数学は最強の頭脳スポーツ

Lynn Noda

October 31, 2021

0 はじめに

パズルは好きかな？ルービックキューブ、知恵の輪、倉庫番、ハナヤマパズル、数独、「IQ、謎解き、なぞなぞ」問題、論理パズル、様々なものがあるけど、どれも「考えること」、「悩むこと」の楽しさを与えてくれます。ゲームでいうと、テトリス、大富豪、様々なカードゲーム、オセロ、将棋、囲碁、麻雀、チェス、マンカラ、などが王道でしょう。実をいうと、この中で一つでも「好き」といえるものがあれば、数学は好きになれます。なぜなら、数学はそれらのものと関係があるからです。具体的に言うと、「数学的思考」はこれらのパズルやゲームに潜んでいるといえるでしょう。言い直せば、「数学」というものは最強の頭脳スポーツです。

では、なぜ「数学」や「算数」という言葉に対して嫌悪感を感じているのか。もちろん、「考えるのが好きじゃない」、「パズル・ゲームはそんなに好きじゃない」というなら納得できるでしょう。でも、もし一つでも好きなものがあれば、数学への道は意外と単純です。ただ、その「好き」な世界を広げていくだけなのですから。もちろん、これは簡単なことではありませんが、今学校や塾でやらされている事よりは、はるかに効率的です。ぶっちゃけて言うと、逆に今まで「算数」や「数学」が好きになれなかったのはその教育制度のせいでしょう。「正解」の答えによって自分の社会的価値を図られ、面白くもない計算ばかりをやらされて、トラウマにもなるのも無理もないでしょう。でも、もし「数学」をオセロや大富豪、なぞなぞをするみたいに楽しめるようになれたら、一生楽しめ、役に立つ趣味ができます。いや、それ以上の「何か」になる可能性だってあります。それを僕は君にプレゼントしたいものです。数学が苦痛な世界よりも、数学が楽しい世界の方が魅力的ですからね。正直にいうと、「数学」が好きになれなかった人は人生を損していると思います。数学者、ポール・エルデシュがいうに、「数学をやめた人は死んだのも同然だ」。

さらに、「数学」は「数」だけの勉強ではないのです。日本語では「数学」と呼ばれていますが、英語では「Mathematics」、由来は古代ギリシャ語の「máthēma」、「知識、研究、学習」という意味が含まれています。数は数学にとても重要ですが、基本的にはそれ以上のものを研究する学問です。

今は「中学」というとても難しい学年にいます。宿題は出るし、テストもあるし、成績のことも言われます。これを乗り切るには数学を好きになるしかもう手はないでしょう。しかも、好きすぎて、暇な時にやってしまうぐらい大好きに。では、数学を好きになるにはどうすればいいか。まずは先程述べた好きなパズルやゲームを色々やって「思考力」を上げること。もしそういったものがないなら、簡単なもの [0]からやってみて、面白味を感じることです。いろいろな質問、問題、パズル、ゲームに時間を費やすことによって、思考力というものは育ちます。ハードルをさらに下げるために、「思考・推理系」アニメ、漫画、ドラマなどを見てもいいでしょう。個人的なお勧めは甲斐谷忍さんの「ONE OUTS」と「LIAR GAME」、と福本伸行さんの「カイジ」です。あと、パソコンゲームで特に好きなものは「Baba is you」、「Recursed」、「Superliminal」、と「Cosmic Express」です。もしよかったら調べてみてね！

1 数とのふれあい

数学は計算を速くすることや答えを導くことよりも、「自分の思考を生み出す」能力が求められます。「間違った考え」、「正しい解答」はないから、自由に考えてみてね！

１． １と１０の間に数はいくつあるでしょう？

２． 自分を含め、卓球部員は３２人います。もし、みんなが全員、同時に卓球をはじめたら、何試合できるでしょう？

３． 次の日、遅刻して部活にたどり着くと、みんながもう卓球の試合をはじめています。この時、何試合、行われているでしょう？

４． 卓球玉が全部で１２０個あり、チーム１０団に均等に配る時、各チームで使われるボールの数はいくつでしょう？チームが１１団ある場合はいくつでしょう？

５． 式 $10b = 120$ と $11b = 120$ で、b の値はそれぞれ何でしょう？

６． 問題４の答えと問題５の答えを比べてみて、何か気づいたことはあるかな？

７． １ $\div$ ７は何でしょう？

８． 長さ１cmの紐を三等分したら、一本の紐の長さは何cmでしょう？

９． おじいさんとおばあさんがおまんじゅうを食べています。おじいさんがおまんじゅうを一つ食べるあいだに、おばあさんはおまんじゅうを三つ食べます。もし、この調子でおまんじゅうを食べて、おじいさんがおまんじゅうを四つ半食べたら、おばあさんはおまんじゅうをいくつ食べてるでしょう？おじいさんがおまんじゅうを食べていない場合、おばあさんはおまんじゅうをいくつ食べてるでしょう？

2　割り切れるものと割り切れないもの

上の問題を考えている最中、数や数を表しているものに対し、色々な発見があったと思います。そして、一つ重要な気づきとして、「割り切れるもの」と「割り切れないもの」[1] があるということです。

具体的には、「長さ」、「時間」、「重さ」などの単位は（０を含まない）どんな数でも割り切れるけど、「人数」、「ボールの数」、「本のページの枚数」みたいな単位は割り切れない数があるということです。つまり、「あまり」が生じるものは「割り切れないもの」といっていいでしょう。

例１： ７cmの紐を２等分したら、一本３．５cmになるけど、７人を二組に分けたら、必ずひとりあまります。７cmの紐は何等分にも分けられるけど、７人は７と１以外の数では分けることができません。

3　掛け算と割り算の意味と解釈

掛け算と割り算は小学生がするものだと思うかもしれないけど、意外と数学的に面白い演算です。そしてその解釈 [2]によって、問題の考え方や分からないモヤモヤがすっきりする場合があります。

3.1　掛け算は足し算の繰り返し

先程の「割り切れないもの」の場合は、「足し算の繰り返し」と考えられます。例えば、５ $\times$ ６をおまんじゅうを五つ食べて、それを六回くりかえすと考えると、次の式が得られます。

例２： ５**掛ける**６は

$$5 \times 6 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30$$

で、合計３０ということになります。

なので、掛ける数が整数ならこの解釈に意味が生まれます。次に、この解釈が通じない場合を見ていきましょう。

3.2　掛け算は数の倍増や拡大

もし、誰かに「７．１２３ × １．４５６は何？」と聞かれたら、さっきの話は全く通じません。そもそも「繰り返し」という概念すらなくなってしまうのですから。では、これをどう解釈すればいいか考えてみましょう。

例題１：７．１２３ × １．４５６ってどういう意味？

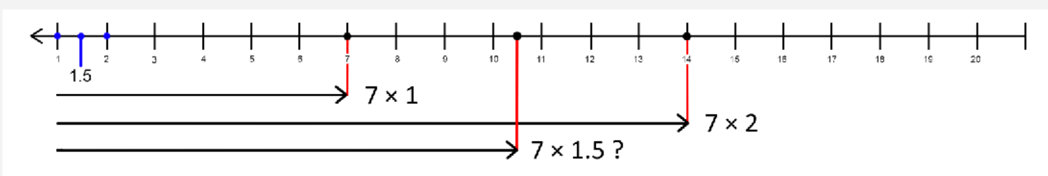
例題１の説明：７．１２３ × １．４５６ってどういう意味？

まず、７．１２３と１．４５６という曖昧な数が二つあるので、もっと理解しやすくするために、一方の数字を簡単なものにしてみます。例えば、７．１２３ × １．４５６を考えるのではなく、７ × １．４５６から考えてみる。さらに、１．４５６が１．５に近いため、７ × １．４５６を７ × １．５に変えてみる。

そして変形された例題は以下になります。

７ × １．５ってどういう意味？

１．５という数字はちょうど１と２の真ん中の数。７を１で掛けたら７だし、７を２で掛けたら、１４になります。じゃあ、もしかして「７を１．５で掛けたら７と１４のちょうど真ん中の数なのでは？」という発想に至ります。これを数直線で描いたら分かりやすいでしょう。



実は上に描かれているのはまさに７ × １．５の１０．５です。ここで気付いてほしいことが二つあります。ひとつは１，１．５，２を７で「掛けた」ということは７，１０．５，１４にそれぞれ**拡大**したこと（１．５ × ７）。そして、もう一つは７を**１．５倍**した数値が７ × １と７ × ２の真ん中だということ（７ × １．５）。

実際の数値を確かめてみると、７．１２３ × １．４５６は１０．３７１０８８です。掛け算の仕方を全く知らなくても、掛け算の解釈によって、１０．５というとても近い数値が得られたのです。

ここで理解してほしいことは、掛け算は数の**「拡大と倍増」**という意味があるということです。

実は、ここでひとつ嘘をついています。掛け算は「拡大と倍増」だといいましたが、そうでない場合があるのです。必ず数を掛けると大きくなる保証はないのです。次の問題に取り組んで、なぜそうなのかを考えてみてよう。

例題２：７に０．５を掛けたら「拡大・倍増」しますか？掛けて絶対に拡大するのは、どんなときでしょう？

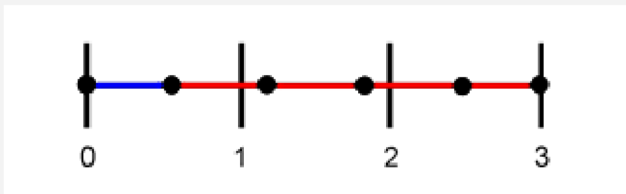
この現象の理由は次の章で明らかになります。

3.3　割り算は数を均等に分ける

割り算と聞いて一番最初に思い浮かぶ解釈がこれです。ある数を割るということは、つまり均等に分けるということ。割り切れる整数（例えば、１２ ÷ ６＝２）なら簡単だけど、次の例題はどうでしょう？

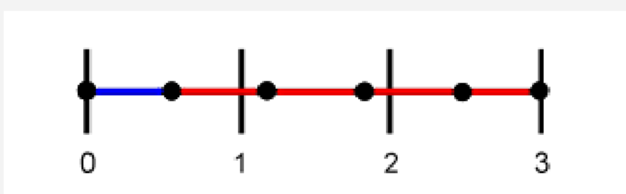
> **例題３：** ３を５で割ったらいくつになるでしょう？

そもそも、ある数をそれよりも大きな数で割るってどういうことだろう？もちろん、前回みたいに「割り切れないもの」なら数がただ余るだけだけど、「割り切れるもの」の場合、どういう意味があるか考えてみよう。

> **例題３の説明：** ３を５で割ったらいくつになるでしょう？
>
> これもまた、前回と同様、数直線を描けば分かりやすいでしょう。
>
> 
>
>
> ３cmの線を五等分にしたら、一本だいたい０．５cmだとわかります。実際は０．６cmです。大事なのは線や他の「割り切れるもの」を使って「割ること」の意味を見つけることです。似たような例として、水の量を均等に分けるイメージがあります。

3.4　割り算は数の収縮

割り算のもう一つの解釈は数を収縮することです。つまり、掛け算の逆っていうことになります。さっきの例題を使って考えてみましょう。

> **例題３の説明２：** ３を５で割ったらいくつになるでしょう？
>
> これもまた、前回と同様、数直線を描けば分かりやすいでしょう。
>
> 
>
>
> この場合、「３を均等に分ける」と考えるのではなく、３cmの線全体を、０．６cmの青い線に圧縮するイメージです。だから、１は０．２に移り、２は０．４に移り、３は０．６に移る感じです。すなわち、３を５倍収縮するということです。

おっと！ここでまた嘘をついてしまった！割り算は数を「収縮」すると宣言しましたが、そうでない場合があります。次の例題で探ってみてね。

例題４：ある数を他の数で割って元の数が大きくなる（拡大する・倍増する）のはどんなときでしょう？

他にも掛け算、割り算、数学的概念の解釈は色々たくさんあります。それを見つければ見つけるほど「数学の能力[3]」が上がり、いつの間にか授業を追い抜くぐらい数学ができるようになってると思います。

4　割り算と分数の違い

4.1　小数と分数と割り算

「小数で表現できる数は必ず分数になるのか？」こんなことを小学生か中１のころ学んだと思います。具体的には、小数を分数に直す方法と分数を小数に直す方法。もし忘れているなら、どうやって変換するかをちょっと考えてみてから調べてみよう！

さて、なぜこれが重要になってくるかというと、中二で出てくる場合、小数は分数だからです[4]。もし小数＝分数と考えてもいいのなら、もちろん分数は割り算の表し方なので、小数＝分数＝割り算[5]と考えられるはずです。ここで気付いてほしいポイントとして、小数＝分数＝割り算なら、小数＝割り算っていうことです！だから、割り算って結局のところ数字なんです！演算が数字？はぁ〜? っと思うかもしれないけど、前にもいったように、数学では解釈が命です。「割り算」という名前がついている場合は演算とみなすけど、「小数」や「分数」という名前がついている場合は数字なんです！

では、割り算をすべて数に変えられるのでは…？

4.2　有理数：割り算が消える世界

ついさっき、割り算をすべて数に変えれるといいました。ということは、中二の数学は数と、足し算、引き算、掛け算でほぼ完結するのです。次の定義を見てから、そのことがわかります。

有理数の定義：整数 a と b があるとして、b が０でない場合、

$$\frac{a}{b}$$

は有理数という。

あれ？これってただの分数じゃないの？と思うかもしれないけど、有理数の特徴は分母が両方とも整数だということです。そうでない数は中三に入ってから出会います。では早速問題です。

例題５：数

$$\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$$

は有理数でしょうか？

さっきいったのは、有理数の世界では「割り算が消える」ということです。では、どのようにして上の割り算を消せるのか考えてみましょう。

例題５の説明：数

$$\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$$

は有理数でしょうか？

$$\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$$

を x と置き換えて、x を求めます。

$$x = \frac{1}{2} \div \frac{3}{5} \tag{1}$$
$$x \times \frac{3}{5} = \frac{1}{2} \div \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \tag{2}$$
$$x \times \frac{3}{5} = \frac{1}{2} \tag{3}$$
$$x \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} \tag{4}$$
$$x = \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} \tag{5}$$
$$x = \frac{5}{6} \tag{6}$$

求めた数 x が「整数/整数」の形のため、$\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$ は有理数です。

あともう一つ気づいてほしい部分として、ステップ１とステップ５を比べてみたら、ある奇妙な現象が起きています。

$$x = \frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$$

と

$$x = \frac{1}{2} \times \frac{5}{3}$$

ならば、

$$\frac{1}{2} \div \frac{3}{5} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{3}$$

です。表記的に、これをこう解釈できます：「ある数を有理数で割るということはその逆数で掛けること」。すなわち、割り算が完全に消せる現象ということです。これは、$\frac{1}{2}$ や $\frac{3}{5}$ の数に限らない議論なので、有理数ぜんたいにこの現象がおこります。

上の考え方は直感的にはわかりにくいですが、数学的には立派な結果です。解釈は式変形によって行われたもの。つまり、「代数的」、「表記操作」の解釈と言えるでしょう。直感的ではない数学の結果は「放題」や「定理」と言います。では、いま発見した結果を放題として言い直しましょう。

逆数の放題：ある数 a を有理数 $\frac{b}{c}$ で割るとき、その結果は「a」と「$\frac{b}{c}$ の逆数」の積である。つまり、

$$a \div \frac{b}{c} = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

である。

もし割り算が必要ないなら、なぜ掛け算や割り算の解釈は大事だ！と言ったのでしょうか？それは「有理数を理解」するためです。割り算自体を全滅させたかに見えますが、ただただ「数」としてみなしているだけです。割り算の存在そのものがこの有理数を生み出しているのです。

では、この新しい知識で例題２と例題４に戻ってみましょう。

例題２：７に０．５を掛けたら「拡大・倍増」しますか？掛けて絶対に拡大するのは、どんなときでしょう？

例題４：ある数を他の数で割って元の数が大きくなる（拡大する・倍増する）のはどんなときでしょう？

一見まったくつながりのない例題たちに見えるけど、実はこれ「有理数の掛け算」という同じ現象です。

有理数の掛け算定理：ある数 $x > 0$ に有理数 $\frac{p}{q} > 1$ を掛けるとき、積

$$x \times \frac{p}{q} = \frac{xp}{q}$$

は**拡大・倍増**し、有理数 $0 < \frac{r}{s} < 1$ を掛けるとき、積

$$x \times \frac{r}{s} = \frac{xr}{s}$$

は**収縮**しています。つまり、

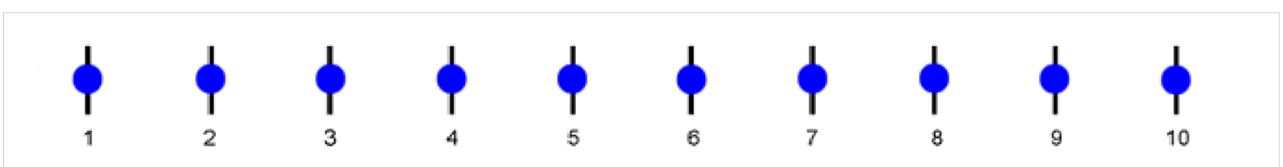
$$\frac{xr}{s} < x < \frac{xp}{q}$$

です。

上の定理はとても怖く見えるかもしれないけど、条件に沿って x、p、q、r、s に数をいろいろ当てはめて実験するうちに恐怖は薄れていくでしょう。実験することで、ある法則性が見えてきて、なぜ定理が成り立つかが分かると思います。そして、たぶん例題２と例題４の意味が分かってくるでしょう。もし頭がくらくらして全く手が付けられないほどになったら、他の人と一緒に考えてみよう。絶対に理解できるようになります。

4.3　点と点を線で結ぶ？

分数や小数というものに出会う以前、「数字」という概念はとても分かりやすかったと思います。図にすると、以下のようなものでしょう：



けれど、小数、分数、そして有理数の導入で、１．５や、$\frac{2}{3}$ みたいな数が現れ、数と数との間みたいなものがでてきました。なら、もし有理数のみを数直線上に描いたらどうなるでしょう？ちゃんと線になるのか、いわゆる「数の穴」みたいなものがあるのだろうか？「有理数ではない小数・分数」は存在するのだろうか？これは中三になってからのお楽しみです。けれど、もし興味があったら、考えてみて欲しいです。

5　最後に

数学を理解する上で最も大事なことは「問題解決能力」と「解釈力」です。そして、その二つの能力を上げるには「実験[6]」が大量に必要です。理科みたいに壮大な装置や材料が全く必要のない、紙の上での「実験」です。数学で、もし分からない事があるとき、それに対し、どう質問を作り上げ、どう考えていくか

が理解を深めていく基礎です。

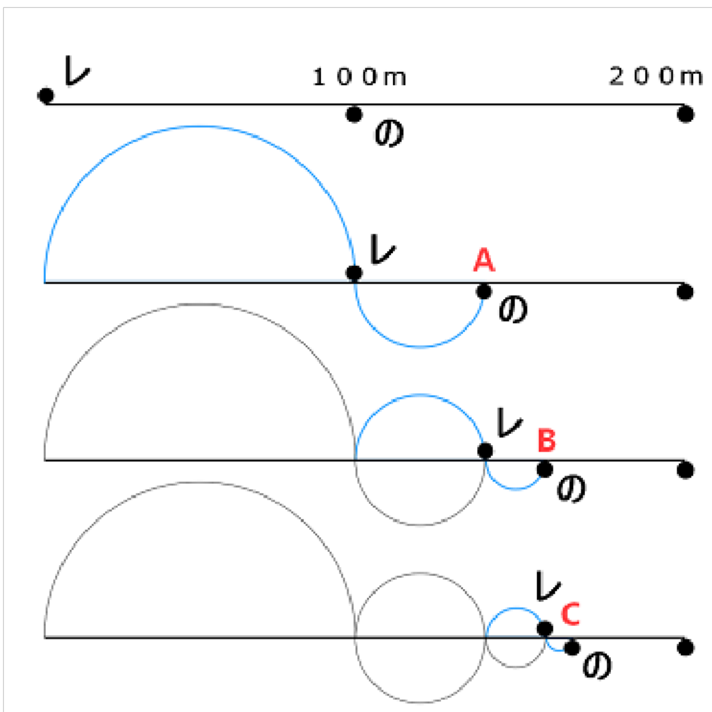
そして、それらの能力を鍛えるために、いくつか問題を作りました。一番最初と同様に、「間違った考え」や「正しい解答」はないから、自由に考えてみてね！今回の問題集は最初に比べ、ぱっと１時間程度でできるようなものではないです。何時間、何日、何週間かけて解ける、理解できる物がたくさんあります。もちろん、全部しようと思わなくていいし、面白そうなやつだけを選択して構いません。電卓を使ってもオッケーです。あと、自分で全部するのではなく、他の人と一緒に考えるのをお勧めします。例えば、学校の先生、塾の先生、クラスメイトたちや、家族などと考えるのがいいでしょう。

１. １と２の間に数はいくつあるでしょう？一番最初の問題に比べ、何か新しい気づきはあるかな？

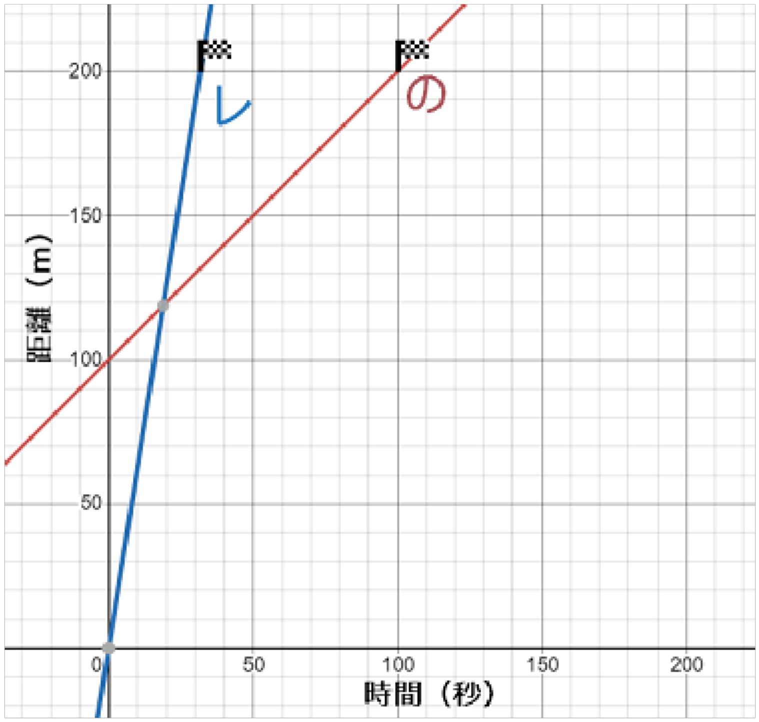
２.「ゼノンのパラドックス」君とのび太君は２００m走をすることにしました。君は中二の陸上部です。のび太君は小４の運動音痴です。当然、君の方が足が速いので、のび太君にあるハンデをあげることにしました。そのハンデはのび太君は中間地点からスタートしていいという条件です。君ものび太君も一定の速度で走るとして、競争が始まります。

驚くことに、君はどんなに早く走っても、のび太君に追いつけません。

まず、君はのび太君がいたスタート地点まで走り、その間に、のび太君はそのスタート地点より少し離れた場所につきます。これを A 地点と名付けましょう。次に、君はその A 地点まで走ります。同時に、のび太君はその A 地点よりまたもう少し離れた場所につきます。これを B 地点と名付けましょう。また、君はその B 地点まで移動し、のび太君はその B 地点よりもっと少し離れた C 地点に到着します。この理屈をずっと繰り返せば、君はのび太君に追いつくことなく競争は終了してしまいます。では、なぜ君の方が足が速いのにのび太君に追いつけないか考えてみましょう。

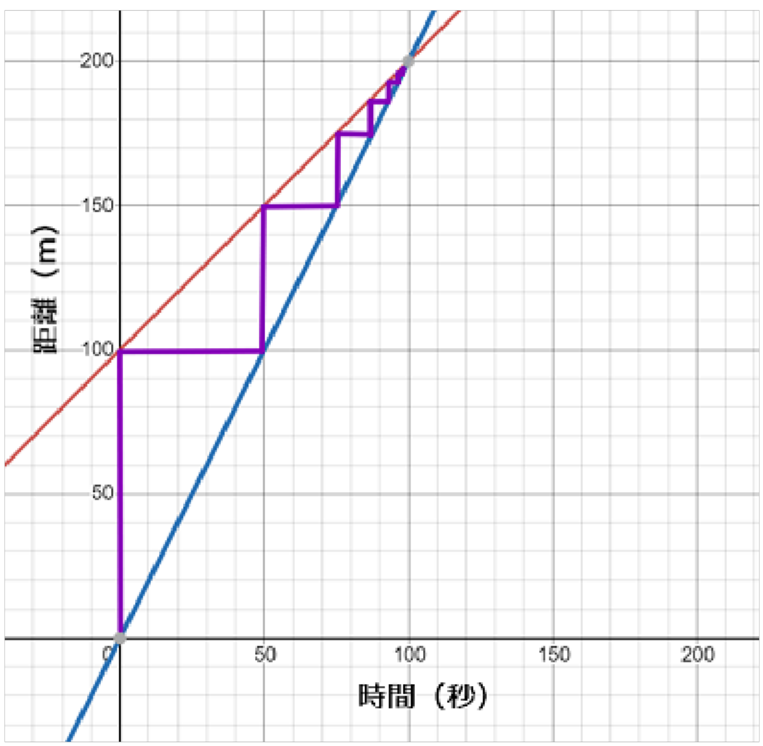


３. さっきの問題の状況をグラフ化すると、このようになるとします：



さっきの結果と比べ、ある矛盾が生じてます。それは何でしょう？もし、のび太君の速度が同じで、君はのび太君と同時にゴールしたい場合、時速何秒で走ればいいでしょう？もし君の速度が同じで、のび太君は君と同時にゴールしたい場合、時速何秒で走ればいいでしょう？

4. あるゼノンのパラドックスの特殊例をグラフで表すと以下のようになります。



では、

$$\frac{100}{2} + \frac{100}{4} + \frac{100}{8} + \frac{100}{16} + \dots$$

は何になるでしょう？

５． あるゲームのモンスター「でぶでぶ族」は身長と体重が比例しています。でぶ A の身長は１２０cmで、体重が１トンです。でぶ B の身長は２００cmで、体重が５トンです。もし、でぶ C の身長が１５０cmなら、でぶ C の体重は何でしょう？

６． あるゲームのモンスター「ながなが族」は「でぶでぶ族」と「身長と体重」との比例が同じです。なが A の身長は１０００cmで、体重が３トンです。もし、なが B の体重が１０トンなら、なが B の身長は何でしょう？

７．「ながなが族」と「でぶでぶ族」の「身長と体重」の比率は何でしょう？

８． 一次関数

$$y = -\frac{3}{4}x + 3$$

をグラフにすると、ある三角形が出来上がります。その三角形の面積は何でしょう？

９． 整数はすべて有理数かどうか調べてみよう！

１０． ０．３３３ $\ldots$ は $\frac{1}{3}$ という有理数と等しい事が有名に知られていますが、もしそうならば、

$$0.333\cdots + 0.333\cdots + 0.333\cdots = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

が成り立つはずです。実際計算をすると、ある奇妙なことがおこります。この現象について考えてみよう。

１１． $0x = 100$ の式に当てはまる数 x は何でしょう？

１２． $\frac{1}{0}$ という数は数直線上のどこに現れるだろう？$\frac{0}{0}$ はどこだろう？０で割るという事をどう解釈できるだろう？

１３． ある数 a を a で掛けたら $\frac{9}{4}$ になりました。a は有理数でしょうか？

１４． ある数 b を b で掛けたら 2 になりました。b は有理数でしょうか？

１５． ０．３３３ $\ldots$ は $\frac{1}{3}$ という有理数と等しい事が有名に知られています。なら、

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots}}$$

は有理数でしょうか？

１６． 有理数ではない数を発見してみよう！その数がなぜ有理数ではないか説明できるかな？

---

0. 去年僕が作ったウェブパズルがあるので、もしよかったらやってみてね！あと、他のウェブパズルとして、双曲番をお勧めします。

1. 学校で勉強している数学は、この「割り切れるもの」を対象にしていて「割り切れないもの」の勉強はほぼしないでしょう。でも実は名門学校や、ロシアと東ヨーロッパの数学サークルではこの「割り切れないもの」の数学を重要視しています。実用性があり、教育的にも価値が高いといわれています。正式には「割り切れないもの」の数学を**離散数学（りさんすうがく）**と言い、「割り切れるもの」の数学を**連続的数学（れんぞくてきすうがく）**と言います。離散数学では整数論、組み合わせ論、グラフ理論、ゲーム理論（ゲームの必勝法やプレイヤーの戦略などの勉強）、アルゴリズム論（最適化問題）、などが含まれます。連続的数学では色々な幾何学（図形や形の勉強）、微積分学、解析学などが王道です。もし興味があったら調べてみてね！

2. 計算の仕方を知っていても、なぜその数字になるのかが分かっていないと数学はこの後とても困難になります。だから、四則演算（特に掛け算と割り算）の色々な捉え方を身に着ける事が大事です。

3. 残念ながら、こういう「数学の基礎」は教科書や学校では全く教えてくれないのが現状です。他の人が自然と解釈をしていることを分からなかったり、先生が言っている事が分からないのも無理ありません。でも、「解釈の仕方」や「数学的直観」はいろんな面白い問題を解いていくうちに自然と身についていきます。実際、今このプリントを書いている際に自分が今までしてきた数学の経験のみで組み立てているので、あくまで僕の解釈が入ってます。

4. そうでない場合は中三になってから学びます。

5. 小数のいいところは数の「大きさ」が他の数に比べて直感的に分かることです。しかし、数学をしている場合、分数の方が扱いやすい場合が多いです。なぜかというと、もし、ただ数を「7で割りたい」場合、

$$\frac{1}{7} = 0.142857\dots$$

という小数が非常に扱いにくくなるからです。言い直せば、割る数によって、小数がえげつなくなることがあります。

6. 実は理科や他のあらゆる分野のほとんどはこの「実験」という基本的な方法で知識が生み出されています。もし興味があれば、「ソクラテス式問答法」と「科学的方法」を調べてみてね！