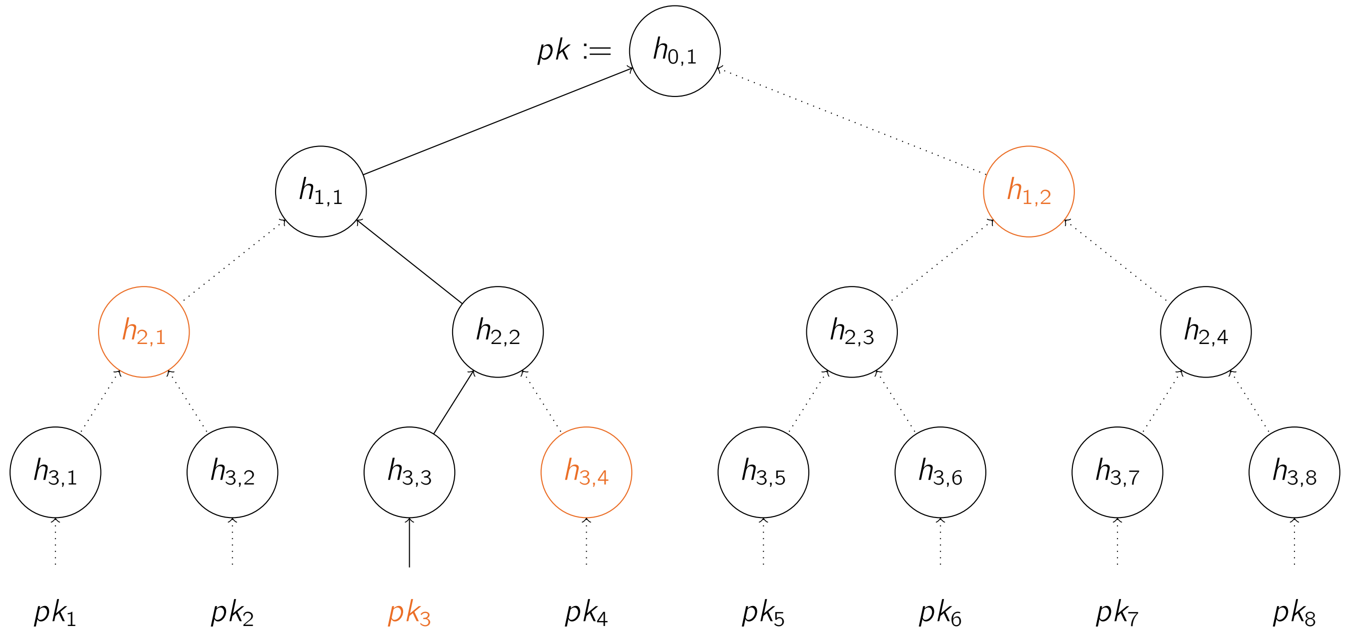
- $|pk| \in \Theta(1)$
- $|sk| \in \Theta(q)$
- $|\sigma| \in \Theta(q)$

2.2.3 Merkle-Bäume

Merkle-Bäume (auch **Hash-Bäume** genannt) sind (meist binäre) Bäume, bei denen die Blätter Hashwerte der Daten sind und jeder Knoten darüber aus Hashwerten seiner Kinder besteht:



Der Co-Pfad eines Knotens v in einem Binärbaum mit Wurzel r ist die Folge aller Knoten $u_1, \dots, u_n$ wobei u_i der Geschwisterknoten des i-ten Knotens auf dem Pfad von v zu r ist:



Der Co-Pfad wird nun in die Signatur hinzugefügt, wodurch der pk von pk_3 ausgehend (in diesem Beispiel) in Vfy berechnet werden kann.

- $Gen(1^k)$:

$$
\begin{aligned}
&(pk_i, sk_i) \leftarrow Gen^{(1)}(1^k) \text{ für alle } i \in \{1, \dots, q\} \\
&pk := \text{Baum-Hash}(pk_1, \dots, pk_q) \\
&sk := (sk_1, \dots, sk_q, pk_1, \dots, pk_q, st = 1)
\end{aligned}
$$

mail@nilslambertz.de
nilslambertz

- $Sign(sk, m)$:

$$\begin{aligned} &i := st \\ &\sigma_i \leftarrow Sign^{(1)}(sk_i, m) \\ &\sigma \leftarrow (\sigma_i, i, pk_i, \text{Co-Pfad}) \\ &st := st + 1 \end{aligned}$$

- $Vfy(pk, m, \sigma)$:

$$\begin{aligned} &\text{Berechne Wurzel } h' \\ &Vfy^{(1)}(pk_i, m, \sigma_i) \stackrel{?}{=} 1 \text{ und } h' \stackrel{?}{=} pk \end{aligned}$$

Eigenschaften bezogen auf Signaturanzahl (q):

- $|pk| \in \Theta(1)$
- $|sk| \in \Theta(q)$
- $|\sigma| \in \Theta(\log q)$

Lemma:

Wenn $\Sigma^{(1)}$ EUF-1-naCMA-sicher ist und H kollisionsresistent, dann ist das obige Verfahren EUF-q-naCMA-sicher.

Wenn $\Sigma^{(1)}$ EUF-1-CMA-sicher ist und H kollisionsresistent, dann ist das obige Verfahren EUF-q-CMA-sicher.

2.3 Komprimieren des geheimen Schlüssels

Um den geheimen Schlüssel zu komprimieren, verwenden wir statt echtem Zufall *Pseudozufall* zur Generierung.

2.3.1 Pseudozufallsfunktion

Eine Pseudozufallsfunktion oder Pseudorandom function (**PRF**) ist eine Funktion, die ununterscheidbar von einer zufälligen Funktion ist. Sie erhält dafür zusätzlich einen *Seed* s mit Länge k als Eingabe:

$$\begin{array}{cccccc} \text{PRF:} & \{0,1\}^k & \times & \{0,1\}^n & \rightarrow & \{0,1\}^l \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & \text{Seed } s & & \alpha & & PRF(s, \alpha) \end{array}$$

2.3.2 Schlüsselgenerierung

Bisher wird unser Schlüssel durch einen *probabilistischen* Algorithmus erzeugt:

$$(pk_i, sk_i) \leftarrow Gen^{(1)}(1^k) \qquad \forall i \in \{1, \ldots, q\}$$

Probabilistische Algorithmen können auch als **deterministische Algorithmen mit Zufall r als Eingabe** gesehen werden:

$$Gen^{(1)}(1^k) \qquad \hat{=} \qquad Gen^{(1)}_{\text{det}}(1^k, r)$$

mail@nilslambertz.de
nilslambertz

Damit ist die bishere Schlüsselberechnung äquivalent zu folgender:

$$(pk_i, sk_i) := Gen^{(1)}_{\text{det}}(1^k, r_i) \qquad \forall i \in \{1, \ldots, q\} \qquad \text{für echt zufällige } r_i$$

Mit **echt zufälliger** Funktion F also:

$$(pk_i, sk_i) := Gen^{(1)}_{\text{det}}(1^k, F(i)) \qquad \forall i \in \{1, \ldots, q\}$$

Mit einem zufälligen Seed s können wir den echten Zufall durch Pseudozufall ersetzen:

$$(pk_i, sk_i) := Gen^{(1)}_{\text{det}}(1^k, PRF(s, i)) \qquad \forall i \in \{1, \ldots, q\} \qquad \text{für } s \xleftarrow{\$} \{0,1\}^k$$

Dadurch müssen nur noch der Seed s und der Zähler st im Secret Key gespeichert werden, bei Bedarf können die Schlüsselpaare neu berechnet werden:

$$sk = (s, st)$$

Eigenschaften bezogen auf Signaturanzahl (q):

- $|pk| \in \Theta(1)$
- $|sk| \in \Theta(1)$
- $|\sigma| \in \Theta(\log q)$

3 Chamäleon-Signaturen

Motivation: Wir wollen Signaturen der Form, dass A die Signatur von B verifizieren kann, jedoch einen anderen C nicht davon überzeugen kann, dass die Signatur von B kam.

3.1 Chamäleon-Hashfunktionen

3.1.1 Definition

Eine **Chamäleon-Hashfunktion** CH besteht aus zwei PPT-Algorithmen $(Gen_{ch}, TrapColl_{ch})$:

- $Gen_{ch}(1^k)$ gibt (ch, τ) aus:
  - ch ist eine Funktion $ch : \mathcal{M} \times \mathcal{R} \to \mathcal{N}$
    - $\mathcal{M}$ Nachrichtenraum
    - $\mathcal{R}$ Zufallsraum
    - $\mathcal{N}$ Zielraum
  - τ ist eine **Trapdoor** (Falltür)
- $TrapColl_{ch}(\tau, m, r, m')$ für $(m, r, m') \in \mathcal{M} \times \mathcal{R} \to \mathcal{M}$ berechnet $r' \in \mathcal{R}$, sodass

$$ch(m, r) = ch(m', r')$$

Wer τ kennt, kann also Kollisionen berechnen.

3.1.2 Kollisionsresistenz

Eine Chamäleon-Hashfunktion $CH = (Gen_{ch}, TrapColl_{ch})$ ist **kollisionsresistent**, falls für alle PPT $\mathcal{A}$ gilt, dass

$$\Pr\left[\begin{matrix}(ch, \tau) \leftarrow Gen_{ch}(1^k) \\ \mathcal{A}(1^k, ch) = (m, r, m', r')\end{matrix} : \begin{matrix} ch(m, r) = ch(m', r') \\ \wedge (m, r) \neq (m', r')\end{matrix}\right] \leq negl(k)$$

für eine im Sicherheitsparameter k vernachlässigbare Funktion $negl$.

mail@nilslambertz.de
nilslambertz

3.1.3 DLog-Annahme

Setting:

- Zyklische Gruppe $\mathbb{G} = \langle g \rangle$
- Endliche Ordnung $|\mathbb{G}| = p$, p prim
- ($\mathbb{G}$ kommutativ)
- $\mathbb{G}$ abhängig vom Sicherheitsparameter k

Das **DLog-Problem** ist wie folgt definiert:

- Gegeben: Erzeuger g und $y \overset{\$}{\leftarrow} \mathbb{G}$
- Finde $x \in \mathbb{Z}_p : g^x = y$

Die **DLog-Annahme** ist folgende:

$\forall$ PPT $\mathcal{A}$ gilt:

$$\Pr[\mathcal{A}(1^k, g, g^x) = x : \langle g \rangle = \mathbb{G} \text{ zufällig}, x \overset{\$}{\leftarrow} \mathbb{Z}_p] \leq negl(k)$$

für eine im Sicherheitsparameter k vernachlässigbare Funktion $negl$.

3.1.4 Chamäleon-Hashfunktion basierend auf DLog

Wir konstruieren nun eine Chamäleon-Hashfunktion basierend auf DLog mit einer Gruppe $\mathbb{G}$, $|\mathbb{G}| = p$ prim und g Erzeuger von $\mathbb{G}$:

- ch beschreibt Funktion:
  - $ch : \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \to \mathbb{G}$
  - $ch(m, r) := g^m \cdot h^r$
- $Gen(1^k)$:
  - $x \overset{\$}{\leftarrow} \mathbb{Z}_p$
  - $h := g^x$
  - $ch := (g, h)$
  - $\tau := x$
- $TrapColl_{ch}(\tau, m, r, m')$: Berechnet r^*, sodass

$$\begin{aligned} & m + x \cdot r \equiv m^* + x \cdot r^* && \bmod p \\ \Leftrightarrow \quad & r^* = \frac{m - m^*}{x} + r && \bmod p \end{aligned}$$

Damit folgt

$$ch(m, r) = g^m \cdot h^r = g^{m+xr} = g^{m^*+xr^*} = g^{m^*} \cdot h^{r^*} = ch(m^*, r^*)$$

Chamäleon-Hashfunktion basierend auf dem RSA-Problem und Shamir's Trick weggelassen.