Simulation des Keplerproblems

Constantin Schneider, Nils Wende

Agenda

1. Einleitung
2. Material und Methoden
3. Durchführung
4. Ergebnis

1. Einleitung

- Zweikörperproblem

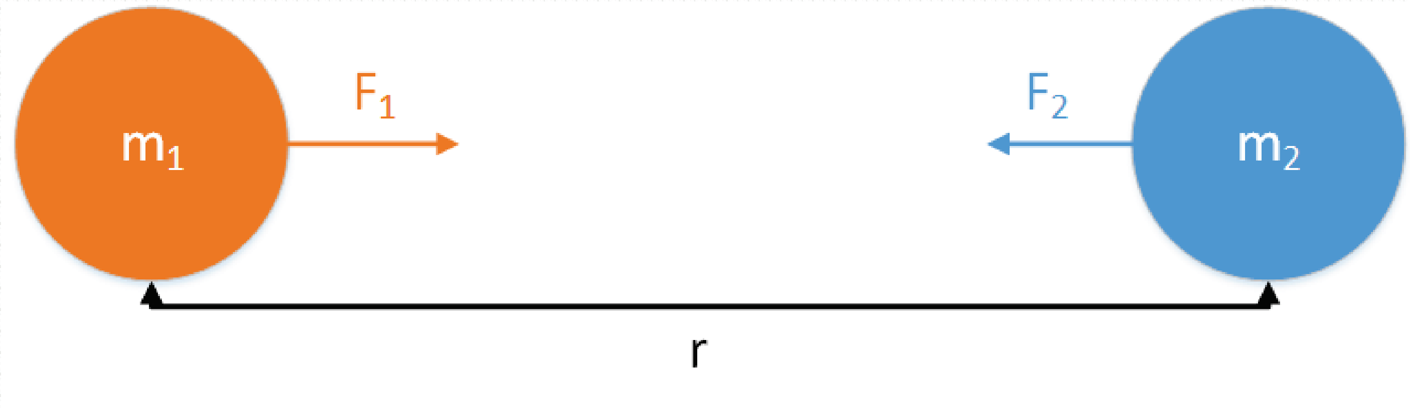
- Bewegung zweier Körper ohne äußere Krafteinflüsse

2. Material und Methoden

- Newton’sches Gravitationsgesetz

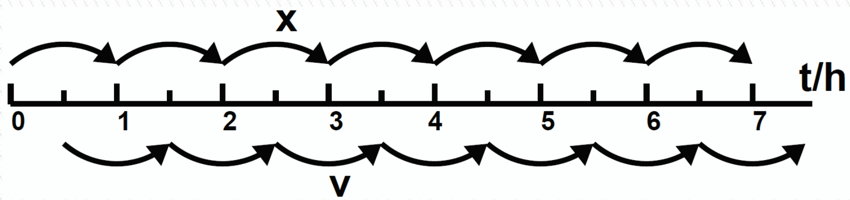
- Positions-Verlet-Algorithmus

2.1 Newton'sches Gravitationsgesetz



$$F = |F_1| = |F_2| = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

2.2 Positions-Verlet-Algorithmus



$$x^i_{n+\frac{1}{2}} := x^i_n + \frac{1}{2} \cdot \Delta t \cdot v^i_n \qquad (1)$$

$$v^i_{n+1} := v^i_n + \Delta t \cdot a^i_{n+\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

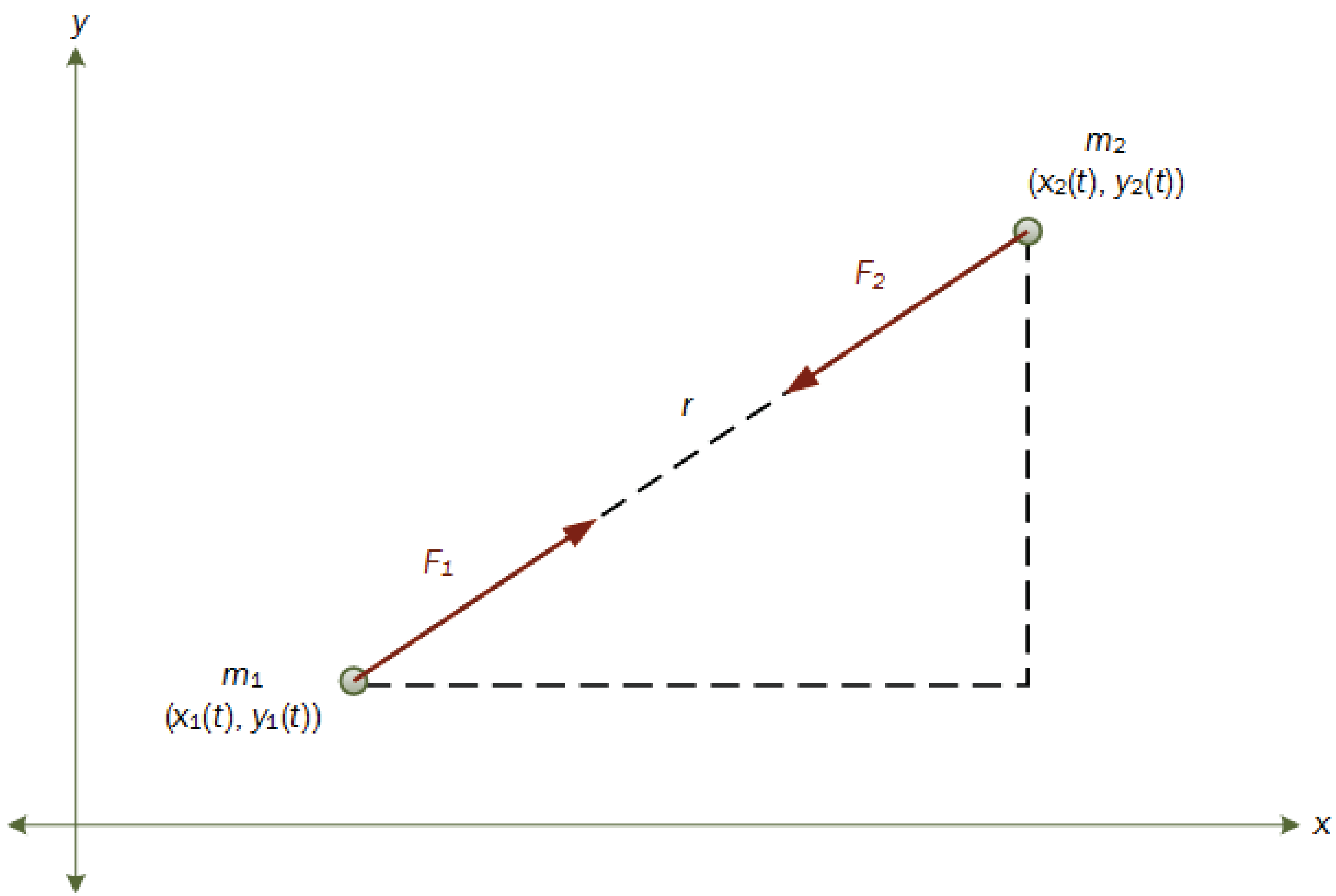
$$x^i_{n+1} := x^i_{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \Delta t \cdot v^i_{n+1} \qquad (3)$$

$$x^i_{\frac{1}{2}} := x^i_0 + \frac{1}{2} \cdot \Delta t \cdot v^i_0 + \frac{1}{4} \cdot (\Delta t)^2 \cdot a^i_0 \qquad (4)$$

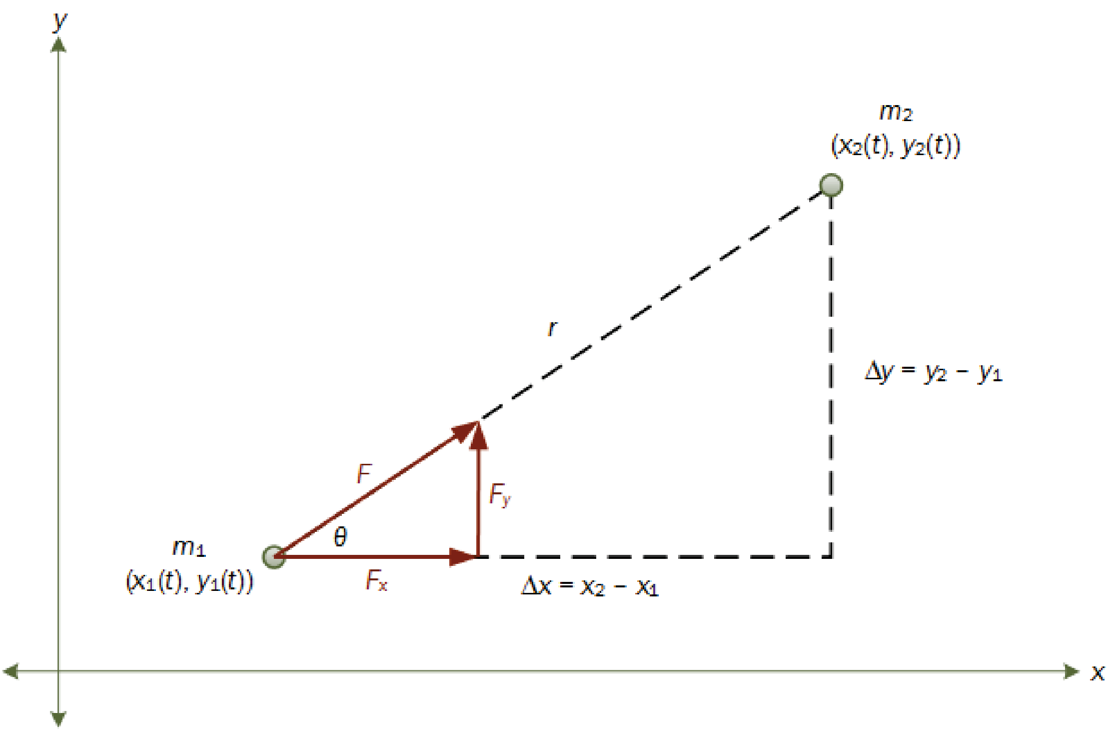
Leapfrog-Methode

Positions-Verlet-Gleichungen

3. Durchführung



3. Durchführung



$$F_x = F \cdot \cos\theta \tag{6}$$

$$F_y = F \cdot \sin\theta \tag{7}$$

$$\cos\theta = \frac{\Delta x}{r} = \frac{x_2 - x_1}{r} \tag{8}$$

$$\sin\theta = \frac{\Delta y}{r} = \frac{y_2 - y_1}{r} \tag{9}$$

3. Durchführung

$$F_x = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot (x_2 - x_1)}{r^3} \tag{10}$$

$$F = m \cdot a \tag{11}$$

$$F_x = m_1 \cdot a_x \tag{12}$$

$$a_x = G \cdot \frac{m_2 \cdot (x_2 - x_1)}{r^3} \tag{14}$$

3. Durchführung

$$r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ = \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{15}$$

$$a_x = G \cdot \frac{m_2 \cdot (x_2 - x_1)}{\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{16}$$

3.1 Beschleunigungsgleichungen

$$a_{1_x} := G \cdot \frac{m_2 \cdot (x_2 - x_1)}{\alpha} \tag{20}$$

$$a_{1_y} := G \cdot \frac{m_2 \cdot (y_2 - y_1)}{\alpha} \tag{21}$$

$$a_{2_x} := G \cdot \frac{m_1 \cdot (x_1 - x_2)}{\alpha} \tag{22}$$

$$a_{2_y} := G \cdot \frac{m_1 \cdot (y_1 - y_2)}{\alpha} \tag{23}$$

mit $\alpha := [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{\frac{3}{2}}$ und $\alpha \neq 0$.

4. Ergebnis

1. Wähle einen kleinen Zeitschritt Δt.
2. Wähle die Masse und komponentenweise die initialen Positions- und Geschwindigkeitswerte der Körper.
3. Berechne die initialen Beschleunigungswerte a_0^i mit den Gleichungen (20) bis (23).
4. Berechne mit den Werten der a_0^i mit Gleichung (5) die Werte von $x^i_{\frac{1}{2}}$.

4. Ergebnis

5. Wiederholung bis manueller Abbruch (Startwert $n := 0$):
   a) Berechne mit den Werten der $x^i_{n+\frac{1}{2}}$ mit den Gleichungen (20) bis (23) die Werte der $a^i_{n+\frac{1}{2}}$.
   b) Berechne mit den Werten der $a^i_{n+\frac{1}{2}}$ mit Gleichung (3) die Werte der v^i_{n+1}.
   c) Berechne mit den Werten der v^i_{n+1} mit Gleichung (4) die Werte der x^i_{n+1}.
   d) Zeige die neuen Positionen der Massen an.
   e) Berechne mit den Werten der x^i_{n+1} mit Gleichung (2) die Werte der $x^i_{n+\frac{3}{2}}$.
   f) Setze $n := n + 1$.

Simulation des Keplerproblems

Constantin Schneider, Nils Wende