

Simulation des Keplerproblems

Constantin Schneider (constantinschneider94@gmail.com), Nils Wende (nils.wende@hotmail.com)
Mannheim, November 2015

1 Abstract

Dieses Kurzpapier erläutert die Simulation des Keplerproblems, d. h. der gegenseitig beeinflussten Bewegung zweier Massen ohne äußere Krafteinwirkung.

Dazu werden Grundlagen wie das Newton'sche Gravitationsgesetz beschrieben, um Gleichungen für die Beschleunigung der Massen herzuleiten. Mit Hilfe des Positions-Verlet-Algorithmus werden dann Geschwindigkeit und Position der Massen iterativ berechnet.

Die berechneten Daten werden mithilfe des zweiten Kepler'schen Gesetzes auf Plausibilität geprüft.

2 Einleitung

Das Keplerproblem ist nach dem Naturwissenschaftler Johannes Kepler benannt, der die nach ihm benannten Gesetze anhand von Beobachtungen Anfang des 17. Jahrhunderts aufstellte und veröffentlichte.

Die Kepler'schen Gesetze spielen in mehreren Bereichen der Physik eine wichtige Rolle.

In der Physik wird das Keplerproblem auch allgemein Zweikörperproblem genannt. Dort bezeichnet es das Problem, die Bewegung zweier Körper ohne äußere Krafteinflüsse zu berechnen, dies ist z. B. auch für zwei Atome denkbar.

Im astronomischen Kontext bezieht es sich z. B. auf die Wechselwirkung zwischen Planet und Mond, Sonne und Planet oder auch in einem Doppelsternsystem. In diesem Paper wird diese Wechselwirkung von Planeten genauer betrachtet.

Da alle äußeren Einflüsse ignoriert werden, stellt das Keplerproblem eine Idealisierung dar, die durch die großen Abstände im Universum – und die damit geringen exogenen Kräfte – trotzdem eine gute Näherung ist.

Die Abweichung wird deutlich, sobald die betrachteten Körper in der Realität keine perfekte Kugelgestalt haben. Damit ist auch die Masse der Körper ungleich verteilt, wie es z. B. bei den Gezeiten der Fall ist, wo sich die Masse der Körper abhängig von ihrer Position zueinander verschiebt.

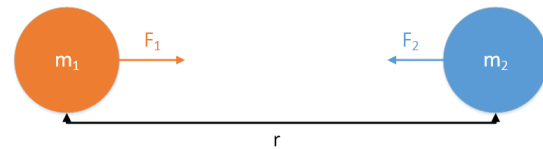


Abbildung 1: Die entgegengesetzten Anziehungskräfte der Massen.

In der Praxis werden die Kepler'schen Gesetze dazu verwendet, Planeten in anderen Sonnensystemen zu prognostizieren, die aufgrund zu großer Distanz zur Erde nicht erkennbar sind. Bei den wechselwirkenden Sternen kommt es ebenfalls zu Bewegungen um den Massenschwerpunkt beider Körper. Aufgrund des Dopplereffekts führt die zusätzliche Bewegung der Sterne zu einer Rotverschiebung, die durch Teleskope beobachtet werden kann. Somit können Rückschlüsse auf die Planeten gemacht werden. Außerdem werden die Kepler'schen Gesetze dazu benutzt, aus gegebenen Messdaten die Bahn eines Himmelskörpers zu berechnen.

3 Material und Methoden

3.1 Newton'sches Gravitationsgesetz

Das Newton'sche Gravitationsgesetz ist ein physikalisches Gesetz der klassischen Physik zur Berechnung der Kräfte, die zwei Körper aufeinander ausüben. Die Körper werden als Massenpunkte idealisiert. Jeder Massenpunkt wirkt auf jeden anderen Massenpunkt mit einer anziehenden Gravitationskraft ein.

Diese Gravitationskraft ist entlang der Verbindungslinie beider Massenpunkte m_1 und m_2 gerichtet (siehe Abbildung 1) sowie in ihrer Stärke proportional zum Produkt der beiden Massen und umgekehrt proportional zum Quadrat ihres Abstandes r . [5]

Es gilt also für den Betrag der beiden Kräfte F_1 und F_2 :

$$F = |F_1| = |F_2| = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad (1)$$

mit der Gravitationskonstante $G = 6,67408 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$.

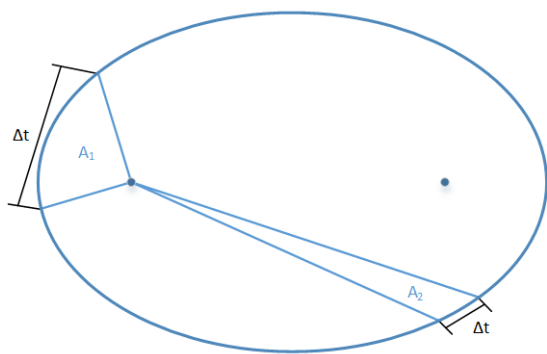


Abbildung 2: Zweites Kepler'sches Gesetz: A_1 und A_2 sind bei gleichem Δt gleich groß.

3.2 Kepler'sche Gesetze

Es gibt drei Kepler'sche Gesetze [4] :

1. Die Umlaufbahnen zweier Körper haben die Form einer Ellipse, in deren einem gemeinsamen Brennpunkt der Masseschwerpunkt des Systems liegt.
2. Der Fahrstrahl Objekt – Baryzentrum (Massenschwerpunkt des Systems) überstreicht in gleichen Zeiten die gleiche Fläche.

Abbildung 2 stellt dies dar. Das Baryzentrum ist hier gleichzeitig auch einer der Brennpunkte der Ellipse. Dies ist näherungsweise der Fall, wenn der Massenunterschied zwischen den betrachteten Objekten sehr groß ist, z. B. bei Erde und Sonne.

3. Teilt man das Quadrat der Umlaufzeit T eines Himmelskörpers durch die dritte Potenz seines mittleren Abstandes a zur Sonne, ergibt sich für jeden Planeten im Sonnensystem derselbe Wert C

$$C = \frac{T^2}{a^3} \quad (2)$$

Für die Sonne gilt $C_S = 2,97 \cdot 10^{-19} \frac{s^2}{m^3}$.

3.3 Herleitung der Beschleunigungsgleichungen

In einer Ebene bewegen sich zwei Massenpunkte m_1 und m_2 . Da sich beide Massen abhängig von der Zeit t bewegen, werden ihre Positionskoordinaten als $(x_1(t), y_1(t))$ und $(x_2(t), y_2(t))$ beschrieben. Abbildung 3 stellt diese Situation zu einem bestimmten Zeitpunkt t dar.

Da F_1 eine vektorielle Größe ist, kann sie auch, wie in Abbildung 4 zu sehen, komponentenweise als F_x und F_y ausgedrückt werden.

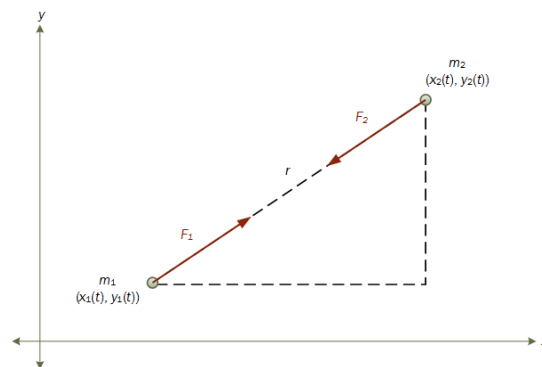


Abbildung 3: m_1 und m_2 haben den Abstand r zueinander und ziehen sich mit den vom Betrag her gleichen Kräften F_1 und F_2 an. [3]

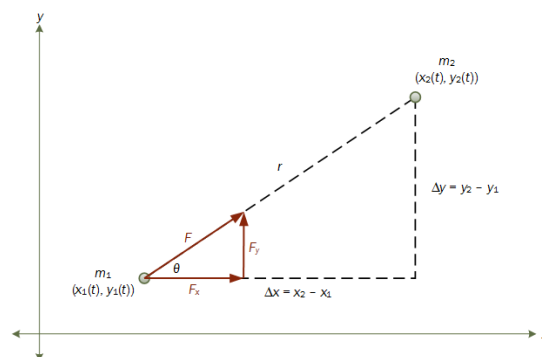


Abbildung 4: Die Komponenten von F_1 , anliegend an m_1 . [3]

Trigonometrisch ergibt sich:

$$F_x = F \cdot \cos \theta \quad (3)$$

$$F_y = F \cdot \sin \theta \quad (4)$$

Das größere Dreieck zeigt, dass

$$\cos \theta = \frac{\Delta x}{r} = \frac{x_2 - x_1}{r} \quad (5)$$

$$\sin \theta = \frac{\Delta y}{r} = \frac{y_2 - y_1}{r} \quad (6)$$

Für F_x ergibt sich damit durch Einsetzen der Gleichungen (1) und (5):

$$F_x = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot (x_2 - x_1)}{r^3} \quad (7)$$

Das zweite Newton'sche Gesetz besagt, dass

$$F = m \cdot a \quad (8)$$

Betrachtet man nur die x-Komponente der Vektoren F und a in Bezug auf die Masse m_1 , ergibt sich:

$$F_x = m_1 \cdot a_x \quad (9)$$

Wir haben nun mit den Gleichungen (7) und (9) zwei Ausdrücke für F_x :

$$\begin{aligned} F_x &= m_1 \cdot a_x \\ &= G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot (x_2 - x_1)}{r^3} \end{aligned} \quad (10)$$

Dividiert man durch m_1 , erhält man:

$$a_x = G \cdot \frac{m_2 \cdot (x_2 - x_1)}{r^3} \quad (11)$$

Der Abstand r zwischen den beiden Massen berechnet sich nach dem Satz des Pythagoras durch:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ &= [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (12)$$

Einsetzen in Gleichung (11) ergibt:

$$a_x = G \cdot \frac{m_2 \cdot (x_2 - x_1)}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (13)$$

Mit dieser Gleichung kann die Beschleunigung von m_1 in x-Richtung in Abhängigkeit der Koordinaten der Massen berechnet werden [3].

Analog lässt sich die Gleichung für die y-Komponente der Beschleunigung von m_1 aufstellen:

$$a_y = G \cdot \frac{m_2 \cdot (y_2 - y_1)}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (14)$$

Für m_2 sind die Beschleunigungsgleichungen ähnlich:

$$a_x = G \cdot \frac{m_1 \cdot (x_1 - x_2)}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (15)$$

$$a_y = G \cdot \frac{m_1 \cdot (y_1 - y_2)}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (16)$$

Zur Vereinfachung schreiben wir die vorangegangenen Gleichungen so, wobei die tiefgestellte Ziffer jeweils für die Masse m_1 oder m_2 steht:

$$a_{1x} := G \cdot \frac{m_2 \cdot (x_2 - x_1)}{\alpha} \quad (17)$$

$$a_{1y} := G \cdot \frac{m_2 \cdot (y_2 - y_1)}{\alpha} \quad (18)$$

$$a_{2x} := G \cdot \frac{m_1 \cdot (x_1 - x_2)}{\alpha} \quad (19)$$

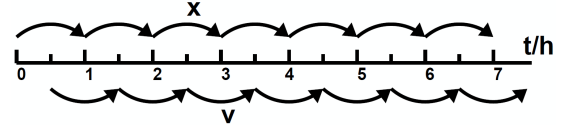


Abbildung 5: Die Struktur der Leapfrog-Methode. ([2], S. 2)

$$a_{2y} := G \cdot \frac{m_1 \cdot (y_1 - y_2)}{\alpha} \quad (20)$$

mit $\alpha := [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{\frac{3}{2}}$ und $\alpha \neq 0$.

Diese Gleichungen stellen die Beschleunigung eines Körpers in Abhängigkeit seiner Position dar [3].

Um Geschwindigkeit und Position zu einem späteren Zeitpunkt zu bestimmen, nutzen wir den Positions-Verlet-Algorithmus, der nachfolgend näher erklärt wird.

3.4 Positions-Verlet-Algorithmus

Der Positions-Verlet-Algorithmus ist ein sogenannter Leapfrog-Algorithmus, welcher zur numerischen Integration der Newton'schen Bewegungsgleichungen genutzt werden kann.

Abbildung 5 visualisiert die Idee hinter einem Leapfrog-Algorithmus. Mit den Startwerten x_0 und $v_{\frac{1}{2}}$ werden abwechselnd die Position und Geschwindigkeit der nächsten Iteration bestimmt, die hüpfende Bewegung der Pfeile erinnert dabei an das Bockspringen (engl. *leapfrog*).

Beim Positions-Verlet-Algorithmus wird allerdings entgegengesetzt zu Abbildung 5 vorgegangen:

Es wird erst ein halber Schritt für x , ein ganzer Schritt für v und dann wieder ein halber Schritt für x gemacht.

Dabei kommen folgende Gleichungen zum Einsatz, wobei das hochgestellte i den Index der jeweiligen Masse darstellt ([2], S. 5):

$$x_{n+\frac{1}{2}}^i := x_n^i + \frac{1}{2} \cdot \Delta t \cdot v_n^i \quad (21)$$

$$v_{n+1}^i := v_n^i + \Delta t \cdot a_{n+\frac{1}{2}}^i \quad (22)$$

$$x_{n+1}^i := x_{n+\frac{1}{2}}^i + \frac{1}{2} \cdot \Delta t \cdot v_{n+1}^i \quad (23)$$

Um die Genauigkeit zu verbessern, wird bei der ersten Iteration Gleichung (21) durch diese Gleichung ersetzt [3]:

$$x_{\frac{1}{2}}^i := x_0^i + \frac{1}{2} \cdot \Delta t \cdot v_0^i + \frac{1}{4} \cdot (\Delta t)^2 \cdot a_0^i \quad (24)$$

3.5 Simulationsalgorithmus

Die Nutzung des Positions-Verlet-Algorithmus führt zu folgendem Ablauf [3]:

1. Wähle einen kleinen Zeitschritt Δt .
2. Wähle die Masse und komponentenweise die initialen Positions- und Geschwindigkeitswerte der Körper.
3. Berechne die initialen Beschleunigungswerte a_0^i mit den Gleichungen (17) bis (20).
4. Berechne mit den Werten der a_0^i mit Gleichung (24) die Werte von $x_{\frac{1}{2}}^i$.
5. Wiederholung bis manueller Abbruch (Startwert $n := 0$):
 - a) Berechne mit den Werten der $x_{n+\frac{1}{2}}^i$ mit den Gleichungen (17) bis (20) die Werte der $a_{n+\frac{1}{2}}^i$.
 - b) Berechne mit den Werten der $a_{n+\frac{1}{2}}^i$ mit Gleichung (22) die Werte der v_{n+1}^i .
 - c) Berechne mit den Werten der v_{n+1}^i mit Gleichung (23) die Werte der x_{n+1}^i .
 - d) Zeige die neuen Positionen der Massen an.
 - e) Berechne mit den Werten der x_{n+1}^i mit Gleichung (21) die Werte der $x_{n+\frac{3}{2}}^i$.
 - f) Setze $n := n + 1$.

4 Durchführung

Nutzen wir den Algorithmus, um beispielsweise das Erde-Mond-System zu simulieren, können wir die folgenden Initialwerte (einige aus [1] entnommen, v_{y_0} der Erde experimentell bestimmt) setzen:

– Erde:

- $m := 5,9726 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
- $x_0 := 0,4055 \cdot 10^9 \text{ m}$
- $y_0 := 0,4333 \cdot 10^9 \text{ m}$
- $v_{x_0} := 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- $v_{y_0} := -11,86188 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

– Mond:

- $m := 7,3492 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
- $x_0 := 0 \text{ m}$
- $y_0 := 0,4333 \cdot 10^9 \text{ m}$
- $v_{x_0} := 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$\bullet v_{y_0} := 964 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Wir wählen $\Delta t := 1h$ und führen zwischen jeder Ausgabe der Werte die Berechnung 6-mal hintereinander durch, woraus sich ein effektives Δt von $6h$ ergibt.

5 Ergebnis

Das Ergebnis der Simulation wird in Abbildung 6 dargestellt. Beide Massen bewegen sich jeweils auf einer Ellipsenbahn um das gemeinsame Baryzentrum durch den Raum. Abbildung 7 zeigt das Ergebnis vergrößert auf die Bahn der Erde.

Die Simulation entspricht dem zweiten Kepler'schen Gesetz. Für unser $\Delta t = 6h$ erhält man für die als Dreieck angenäherte Fläche des Fahrstrahls zwischen Erde und Baryzentrum einen Wert zwischen $6,3106 \cdot 10^{11} \text{ m}^2$ und $6,3114 \cdot 10^{11} \text{ m}^2$, für die Fläche zwischen Mond und Baryzentrum einen Wert zwischen $4,1679 \cdot 10^{15} \text{ m}^2$ und $4,1684 \cdot 10^{15} \text{ m}^2$.

Beide unterscheiden sich jeweils nur um $8 \cdot 10^7 \text{ m}^2$ bzw. $5 \cdot 10^{11} \text{ m}^2$ sind damit näherungsweise konstant. Die Abweichungen können mit der Dreiecksnäherung erklärt werden.

Experimentell ließ sich der Zusammenhang der Körpermassen (m_1, m_2), sowie der Körpergeschwindigkeiten (v_1, v_2)

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{|v_2|}{|v_1|} \quad (25)$$

erkennen.

Für das hier simulierte Erde-Mond-System liegt dieser Quotient bei 81,26871.

6 Diskussion

Es hätte auch der Verlet-Algorithmus ([2], S. 5f) benutzen werden können, da wir die Geschwindigkeiten der Körper während der Simulation nicht auswerten müssen.

Dieser ist allerdings bei sehr kleinen $\Delta t \ll 1s$ anfälliger für Rundungsfehler und wird daher von uns nicht benutzt.

Die Initialgeschwindigkeit der Erde ist nicht ganz korrekt gewählt. Dies zeigt sich darin, dass die y-Position des Baryzentrums mit $0,0108 \frac{\text{m}}{\text{h}}$ langsam ansteigt. Je näher die gewählte Geschwindigkeit an die tatsächlich benötigte Geschwindigkeit angenähert wird, desto geringer wird die Bewegung des Baryzentrums.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass der Algorithmus zur Berechnung der Flugbahnen er-

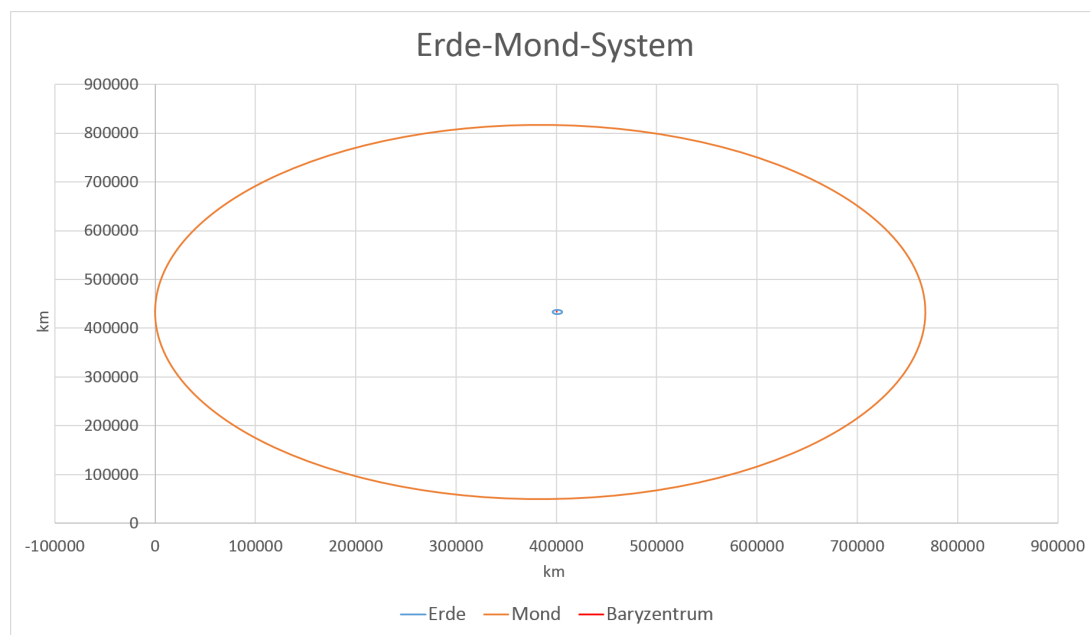


Abbildung 6: Ergebnis der Simulation des Erde-Mond-Systems.

folgreich anhand von grundlegenden Gesetzesmäßigkeiten hergeleitet wurde. Die Kepler'schen Gesetze wurden vorgestellt und das Ergebnis ist eine Simulation der Flugbahnen von Sonne und Mond, deren Korrektheit anhand des zweiten Kepler'schen Gesetzes verifiziert wurde.

Zusätzlich hätten die Ergebnisse auch mit den anderen beiden Kepler'schen Gesetzen überprüft werden können.

Die Simulation kann auch auf das Dreikörperproblem erweitert werden. Es beschreibt die gegenseitige Beeinflussung dreier Körper und wird analog behandelt, die Berechnung wird entsprechend komplexer. Theoretisch könnten sogar beliebig viele Körper betrachtet werden.

Ein weiteres Maß an Komplexität wird erreicht, wenn die Körper nicht als Massenpunkte angesehen werden, sondern als Körper mit einer Ausdehnung im Raum. Diese kann zusätzlich auch unregelmäßig oder veränderbar sein, was zum Beispiel bei Erde und Mond der Fall ist, denn das Wasser auf der Erde wird durch die Wechselwirkung mit dem Mond bewegt (Gezeiten).

Es ist auch eine genauere Betrachtung der Einflüsse der Relativitätstheorie möglich, die bei zunehmender Geschwindigkeit der Körper eine bedeutendere Rolle spielt.

/factsheet/moonfact.html

- [2] P. Young: *The leapfrog method and other "symplectic" algorithms for integrating Newton's laws of motion*, o.O. 2014
- [3] MSDN: *The physics and equations of the two- and three-body problem*, o.O. o.J., [https://msdn.microsoft.com/en-gb/library/dn528554\(v=vs.85\).aspx](https://msdn.microsoft.com/en-gb/library/dn528554(v=vs.85).aspx)
- [4] Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V.: *Kepler'sche Gesetze*, 2015, <http://www.einstein-online.info/lexikon/KeplerGesetze>
- [5] Wikipedia: *Newtonsches Gravitationsgesetz*, o.O. 2015, https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Newtonsches_Gravitationsgesetz&oldid=147646332

Literatur

- [1] D. R. Williams: *Moon Fact Sheet*, Greenbelt 2015, <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary>

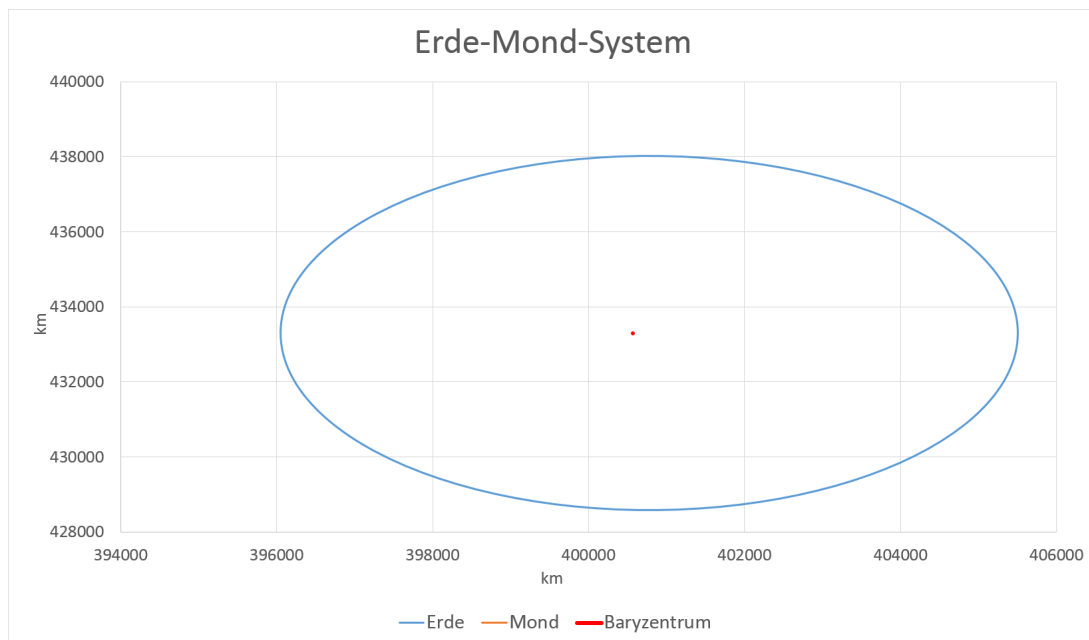


Abbildung 7: Zoom auf die Erdbahn mit Baryzentrum.